

# Прикладной статистический анализ данных

## Регрессионный анализ

Олег Бахтеев  
psad-2020@phystech.edu

2020

# Постановка задачи линейной регрессии

$1, \dots, n$  — объекты;

$x_1, \dots, x_k, y$  — признаки, значения которых измеряются на объектах;

$x_1, \dots, x_k$  — объясняющие переменные (предикторы, регрессоры, факторы, признаки);

$y$  — зависимая переменная, отклик.

Хотим найти такую функцию  $f$ , что  $y \approx f(x_1, \dots, x_k)$ ;

$$\operatorname{argmin}_f \mathbb{E} (y - f(x_1, \dots, x_k))^2 = \mathbb{E} (y | x_1, \dots, x_k).$$

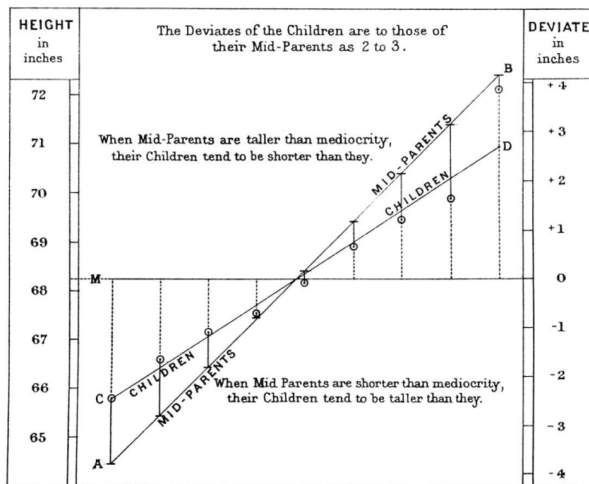
$\mathbb{E} (y | x_1, \dots, x_k) = f(x_1, \dots, x_k)$  — модель регрессии;

$\mathbb{E} (y | x_1, \dots, x_k) = \beta_0 + \sum_{j=1}^k \beta_j x_j$  — модель линейной регрессии.

Здесь и далее  $n > k$  ( $n \gg k$ ).

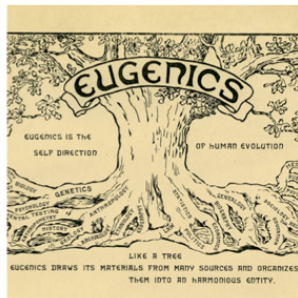
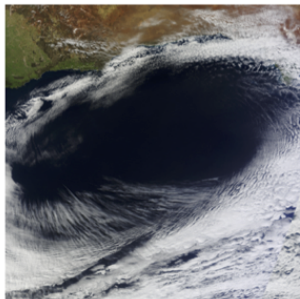
# Первое появление

Впервые такая постановка появляется в работе Гальтона 1885 г. «Регрессия к середине в наследственности роста».



$$y - \bar{y} \approx \frac{2}{3} (x - \bar{x}).$$

# Другие работы Гальтона



# Метод наименьших квадратов (МНК)

Матричные обозначения:

$$X = \begin{pmatrix} x_{10} = 1 & x_{11} & \dots & x_{1k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n0} = 1 & x_{n1} & \dots & x_{nk} \end{pmatrix}; \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}; \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix}.$$

Метод наименьших квадратов:

$$\sum_{i=1}^n \left( y_i - \sum_{j=0}^k \beta_j x_{ij} \right)^2 \rightarrow \min_{\beta};$$

$$\|y - X\beta\|_2^2 \rightarrow \min_{\beta};$$

$$2X^T(y - X\beta) = 0,$$

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T y,$$

$$\hat{y} = X (X^T X)^{-1} X^T y.$$

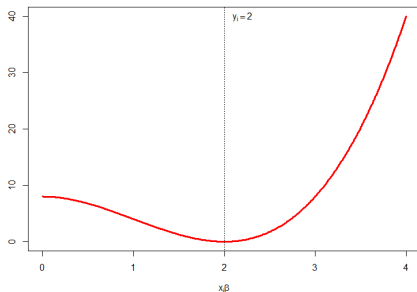
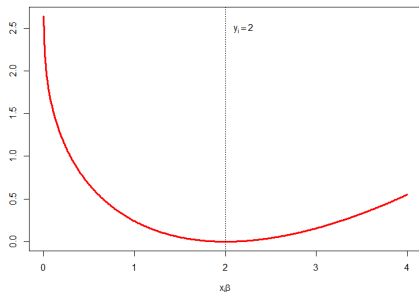
# Метод наименьших квадратов (МНК)

МНК в линейной регрессии даёт выборочную оценку линейной аппроксимации условного матожидания  $\mathbb{E}(y|x)$

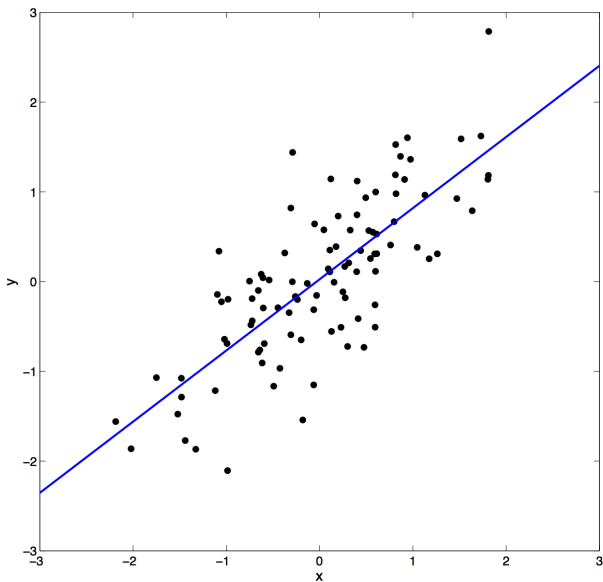
Кроме  $\|\cdot\|_2^2$  это делает любая дивергенция Брегмана:

$$D(y, X\beta) = \sum_{i=1}^n (\phi(y_i) - \phi(x_i\beta) - \phi'(x_i\beta)(y_i - x_i\beta)),$$

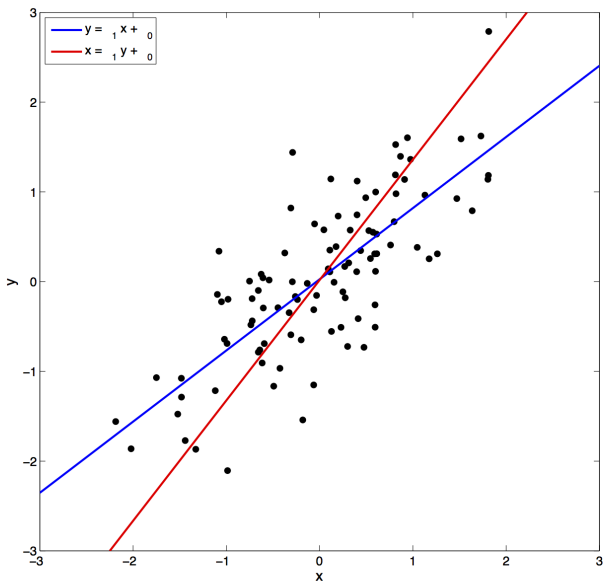
где  $\phi$  — произвольная непрерывно дифференцируемая выпуклая функция.



# Инверсия задачи регрессии

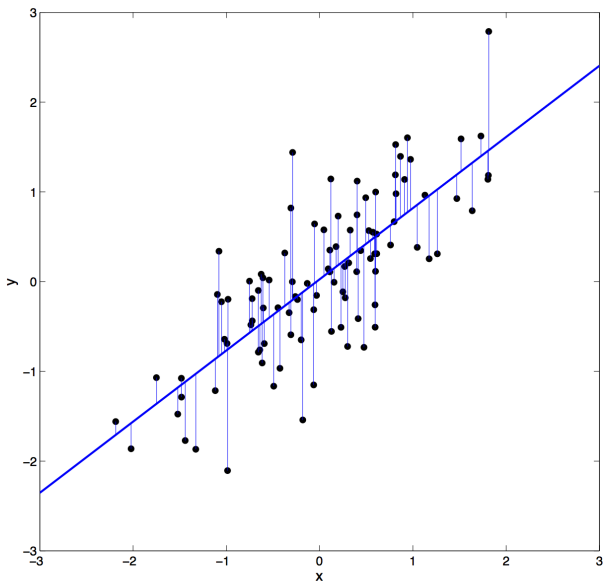


# Инверсия задачи регрессии

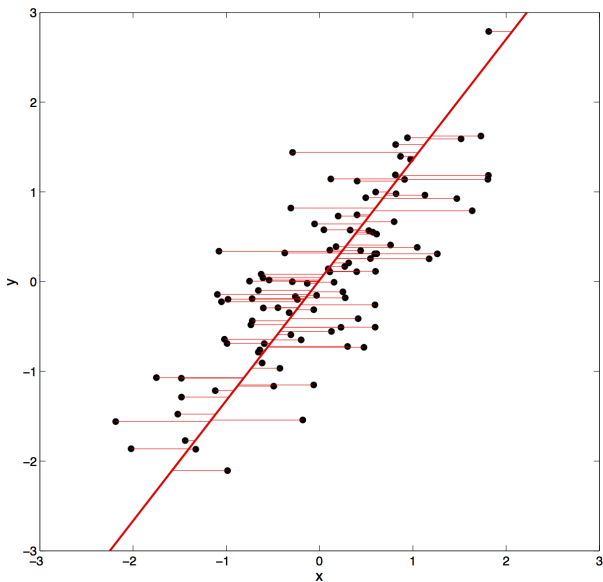




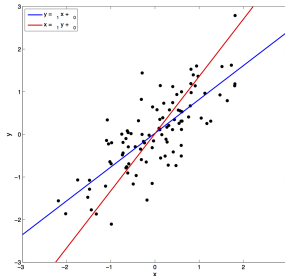
# Инверсия задачи регрессии



# Инверсия задачи регрессии



# Инверсия задачи регрессии



- Две прямые пересекаются в точке  $(\bar{x}, \bar{y})$ .
- Выборочный коэффициент корреляции между  $x$  и  $y$  — среднее геометрическое  $\hat{\theta}_1$  и  $\hat{\phi}_1$ :

$$\hat{\theta}_1 = \frac{n \sum xy - \sum x \sum y}{n \sum x^2 - (\sum x)^2}, \quad \hat{\phi}_1 = \frac{n \sum xy - \sum x \sum y}{n \sum y^2 - (\sum y)^2},$$

$$\hat{r}_{xy} = \frac{n \sum xy - \sum x \sum y}{\sqrt{(n \sum x^2 - (\sum x)^2) (n \sum y^2 - (\sum y)^2)}}.$$

## Goodness-of-fit

$$TSS = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \quad (\text{Total Sum of Squares});$$

$$ESS = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 \quad (\text{Explained Sum of Squares});$$

$$RSS = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 \quad (\text{Residual Sum of Squares});$$

$$TSS = ESS + RSS.$$

Коэффициент детерминации:

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = 1 - \frac{RSS}{TSS}.$$

$R^2 = r_{y\hat{y}}^2$  — квадрат коэффициента множественной корреляции  $y$  с  $X$ .

## Приведённый коэффициент детерминации

Стандартный коэффициент детерминации всегда увеличивается при добавлении регрессоров в модель, поэтому для отбора признаков его использовать нельзя.

Для сравнения моделей, содержащих разное число признаков, можно использовать приведённый коэффициент детерминации:

$$R_a^2 = \frac{ESS/(n - k - 1)}{TSS/(n - 1)} = 1 - (1 - R^2) \frac{n - 1}{n - k - 1}.$$

# Предположения модели

- ① Линейность отклика:  $y = X\beta + \varepsilon$ .
- ② Случайность выборки: наблюдения  $(x_i, y_i), i = 1, \dots, n$  независимы.
- ③ Полнота ранга: ни один из признаков не является константой или линейной комбинацией других признаков ни в популяции, ни в выборке ( $\text{rank } X = k + 1$ ).
- ④ Случайность ошибок:  $\mathbb{E}(\varepsilon | X) = 0$ .

В предположениях (1-4) МНК-оценки коэффициентов  $\beta$  являются несмещёнными:

$$\mathbb{E}\hat{\beta}_j = \beta_j, \quad j = 0, \dots, k,$$

и состоятельными:

$$\forall \gamma > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(|\beta_j - \hat{\beta}_j| < \gamma\right) = 1, \quad j = 0, \dots, k.$$

# Предположения модели

- ① Линейность отклика:  $y = X\beta + \varepsilon$ .
- ② Случайность выборки: наблюдения  $(x_i, y_i), i = 1, \dots, n$  независимы.
- ③ Полнота ранга: ни один из признаков не является константой или линейной комбинацией других признаков ни в популяции, ни в выборке ( $\text{rank } X = k + 1$ ).
- ④ Случайность ошибок:  $\mathbb{E}(\varepsilon | X) = 0$ .
- ⑤ Гомоскедастичность ошибок: дисперсия ошибки не зависит от значений признаков:  $\mathbb{D}(\varepsilon | X) = \sigma^2$ .

(предположения Гаусса-Маркова).

Теорема Гаусса-Маркова: в предположениях (1-5) МНК-оценки имеют наименьшую дисперсию в классе оценок  $\beta$ , линейных по  $y$ .

# Неправильное определение модели

**Недоопределение:** если зависимая переменная определяется моделью

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_{j-1} x_{j-1} + \beta_j x_j + \beta_{j+1} x_{j+1} + \cdots + \beta_k x_k + \varepsilon,$$

а вместо этого используется модель

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_{j-1} x_{j-1} + \beta_{j+1} x_{j+1} + \cdots + \beta_k x_k + \varepsilon,$$

то МНК-оценки  $\hat{\beta}_0, \dots, \hat{\beta}_{j-1}, \hat{\beta}_{j+1}, \dots, \hat{\beta}_k$  являются смещёнными и несостоятельными оценками  $\beta_0, \dots, \beta_{j-1}, \beta_{j+1}, \dots, \beta_k$ .

**Переопределение:** если признак  $x_j$  не влияет на  $y$ , т. е.  $\beta_j = 0$ , то МНК-оценка  $\hat{\beta}$  остаётся несмещённой состоятельной оценкой  $\beta$ , но дисперсия её возрастает.



## Дисперсия $\hat{\beta}_j$

В предположениях (1-5) дисперсии МНК-оценок коэффициентов  $\beta$  задаются следующим образом:

$$\mathbb{D}(\hat{\beta}_j | X) = \frac{\sigma^2}{TSS_j (1 - R_j^2)},$$

где  $TSS_j = \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j)^2$ ,  $R_j^2$  — коэффициент детерминации при регрессии  $x_j$  на все остальные признаки из  $X$ .

- Чем больше дисперсия ошибки  $\sigma^2$ , тем больше дисперсия оценки  $\hat{\beta}_j$ .
- Чем больше вариация значений признака  $x_j$  в выборке, тем меньше дисперсия оценки  $\hat{\beta}_j$ .
- Чем лучше признак  $x_j$  объясняется линейной комбинацией оставшихся признаков, тем больше дисперсия оценки  $\hat{\beta}_j$ .

## Дисперсия $\hat{\beta}_j$

$R_j^2 < 1$  по предположению (3); тем не менее, может быть  $R_j^2 \approx 1$ .

В матричном виде:

$$\mathbb{D}(\hat{\beta} | X) = \sigma^2 (X^T X)^{-1}.$$

Если столбцы  $X$  почти линейно зависимы, то матрица  $X^T X$  плохо обусловлена, и дисперсия оценок  $\hat{\beta}_j$  велика.

Близкая к линейной зависимость между двумя или более признаками  $x_j$  называется **мультиколлинеарностью**.

Проблема мультиколлинеарности решается с помощью отбора признаков или использования регуляризаторов.

# Бинарные признаки

Если  $x_j$  принимает только два значения, то они кодируются нулём и единицей. Например, если  $x_j$  — пол испытуемого, то можно задать  $x_j = [\text{пол} = \text{мужской}]$ .

Механизм построения регрессии не меняется.

## Категориальные признаки

Как кодировать дискретные признаки  $x_j$ , принимающие более двух значений?

Пусть  $y$  — средний уровень заработной платы,  $x$  — тип должности (рабочий / инженер / управляющий). Допустим, мы закодировали эти должности следующим образом:

Тип должности	$x$
рабочий	1
инженер	2
управляющий	3

и построили регрессию  $y = \beta_0 + \beta_1 x$ . Тогда для рабочего, инженера и управляющего ожидаемые средние уровни заработной платы определяются следующим образом:

$$y_{bc} = \beta_0 + \beta_1,$$

$$y_{pr} = \beta_0 + 2\beta_1,$$

$$y_{wc} = \beta_0 + 3\beta_1.$$

Согласно построенной модели, разница в средних уровнях заработной платы рабочего и инженера в точности равна разнице между зарплатами инженера и управляющего.

## Фиктивные переменные

Верный способ использования категориальных признаков в регрессии — введение бинарных фиктивных переменных (dummy variables).

Пусть признак  $x_j$  принимает  $m$  различных значений, тогда для его кодирования необходима  $m - 1$  фиктивная переменная.

Способы кодирования:

	Dummy		Deviation	
Тип должности	$x_1$	$x_2$	$x_1$	$x_2$
рабочий	0	0	1	0
инженер	1	0	0	1
управляющий	0	1	-1	-1

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$$

- При dummy-кодировании коэффициенты  $\beta_1, \beta_2$  оценивают среднюю разницу в уровнях зарплат инженера и управляющего с рабочим.
- При deviation-кодировании коэффициенты  $\beta_1, \beta_2$  оценивают среднюю разницу в уровнях зарплат рабочего и инженера со средним по всем должностям.

# Вопросы

- ① Как найти доверительные интервалы для  $\beta_j$  и проверить гипотезу  $H_0: \beta_j = 0$ ?
- ② Как найти доверительный интервал для значений отклика на новом объекте  $y(x_0)$ ?
- ③ Как проверить адекватность построенной модели?

## Предположение о нормальности ошибок

⑥ Нормальность ошибок:  $\varepsilon | X \sim N(0, \sigma^2)$ .

Эквивалентная запись:  $y | X \sim N(X\beta, \sigma^2)$ .

- В предположениях (1-6) МНК-оценки совпадают с оценками максимального правдоподобия.

ММП:

$$p(\varepsilon_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\varepsilon_i^2},$$

$$\ln \prod_{i=1}^n p(\varepsilon_i) \rightarrow \max_{\beta},$$

$$\sum_{i=1}^n \left( -\frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma) - \frac{1}{2\sigma^2} \varepsilon_i^2 \right) \rightarrow \max_{\beta},$$

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n \left( y_i - \sum_{j=0}^k \beta_j x_{ij} \right)^2 \rightarrow \min_{\beta}.$$

## Предположение о нормальности ошибок

- МНК-оценки  $\hat{\beta}$  имеют наименьшую дисперсию среди всех несмещённых оценок  $\beta$ .
- МНК-оценки  $\hat{\beta}$  имеют нормальное распределение  $N\left(\beta, \sigma^2 (X^T X)^{-1}\right)$ .
- Несмещённой оценкой  $\sigma^2$  является

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n - k - 1} RSS;$$

кроме того,  $\frac{1}{\sigma^2} RSS \sim \chi_{n-k-1}^2$ .

- $\forall c \in \mathbb{R}^{k+1}$

$$\frac{c^T (\beta - \hat{\beta})}{\hat{\sigma} \sqrt{c^T (X^T X)^{-1} c}} \sim St(n - k - 1).$$



## Доверительные и предсказательные интервалы

$100(1 - \alpha)\%$  доверительный интервал для  $\sigma$ :

$$\sqrt{\frac{RSS}{\chi_{n-k-1, 1-\alpha/2}^2}} \leq \sigma \leq \sqrt{\frac{RSS}{\chi_{n-k-1, \alpha/2}^2}}.$$

Возьмём  $c = \begin{pmatrix} 0 \dots 0 \underset{j}{1} 0 \dots 0 \end{pmatrix}$ ;  $100(1 - \alpha)\%$  доверительный интервал для  $\beta_j$ :

$$\hat{\beta}_j \pm t_{n-k-1, 1-\alpha/2} \hat{\sigma} \sqrt{(X^T X)_{jj}^{-1}}.$$

Для нового объекта  $x_0$  возьмём  $c = x_0$ ;  $100(1 - \alpha)\%$  доверительный интервал для  $\mathbb{E}(y | x = x_0) = x_0^T \beta$ :

$$x_0^T \hat{\beta} \pm t_{n-k-1, 1-\alpha/2} \hat{\sigma} \sqrt{x_0^T (X^T X)^{-1} x_0}.$$

Чтобы построить предсказательный интервал для  $y(x_0) = x_0^T \beta + \varepsilon(x_0)$ , учтём ещё дисперсию ошибки:

$$x_0^T \hat{\beta} \pm t_{n-k-1, 1-\alpha/2} \hat{\sigma} \sqrt{1 + x_0^T (X^T X)^{-1} x_0}.$$

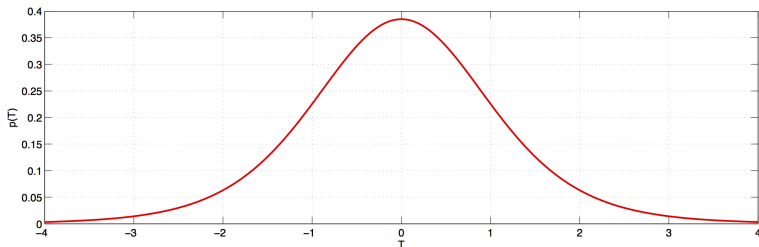
# t-критерий Стьюдента

нулевая гипотеза:  $H_0: \beta_j = 0$

альтернатива:  $H_1: \beta_j \neq 0$

статистика: 
$$T = \frac{\hat{\beta}_j}{\sqrt{\frac{RSS}{n-k-1} (X^T X)^{-1}_{jj}}}$$

нулевое распределение:  $St(n - k - 1)$



## t-критерий Стьюдента

**Пример:** имеется 12 испытуемых,  $x$  — результат прохождения испытуемым составного теста скорости реакции,  $y$  — результат его теста на симулятора транспортного средства. Проведение составного теста значительно проще и требует меньших затрат, поэтому ставится задача предсказания  $y$  по  $x$ , для чего строится линейная регрессия согласно модели

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon.$$

Значима ли переменная  $x$  для предсказания  $y$ ?

$$H_0: \beta_1 = 0.$$

$$H_1: \beta_1 \neq 0 \Rightarrow p = 2.2021 \times 10^{-5}.$$

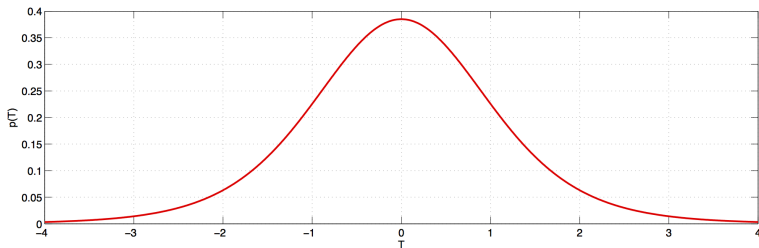
# t-критерий Стьюдента

нулевая гипотеза:  $H_0: \beta_j = a$

альтернатива:  $H_1: \beta_j < \neq > a$

статистика: 
$$T = \frac{\hat{\beta}_j - a}{\sqrt{\frac{RSS}{n-k-1} (X^T X)^{-1}_{jj}}}$$

нулевое распределение:  $St(n - k - 1)$



## t-критерий Стьюдента

**Пример:** по выборке из 506 жилых районов, расположенных в пригородах Бостона, строится модель средней цены на жильё следующего вида:

$$\ln price = \beta_0 + \beta_1 \ln nox + \beta_2 \ln dist + \beta_3 rooms + \beta_4 stratio + \varepsilon,$$

где  $nox$  — содержание в воздухе двуокиси азота,  $dis$  — взвешенное среднее расстояние от жилого района до пяти основных мест трудоустройства,  $rooms$  — среднее число комнат в доме жилого района,  $stratio$  — среднее отношения числа студентов к числу учителей в школах района.

Коэффициент  $\beta_1$  имеет смысл эластичности цены по признаку  $nox$ .

По экономическим соображениям интерес представляет гипотеза о том, что эластичность равна  $-1$ .

$$H_0: \beta_1 = -1.$$

$$H_1: \beta_1 \neq -1 \Rightarrow p = 0.6945.$$

# Критерий Фишера

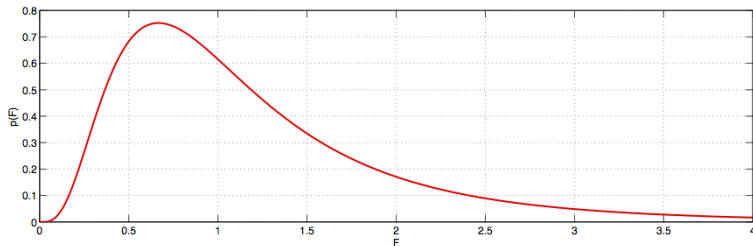
$$X_{n \times (k+1)} = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ n \times (k+1-k_1) & n \times k_1 \end{pmatrix}; \quad \beta^T_{(k+1) \times 1} = \begin{pmatrix} \beta_1^T & \beta_2^T \\ (k+1-k_1) \times 1 & k_1 \times 1 \end{pmatrix}^T;$$

нулевая гипотеза:  $H_0: \beta_2 = 0$

альтернатива:  $H_1: H_0$  неверна

статистика:  $RSS_r = \|y - X_1\beta_1\|_2^2$ ,  $RSS_{ur} = \|y - X\beta\|_2^2$ ,  
 $F = \frac{(RSS_r - RSS_{ur})/k_1}{RSS_{ur}/(n-k-1)}$

нулевое распределение:  $F(k_1, n - k - 1)$



# Критерий Фишера

**Пример:** для веса ребёнка при рождении имеется следующая модель:

$$weight = \beta_0 + \beta_1cigs + \beta_2parity + \beta_3inc + \beta_4med + \beta_5fed + \varepsilon,$$

где *cigs* — среднее число сигарет, выкуривавшихся матерью за один день беременности, *parity* — номер ребёнка у матери, *inc* — среднемесячный доход семьи, *med* — длительность в годах получения образования матерью, *fed* — отцом. Данные имеются для 1191 детей.

Зависит ли вес ребёнка при рождении от уровня образования родителей?

$$H_0: \beta_4 = \beta_5 = 0.$$

$$H_1: H_0 \text{ неверна} \Rightarrow p = 0.2421.$$

## Связь между критериями Фишера и Стьюдента

Если  $k_1 = 1$ , критерий Фишера эквивалентен критерию Стьюдента для двусторонней альтернативы.

Иногда критерий Фишера отвергает гипотезу о незначимости признаков  $X_2$ , а критерий Стьюдента не признаёт значимым ни один из них. Возможные объяснения:

- отдельные признаки из  $X_2$  недостаточно хорошо объясняют  $y$ , но совокупный эффект значим;
- признаки в  $X_2$  мультиколлинеарны.

Иногда критерия Фишера не отвергает гипотезу о незначимости признаков  $X_2$ , а критерий Стьюдента признаёт значимыми некоторые из них. Возможные объяснения:

- незначимые признаки в  $X_2$  маскируют влияние значимых;
- значимость отдельных признаков в  $X_2$  — результат множественной проверки гипотез.



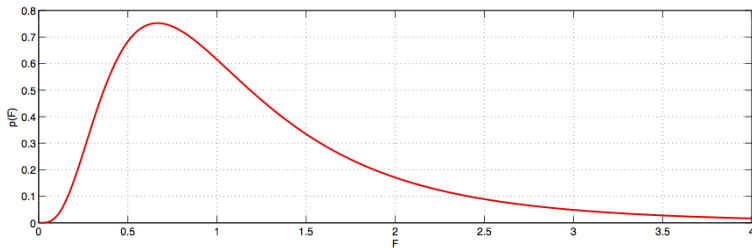
# Критерий Фишера

нулевая гипотеза:  $H_0: \beta_1 = \dots = \beta_k = 0$

альтернатива:  $H_1: H_0$  неверна

статистика:  $F = \frac{R^2/k}{(1-R^2)/(n-k-1)}$

нулевое распределение:  $F(k, n - k - 1)$



# Критерий Фишера

**Пример:** имеет ли вообще смысл модель веса ребёнка при рождении, рассмотренная выше?

$$H_0: \beta_1 = \dots = \beta_5 = 0.$$

$$H_1: H_0 \text{ неверна} \Rightarrow p = 6.0331 \times 10^{-9}.$$

# Сравнение невложенных моделей

**Пример:** имеются две модели:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \varepsilon, \quad (1)$$

$$y = \gamma_0 + \gamma_1 \log x_1 + \gamma_2 \log x_2 + \varepsilon. \quad (2)$$

Как понять, какая из них лучше?

## Критерий Давидсона-Маккиннона

Пусть  $\hat{y}$  — оценка отклика по первой модели,  $\hat{\hat{y}}$  — по второй.

Подставим эти оценки как признаки в чужие модели:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 \hat{y} + \varepsilon,$$

$$y = \gamma_0 + \gamma_1 \log x_1 + \gamma_2 \log x_2 + \gamma_3 \hat{\hat{y}} + \varepsilon.$$

При помощи критерия Стьюдента проверим

$$H_{01}: \beta_3 = 0, \quad H_{11}: \beta_3 \neq 0,$$

$$H_{02}: \gamma_3 = 0, \quad H_{12}: \gamma_3 \neq 0.$$

$H_{01} \backslash H_{02}$	Принята	Отвергнута
Принята	Обе модели хороши	Модель (1) значительно лучше
Отвергнута	Модель (2) значительно лучше	Обе модели плохи

# Пошаговая регрессия

- **Шаг 0.** Настраивается модель с одной только константой, а также все модели с одной переменной. Рассчитывается  $F$ -статистика каждой модели и достигаемый уровень значимости. Выбирается модель с наименьшим достигаемым уровнем значимости. Соответствующая переменная  $X_{e1}$  включается в модель, если этот достигаемый уровень значимости меньше порогового значения  $p_E = 0.05$ .
- **Шаг 1.** Рассчитывается  $F$ -статистика и достигаемый уровень значимости для всех моделей, содержащих две переменные, одна из которых  $X_{e1}$ . Аналогично принимается решение о включении  $X_{e2}$ .
- **Шаг 2.** Если была добавлена переменная  $X_{e2}$ , возможно,  $X_{e1}$  уже не нужна. В общем случае просчитываются все возможные варианты исключения одной переменной, рассматривается вариант с наибольшим достигаемым уровнем значимости, соответствующая переменная исключается, если он превосходит пороговое значение  $p_R = 0.1$ .
- ...

# Эксперимент Фридмана

(Freedman, 1983): пошаговая регрессия несовместима с проверкой гипотез о значимости коэффициентов: критерии Фишера и Стьюдента антиконсервативны, если вычисляются на той же самой выборке, на которой настраивалась модель.

## Отбор признаков с учётом эффекта множественной проверки гипотез

$$\forall c_1, \dots, c_{k_1} \in \mathbb{R}^{k+1}$$

$$t_j = \frac{c_j^T (\beta - \hat{\beta})}{\hat{\sigma} \sqrt{c_j^T (X^T X)^{-1} c_j}}, \quad j = 1, \dots, k_1$$

имеют совместное распределение Стьюдента с числом степеней свободы  $n - k - 1$  и корреляционной матрицей

$$\begin{aligned} R &= D C^T (X^T X)^{-1} C D, \\ C &= (c_1, \dots, c_{k_1}), \\ D &= \text{diag} \left( c_j^T (X^T X)^{-1} c_j \right)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Для одновременной проверки значимости всех коэффициентов регрессии достаточно взять в качестве  $C$  единичную матрицу.

# Значимость категориальных предикторов

Категориальный предиктор, кодируемый несколькими фиктивными переменными, необходимо включать или исключать целиком. Значимость соответствующих фиктивных переменных лучше проверять в совокупности.

В случае, когда по отдельности какие-то фиктивные переменные не значимы, допустимо объединять уровни категориального предиктора, основываясь на интерпретации.



# Проверка предположений Гаусса-Маркова

- Предположения (1-2) проверить нельзя.
- Предположение (3) легко проверяется, без его выполнения построить модель вообще невозможно.
- Предположения (4-6) об ошибке  $\varepsilon$  необходимо проверять.

Оценивать ошибку  $\varepsilon$  будем при помощи **остатков**:

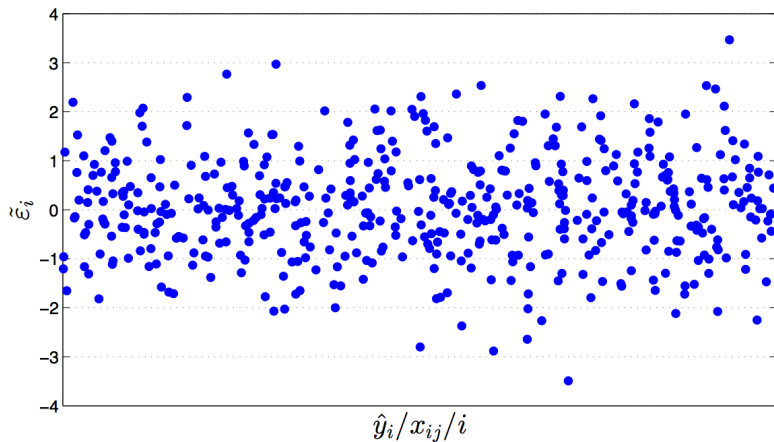
$$\hat{\varepsilon}_i = y_i - \hat{y}_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Стандартизированные остатки:

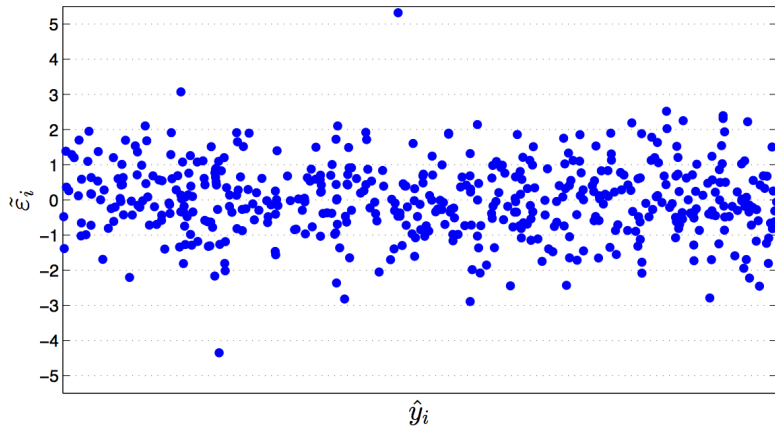
$$\tilde{\varepsilon}_i = \frac{\hat{\varepsilon}_i}{\hat{\sigma}}, \quad i = 1, \dots, n.$$

# Визуальный анализ

Строятся графики зависимости  $\tilde{\varepsilon}_i$  от  $\hat{y}_i$ ,  $x_{ij}, j = 1, \dots, k, i$ .

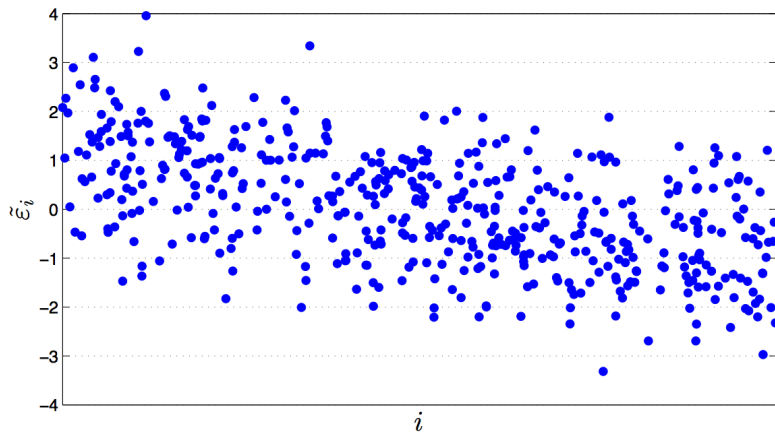


# Визуальный анализ



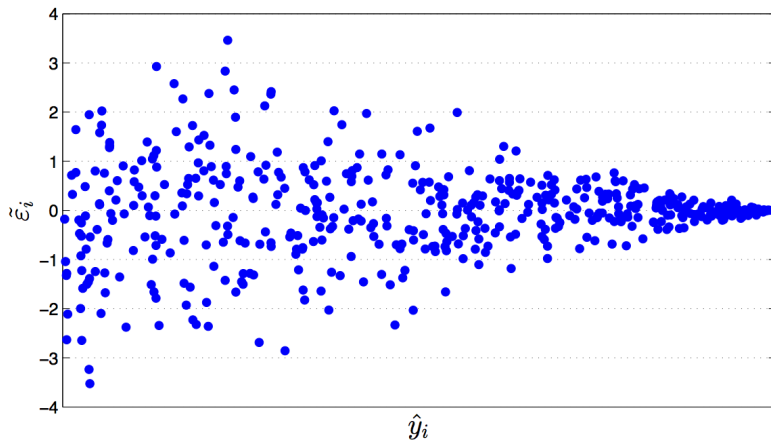
Возможно, присутствуют выбросы

# Визуальный анализ



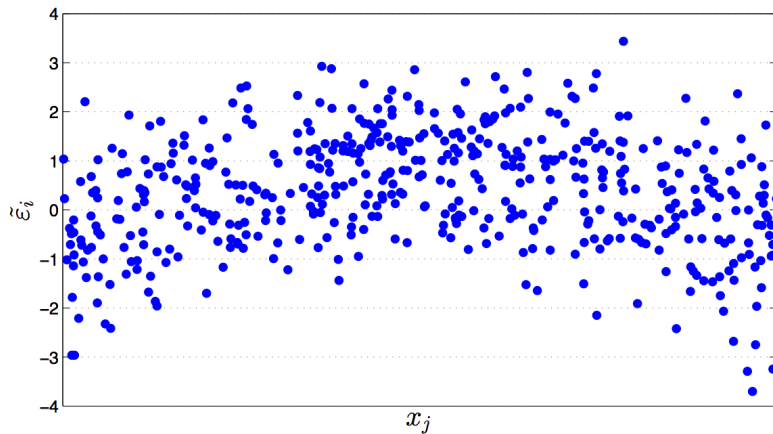
В данных имеется тренд

# Визуальный анализ



Гетероскедастичность

# Визуальный анализ



Стоит добавить квадрат признака  $x_j$

# Формальные критерии

- Проверка нормальности — занятие 4.
- Проверка несмещённости: если остатки нормальны — критерий Стьюдента (занятие 4), нет — непараметрический критерий (занятие 5).
- Проверка гомоскедастичности: критерий Бройша-Пагана.

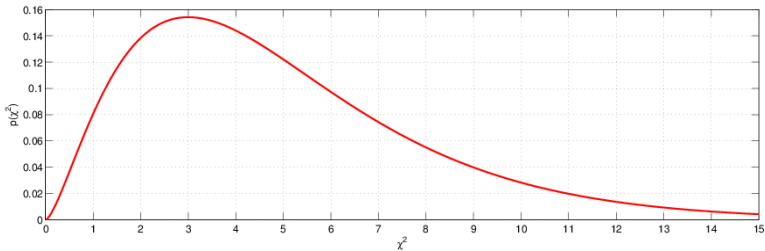
# Критерий Бройша-Пагана

нулевая гипотеза:  $H_0: \mathbb{D}\varepsilon_i = \sigma^2$

альтернатива:  $H_1: H_0$  неверна

статистика:  $LM = nR_{\varepsilon^2}^2$ ,  $R_{\varepsilon^2}^2$  — коэффициент детерминации  
при регрессии квадратов остатков на признаки

нулевое распределение:  $\chi_k^2$





# Гетероскедастичность

Гетероскедастичность может быть следствием недоопределения модели.

Последствия гетероскедастичности:

- МНК-оценки  $\beta$  и  $R^2$  остаются несмещёнными и состоятельными
- нарушаются предположения критериев Стьюдента и Фишера и методов построения доверительных интервалов для  $\sigma$  и  $\beta$  (независимо от объёма выборки)

Варианты:

- переопределить модель, добавить признаки, преобразовать отклик
- использовать модифицированные оценки дисперсии коэффициентов

## Преобразование Бокса-Кокса

Пусть значения отклика  $y_1, \dots, y_n$  положительны. Если  $\frac{\max y_i}{\min y_i} > 10$ , стоит рассмотреть возможность преобразования  $y$ . В каком виде его искать?

Часто полезно рассмотреть преобразования вида  $y^\lambda$ , но оно не имеет смысла при  $\lambda = 0$ .

Вместо него можно рассмотреть семейство преобразований

$$W = \begin{cases} (y^\lambda - 1) / \lambda, & \lambda \neq 0, \\ \ln y, & \lambda = 0. \end{cases}$$

но оно сильно варьируется по  $\lambda$ .

Вместо него можно рассмотреть семейство преобразований

$$V = \begin{cases} (y^\lambda - 1) / (\lambda \dot{y}^{\lambda-1}), & \lambda \neq 0, \\ \dot{y} \ln y, & \lambda = 0, \end{cases}$$

где  $\dot{y} = (y_1 y_2 \dots y_n)^{1/n}$  — среднее геометрическое наблюдений отклика.

# Метод Бокса-Кокса

Процесс подбора  $\lambda$ :

- ① выбирается набор значений  $\lambda$  в некотором интервале, например,  $(-2, 2)$ ;
- ② для каждого значения  $\lambda$  выполняется преобразование отклика  $V$ , строится регрессия  $V$  на  $X$ , вычисляется остаточная сумма квадратов  $RSS(\lambda)$ ;
- ③ строится график зависимости  $RSS(\lambda)$  от  $\lambda$ , по нему выбирается оптимальное значение  $\lambda$ ;
- ④ выбирается ближайшее к оптимальному удобное значение  $\lambda$  (например, целое или полуцелое);
- ⑤ строится окончательная регрессионная модель с откликом  $y^\lambda$  или  $\ln y$ .

Доверительный интервал для  $\lambda$  определяется как пересечение кривой  $RSS(\lambda)$  с линией уровня  $\min_{\lambda} RSS(\lambda) \cdot e^{\chi^2_{1,1-\alpha}/n}$ . Если он содержит единицу, возможно, не стоит выполнять преобразование.

## Устойчивая оценка дисперсии Уайта

Если не удаётся избавиться от гетероскедастичности, при анализе моделей (далее) можно использовать устойчивые оценки дисперсии.

White's heteroscedasticity-consistent estimator (HCE):

$$\mathbb{D}(\hat{\beta} | X) = (X^T X)^{-1} (X^T \text{diag}(\hat{\varepsilon}_1^2, \dots, \hat{\varepsilon}_n^2) X) (X^T X)^{-1}.$$

Асимптотика устойчивой оценки:

$$\sqrt{n}(\beta - \hat{\beta}) \xrightarrow{d} N(0, \Omega),$$

$$\hat{\Omega} = n (X^T X)^{-1} (X^T \text{diag}(\hat{\varepsilon}_1^2, \dots, \hat{\varepsilon}_n^2) X) (X^T X)^{-1}.$$

## Другие устойчивые оценки дисперсии

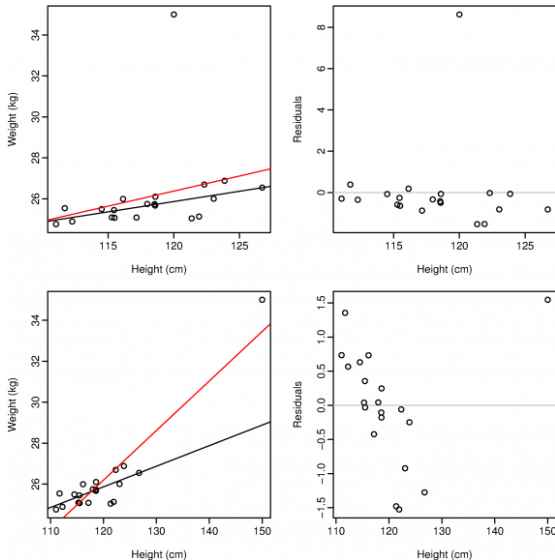
Элементы диагональной матрицы могут задаваться разными способами:

const	$\hat{\sigma}^2$
HC0	$\hat{\varepsilon}_i^2$
HC1	$\frac{n}{n-k} \hat{\varepsilon}_i^2$
HC2	$\frac{\hat{\varepsilon}_i^2}{1-h_i}$
HC3	$\frac{\hat{\varepsilon}_i^2}{(1-h_i)^2}$
HC4	$\frac{\hat{\varepsilon}_i^2}{(1-h_i) \min\left(4, \frac{nh_i}{k}\right)}$

const — случай гомоскедастичной ошибки,  
HC0 — оценка Уайта,  
HC1–HC3 — модификации МакКиннона-Уайта,  
HC4 — модификация Крибари-Нето.

# Расстояние Кука

Регрессия сильно подстраивается под далеко стоящие наблюдения.



# Расстояние Кука

Расстояние Кука — мера воздействия  $i$ -го наблюдения на регрессионное уравнение:

$$D_i = \frac{\sum_{j=1}^n (\hat{y}_j - \hat{y}_{j(i)})^2}{RSS(k+1)} = \frac{\hat{\varepsilon}_i^2}{RSS(k+1)} \frac{h_i}{(1-h_i)^2},$$

$\hat{y}_{j(i)}$  — предсказания модели, настроенной по наблюдениям  $1, \dots, i-1, i+1, \dots, n$ , для наблюдения  $j$ ;

$h_i$  — диагональный элемент матрицы  $H = X (X^T X)^{-1} X^T$  (hat matrix).

Варианты порога на  $D_i$ :

- $D_i = 1$ ;
- $D_i = 4/n$ ;
- $D_i = 3\bar{D}$ ;
- визуально по графику зависимости  $D_i$  от  $\hat{y}_i$ .

# Литература

- линейная регрессия в целом — Wooldridge (много примеров, без матричной алгебры);
- критерий Давидсона-Маккиннона (Davidson-MacKinnon test) — Davidson;
- множественная оценка значимости коэффициентов — Bretz, 4.4;
- преобразование Бокса-Кокса (Box-Cox transformation) — Дрейпер, гл. 14;
- устойчивые оценки дисперсии — White, MacKinnon, Cribari-Neto;
- расстояние Кука (Cook's distance) — Cook.

Дрейпер Н.Р., Смит Г. *Прикладной регрессионный анализ*, 2007.

Кобзарь А.И. *Прикладная математическая статистика*, 2006.

Bretz F., Hothorn T., Westfall P. *Multiple Comparisons Using R*, 2010.

Cook D.R., Weisberg S. *Residuals and influence in regression*, 1982.



# Литература

Cribari-Neto F. (2004). *Asymptotic inference under heteroskedasticity of unknown form*. Computational Statistics & Data Analysis, 45(2), 215–233.

Davidson R., MacKinnon J. (1981). *Several Tests for Model Specification in the Presence of Alternative Hypotheses*. Econometrica, 49, 781-793.

Freedman D.A. *A Note on Screening Regression Equations*. The American Statistician, 37(2), 152-155.

MacKinnon J., White H. (1985). *Some heteroskedasticity-consistent covariance matrix estimators with improved finite sample properties*. Journal of Econometrics, 29, 305–325.

White H. (1980). *A heteroskedasticity-consistent covariance matrix estimator and a direct test for heteroskedasticity*. Econometrica: Journal of the Econometric Society, 48(4), 817–838.

Wooldridge J. *Introductory Econometrics: A Modern Approach*, 2016.