

Задача 2.1

Преподаватель: Бахтеев Олег

Имя студента: Жибоедова Анастасия

Условие: Пусть задано две вектора ответов: y — истинный вектор ответов для некоторой выборки, а также есть вектор ответов \hat{y} — некоторой предсказательной модели. Наблюдатель хочет проверить гипотезу о том, что ровно в 25% случаев модель дает заниженные оценки. Предложите метод проверки данной гипотезы: запишите задачу формально, предложите статистику для решения данной задачи на уровне значимости $\alpha = 0.05$. Также найдите зависимость мощности данного критерия в зависимости от истинного процента заниженных ответов.

Решение

(Статистика для проверки гипотезы) Задача звучит так: проверить гипотезу о том, что 25-й перцентиль разности ответов \hat{y} и y равен 0. Для упрощения задачи сведем ее к бинальной: введем бинальную случайную величину

$$x = \begin{cases} 0, & y - \hat{y} \leq 0 \\ 1, & y - \hat{y} > 0 \end{cases}$$

, тогда условие выглядит так, проверить гипотезу:

$$H_0 : x \in \mathbf{Be}(0.25) \text{ — нулевая гипотеза}$$

Нулевая гипотеза проверяется биномиальным тестом, где T - статистика принимает значение количества 1 в векторе x

$$T = \sum_{i=1}^n \mathbf{I}(x_i = 1) \sim \mathbf{Bi}(n, 0.25)$$

(Мощность критерия) Рассчитаем мощность критерия как вероятность отклонения нулевой гипотезы, в случае если верна альтернативная гипотеза:

```
p_variance = np.linspace(0, 1, 88)
p_0 = 0.25
alpha = 0.05
p_values = []
power_of_tests = []
list_of_sizes = list(map(int, np.linspace(10, 1000, 100)))
for size in tqdm(list_of_sizes):
    w = 0
    for p in p_variance:
        p_value = st.binom_test(size * p, n = size, p = p_0, alternative='two-sided')
        p_values.append(p_value)
        if p_value < alpha:
            w += 1
    power_of_tests.append(w/len(p_variance))
```

Построим график зависимости мощности от размера выборки:

