Методы оптимизации

Домашнее задание № 4

Матвей Морозов, 676 группа

Задача 1

Найти и изобразить на плоскости множество, сопряженное к многогранному конусу:

$$S = \mathbf{conv}\left\{(-4,-1),(-2,-1),(-2,1)\right\} + \mathbf{cone}\left\{(1,0),(2,1)\right\}$$

Решение:
1) По теореме из семинара:
Пусть $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}^n$
$S = \mathbf{conv}(x_1,\dots,x_k) + \mathbf{cone}(x_{k+1},\dots,x_m)$
Тогда сопряженным к многогранному множеству является множество:

$$S^* = \left\{p \in \mathbb{R}^n \mid \langle p, x_i\rangle \geq -1, i = \overline{1,k}; \langle p, x_i\rangle \geq 0, i = \overline{k+1,m}\right\}$$

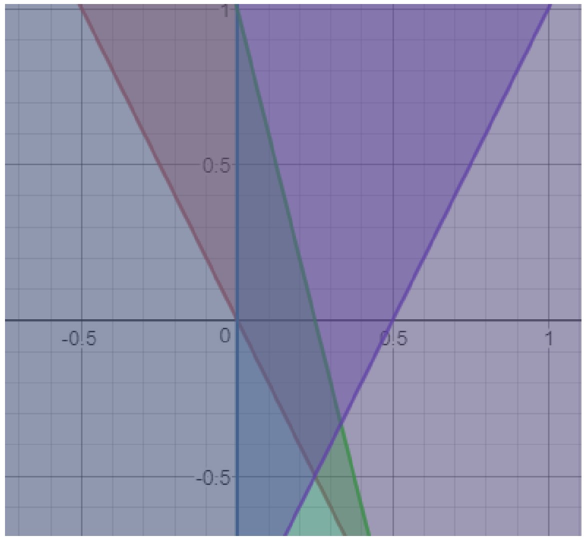
2) То есть сопряженным множеством является решение системы уравнений:

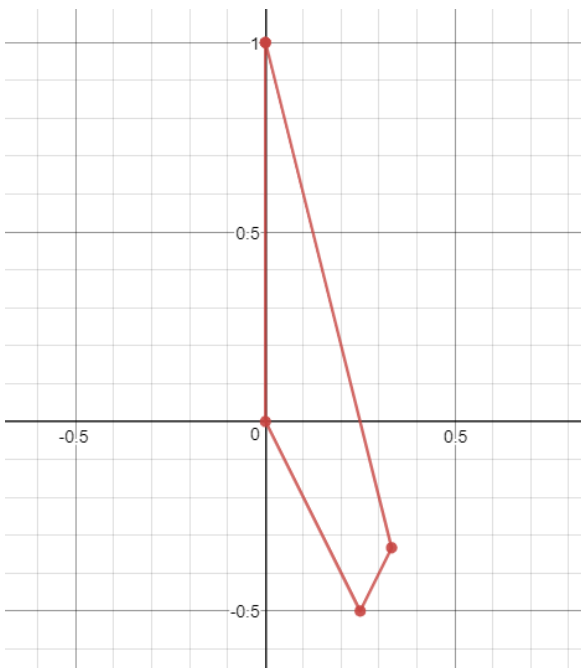
$$\begin{cases} -4x - y \geq -1 \\ -2x - y \geq -1 \\ -2x + y \geq -1 \\ \\ x \geq 0 \\ 2x + y \geq 0 \end{cases}$$

Решение этой системы:

$$\begin{cases} y \leq -4x + 1 \\ y \geq 2x - 1 \\ x \geq 0 \\ y \geq -2x \end{cases}$$

3)
То есть нужная нам область, это область, ограниченная этими линиями



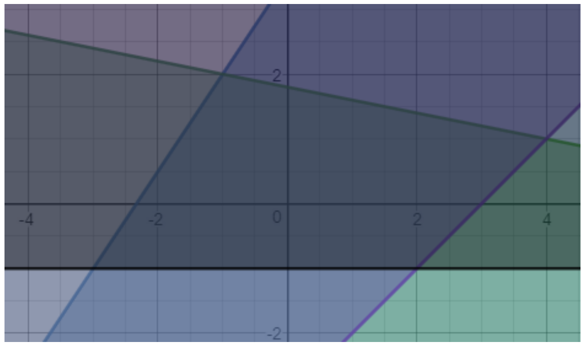


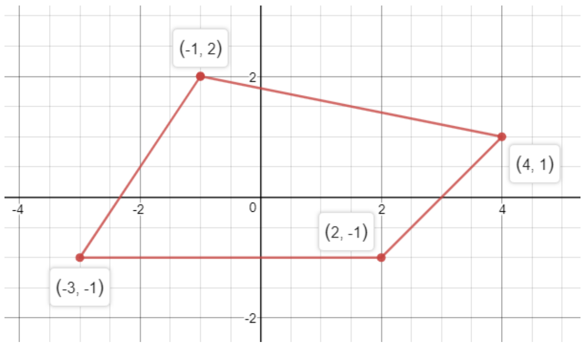
Задача 2

Найти и изобразить на плоскости множество, сопряженное к полиэдру:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid -3x_1 + 2x_2 \leq 7, x_1 + 5x_2 \leq 9, x_1 - x_2 \leq 3, -x_2 \leq 1\right\}$$

Решение:
1) Нарисуем множество S





Наше множество, это область, ограниченная этими прямыми.

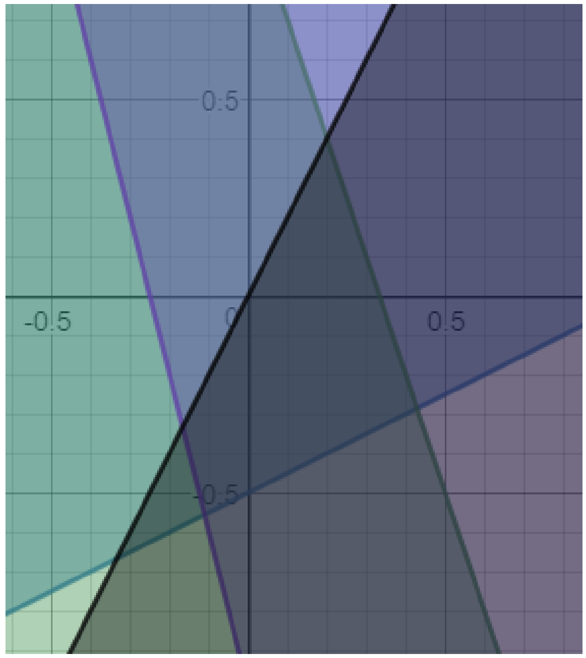
2) Заметим, что это множество

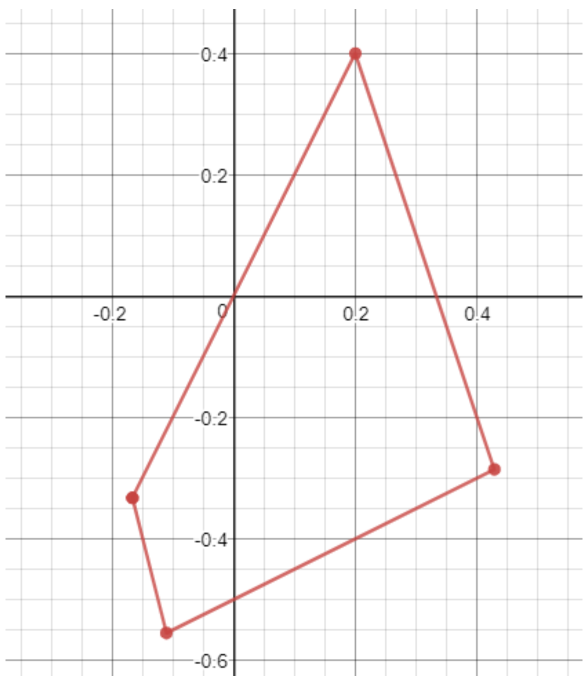
$$S = \mathbf{conv}((-1,-2),(-3,-1),(2,-1),(4,1))$$

То есть для него работает сформулированная теорема.

3) Получим систему неравенств:

$$\begin{cases} -x + 2y \geq -1 \\ -3x - y \geq -1 \\ -4x + y \geq -1 \\ 2x - y \geq 0 \end{cases}$$





Сопряженное множество, это область, ограниченная этими прямыми.

Задача 3

Доказать, что если понятие сопряженного множества к множеству S вводить как:

$$S^* = \{y \ \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x \rangle \leq 1 \ \ \forall x \in S\},$$

то единичный шар с центром в нуле - единственное самосопряженное множество в $\mathbb{R}^n$.

Решение:

1) Для начала покажем, что единичный шар с центром в точке ноль является самосопряженным множеством.

$B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}$

a) $B_1^*(0) \in B_1(0)$

$x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x_i \leq 1$

По определению сопряженного множества из этой задачи

$$S^* = \{y \ \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x \rangle \leq 1 \ \ \forall x \in S\},$$

То есть $y_1 x_1 + \cdots + y_n x_n \leq 1$

Значит, $-1 \leq y_1 + \cdots + y_n \leq 1$, причем $-1 \leq y_i \leq 1$

Эта область содержится в шаре $B_1(0)$

b) $B_1(0) \in B_1^*(0)$

$y_1^2 + \cdots + y_n^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq y_i \leq 1$

По определению сопряженного множества из этой задачи

$$S^* = \{y \ \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x \rangle \leq 1 \ \ \forall x \in S\},$$

То есть $y_1 x_1 + \cdots + y_n x_n \leq 1$

Значит, $-1 \leq x_1 + \cdots + x_n \leq 1$, причем $-1 \leq x_i \leq 1$

Эта область содержится в шаре $B_1^*(0)$

2) Допустим есть множество, которое отличается от $B_1(0)$ хотя бы на одну точку. То найдется хотя бы один x, такой что $x_1^2 + \cdots + x_n^2 > 1$.

Тогда для этой точки $< x, x >= x_1^2 + \cdots + x_n^2 > 1$, то есть она не принадлежит сопряженному множеству. Значит, такое множество уже не самосопряженное.

Задача 4

Найти множество, сопряженное к эллипсоиду:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} a_i^2 x_i^2 \leq \varepsilon^2 \right\}$$

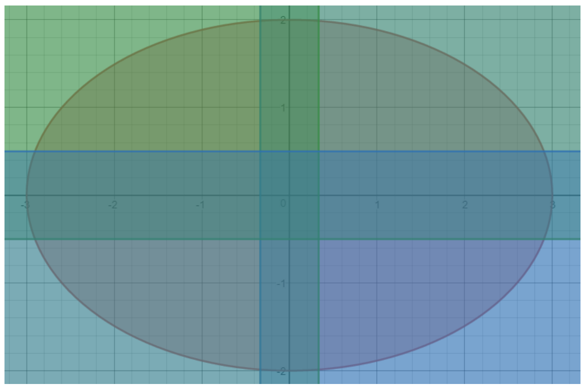
Решение:

Рассмотрим эллипс: $a^2x^2 + b^2y^2 \leq \epsilon^2$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} \leq \frac{\epsilon^2}{a^2b^2}$$

Полюса эллипса имеют координаты: $y = \pm\frac{\epsilon}{b}$; $x = \pm\frac{\epsilon}{a}$

Заметим, что сопряженные к точкам полюса, это полупространство под прямой $y = \frac{b}{\epsilon}$; над прямой $y = -\frac{b}{\epsilon}$, полупространство правее прямой $x = -\frac{a}{\epsilon}$ и полупространство левее прямой $x = \frac{a}{\epsilon}$.



Аналогично для каждой другой точки мы получим подпространство. В конце концов, сопряженное множество нашего эллипса - это пересечение сопряженных множеств каждой точки эллипса. Значит, в конце концов мы получим эллипс, который определяется условиями:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq \frac{1}{\epsilon^2}$$

Аналогично для n-мерного пространства $S^* = \sum_{k=0}^{n} = \frac{x_k^2}{a_i^2} \leq \frac{1}{\epsilon^2}$