Домашнее задание № 1.
Алгоритмы и модели вычислений

Матвей Морозов, 678 группа

20 февраля 2018 г.

Доп. задача №1
Пусть $\|x\|_*$ и $\|x\|$ – 2 произвольные нормы в R^n. Верно ли, что $\|x\|_* = \Theta(\|x\|)$ при $x \to x_0 \in R^n$?

Решение:

Наш лектор по математическому анализу Максим Викторович Балашов доказывал этот факт но своих лекциях в первом семестре.

Методичка М.В. Балашова за 1*-ый семестр* ; Эквивалентность норм в R^n; стр. 28

Задача №8
Найдите Θ-асимптотику последовательности $T(n) = T(\lceil\sqrt{n}\rceil) + \Theta(\log^2 n)$

Решение:

$$T(n) = T(\lceil\sqrt{n}\rceil) + \Theta(log^2 n)$$

1. Сделаем замену переменных $n = 2^k$. Получим:

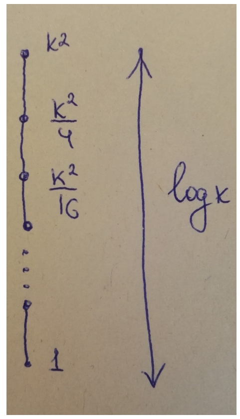
$$T(2^k) = T(\lceil 2^k \rceil) + \Theta(log^2 2^k)$$

$$G(k) = G(\frac{k}{2}) + \Theta(log^2 2^k)$$

$$G(k) = G(\frac{k}{2}) + \Theta(k^2)$$

2. Построим дерево рекурсии
   Глубину дерева m можно оценить по формуле:

$$\frac{k}{2^m} = 1 \Rightarrow m = log_2 k$$



3.

$$k^2 \cdot \sum_{i=0}^{\log_2 k} \frac{1}{4^i} = \Theta(1) \cdot k^2 = \Theta(k^2)$$

4. Получим итоговый ответ:

$$T(n) = G(k) = \Theta(k^2) = \Theta(log^2 n)$$

Задача №4
Решение:

а) Найдём в виде функции от n Θ-асимптотику $g(n)$.

1. Составим для $g(n)$ реккурентное уравнение:

$$g(n) = g(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + g(\lfloor \frac{n}{4} \rfloor) + 3$$

2. При помощи теоремы Akra-Bazzi найдём Θ-асимтотику $g(n)$.

$$(\frac{1}{2})^p + (\frac{1}{4})^p = 1$$

Пусть $v = (\frac{1}{2})^p$

$$v^2 + v - 1 = 0$$

$D = 5 \Rightarrow v = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} > 0$ т.к. ищём корни больше нуля.
Получим $p = -log_2(\frac{-1+\sqrt{5}}{2})$

3.

$$g(n) = \Theta((n^{-log_2(\frac{-1+\sqrt{5}}{2})}) \cdot (1 + \int_1^n \frac{3}{u^{p+1}} du)) =$$

$$= \Theta((n^{-log_2(\frac{-1+\sqrt{5}}{2})}) \cdot (1 + \frac{3}{log_2(\frac{-1+\sqrt{5}}{2})} \cdot (\frac{1}{n} - 1))) =$$

$$= \Theta(n^{-log_2(\frac{-1+\sqrt{5}}{2})})$$

b)

1. Будем считать, что $g(0) = g(1) = 0$. Пусть $b_k = g(2^k)$. Тогда получим систему уравнений:

$$\begin{cases} b_k = b_{k-1} + b_{k-2} + 3 \\ b_1 = 3 \\ b_0 = 0 \end{cases}$$

2. Пусть $B(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$

$$B(z) = \frac{3}{1-z} + zB(z) + z^2 B(z)$$

$$B(z) = \frac{3}{(1-z)(1-z-z^2)} =$$

$$= 3 \cdot (\sum_{i=0}^{\infty} z^i)(\sum_{j=0}^{\infty} F_j z^j) = 3 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (F_k + \cdots + F_0) z^k$$

где F_k – k-ое число Фибоначчи

3. Докажем по индукции, что $F_k + \cdots + F_0 = F_{k+2} - 1$

   - База индукции
     $F_0 = 0; F_1 = 1$
     $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

     $F_2 = 1; F_3 = 2 \Rightarrow F_2 + F_1 + F_0 = F_3$ база индукции верна
   - Индукционный переход

     Пусть верно для k. Докажем для $k+1$.
     $F_{k+1} + \cdots + F_0 = F_{k+1} + F_k + \cdots + F_0 = F_{k+1} + F_{k+2} - 1 = F_{k+3} - 1$
     $\square$

4. Получим итоговый ответ $b_k = 3 \cdot (F_{k+2} - 1)$

Задача №5

Оцените трудоёмкость рекурсивного алгоритма, разбивающего исходную задачу n на три задачи размеров $\lceil \frac{n}{\sqrt{3}} \rceil - 5$, используя для этого $10 \frac{n^3}{\log n}$ операций.

Решение:

1. Запишем рекурсивную формулу из условия задачи

$$T(n) = 3T(\lceil \frac{n}{\sqrt{3}} \rceil - 5) + 10\frac{n^3}{\log n}$$

2. Найдём оценку снизу

$$T(n) = 3T(\lceil \frac{n}{\sqrt{3}} \rceil - 5) + 10\frac{n^3}{\log n} > 10\frac{n^3}{\log n}$$

$$T(n) > 10\frac{n^3}{\log n}$$

3. Найдём оценку сверху

$$T(n) = 3T(\lceil \frac{n}{\sqrt{3}} \rceil - 5) + 10\frac{n^3}{\log n} < 3T(\lceil \frac{n}{\sqrt{3}} \rceil) + 10\frac{n^3}{\log n}$$

   Так как убирая вычитаемую константу, мы увеличиваем глубину дерева вывода и значения $10\frac{n^3}{\log n}$ в узлах дерева.

   Найдём оценку сверху, используя Master Theorem.

$$\begin{cases} a = 3; \\ b = \sqrt{3} \\ f(n) = 10\frac{n^3}{\log n} \end{cases}$$

   $f(n) = 10\frac{n^3}{\log n} = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon}) = \Omega(n^{2+\varepsilon}) = \Omega(n^{2,1})$

$$3 \cdot 10 \cdot \frac{(\frac{n}{\sqrt{3}})^3}{\log(\frac{n}{\sqrt{3}})} < 0,9 \cdot 10 \cdot \frac{n^3}{\log n}$$

4. Получим итоговый ответ:

$$T(n) = \Theta(\frac{n^3}{\log n})$$

Задача №6

Рассмотрим детерминированный алгоритм поиска порядковой статистики за линейное время из параграфа 9.3 Кормена. Какая асимптотика будет у алгоритма, если:

- Делить элементы массива на группы по три, а не по пять?

  Решение:

Задача №3

Решение:

1. Не является оптимальным
   Рассмотрим события $(0, 3), (2, 4), (3, 6), (6, 9)$
   Алгоритм выберет $(2, 4)$, исключит $(2, 4), (3, 6)$, затем выберет последний интервал $(6, 9)$.
   Но можно выбрать три интервала $(0, 3), (3, 6), (6, 9)$

2. Не является оптимальным
   Рассмотрим события $(0, 8), (1, 3), (3, 5), (5, 7)$
   Алгоритм выберет событие $(0, 8)$, хотя можно выбрать три события $(1, 3), (3, 5), (5, 7)$.

3. Является оптимальным
   Докажем от противного.
   Пусть $\{a_1, \ldots, a_k\}$ – множество интервалов, выданное алгоритмом.
   Пусть максимальное возможное число непересекающихся событий n, и этому числу соответствует выборка событий $\{b_1, \ldots, b_n\}$

   b_1 заканчивается не раньше a_1, потому что a_1 заканчивается раньше всех. b_2 начинается не раньше конца a_1, и заканчивается не раньше a_2, потому что a_2 заканчивается раньше всех после a_1.

   Аналогично b_i начинается не раньше, чем заканчивается a_{i-1}, и заканчивается не раньше a_i.

   Тогда для $k > n$ b_{k+1} начинается после конца $a_k \Rightarrow$ алгоритм мог выбрать ещё хотя бы $n - k$ событий.

Задача №7

Функция натурального аргумента $S(n)$ задана рекурсией:

$$S(n) = \begin{cases} 100, n \leq 100 \\ S(n-1) + S(n-3), n > 100 \end{cases}$$

Оцените число рекурсивных вызовов процедуры $S(\cdot)$ при вычислении $S(10^{12})$ без запоминания, так как будто вы писали и вызвали рекурсивную функции в $C++$.

Решение:

1. Запишем функцию, вычисляющую число рекурсивных вызовова процедуры.

$$T(n) = \begin{cases} 1, n \leq 100 \\ T(n-1) + T(n-3), n > 100 \end{cases}$$

   Наша задача вычислить $T(10^{12})$.

2. Имеем рекурентное уравнение $T_{n+3} - T_{n+2} - T_{n+1} = 1$

   Решим характеристическое уравнение $\lambda^3 - \lambda^2 - 1 = 0$ *решение*

   Получили корни:

$$\begin{cases} x = 1,4656 \\ x = -0,233 + 0,793i \\ x = -0,233 - 0,793i \end{cases}$$

3. $T_k = A \cdot 1,4656^k + B \cdot (\exp(-0,233 + 0,793i)) + C \cdot \exp(-0,233 - 0,793i)$, где A, B, C – некоторые константы.

4. $0,233^2 + 0,793^2 < 1 \Rightarrow$ при огромных k экпоненты стремятся к нулю.
   Получили оценку $T_k = A \cdot 1,4656^k$

5. $T_k = -1$ – частное решение.

$$\begin{cases} T_k = -1 + A \cdot 1,4656^k \\ T_{100} = 1 \end{cases}$$

   $1 = -1 + A \cdot 1,4656^{100} \Rightarrow A = 2 \cdot 1,456^{-100}$

6. Получим ответ:

$$T_n = -1 + 2 \cdot 1,456^{n-100} \approx 2 \cdot 1,456^{10^{12}-100}$$