

## Лабораторная работа 1, задача 2.3

1. Время между двумя последовательными свершениями одного и того же события обычно моделируется экспоненциальным распределением. Не будем отступать от традиций.

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

2. Если дисперсия равна 9, то  $\lambda = \lambda_0 = 3 \Rightarrow$

$$H_0 : \lambda = 3$$

$$H_1 : \lambda < 3$$

3. Заметим, что среднее значение равно 10.5, то есть эмпирическая интенсивность  $\lambda_{MLE} = \frac{1}{10.5} \approx 0.92$ . Почти очевидно, что гипотезу мы отвергнем.

Воспользуемся например критерием отношения правдоподобия (благо  $\lambda_{MLE}$  мы уже посчитали):

$$T(X) = -2 \ln \frac{L(X, \lambda_0)}{L(X, \lambda_{MLE})}$$

В условиях истинности нулевой гипотезы  $T(X) \sim \chi_1^2$

4.  $T(X) \approx 43.5$ , p-value  $\approx 4.25 \cdot 10^{-11} \Rightarrow$  гипотеза отвергается.

5. Из критерия Вальда:

$$\frac{\lambda_{MLE} - \lambda_0}{\sqrt{\mathbb{D}\lambda_{MLE}}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

С помощью неравенства Рао-Крамера:

$$\lambda_0 \in \left( \lambda_{MLE} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{I^{-1}(\lambda_{MLE})}, \lambda_{MLE} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{I^{-1}(\lambda_{MLE})} \right)$$

$$\alpha = 0.05 \Rightarrow Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \approx 1.960, \lambda_0 \in (0.039, 0.151)$$

$$\mathbb{D}[x] = \frac{1 - \lambda_0}{\lambda_0^2} \in (37, 629)$$