Лабораторная работа №2

Акименкова Мария 675

15 мая 2020 г.

Задача 2.3

Требуется построить авторегрессионную модель (autoregressive moving-average model, ARMA) для данных предложенных в приложении.

1. Записать задачу формально;
2. Выписать все формулы аналитически;
3. Провести вычисления всех параметров модели аналитически.

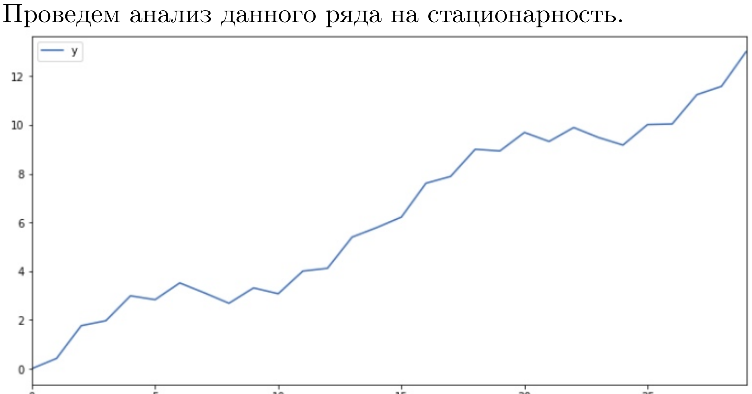
Найти авторегрессионную модель $ARMA(p, q)$ для заданного временного ряда.

$$ARMA(p, q) : y_t = \phi_1 y_{t-1} + ... + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + ... + \theta_q \varepsilon_{t-q},$$

где $\phi_1, ..., \phi_p, \theta_1, ..., \theta_q$ - константы, ε_t - гауссовский белый шум с нулевым средним и дисперсией σ_ε^2.

Найдем параметры p и q

Проведем анализ данного ряда на стационарность.



Как можно заметить, график не имеет ярких выбросов и имеет ярко выраженный тренд. Из это можно сделать вывод о том, что ряд не является стационарным.

Итак, давайте определим порядок интегрированного ряда для нашего ряда:

```
In [77]: otg1diff = y.diff(periods=1).dropna()
```

```
In [78]: test = sm.tsa.adfuller(otg1diff)
         print('adf: ', test[0])
         print('p-value: ', test[1])
         print('Critical values: ', test[4])
         if test[0]> test[4]['5%']:
             print('есть единичные корни, ряд не стационарен')
         else:
             print('единичных корней нет, ряд стационарен')

         adf:  -3.5797918123323007
         p-value:  0.006159327052939374
         Critical values:  {'1%': -3.7883858816542486, '5%': -3.013097747543462, '10%': -2.6463967573696143}
         единичных корней нет, ряд стационарен
```

Таким образом ряд первых разностей является стационарным, а наш исходный ряд — интегрированным рядом первого порядка.
Определение параметров p и q:

```
best_aic = np.inf
best_order = None
best_mdl = None

rng = range(5)
for i in rng:
    for j in rng:
        try:
            tmp_mdl = ARMA(otg1diff,
                      order=(i, j)).fit()
            tmp_aic = tmp_mdl.aic
            if tmp_aic < best_aic:
                best_aic = tmp_aic
                best_order = (i, j)
                best_mdl = tmp_mdl
        except: continue


print('aic: %6.2f | order: %s'%(best_aic, best_order))
```

Получилось, что $p = 3$ и $q = 1$.

В итоге, ищем коэффициенты для модели:

$$ARMA(3,1) : y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \phi_3 y_{t-3} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

Найдем коэффициенты ϕ_i с помощью системы уравнений Юла-Уокера для стационарного ряда первых остатков.

$\bar{\phi} = R^{-1}\bar{r}$, где

$$r_k = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N-K}(y_i-\bar{y})(y_{i+k}-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{N}(y_i-\bar{y})^2}$$

или

$r_k = \frac{cov(y_t;y_{t+k})}{\sigma^2}$ - коэффициенты автокорреляции

$\sigma^2 = 0.35$

$R = \begin{pmatrix} 1 & r_1 & r_2 \\ r_1 & 1 & r_1 \\ r_2 & r_1 & 1 \end{pmatrix}$

Подставим в формулу, посчитаем, коэффициенты корреляции получились:

$$r = \begin{pmatrix} -0.295 \\ 0.516 \\ -0.161 \end{pmatrix}$$

Тогда $\bar{\phi}$:

$\bar{\phi} = \begin{pmatrix} 1 & -0.295 & 0.516 \\ -0.295 & 1 & -0.295 \\ 0.516 & -0.295 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -0.295 \\ 0.516 \\ -0.161 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.406 & 0.22 & -0.66 \\ 0.22 & 1.13 & 0.22 \\ -0.66 & 0.22 & 1.406 \end{pmatrix} \cdot$
$\begin{pmatrix} -0.295 \\ 0.516 \\ -0.161 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.19 \\ 0.48 \\ 0.08 \end{pmatrix}$

Найдем коэффициент θ_1 из уравнений Юла-Уокера, для $q = 1$ это можно сделать явно:

$\theta_1 = \frac{-1+\sqrt{1-4r_1^2}}{2r_1} = \frac{-1+\sqrt{1-4 \cdot 0.295 \cdot 0.295}}{-2 \cdot 0.295} = 0.326$

Получается, итоговая модель $ARMA(3,1)$ выглядит так:

$y_t = -0.19 y_{t-1} + 0.48 y_{t-2} + 0.08 y_{t-3} + \varepsilon_t + 0.326 \varepsilon_{t-1}$