Задание 2.2.
Курузов Илья, 676 группа

1. Пусть $X_k \sim \mathrm{Be}(p)$ - случайная величина, соответсвующая тому, что был ли k-ый билет выигрышным. Тогда количество проданных билетов есть случайная величина

$$Y = \max_{k \Big| X_j = 0 \forall j < k} k.$$

Функция распределения этой с.в.:

$$\mathbb{P}(Y = k) = (1-p)^{k-1} p$$

У нас есть $n = 5$ реализаций y_j случайной величины. Эти значения соответсвенно равны 8, 12, 7, 6, 12. Найдем p_0 методом наибольшего правдоподобия:

$$p_0 = \arg\max_p \left(\prod_{k=1}^{n} (1-p)^{y_j - 1} p \right) \tag{1}$$

Обозначим $S = \sum_{j=1}^{n} y_j = 45$.

$$p_0 = \arg\max_p \left[p^n (1-p)^{S-n} \right]$$

$$p_0 = \frac{n}{S} \tag{2}$$

Для наших данных:

$$p_0 = \frac{1}{9} \approx 0.11$$

2. Количество выигрышных билетов среди $n = 100$ есть случайная величина $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ с биномиальным распределением. Требуется проверить гипотезу $H_0 : p = p_0$ при альтернативе $p \neq p_0$.

3. Статистика:

$$T(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{k=1}^{N} x_k - N n p_0}{\sqrt{N n p_0 (1 - p_0)}} \tag{3}$$

4. Если $X_k \sim \mathrm{Bin}(n, p)$, то $\sum_{k=1}^{N} X_k \sim \mathrm{Bin}(Nn, p)$. Используя ЦПТ, можно оценить распределение статистики T при верности нулевой гипотезы, как $\mathcal{N}(0, 1)$.

5. Достигаемый уровень значимости:

$$p(T) = 2(1 - F_{\mathcal{N}(0,1)}(|T|))$$

Нулевая гипотеза отвергается, если $p(T) \leq \alpha$.

6. Полученный уровень значимости $p = 0.26$. Данные гипотезе не противоречат.