

# Lab 1, task 2.3

Талгат Сапаров

15 мая 2020 г.

$$y = \begin{pmatrix} 0.000 \\ 0.420 \\ 1.762 \\ 1.964 \\ 2.987 \\ 2.828 \\ 3.516 \\ 3.108 \\ 2.681 \\ 3.312 \\ 3.071 \\ 4.001 \\ 4.116 \\ 5.395 \\ 5.785 \\ 6.215 \\ 7.605 \\ 7.884 \\ 8.999 \\ 8.929 \\ 9.688 \\ 9.319 \\ 9.892 \\ 9.484 \\ 9.172 \\ 10.013 \\ 10.036 \\ 11.238 \\ 11.580 \\ 13.000 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 1 & 0.000 & 0.420 \\ 1 & 0.420 & 1.762 \\ 1 & 1.762 & 1.964 \\ 1 & 1.964 & 2.987 \\ 1 & 2.987 & 2.828 \\ 1 & 2.828 & 3.516 \\ 1 & 3.516 & 3.108 \\ 1 & 3.108 & 2.681 \\ 1 & 2.681 & 3.312 \\ 1 & 3.312 & 3.071 \\ 1 & 3.071 & 4.001 \\ 1 & 4.001 & 4.116 \\ 1 & 4.116 & 5.395 \\ 1 & 5.395 & 5.785 \\ 1 & 5.785 & 6.215 \\ 1 & 6.215 & 7.605 \\ 1 & 7.605 & 7.884 \\ 1 & 7.884 & 8.999 \\ 1 & 8.999 & 8.929 \\ 1 & 8.929 & 9.688 \\ 1 & 9.688 & 9.319 \\ 1 & 9.319 & 9.892 \\ 1 & 9.892 & 9.484 \\ 1 & 9.484 & 9.172 \\ 1 & 9.172 & 10.013 \\ 1 & 10.013 & 10.036 \\ 1 & 10.036 & 11.238 \\ 1 & 11.238 & 11.580 \end{pmatrix}$$

Вычисления в пакете statsmodels (сначала я посмотрел на ACF и PACF, далее в окрестности значимых лагов посчитал авторегрессионные модели и выбрал порядки, которые наивысший логарифм правдоподобия) показали, что неплохо подходят  $p = 2, q = 0$  ( $p = 6, q = 1$  подходили чуть лучше с точки зрения правдоподобия, но вычисления стали бы гораздо более громоздкими).

Получаем модель

$$y_t = \alpha + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$$

$$\hat{y}_t = \alpha + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2}$$

Необходимо решить следующую задачу оптимизации:

$$\sum_t (y_t - \hat{y}_t)^2 \rightarrow \min_{\alpha, \phi_1, \phi_2}$$

Перепишем задачу

$$\|y[2:] - Y\phi\|^2 \rightarrow \min_{\phi},$$

где

$$\phi = \begin{pmatrix} \alpha \\ \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \quad Y = (\mathbf{1} \mid y[0:n-2] \mid y[1:n-1])$$

Оптимизируемая функция выпукла, достаточно найти точку, в которой градиент равен нулю:

$$2Y^\top(y[2:] - Y\phi) = 0$$

$$Y^\top Y\phi = Y^\top y[2:]$$

$$\phi = (Y^\top Y)^{-1} Y^\top y[2:]$$

$$Y^\top Y = \begin{pmatrix} 28.000 & 163.000 & 175.000 \\ 163.000 & 1268.417 & 1328.440 \\ 175.000 & 1328.440 & 1402.514 \end{pmatrix}, \quad (Y^\top Y)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.185 & 0.050 & -0.071 \\ 0.040 & 0.112 & -0.113 \\ -0.071 & -0.113 & 0.116 \end{pmatrix}$$

$$Y^\top y[2:] = \begin{pmatrix} 187.580 \\ 1402.720 \\ 1478.980 \end{pmatrix} \phi = \begin{pmatrix} 0.185 & 0.050 & -0.071 \\ 0.040 & 0.112 & -0.113 \\ -0.071 & -0.113 & 0.116 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 187.580 \\ 1402.720 \\ 1478.980 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.654 \\ 0.361 \\ 0.631 \end{pmatrix}$$

Получаем модель:

$$y_t = 0.654 + 0.361y_{t-1} + 0.631y_{t-2}$$

Если бы в модели присутствовали шумовые компоненты, то коэффициенты при них ищались бы аналогичным способом, построением авторегрессии на остатки, полученные из предыдущей модели.