Домашнее задание № 2.
Алгоритмы и модели вычислений

Матвей Морозов, 678 группа

25 февраля 2018 г.

Задача 2

A – мужик сказал, что выпала 6.
B – выпадает 6.

$\mathbb{P}(\mathbb{A}) = \frac{1}{6}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{6}$, $\mathbb{P}(A|B) = \frac{3}{4}$

По формуле Байеса: $\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(\mathbb{A})} \cdot \mathbb{P}(A|B) = \frac{3}{4}$

Задача 3

$\mathbb{E}[\max\{X_1, X_2\}] + \mathbb{E}[\min\{X_1, X_2\}] = \mathbb{E}[\max\{X_1, X_2\} + \min\{X_1, X_2\}] = \mathbb{E}[X_1 + X_2] = 2 \cdot \mathbb{E}[X_1] = 7$

$$\mathbb{E}[X_1] = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \tfrac{7}{2}$$

Задача 7

По определению события называются независимыми, если вероятность пересечения событий равна произведению вероятность каждого события.

Вероятность выпадания чётного числа: $\mathbb{P}\{2,4,6\} = \frac{1}{2}$
Вероятность выпадения кратного 3 чётного числа: $\mathbb{P}\{6\} = \frac{1}{6}$
Вероятность выпадания кратного 3 числа: $\mathbb{P}\{3,6\} = \frac{1}{3}$

$\mathbb{P}\{6\} = \mathbb{P}\{2,4,6\} \cdot \mathbb{P}\{3,6\}$

Значит, события независимы.

Задача 1

(i) Количество случаев, в которых число орлов 5 равно C_{10}^5. Всего возможных комбинаций 2^{10}.

Вероятность выпадения равного числа орлов и решек $C_{10}^5 \cdot 2^{-10}$

(ii) Вероятность того, что выпало не поровну $(1 - C_{10}^5 \cdot 2^{-10})$
Вероятность того, что выпало больше орлов, чем решек, $\frac{1}{2}$

Итого $\frac{1}{2}(1 - C_{10}^5 \cdot 2^{-10})$

(iii) Для первых 5 бросков количество комбинаций 2^5. Количество комбинаций для следующих 5 бросков тоже 2^5.

Нас же интересует только 1 из последних 2^5 вариантов.

Итого 2^{-5}

Задача 4

1) X – количество бросков до выпадания двух 6.
X_1 – количество бросков до выпадания одной 6.
X_2 – количество бросков после X_1 до выпадания двух 6.

Пусть $X_1 = k$.

$$\mathbb{P}[X_1] = \frac{1}{6} \cdot (\frac{5}{6})^{k-1} = \frac{5^{k-1}}{6^k}$$

$$\mathbb{E}[X_1] = \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{5^{k-1}}{6^k} = \sum_{k=1}^{\infty}(k+1)\frac{5^{k-1}}{6^k} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{5^{k-1}}{6^k} = \frac{6}{5}\sum_{k=1}^{\infty} k\frac{5^{k-1}}{6^k} - \frac{6}{5}$$

$$\mathbb{E}[X_1] = \frac{6}{5}\mathbb{E}[X_1] - \frac{6}{5}$$

$$\mathbb{E}[X_1] = 6$$

По формуле полного математического ожидания $\mathbb{E}[X_2] = \frac{1}{6}\mathbb{E}[X_2|\text{после } X_1 \text{ выпала } 6] + \frac{5}{6}\mathbb{E}[X_2|\text{после } X_1 \text{ не выпала } 6] = \frac{1}{6} + \frac{5}{6}(1 + \mathbb{E}[X]) = 1 + \frac{5}{6}\mathbb{E}[X]$

$$\mathbb{E}[X] = 7 + \frac{5}{6}\mathbb{E}[X]$$

$$\mathbb{E}[X] = 42$$

2)

РОР:

X_1 – количество бросков до выпадения первой решки.
X_2 – количество бросков после X_1 до выпадения орла.
X_3 – количество бросков после X_2 до выпадения решки.

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] + \mathbb{E}[X_3]$$

$$\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[X_2] = 2$$

По формуле полного математического ожидания $\mathbb{E}[X_3] = \frac{1}{2}\mathbb{E}[X_3|\text{после } X_2 \text{ выпал орёл}] + \frac{1}{2}\mathbb{E}[X_3|\text{после } X_2 \text{ выпала решка }] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 + \mathbb{E}[X]) = 1 + \frac{1}{2}\mathbb{E}[X]$

$$\mathbb{E}[X] = 5 + \frac{1}{2}\mathbb{E}[X]$$

$$\mathbb{E}[X] = 10$$

РРО:

X_1 – количество бросков до выпадения первой решки.
X_2 – количество бросков после первой решки до выпадения второй решки.
X_3 – количество бросков после X_2 до выпадения орла.

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] + \mathbb{E}[X_3]$$

$$\mathbb{E}[X_1] = 2$$

$$\mathbb{E}[X_2] = 4$$

По формуле полного математического ожидания $\mathbb{E}[X_3] = \frac{1}{2}\mathbb{E}[X_3|\text{после } X_2 \text{ выпал орёл}] + \frac{1}{2}\mathbb{E}[X_3|\text{после } X_2 \text{ выпала решка }] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 + \mathbb{E}[X_3]) = 1 + \frac{1}{2}\mathbb{E}[X_3]$

$$\mathbb{E}[X_3] = 2$$

$$\mathbb{E}[X] = 2 + 4 + 2 = 8$$

Значит, раньше встретится РРО.

Задача 6

Человек должен взять n спичек из одной коробки и $n-k$ спичек из другой. Это можно сделать C_{2n-k}^{k} вариантами.

Всего вариантов выбора $2n-k$ спичек 2^{2n-k}.
Итого: $\frac{C_{2n-k}^{k}}{2^{2n-k}}$