Прикладной статистический анализ данных
Дисперсионный анализ

Олег Бахтеев
psad-2020@phystech.edu

2020

Пример, Bonnini, табл. 3.2

Исследуется эффективность четырёх жаропонижающих средств, в составе которых один и тот же активный ингридиент присутствует в разных дозировках. Для каждой из четырёх групп из 15 морских свинок известно изменение температуры после введения жаропонижающего. Есть ли различия в действии препаратов?

Пример, Bonnini, табл. 3.2

Исследуется эффективность четырёх жаропонижающих средств, в составе которых один и тот же активный ингридиент присутствует в разных дозировках. Для каждой из четырёх групп из 15 морских свинок известно изменение температуры после введения жаропонижающего. Есть ли различия в действии препаратов?

Наивная идея:

1. воспользоваться двувыборочным критерием, сравнив все пары групп;
2. сделать поправку на множественность гипотез;
3. выбрать пары с наиболее значимыми отличиями.

Пример, Bonnini, табл. 3.2

Исследуется эффективность четырёх жаропонижающих средств, в составе которых один и тот же активный ингридиент присутствует в разных дозировках. Для каждой из четырёх групп из 15 морских свинок известно изменение температуры после введения жаропонижающего. Есть ли различия в действии препаратов?

Наивная идея:

1. воспользоваться двувыборочным критерием, сравнив все пары групп;
2. сделать поправку на множественность гипотез;
3. выбрать пары с наиболее значимыми отличиями.

Проблема: решается более частная задача. Неясно как определять размер эффекта для всех групп в совокупности.

Разновидности дисперсионного анализа (ANOVA)

- по числу факторов: однофакторный (one-way), двухфакторный (two-way) и т. д
- по типу выборок: независимые (between-subjects), связанные (within-subjects, repeated measurements)
- по типу альтернативы: общая, тренда
- по типу эффектов: случайные (random-effects), фиксированные (fixed-effects)
- по типу уровней факторов: независимые, вложенные (nested), с болтающимся контролем (dangling control group), латинский квадрат (latin square)
- по используемым предположениям: нормальный, непараметрический
- по объёму выборок: одинаковый (balanced), различный (unbalanced)

Однофакторный дисперсионный анализ

Пусть имеется K выборок:

$$X^N = X_1^{n_1} \bigcup X_2^{n_2} \bigcup \ldots \bigcup X_K^{n_K}, \;\; N = \sum_{i=1}^{K} n_i.$$

Эквивалентная запись в виде псевдотаблицы:
фактор $f\colon X \to \{1, \ldots, K\}$

f	1	$\ldots$	k	$\ldots$	K
X^N	X_{11} $\vdots$ X_{1n_1}	$\ldots$	X_{k1} $\vdots$ X_{kn_k}	$\ldots$	X_{K1} $\vdots$ X_{Kn_K}

Задача: проверить гипотезу об отсутствии влияния фактора f на среднее значение признака X, то есть, о равенстве средних значений K выборок.

Однофакторный дисперсионный анализ

Идея: рассмотрим две компоненты разброса значений X_{ki} относительно глобального среднего $\bar{X}$:

$$X_{ki} - \bar{X} = \left(X_{ki} - \bar{X}_k\right) + \left(\bar{X}_k - \bar{X}\right),$$

где $\bar{X}_k$ — среднее в k-й выборке.

Возведём в квадрат и просуммируем:

$$\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{n_k}\left(X_{ki} - \bar{X}\right)^2 = \sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{n_k}\left(X_{ki} - \bar{X}_k\right)^2 + \sum_{k=1}^{K} n_k\left(\bar{X}_k - \bar{X}\right)^2,$$

$$SS_{total} = SS_{wg} + SS_{bg}.$$

Если средние в группах значительно отличаются, преобладает вторая компонента, если же они одинаковы — первая.

Однофакторный дисперсионный анализ

Линейная модель:

$$X_{ki} = \mu + \alpha_k + \varepsilon_{ki},$$

$i = 1, \ldots, n_k,\ k = 1, \ldots, K.$

μ — глобальное среднее значение признака X,
α_k — отклонение от μ, вызванное влиянием k-го уровня фактора f,
ε_{ki} — случайные независимые одинаково распределённые ошибки.

Средние значения X во всех K выборках одинаковы $\Leftrightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_K$.

Распределение Фишера

- пусть $X_1 \sim \chi^2_{d_1},\ X_2 \sim \chi^2_{d_2},\quad X_1$ и X_2 независимы, тогда

$$\frac{X_1/d_1}{X_2/d_2} \sim F\left(d_1, d_2\right)$$

- если $X \sim F\left(d_1, d_2\right)$, то

$$Y = \lim_{d_2 \to \infty} d_1 X \sim \chi^2_{d_1}$$

- $F\left(x, d_1, d_2\right) = F\left(1/x, d_2, d_1\right)$
- возникает в дисперсионном и регрессионном анализе

Критерий Фишера

выборки: $X^N = X_1^{n_1} \bigcup \ldots \bigcup X_K^{n_K}$

нулевая гипотеза: $H_0 : \alpha_1 = \cdots = \alpha_K$

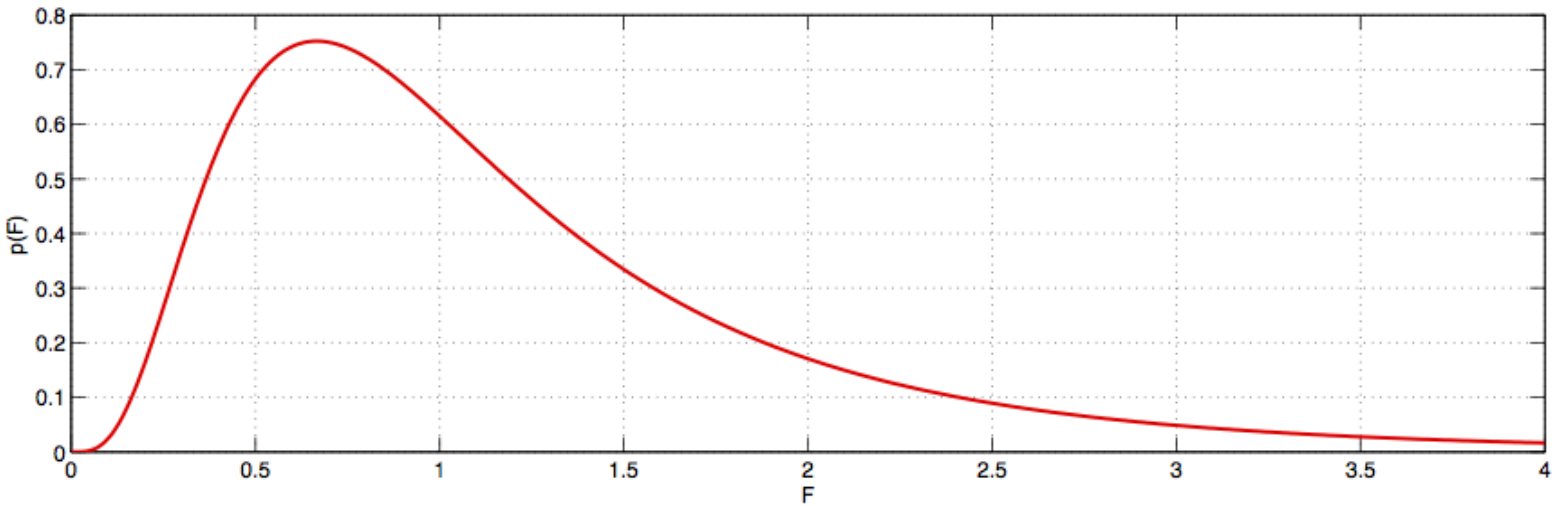
альтернатива: $H_1 : H_0$ неверна

статистика: $F\left(X^N\right) = \frac{SS_{bg}/(K-1)}{SS_{wg}/(N-K)}$

$$SS_{bg} = \sum_{k=1}^{K} n_k \left(\bar{X}_k - \bar{X}\right)^2$$

$$SS_{wg} = \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=1}^{n_k} \left(X_{ki} - \bar{X}_k\right)^2$$

нулевое распределение: $F(K-1, N-K)$



Критерий Фишера

Предположения метода:

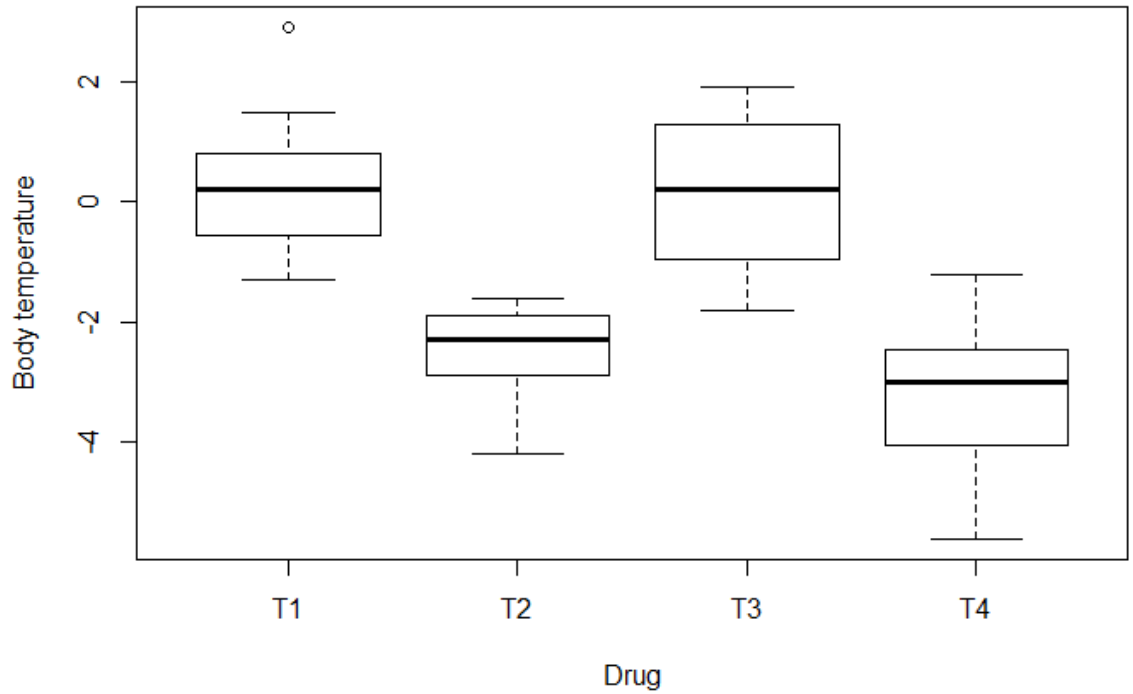
1. распределения признака во всех группах нормально;
2. дисперсия значений признака во всех группах одинакова;
3. наблюдения независимы.

- Первое предположение считается выполненным, если распределение признака во всех группах нормально, или если объёмы выборок примерно одинаковы и $N - K - 1 \geqslant 20$.
- Второе предположение считается выполненным, если отношение наибольшей выборочной дисперсии к наименьшей не превосходит 10.
- При $n_1 = \cdots = n_K$ метод устойчив к нарушению первых двух предположений.
- Если объёмы выборок различаются, нарушение предположения о равенстве дисперсий может привести к росту вероятности ошибки первого рода.
- Выбросы могут оказывать существенное влияние на результат.

Критерий Фишера

Пример, Bonnini, табл. 3.2

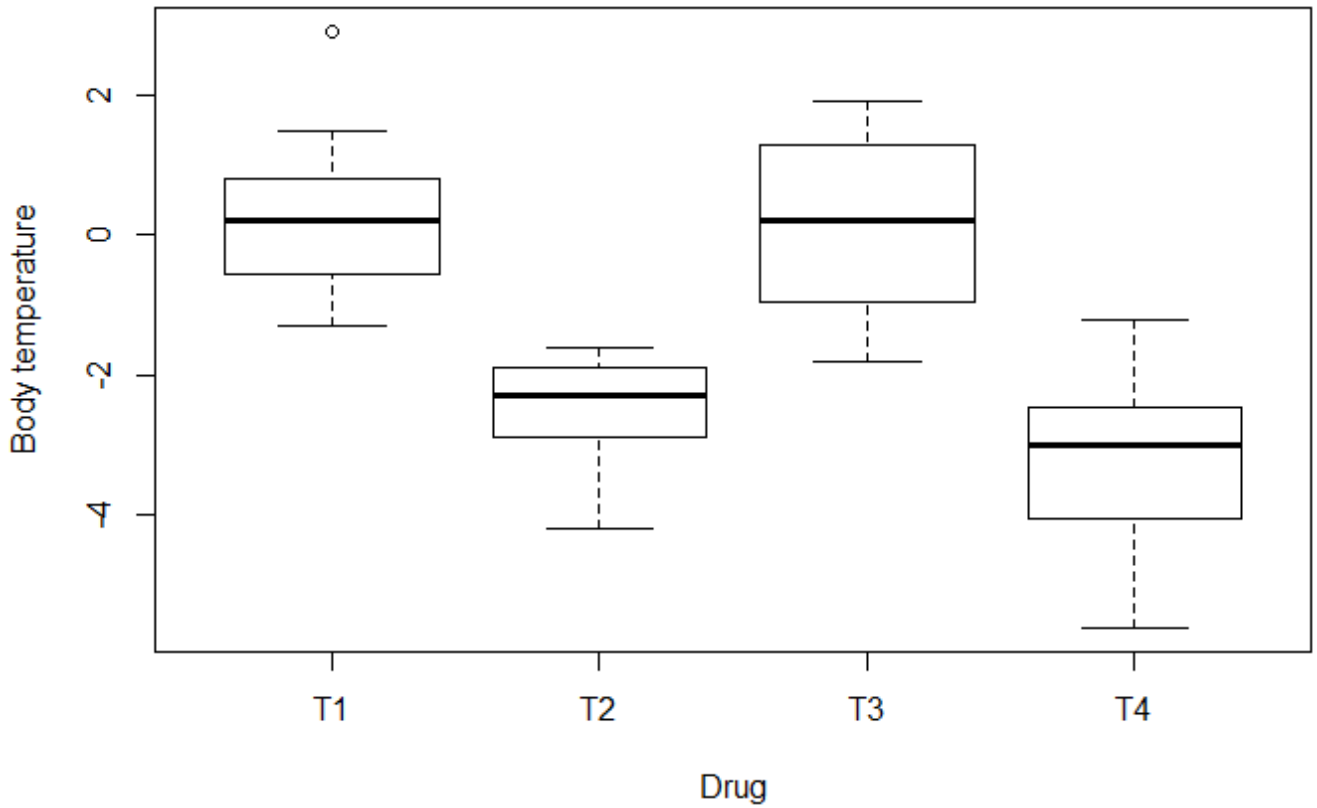
Исследуется эффективность четырёх жаропонижающих средств, в составе которых один и тот же активный ингредиент присутствует в разных дозировках. Для каждой из четырёх групп из 15 морских свинок известно изменение температуры после введения жаропонижающего. Есть ли различия в действии препаратов?



H_0: температура меняется в среднем одинаково.

H_1: для каких-то препаратов среднее изменение температуры отличается от остальных.

Критерий Фишера



Критерий Фишера:

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
drug	3	143.0	47.67	40.21	5.43e-14
Residuals	56	66.4	1.19		

Критерий Манна-Уитни-Уилкоксона

выборки: $X_1^{n_1} = (X_{11}, \ldots, X_{1n_1})$
$X_2^{n_2} = (X_{21}, \ldots, X_{2n_2})$
выборки независимые

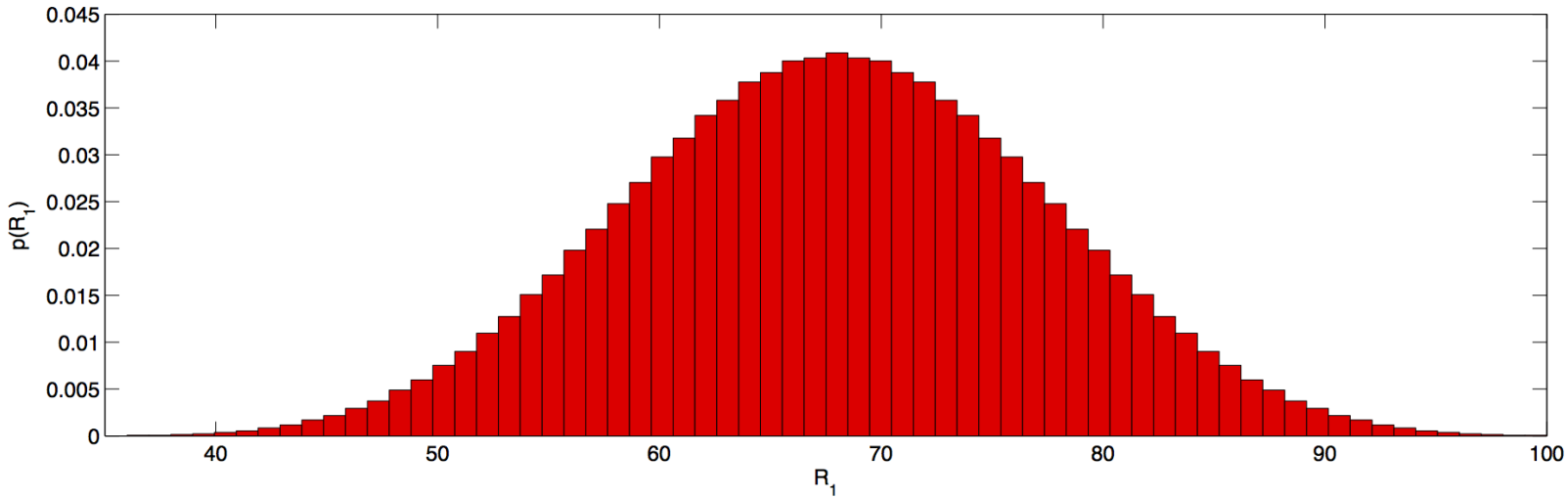
нулевая гипотеза: $H_0 \colon F_{X_1}(x) = F_{X_2}(x)$

альтернатива: $H_1 \colon F_{X_1}(x) = F_{X_2}(x + \Delta), \Delta <\neq> 0$

статистика: $X_{(1)} \leqslant \ldots \leqslant X_{(n_1+n_2)}$ — вариационный ряд объединённой выборки $X = X_1^{n_1} \bigcup X_2^{n_2}$

$$R_1(X_1^{n_1}, X_2^{n_2}) = \sum_{i=1}^{n_1} \operatorname{rank}(X_{1i})$$

нулевое распределение: табличное



Критерий Краскела-Уоллиса

выборки: $X^N = X_1^{n_1} \bigcup \ldots \bigcup X_K^{n_K},\ \ X_k \sim F\left(x + \Delta_k\right)$

нулевая гипотеза: $H_0 \colon \Delta_1 = \Delta_2 = \ldots = \Delta_K$

альтернатива: $H_1 \colon H_0$ неверна

статистика: $K\left(X^N\right) = (N-1)\,\frac{\sum\limits_{k=1}^{K} n_k (\bar{r}_k - \bar{r})^2}{\sum\limits_{k=1}^{K} \sum\limits_{i=1}^{n_k} (r_{ki} - \bar{r})^2},\ r_{ki} \equiv \operatorname{rank}\left(X_{ki}\right)$

нулевое распределение: табличное

Если нет связок, то:

$$\bar{r} = \frac{N-1}{2}, \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=1}^{n_k} \left(r_{ki} - \bar{r}\right)^2 = \frac{(N-1)\,N\,(N+1)}{12},$$

$$K\left(X^N\right) = \frac{12}{N\,(N+1)} \sum_{k=1}^{K} n_k \bar{r}_k^2 - 3\,(N+1)\,.$$

Аппроксимация для $n_k > 5$:

$$K\left(X^N\right) \sim \chi^2_{K-1}.$$

В предыдущем примере: $p = 1.5 \times 10^{-9}$.

Критерий Джонкхиера

Пример 1

Имеется гипотеза о том, что по мере перехода на старшие курсы падает посещаемость лекций. Для выяснения, верно ли это предположение, декан организовал выборочный контроль студентов. Случайным образом было отобрано некоторое одинаковое для каждого курса количество человек, а также был организован учет посещенных им лекций, отобранных случайно на каждом курсе. Требуется по данным учета проверить гипотезу.

Пример 2

Взяты несколько групп пациентов, и каждой из них назначается определенная доза препарата. Нужно проверить, как лекарство помогает в снятии соответствующего симптома.

Критерий Джонкхиера

выборки: $X^N = X_1^{n_1} \bigcup \ldots \bigcup X_K^{n_K}, \;\; X_k \sim F(x + \Delta_k)$

нулевая гипотеза: $H_0 \colon \Delta_1 = \Delta_2 = \ldots = \Delta_K$

$\Rightarrow \; \operatorname{med} X_1 = \ldots = \operatorname{med} X_K$

альтернатива: $H_1 \colon \operatorname{med} X_1 \leqslant \ldots \leqslant \operatorname{med} X_K$

статистика: $S\left(X^N\right) = \sum\limits_{k=1}^{K} \sum\limits_{i=1}^{n_k} a_{ki}$

a_{ki} — число наблюдений из первых $k-1$ выборок меньших, чем X_{ki}

нулевое распределение: табличное

Аппроксимация для $n_k > 10$:

$$S\left(X^N\right) \sim N\left(\mu, \sigma^2\right),$$

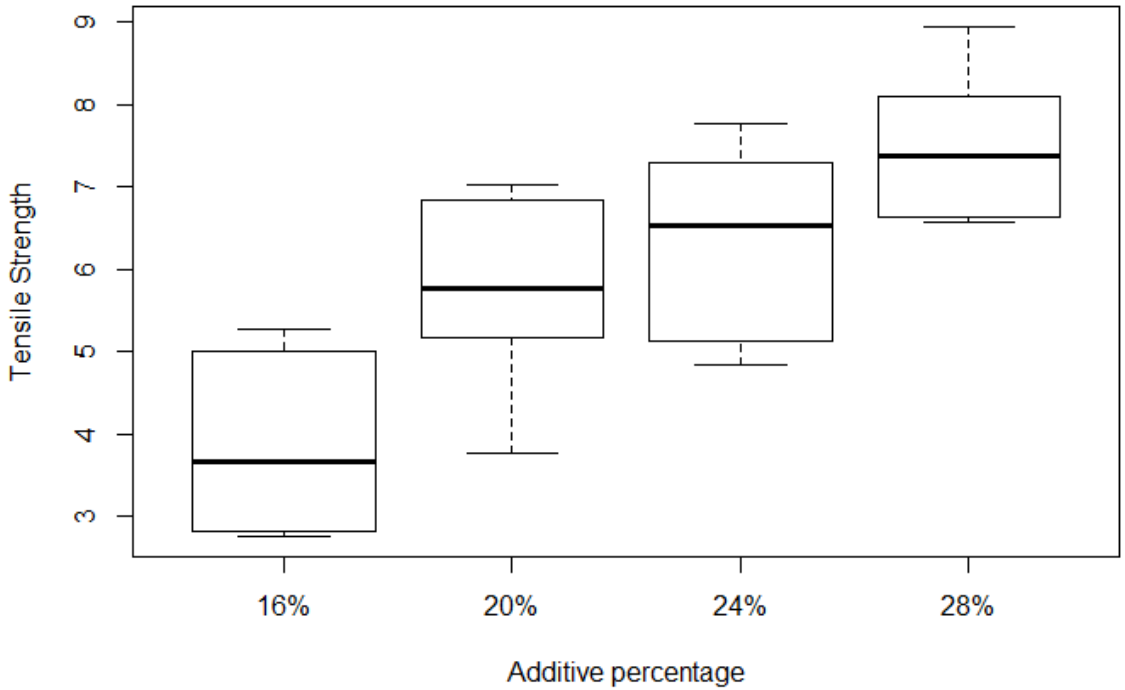
$$\mu = \frac{1}{4}\left(N^2 - \sum_{k=1}^{K} n_k^2\right),$$

$$\sigma = \frac{1}{72}\left(N^2\left(2N+3\right) - \sum_{k=1}^{K} n_k^2\left(2n_k+3\right)\right).$$

Критерий Джонкхиера

Пример,Bonnini, табл. 3.4

Исследуется зависимость предела прочности (в Ньютонах на квадратный метр) армированного бетона с разной концентрацией присадки — 16, 20, 24 и 28%. Меняется ли средний предел прочности вместе с уровнем присадки?



H_0: концентрация присадки не влияет на среднюю прочность.
H_1: концентрация присадки влияет на среднюю прочность $\Rightarrow p = 0.0042$.
H_1: увеличение концентрации присадки повышает среднюю прочность $\Rightarrow p = 2.936 \times 10^{-5}$.

Модель со случайным эффектом

- Характеристика, определяющая разбиение на группы, не представляет непосредственного интереса.
- Группы случайно выбраны из множества возможных групп.
- Если между группами есть неоднородность, ожидается, что она сохранится при повторе эксперимента, но соотношения между средними могут измениться.

Примеры.

- Размеры горбаток в разных семьях, выращенных на одном и том же растении; цель — определить значимость фактора семьи для дальнейших исследований.
- Уровень гликогена в различных образцах икроножной мышцы крысы; если вариация между образцами даёт маленький вклад в общую вариацию, то можно считать, что для измерения уровня достаточно одного образца.
- Вкусовые качества персиков с 10 различных деревьев; планируется сравнить различия во вкусовых качествах персиков с разных деревьев с различиями у персиков с одного дерева. Если последние больше, то бессмысленно выбрать для размножения дерево с лучшей средней оценкой.

Модель со случайным эффектом

Если используется **модель со случайным эффектом**, следующий шаг — разделение дисперсий на внутригрупповые и межгруповые.

Доля межгрупповой дисперсии в общей дисперсии выборки:

$$\eta^2 = \frac{SS_{bg}}{SS_{total}};$$

в популяции:

$$\hat{\omega}^2 = \frac{SS_{bg} - SS_{wg}\left(K-1\right)/\left(N-K\right)}{SS_{total} + SS_{wg}/\left(N-K\right)}.$$

Модель с фиксированным эффектом

- Разбиение на группы определено до получения данных.
- При повторе эксперимента ожидается, что соотношения между средними групп сохранятся.
- Если между средними есть различия, на следующем этапе анализируется, какие именно группы различаются.

Примеры.

- Продолжительность жизни разноногих раков в морской воде и растворах глюкозы и маннозы.
- Экспрессия определённого гена в тканях мозга, печени, лёгких и мышц; необходимо понять, в какой ткани экспрессия выше.
- Вкусовые качества персиков с 10 различных деревьев; планируется выбрать лучшее дерево для дальнейшего разведения.

Модель с фиксированным эффектом

Если используется **модель с фиксированным эффектом**, то, в случае отвержения гипотезы однородности средних, проводится дополнительное сравнение с целью уточнения характера различий.
Сравнение может быть:

- запланированным, когда группы для дальнейшего сравнения отобраны до сбора данных.
- незапланированным (post hoc), когда группы для сравнения выбираются по результатам первичного анализа данных.

Для запланированного попарного сравнения групп можно просто использовать подходящий двухвыборочный критерий.
Для незапланированного сравнения всё сложнее.

Критерий Даннета

$$D_i = \frac{\bar{X}_i - \bar{X}_1}{S\sqrt{\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_1}}},$$

$$S^2 = \frac{1}{N-K}\sum_{k=1}^{K}(n_k - 1)\,S_k^2,$$

где S_k^2 — дисперсия выборки $X_k^{n_k}$.

Если $X_{i,j} \sim N\left(\mu_i, \sigma^2\right)$, то при $\mu_1 = \cdots = \mu_K$ вектор $D = (D_2, \ldots, D_k)$ имеет многомерное распределение Стьюдента.
Кроме того, для D можно построить процедуру, контролирующую FWER.

LSD Фишера (Least Significant Difference)

Если $\alpha_i = \alpha_j$, то

$$\frac{\bar{X}_i - \bar{X}_j}{S\sqrt{\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}}} \sim St\left(n_i + n_j - 2\right),$$

где $S^2 = \frac{(n_i-1)S_i^2 + \left(n_j-1\right)S_j^2}{n_i+n_j-2}$.
Рассмотрим величину

$$LSD_{ij} = \frac{t_\alpha S}{\sqrt{\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}}},$$

где t_α — α-квантиль распределения Стьюдента с $n_i + n_j - 2$ степенями свободы.

Если $\left|\bar{X}_i - \bar{X}_j\right| > LSD_{ij}$, то частная нулевая гипотеза $H_0\colon \alpha_i = \alpha_j$ отклоняется против двусторонней альтернативы.

LSD можно использовать только в случае отвержения общей гипотезы однородности.

HSD Тьюки (Honest Significant Difference)

$$n = \frac{K}{\sum\limits_{k=1}^{K} \frac{1}{n_k}},$$

$$S^2 = \frac{1}{N-K} \sum_{k=1}^{K} (n_k - 1)\, S_k^2,$$

где S_k^2 — дисперсия выборки $X_k^{n_k}$,

$$HSD = \frac{q_\alpha\,(N-K)\,S}{\sqrt{n},}$$

где $q_\alpha\,(N-K)$ — критическое значение распределения стьюдентизированного размаха с $N-K$ степенями свободы.

Если $\left|\bar{X}_i - \bar{X}_j\right| > HSD$, то частная нулевая гипотеза $H_0\colon \alpha_i = \alpha_j$ отклоняется против двусторонней альтернативы.

HSD можно использовать независимо от справедливости общей гипотезы однородности.

Критерий Неменьи

Ранговый аналог HSD.

$$CD = q'_\alpha \sqrt{\frac{K\,(K+1)}{6N}},$$

где q'_α — критическое значение статистики критерия, основанное на распределении стьюдентизированного размаха.

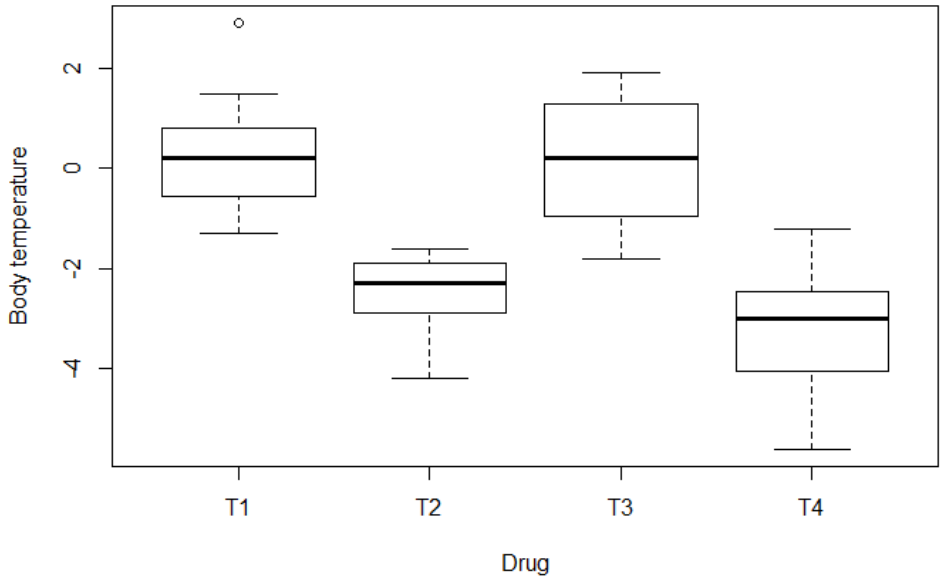
Если $|\bar{r}_i - \bar{r}_j| > CD$, то частная нулевая гипотеза $H_0 \colon \Delta_i = \Delta_j$ отклоняется против двусторонней альтернативы.

Post-hoc критерии: резюме

- Распределение в группах нормально, требуется сравнить одну группу с остальными: критерий Данннета.
- Распределение в группах нормально, требуется сравнить все группы со всеми: HSD Тьюки.
- Распределение в группах не нормально, требуется сравнить все группы со всеми: критерий Немени.

Пример

Действие жаропонижающих на морских свинок:

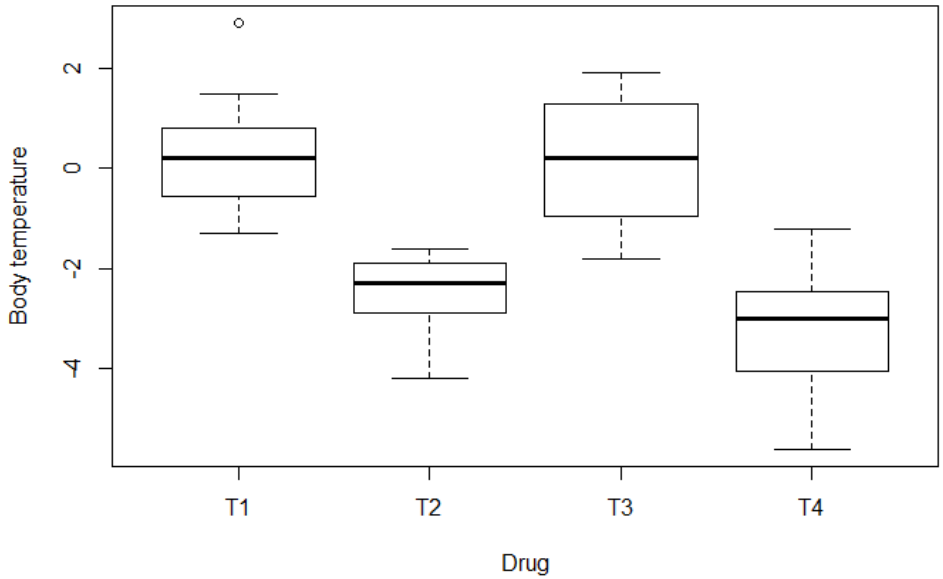


HSD:

	diff	lwr	upr	p adj
T2-T1	−2.72666667	−3.779467	−1.6738668	0.0000000
T3-T1	−0.06666667	−1.119467	0.9861332	0.9983032
T4-T1	−3.43333333	−4.486133	−2.3805335	0.0000000
T3-T2	2.66000000	1.607200	3.7127999	0.0000001
T4-T2	−0.70666667	−1.759467	0.3461332	0.2949015
T4-T3	−3.36666667	−4.419467	−2.3138668	0.0000000

Пример

Действие жаропонижающих на морских свинок:



Критерий Неменьи:

	T1	T2	T3
T2	0.00016	-	-
T3	0.99999	0.00018	-
T4	1.9×10^{-6}	0.79418	2.2×10^{-6}

Критерий Бартлетта

выборки: $X^N = X_1^{n_1} \bigcup \ldots \bigcup X_K^{n_K}, \;\; X_{ki} \sim N\left(\mu_k, \sigma_k^2\right)$

нулевая гипотеза: $H_0 \colon \sigma_1 = \sigma_2 = \ldots = \sigma_K$

альтернатива: $H_1 \colon H_0$ неверна

статистика: $B\left(X^N\right) = \frac{\ln 10}{C}\left((N-K)\ln S^2 - \sum\limits_{k=1}^{K}(n_k-1)\ln S_k^2\right)$

$$S^2 = \frac{1}{N-K}\sum_{k=1}^{K}(n_k-1)\,S_k^2$$

$$C = 1 + \frac{1}{3K+1}\left(\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{n_k-1} - \frac{1}{N}\right)$$

нулевое распределение: табличное

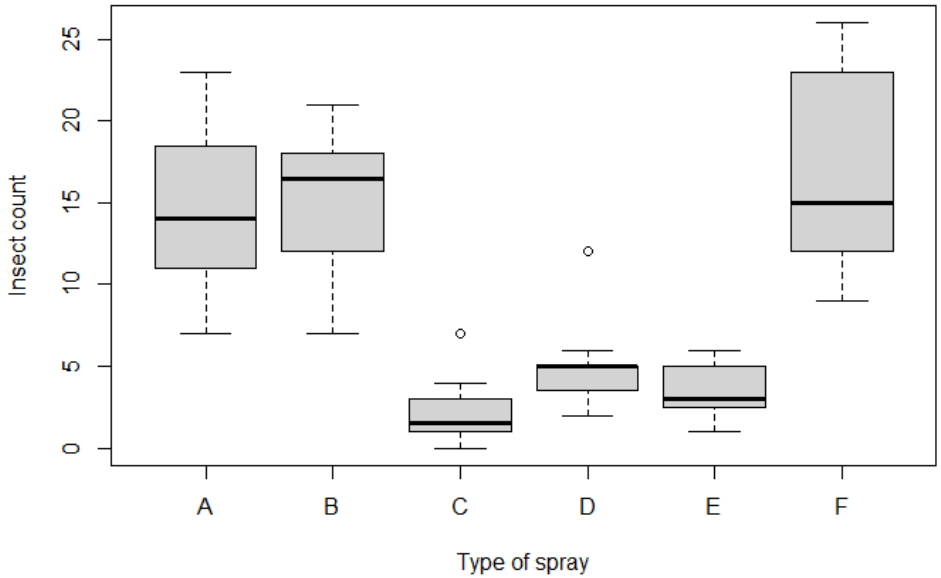
Аппроксимация для $n_k > 6$:

$$B\left(X^N\right) \sim \chi^2_{K-1}.$$

Критерий Бартлетта

Пример, Beall, 1942

Шесть видов инсектицидов тестируется на 12 полях каждый, исследуемый признак — количество насекомых на поле через некоторое время после обработки.



H_0: дисперсия числа насекомых на полях, обрабатываемых разными инсектицидами, одинакова.
H_1: дисперсия числа насекомых на полях, обрабатываемых разными инсектицидами, неодинакова $\Rightarrow p = 9 \times 10^{-5}$.

Двухфакторный дисперсионный анализ

$f_1 \colon X \to \{1, \ldots, K_1\}, \quad f_2 \colon X \to \{1, \ldots, K_2\}$

f_1 \ f_2	1	$\ldots$	j	$\ldots$	K_2
1					
$\vdots$					
i			X_{ij1} $\vdots$ $X_{ijn_{ij}}$		
$\vdots$					
K_1					

Задача: проверить гипотезу об отсутствии влияния факторов f_1 и f_2 на среднее значение признака X.
Случай выборок разного размера для двух факторов значительно сложнее, поэтому будем считать, что $n_{11} = \ldots = n_{K_1 K_2} = n$.

Двухфакторный дисперсионный анализ

Линейная модель:

$$X_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ijk},$$

$i = 1, \ldots, K_1,\ j = 1, \ldots, K_2,\ k = 1, \ldots, n.$

μ — общее среднее значение признака,
α_i — воздействие уровня i фактора f_1,
β_j — воздействие уровня j фактора f_2,
γ_{ij} — дополнительное воздействие комбинации уровней i и j факторов f_1 и f_2,
ε_{ijk} — случайные независимые одинаково распределённые ошибки.

Двухфакторный дисперсионный анализ

H_0^1: фактор f_1 не влияет на значение признака $X \Leftrightarrow$
$\alpha_i = 0 \ \ \forall i,$

H_1^1: f_1 влияет на значение X;

H_0^2: фактор f_2 не влияет на значение признака $X \Leftrightarrow$
$\beta_j = 0 \ \ \forall j,$

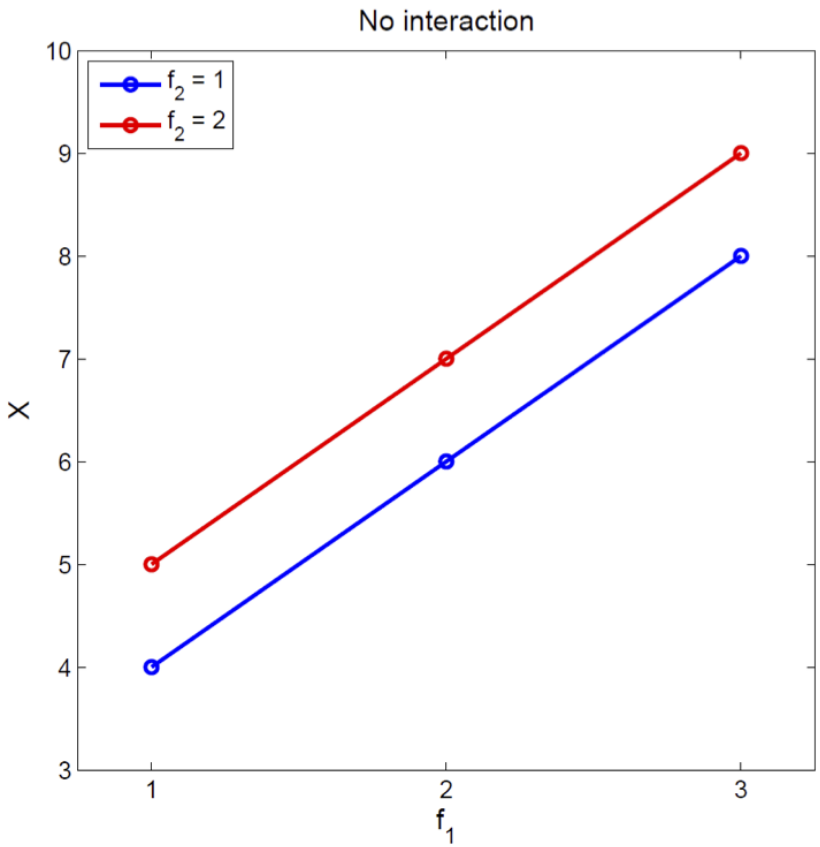
H_1^2: f_2 влияет на значение X;

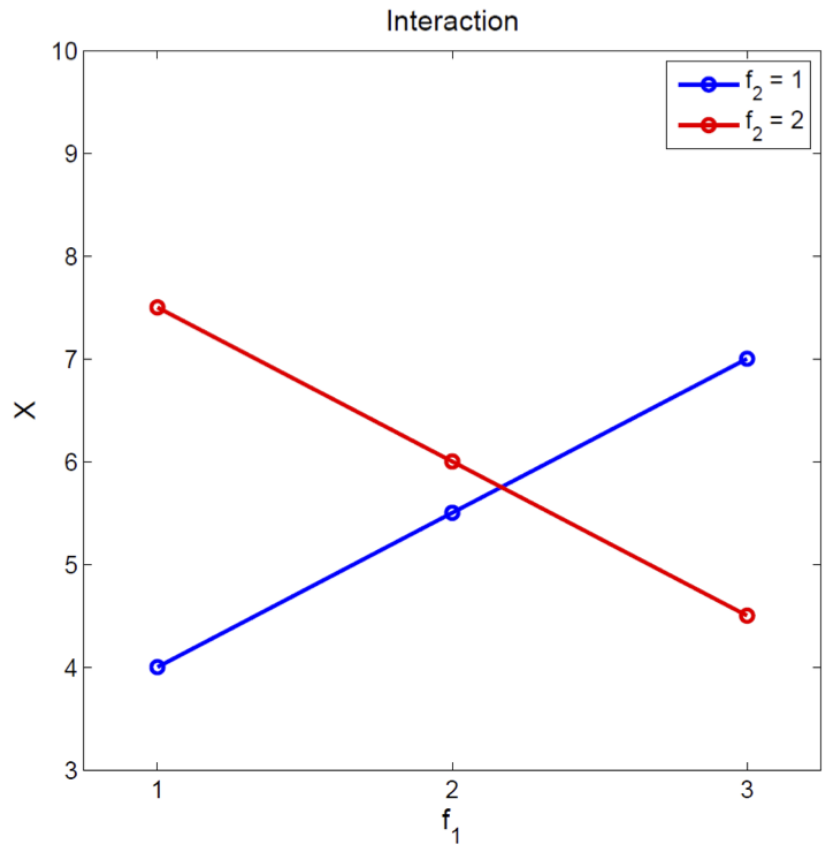
H_0^{12}: между факторами f_1, f_2 нет взаимодействия $\Leftrightarrow$
$\gamma_{ij} = 0 \ \ \forall i, j,$

H_1^{12}: между факторами f_1, f_2 есть взаимодействие.

Двухфакторный дисперсионный анализ

Пример: X — успешность решения задачи (в баллах от 0 до 10),
f_1 — размер команды (1 — маленькая, 2 — средняя, 3 — большая),
f_2 — наличие назначенного лидера (1 — нет, 2 — есть).





Нормальный двухфакторный дисперсионный анализ

Предположим, что $X_{ijk} \sim N\left(\mu_{ij}, \sigma^2\right) \Leftrightarrow \varepsilon_{ijk} \sim N\left(0, \sigma^2\right)$.
$\bar{X}_{ij}$ — среднее в ячейке,
$\bar{X}_{i\bullet}$ — среднее по строке i,
$\bar{X}_{\bullet j}$ — среднее по столбцу j,
$\bar{X}$ — среднее по всей таблице.
Внутрифакторные дисперсии:

$$S_1^2 = \frac{nK_2}{K_1 - 1} \sum_{i=1}^{K_1} \left(\bar{X}_{i\bullet} - \bar{X}\right)^2,$$

$$S_2^2 = \frac{nK_1}{K_2 - 1} \sum_{i=1}^{K_2} \left(\bar{X}_{\bullet j} - \bar{X}\right)^2,$$

$$S_{12}^2 = \frac{n}{(K_1 - 1)(K_2 - 1)} \sum_{i,j} \left(\bar{X}_{ij} - \bar{X}_{i\bullet} - \bar{X}_{\bullet j} + \bar{X}\right)^2,$$

$$S_{res}^2 = \frac{1}{K_1 K_2 (n - 1)} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i,j} \left(X_{ijk} - \bar{X}_{ij}\right)^2.$$

Нормальный двухфакторный дисперсионный анализ

Проверка значимости факторов и их взаимодействия:

- $n > 1$:

$$F_1 = \frac{S_1^2}{S_{res}^2} \sim F\left(K_1 - 1, K_1 K_2 \left(n-1\right)\right) \text{ при } H_0^1,$$

$$F_2 = \frac{S_2^2}{S_{res}^2} \sim F\left(K_2 - 1, K_1 K_2 \left(n-1\right)\right) \text{ при } H_0^2,$$

$$F_{12} = \frac{S_{12}^2}{S_{res}^2} \sim F\left(\left(K_1 - 1\right)\left(K_2 - 1\right), K_1 K_2 \left(n-1\right)\right) \text{ при } H_0^{12};$$

- $n = 1$:

$$F_1 = \frac{S_1^2}{S_{12}^2} \sim F\left(K_1 - 1, \left(K_1 - 1\right)\left(K_2 - 1\right)\right) \text{ при } H_0^1,$$

$$F_2 = \frac{S_2^2}{S_{12}^2} \sim F\left(K_2 - 1, \left(K_1 - 1\right)\left(K_2 - 1\right)\right) \text{ при } H_0^2.$$

При этом подразумевается, что H_0^{12} верна.

Марихуана и скорость реакции

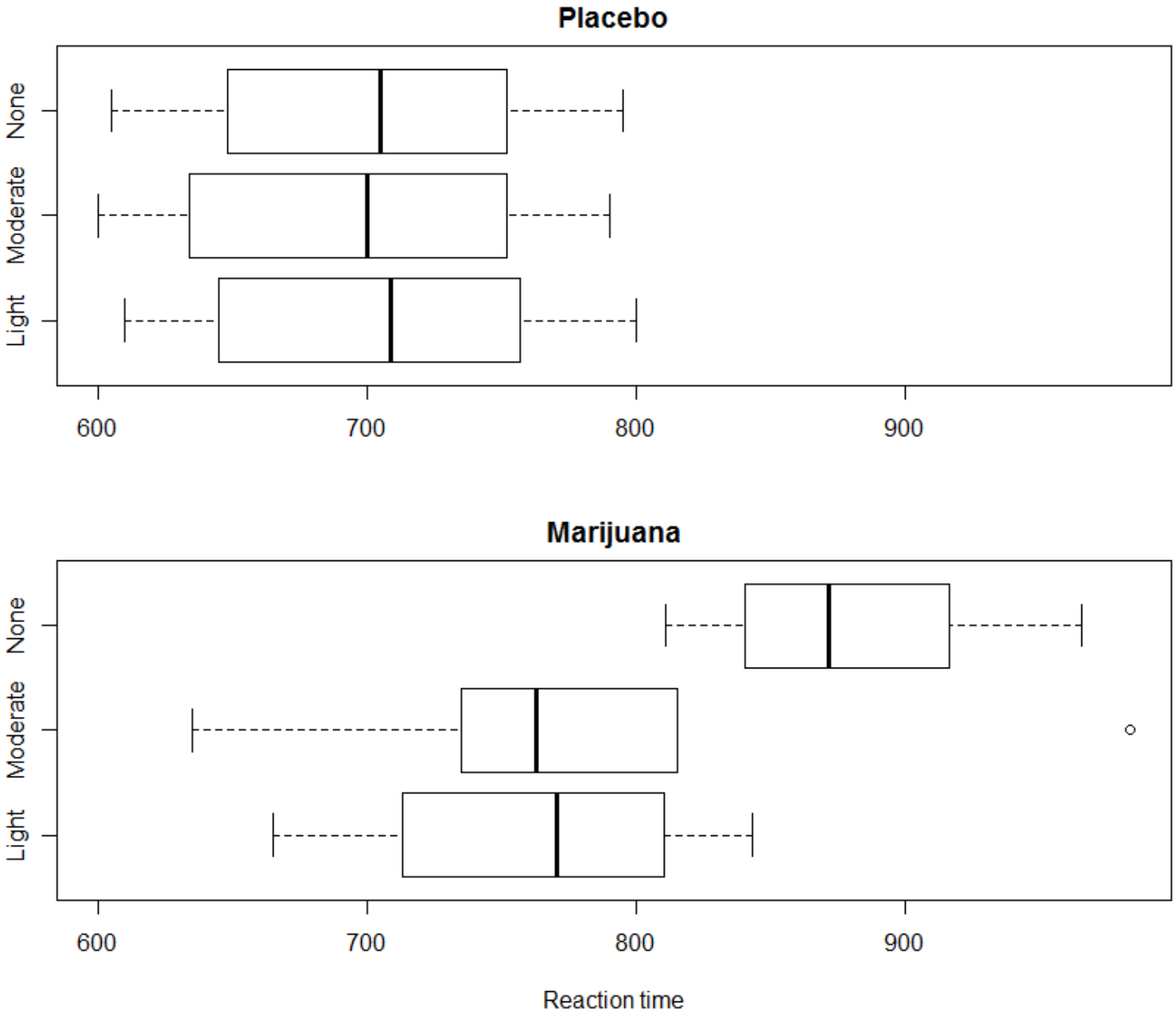
Пример, Pagano, 2012, задача 16.2

Изучалось воздействие марихуаны на скорость реакции. В качестве испытуемых были выбраны по 12 человек из каждой категории:

- никогда не пробовали марихуану;
- иногда употребляют марихуану;
- регулярно употребляют марихуану.

Испытуемые были разделены на две равные группы; половине из них дали выкурить две сигареты с марихуаной, вторая половина выкурила две обычные сигареты с запахом и вкусом марихуаны. Сразу после этого все испытуемые прошли тест на скорость реакции.
Требуется оценить влияние марихуаны на скорость реакции, учитывая фактор предыдущего опыта употребления.

Марихуана и скорость реакции



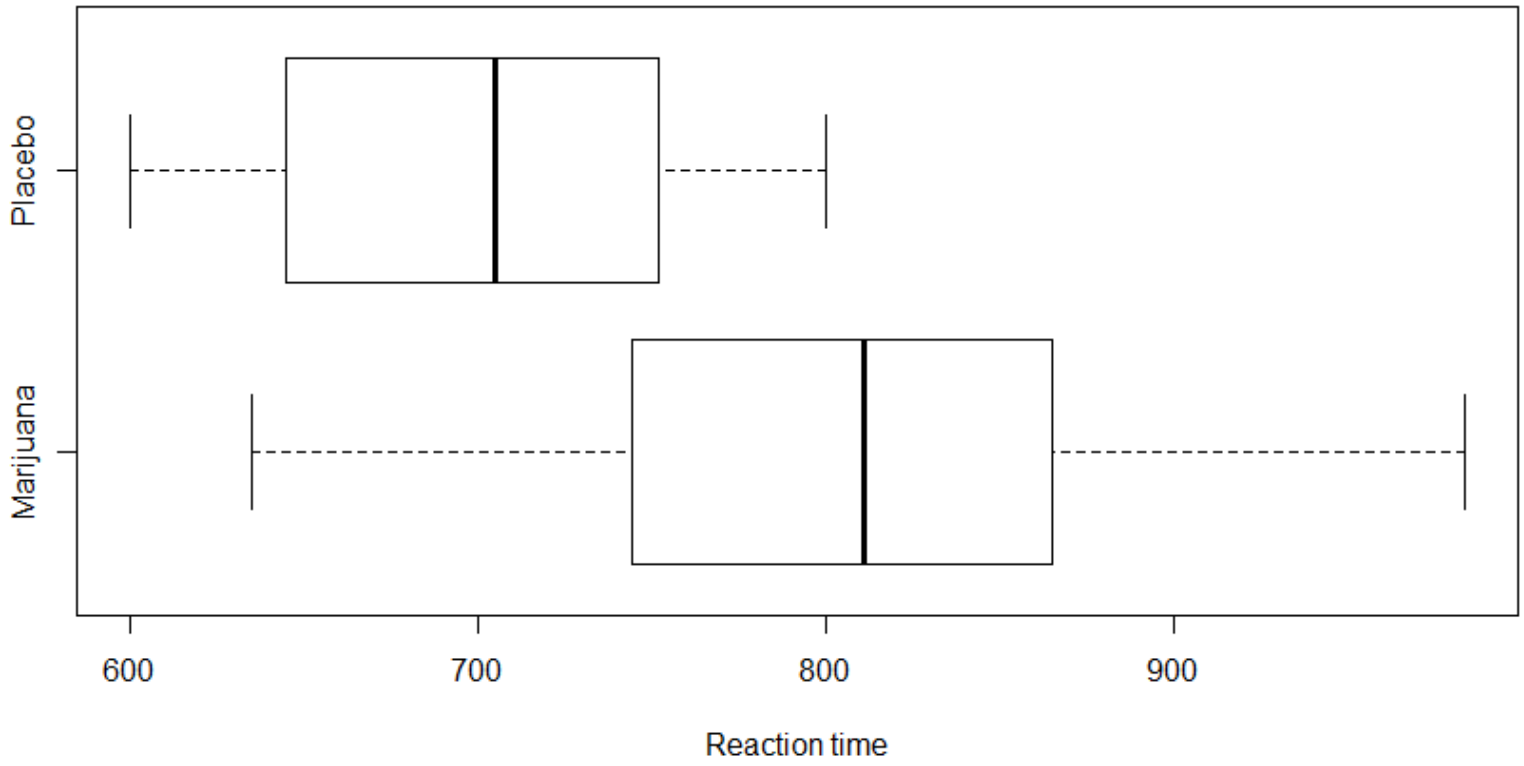
Марихуана и скорость реакции

H_0^1: средняя скорость реакции одинакова при употреблении и марихуаны, и сигарет.
H_0^2: средняя скорость реакции не зависит от предыдущего опыта употребления марихуаны.
H_0^{12}: отсутствует межфакторное взаимодействие между употребляемым веществом и предыдущим опытом употребления марихуаны.

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
Treatment	1	103041	103041	17.584	0.000224
Past usage	2	23634	11817	2.017	0.150752
Past usage:Treatment	2	23642	11821	2.017	0.150665
Residuals	30	175796	5860		

Марихуана и скорость реакции

Вывод: гипотеза о том, что предыдущий опыт употребления не влияет на скорость реакции, не отклоняется $\Rightarrow$ данные по группам можно объединить.



Для объединённых данных:

- однофакторный дисперсионный анализ: $p = 0.0004$;
- критерий Стьюдента, односторонняя альтернатива: $p = 0.0002$, 95% нижний доверительный предел — 61.2.

Иерархический дизайн

Стандартная постановка двухфакторного дисперсионного анализа предполагает, что уровни факторов в выборке распределены независимо.

Пример, когда это не так:
признак — уровень гликогена в икроножной мышце крысы,
фактор 1 — уровень стресса крыс,
фактор 2 — различия между клетками.
Крысы со стрессом живут в клетках 1 и 2, без стресса — 3 и 4.

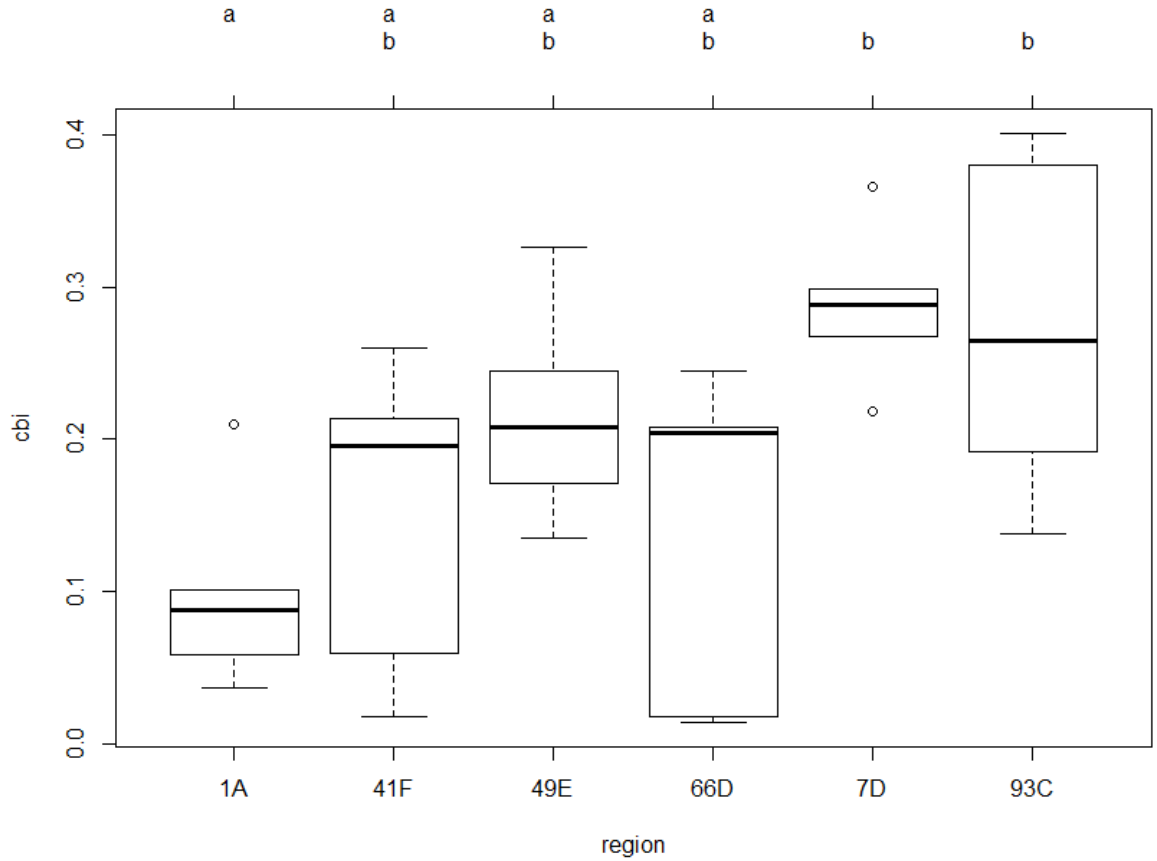
Решение — иерархический дисперсионный анализ.
Линейная модель:

$$X_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_i j + \varepsilon_{ijk},$$

фактор j теперь зависит от фактора i.

CBI чернобрюхой дрозофилы

Codon bias index (CBI) — мера случайности использования синонимичных кодонов в геноме — была определена для нескольких регионов двух хромосом чернобрюхой дрозофилы. Требуется определить, есть ли систематические различия по величине CBI между разными хромосомами и регионами.



CBI чернобрюхой дрозофилы

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
Chromosome	2	0.01033	0.00516	0.657	0.52554
Chromosome:Region	3	0.16295	0.05432	6.915	0.00113
Residuals	30	0.23564	0.00785		

Есть различия между регионами, нет различий между хромосомами.

CBI чернобрюхой дрозофилы

Для уточнения различий применим метод HSD:

Группа 1	Группа 2	CI_L	mean	CI_U
7D	93C	-0.1485	0.0093	0.1672
7D	49E	-0.0847	0.0732	0.2310
7D	41F	-0.0161	0.1417	0.2996
7D	1A	0.0181	0.1886	0.3591
7D	66D	-0.0207	0.1498	0.3203
93C	49E	-0.0802	0.0639	0.2079
93C	41F	-0.0117	0.1324	0.2765
93C	1A	0.0214	0.1793	0.3371
93C	66D	-0.0174	0.1405	0.2983
49E	41F	-0.0755	0.0686	0.2127
49E	1A	-0.0424	0.1154	0.2733
49E	66D	-0.0812	0.0766	0.2345
41F	1A	-0.1110	0.0469	0.2047
41F	66D	-0.1498	0.0081	0.1659
1A	66D	-0.2093	-0.0388	0.1317

Болтающаяся контрольная группа

Лекарство \ Доза	5 мг	10 мг
Препарат A		
Препарат B		

Плацебо, 0 мг

Используется однофакторный дисперсионный анализ с последующими запланированными сравнениями.

Однофакторный дисперсионный анализ для связанных выборок

Объект \ f	1	…	k	…	K
1	X_{11}		X_{k1}		X_{K1}
⋮	⋮	…	⋮	…	⋮
n	X_{1n}		X_{kn}		X_{Kn}

Линейная модель:

$$X_{ki} = \mu + \alpha_k + \beta_i + \varepsilon_{ki},$$

$i = 1, \ldots, n,\ k = 1, \ldots, K.$

μ — глобальное среднее значение признака X,
β_i — отклонение от μ, вызванное влиянием особенностей i-го объекта,
α_k — отклонение от $\mu + \beta_i$, вызванное влиянием k-го уровня фактора f,
ε_{ki} — случайные независимые одинаково распределённые ошибки.

Средние значения X во всех K выборках одинаковы $\Leftrightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_K$.

Критерий Фишера

выборки: $X^N = X_1^{n_1} \bigcup \ldots \bigcup X_K^{n_K}$

нулевая гипотеза: $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_K$

альтернатива: $H_1 :$ H_0 неверна

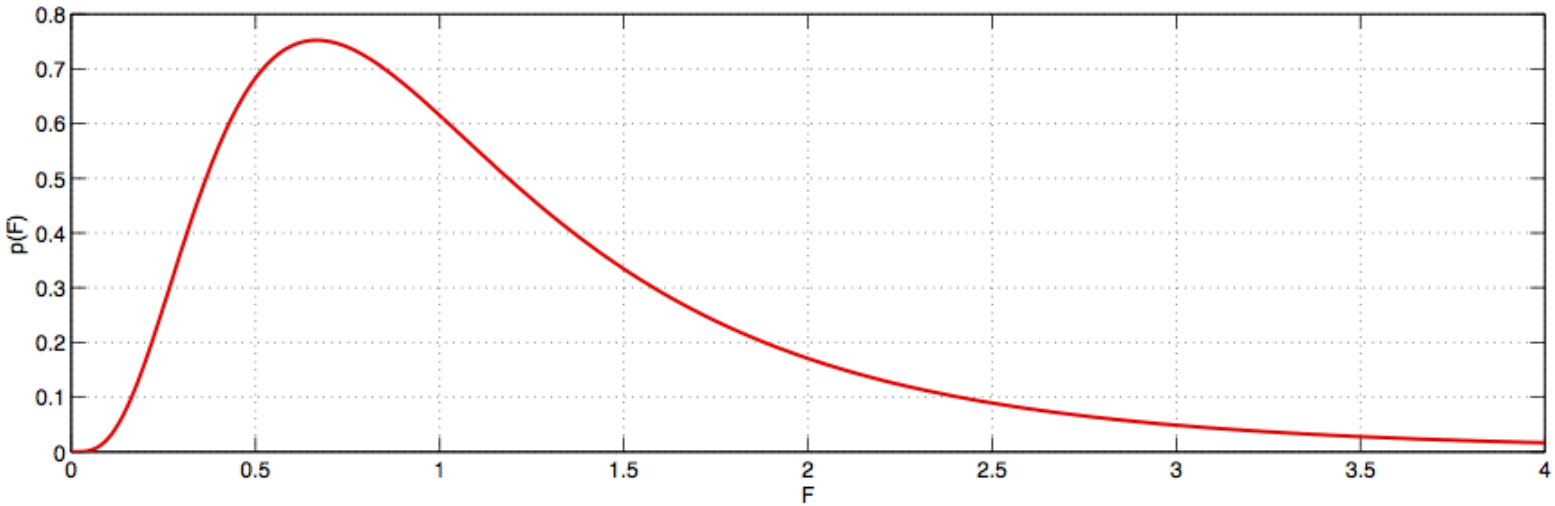
статистика: $$F\left(X^N\right) = \frac{SS_{bg}/(K-1)}{\left(SS_{wg} - SS_s\right)/(n-1)(K-1)}$$

$$SS_{bg} = n \sum_{k=1}^{K} \left(\bar{X}_k - \bar{X}\right)^2$$

$$SS_{wg} = \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=1}^{n} \left(X_{ki} - \bar{X}_k\right)^2$$

$$SS_s = K \sum_{i=1}^{n} \left(\bar{X}_i - \bar{X}\right)^2$$

нулевое распределение: $F(K-1, (n-1)(K-1))$



Критерий Фишера

Предположения метода:

1. распределения признака во всех группах нормально;
2. для фактора с более чем двумя уровнями: попарные разности признака имеют одинаковую дисперсию для любых уровней фактора (сферичность);
3. объекты независимы.

Предположение сферичности на практике нарушается наиболее часто, причём это может привести к росту вероятности ошибки первого рода.

Критерий Фишера

Пример, Pearson, 2003

Исследовалось влияние метилфенидата на способность к отсрочке удовольствия умственно отсталыми детьми с синдромом дефицита внимания и гиперактивности. Каждый испытуемый принимал либо препарат в одной из трёх дозировок, либо плацебо, после чего проходил тест.

H_0: препарат не влияет на среднюю способность к отсрочке удовольствия.
H_1: препарат влияет на среднюю способность к отсрочке удовольствия
$\Rightarrow p = 0.004$.

Критерий Фридмана

выборки: $X_{ki} = \mu + \alpha_k + \beta_i + \varepsilon_{ki}, \;\; i = 1, \ldots, n, \; k = 1, \ldots, K$

нулевая гипотеза: $H_0 : \alpha_1 = \ldots = \alpha_K$

альтернатива: $H_1 : H_0$ неверна

статистика: $S(X) = \frac{12}{nK(K+1)} \sum_{k=1}^{K} R_k^2 - 3n(K-1)$

$R_k = \sum_{i=1}^{n} r_{ki}$

r_{ki} — ранг k-го элемента в i-й строке

нулевое распределение: табличное

Распространённая аппроксимация для $n > 15, K > 10$:

$$S(X) \sim \chi^2_{K-1}.$$

Более точная аппроксимация:

$$\frac{(n-1)\,S(X)}{n(K-1) - S(X)} \sim F\left(n-1, (n-1)(K-1)\right).$$

Критерий Фридмана

Пример

Исследуется 5 технологий вытачивания детали. Каждый из 15 рабочих в течение нескольких смен использовал каждую из технологий. X_{ki} — производительность i-го рабочего при использовании k-й технологии.

H_0: выбор технологии не меняет производительности рабочих.
H_1: выбор технологии влияет на производительность рабочих $\Rightarrow p = 0.356$.

Критерий Пейджа

выборки:	$X_{ki} = \mu + \alpha_k + \beta_i + \varepsilon_{ki}, \;\; i = 1, \ldots, n, \; k = 1, \ldots, K$
нулевая гипотеза:	$H_0 : \alpha_1 = \ldots = \alpha_K$
альтернатива:	$H_1 : \alpha_1 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_K$
статистика:	$L(X) = \sum_{k=1}^{K} k R_k$
	$R_k = \sum_{i=1}^{n} r_{ki}$
	r_{ki} — ранг k-го элемента в i-й строке
нулевое распределение:	табличное

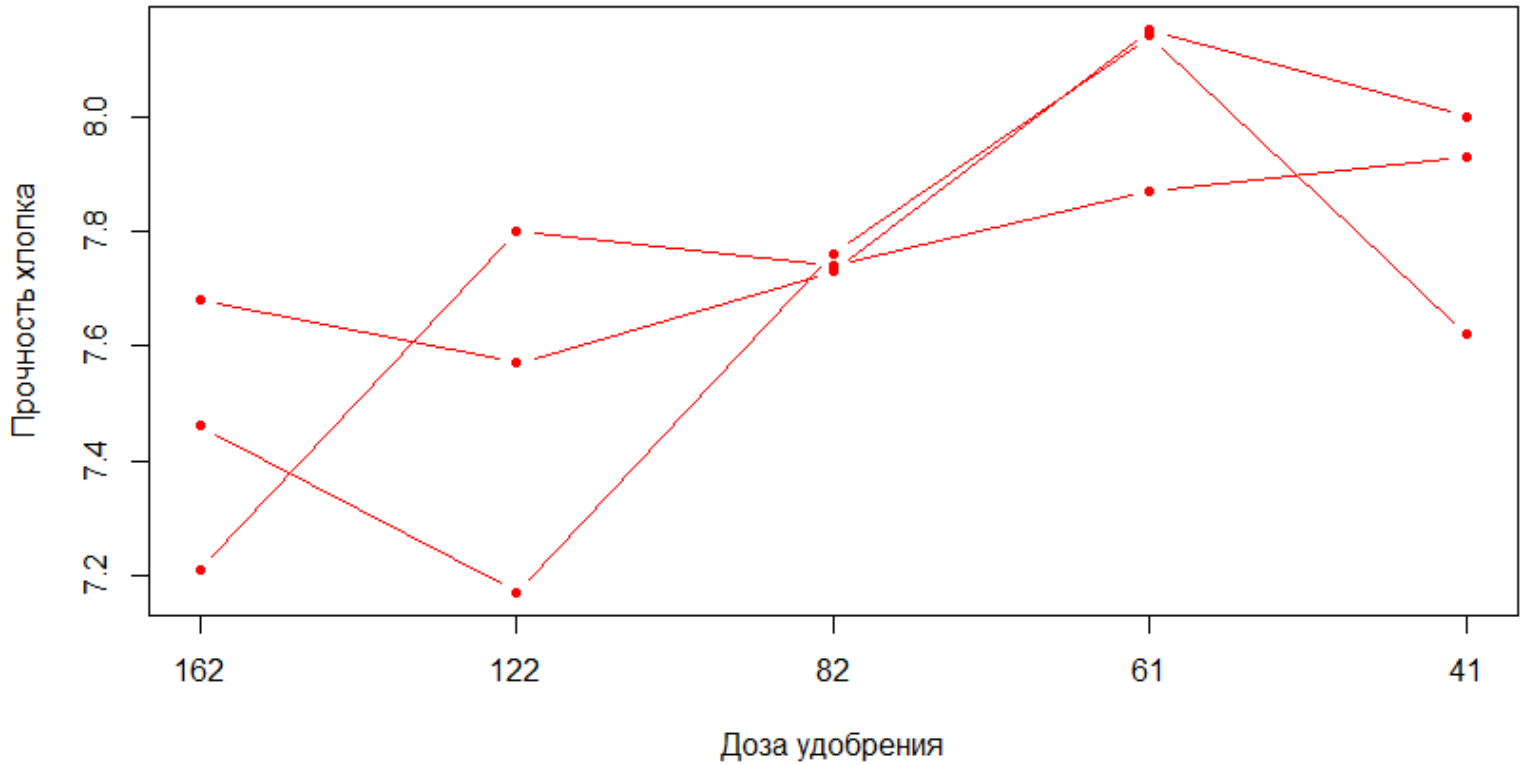
Аппроксимация для $n > 15, K > 10$:

$$L(X) \sim N\left(\frac{nK(K+1)^2}{4}, \frac{n\left(K^3-K\right)^2}{144(K-1)}\right).$$

Критерий Пейджа

Пример, Лагутин, 17.3.2

На 3 полях тестируется 5 доз калийных удобрений. Каждое поле поделено на 5 участков, по одному на каждую дозу. Измерена прочность выращенного на каждом участке хлопка.



H_0: дозировка удобрений не влияет на прочность хлопка.

H_1: дозировка удобрений влияет на прочность хлопка $\Rightarrow p = 0.0663$.

H_1: с ростом дозировки удобрений прочность хлопка уменьшается $\Rightarrow p < 0.01$.

Литература

- разновидности ANOVA — Tabachnick, 3.2;
- unbalanced two-way ANOVA — Tabachnik, 6;
- критерии Краскела-Уоллиса (Kruskal–Wallis) и Джонкхиера (Jonckheere) — Кобзарь, 4.2.1.2.1, 4.2.1.2.9;
- критерии Фридмана (Friedman) и Пейджа (Page) — Лагутин, гл. 17;
- перестановочные аналоги — Bonnini, гл. 3, 4;
- критерий Маухли (Mauchly's sphericity test), поправки при отсутствии сферичности (Huynh-Feldt, Greenhouse-Geisser, lower-bound) — `http://en.wikipedia.org/wiki/Mauchly's_sphericity_test`;
- profile analysis — альтернатива w.s. ANOVA — Davis;
- **примеры проведения дисперсионного анализа в R:**
  1-way b.s., 2-way b.s., 1-way w.s., 2-way w.s.

Литература

Лагутин М.Б. *Наглядная математическая статистика*, 2007.

Кобзарь А.И. *Прикладная математическая статистика*, 2006.

Beall G. (1942). *The Transformation of data from entomological field experiments*. Biometrika, 29, 243–262.

Bonnini S., Corain L., Marozzi M., Salmaso S. *Nonparametric Hypothesis Testing - Rank and Permutation Methods with Applications in R*, 2014.

Davis C.S. *Statistical Methods for the Analysis of Repeated Measurements*, 2002.

Pagano R.R. *Understanding Statistics in the Behavioral Sciences*, 2012.

Pearson D.A, Santos C.W., Roache J. D., et al. (2003). *Treatment effects of methylphenidate on behavioral adjustment in children with mental retardation and ADHD*. Journal of the American Academy of Child and Adolescent Psychiatry, 42(3), 209-216.

Tabachnick B.G., Fidell L.S. *Using Multivariate Statistics*, 2012.