

Лабораторная работа №1

Акименкова Мария 675

27 марта 2020 г.

Задача 2.3

Известно, что электричка "Вашингтон-Петушки" аварийно останавливается раз в несколько дней. Аналитики РЖД проанализировали, сколько дней электричка едет без поломок, и составили выборку: $x = (3, 22, 13, 6, 18, 5, 6, 10, 7, 15)$. РЖД хочет проверить гипотезу, что дисперсия распределения равна 9 против правосторонней альтернативы. Требуется:

1. Ввести предположение, каким распределением описывается данная выборка.
2. Записать задачу формально.
3. Предложить критерий для оценки дисперсии распределения.
4. Проверить гипотезу о значении дисперсии распределения для уровня значимости $\alpha = 0.05$ аналитически.
5. Вывести и получить доверительный интервал для значения дисперсии при $\alpha = 0.05$.

Вопрос 1.

Пусть день без поломки - успех, день с поломкой - неудача.

Случайная величина принимает значения $n = 1, 2, 3, \dots$ с вероятностями $P(X = n) = (1 - p)^{n-1}p$. Случайная величина с таким распределением имеет смысл номера первого успешного испытания в схеме Бернулли с вероятностью успеха p . Значит, случайная величина X имеет геометрическое распределение с параметром $p \in (0, 1)$.

Вопрос 2.

$$X \sim \text{Geom}(p)$$

$$H_0 : D(X) = 9$$

$$H_1 : D(X) \geq 9$$

$$D(X) = \frac{1-p}{p^2} = 9 \Rightarrow$$

$$H_0 : p = \frac{\sqrt{37}-1}{18} = p_0$$

$$H_1 : p \leq \frac{\sqrt{37}-1}{18} = p_0$$

Вопрос 3.

С помощью теста Шапиро проверим выборку на нормальность.

$p_{value} = 0.38 \Rightarrow$ выборка не подчиняется нормальному распределению. Воспользуемся критерием меток:

$$Z(x) = \frac{S(\theta_0)}{\sqrt{I(\theta_0)}}$$

$$S(p) = \frac{n}{p} + \frac{n}{1-p} + \frac{\sum x_i}{1-p}$$

$$I = \frac{n}{p^2(1-p)}$$

Вопрос 4.

Подставим наши значения в формулы выше, получим:

$$S(p) = -96.9$$

$$I = 174.8$$

$$Z = -7.3 < \alpha, \text{ значит, гипотезу отвергаем.}$$

Вопрос 5.

Оценим доверительный интервал с помощью критерия Вальда:

$$\left(\frac{n}{\sum x_i} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{1}{I \frac{n}{\sum x_i}}}; \frac{n}{\sum x_i} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{1}{I \frac{n}{\sum x_i}}} \right).$$

Подставим:

$$(0.04; 0.15).$$

Подставим эти значения в формулу для дисперсии. Итоговый доверительный интервал:

$$(37.03; 628.82)$$

Как видим, 9 не входит в доверительный интервал.