

# Лабораторная работа №2

Акименкова Мария 675

15 мая 2020 г.

## Задача 2.3

Требуется построить авторегрессионную модель (autoregressive moving-average model, ARMA) для данных предложенных в приложении.

1. Записать задачу формально;
2. Выписать все формулы аналитически;
3. Провести вычисления всех параметров модели аналитически.

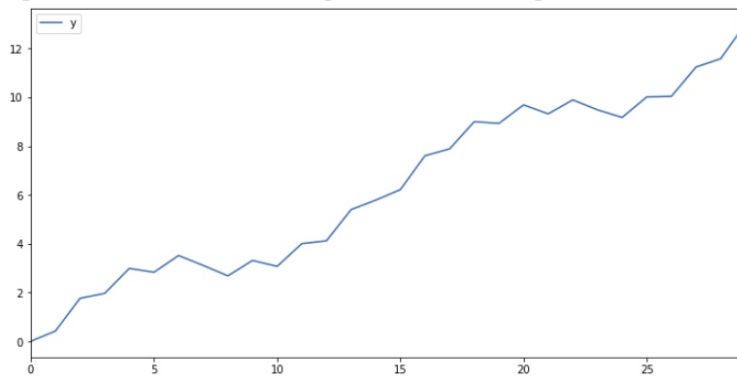
**Найти авторегрессионную модель  $ARMA(p, q)$  для заданного временного ряда.**

$$ARMA(p, q) : y_t = \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q},$$

где  $\phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q$  - константы,  $\varepsilon_t$  - гауссовский белый шум с нулевым средним и дисперсией  $\sigma_\varepsilon^2$ .

Найдем параметры  $p$  и  $q$

Проведем анализ данного ряда на стационарность.



Как можно заметить, график не имеет ярких выбросов и имеет ярко выраженный тренд. Из это можно сделать вывод о том, что ряд не является стационарным.

Итак, давайте определим порядок интегрированного ряда для нашего ряда:

```
In [77]: otgldiff = y.diff(periods=1).dropna()

In [78]: test = sm.tsa.adfuller(otgldiff)
print('adf: ', test[0])
print('p-value: ', test[1])
print('Critical values: ', test[4])
if test[0] > test[4]['5%']:
    print('есть единичные корни, ряд не стационарен')
else:
    print('единичных корней нет, ряд стационарен')

adf: -3.5797918123323007
p-value: 0.006159327052939374
Critical values: {'1%': -3.7883858816542486, '5%': -3.013097747543462, '10%': -2.6463967573696143}
единичных корней нет, ряд стационарен
```

Таким образом ряд первых разностей является стационарным, а наш исходный ряд — интегрированным рядом первого порядка.

Определение параметров  $p$  и  $q$ :

```
best_aic = np.inf
best_order = None
best_md1 = None

rng = range(5)
for i in rng:
    for j in rng:
        try:
            tmp_md1 = ARMA(otgldiff,
                           order=(i, j)).fit()
            tmp_aic = tmp_md1.aic
            if tmp_aic < best_aic:
                best_aic = tmp_aic
                best_order = (i, j)
                best_md1 = tmp_md1
        except: continue

print('aic: %6.2f | order: %s'%(best_aic, best_order))
```

Получилось, что  $p = 3$  и  $q = 1$ .

В итоге, ищем коэффициенты для модели:

$$ARMA(3, 1) : y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \phi_3 y_{t-3} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

Найдем коэффициенты  $\phi_i$  с помощью системы уравнений Юла-Уокера для стационарного ряда первых остатков.

$$\bar{\phi} = R^{-1} \bar{r}, \text{ где}$$

$$r_k = \frac{\sum_{i=1}^{N-K} (y_i - \bar{y})(y_{i+k} - \bar{y})}{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}$$

или

$$r_k = \frac{cov(y_t; y_{t+k})}{\sigma^2} - \text{коэффициенты автокорреляции}$$

$$\sigma^2 = 0.35$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & r_1 & r_2 \\ r_1 & 1 & r_1 \\ r_2 & r_1 & 1 \end{pmatrix}$$

Подставим в формулу, посчитаем, коэффициенты корреляции получились:

$$r = \begin{pmatrix} -0.295 \\ 0.516 \\ -0.161 \end{pmatrix}$$

Тогда  $\bar{\phi}$ :

$$\bar{\phi} = \begin{pmatrix} 1 & -0.295 & 0.516 \\ -0.295 & 1 & -0.295 \\ 0.516 & -0.295 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -0.295 \\ 0.516 \\ -0.161 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.406 & 0.22 & -0.66 \\ 0.22 & 1.13 & 0.22 \\ -0.66 & 0.22 & 1.406 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0.295 \\ 0.516 \\ -0.161 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.19 \\ 0.48 \\ 0.08 \end{pmatrix}$$

Найдем коэффициент  $\theta_1$  из уравнений Юла-Уокера, для  $q = 1$  это можно сделать явно:

$$\theta_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4r_1^2}}{2r_1} = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4 \cdot 0.295 \cdot 0.295}}{-2 \cdot 0.295} = 0.326$$

Получается, итоговая модель  $ARMA(3, 1)$  выглядит так:

**Ответ:**  $y_t = -0.19y_{t-1} + 0.48y_{t-2} + 0.08y_{t-3} + \varepsilon_t + 0.326\varepsilon_{t-1}$