

## Задача 2.2

Агафонов Артём

- $p_1$  – доля вакцинированных заболевших;  $p_2$  – доля невакцинированных заболевших.

$$H_0 : p_1 \geq p_2$$

$$H_1 : p_2 > p_1$$

Воспользуемся аналогом Z-критерия для разности двух долей в последовательном анализе.  $u = \frac{\frac{p_1}{1-p_1}}{\frac{p_2}{1-p_2}}$  – относительный риск.

Коридор отклонений:

$$0.5 = u_L < u < u_U = 2.$$

Тогда задачу можно записать в следующем виде:

$$H_0 : u \geq u_U$$

$$H_1 : u \leq u_L$$

$$\text{статистика : } d_m(X_1^m, X_2^m) = \sum_{i=1}^m (1 - X_{1i})X_{2i}.$$

$$\alpha = 0.05, \beta = 0.2$$

- Константы:

$$A = \frac{1 - \beta}{\alpha} = 16; \quad B = \frac{\beta}{1 - \alpha} = \frac{4}{19}.$$

Вычислим  $h$ :

$$\frac{u}{u+1} = \frac{1 - \left(\frac{1+u_L}{1+u_U}\right)^h}{\left(\frac{u_U(1+u_L)}{u_L(1+u_U)}\right)^h - \left(\frac{1+u_L}{1+u_U}\right)^h}$$

Подставив значения  $u_L$  и  $u_U$ , получим

$$\frac{1}{5} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^h}{2^h - \left(\frac{1}{2}\right)^h} = \frac{2^h - 1}{4^h - 1} \Rightarrow 2^{2h} - 5 \cdot 2^h + 4 = 0 \Rightarrow h = 2.$$

Найдем  $L(u)$ :

$$L(u) = \frac{A^h - 1}{A^h - B^h} = \frac{16^2 - 1}{16^2 - \left(\frac{4}{19}\right)^2} \approx 0.996.$$

Момент остановки:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_u(n) &= \frac{L(u) \ln B + (1 - L(u)) \ln A}{\frac{u}{u+1} \ln \frac{u_U(1+u_L)}{u_L(1+u_U)} + \frac{1}{u+1} \ln \frac{1+u_L}{1+u_U}} / (p_1(1 - p_2) + p_2(1 - p_1)) = \\ &= \frac{0.996 \cdot \ln \frac{4}{19} + (1 - 0.996) \ln 16}{\left(\frac{1}{5} \ln \frac{2(1+\frac{1}{2})}{\frac{1}{2}(1+2)} + \frac{4}{5} \ln \frac{1+\frac{1}{2}}{1+2}\right) \cdot 0.5} \approx 7.44. \end{aligned}$$

- Вычислим константы последовательного анализа  $a_m$ ,  $r_m$ .

$$\frac{\ln \frac{1+u_U}{1+u_L}}{\ln u_U - \ln u_L} = \frac{\ln \frac{1+2}{1+\frac{1}{2}}}{\ln 2 - \ln \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Тогда

$$a_m = \frac{m}{2} + \frac{\ln B}{\ln 4} \approx -1.12 + \frac{m}{2}; \quad r_m = \frac{m}{2} + \frac{\ln A}{\ln 4} = \frac{m}{2} + 2.$$

Применим последовательный анализ:

$k$	vaccinated	unvaccinated	$d_k$	$a_k$	$r_k$
1	0	0	skip		
2	0	1	1	-0.62	2.5
3	0	1	2	-0.12	3
4	0	0	skip		
5	0	0	skip		
6	0	1	3	0.38	3.5
7	0	0	skip		
8	0	1	4	0.88	4

Получили, что на 8-ой день  $d_m \geq r_m \Rightarrow H_0$  отвергается. Таким образом, мы не можем сказать, что доля невакцинированных заболевших меньше или равна доле вакцинированных заболевших. За 8 дней удалось показать, что результаты данного теста не противоречат тому, что вакцина помогает. Это согласуется с ожидаемым числом шагов метода.