Задание 2.4

Сотников Антон, 674 группа

29 марта 2020 г.

Задача

Одеяла с электрообогревом применяются в хирургии для восстановления температуры тела пациента после операции. Имеются два вида одеял: стандартный (b0) и экспериментальный (b1).

Для 14 пациентов известно время, за которое нормальная температура тела восстанавливается при использовании одеяла каждого из видов.

Как понять, отличаются ли экспериментальные одеяла от стандартного?

Требуется:

1. Записать задачу формально в виде проверяемой гипотезы и альтернативы.
2. Предложить не менее 2-х критериев и соответствующих статистик для проверки этой гипотезы и описать:
   - при каких дополнительных условиях (если они есть) стоит применять тот или иной критерий
   - в чём преимущества/недостатки того или иного критерия
3. Аналитически выразить достигаемый уровень значимости каждого критерия на выборке или опишите, как его получить с помощью табличных данных.

Решение

Заметим, что о природе распределения данных мы, с первого взгляда, сказать ничего не можем. В таком случае рационально попробовать двухвыборочные непараметрические критерии.

Критерий знаков

Формальная постановка:

- Выборки связанные: $X_1^n = (X_{11}, \ldots, X_{1n}),\ X_2^n = (X_{21}, \ldots, X_{2n})$.
- $H_0 : P(X_1 > X_2) = \frac{1}{2}$ (экспериментальные одеяла не отличаются от стандартных),

  $H_1 : P(X_1 > X_2) <\neq> \frac{1}{2}$ (одеяла различаются).
- $T(X_1^n, X_2^n) = \sum_{i=1}^n [X_{1i} > X_{2i}]$.
- Нулевое распределение: $Bin\left(n, \frac{1}{2}\right)$

Т.к. данный критерий является непараметрическим, то он имеет широкое применение, что является плюсом. Такой критерий следует применять, если

1. Известны только знаки разностей Δx_i.
2. При истинности альтернативы Δx_i небольшие, но имеют систематический характер по знаку.
3. При истинности нулевой гипотезы разности большие по модулю, но случайны по знаку.

Значение p-value в данном случае выражается как $\frac{C_n^i}{2^n}$. В таком случае мы получаем следующее при уровне значимости α в случае двусторонней альтернативы:

$$\boxed{H_0 \text{ отвергается} \leftrightarrow \text{p-value} \notin \left[\frac{\alpha}{2}, \frac{1-\alpha}{2}\right]}$$

В случаях альтернатив $<, >$ для отвержения нулевой гипотезы p-value должно быть меньше α и больше $1 - \alpha$, соответственно.

Критерий Уилкоксона

Формальная постановка:

- Выборки связанные: $X_1^n = (X_{11}, \dots, X_{1n}),\ X_2^n = (X_{21}, \dots, X_{2n})$.
- $H_0 : med(X_1 - X_2) = 0$ (средние температуры при использовании обоих типов одеял не отличаются),

  $H_1 : med(X_1 - X_2) <\neq> 0$ (средние температуры различаются).
- $W(X_1^n, X_2^n) = \sum_{i=1}^n rank(|X_{1i} - X_{2i}|) \cdot sign(X_{1i} - X_{2i})$.
- Нулевое распределение: табличное.

Данный критерий имеет некоторые ограничения. Уверенно его можно использовать для выборок объема < 25 элементов (это как раз наш случай). Помимо этого, критерий Уилкоксона лучше использовать, когда величина разностей варьируется в некотором диапазоне $(10 - 15\%)$.

Если тестовая статистика больше табличного значения с уровнем значимости $\frac{\alpha}{2}$ и числом степеней свободы N (число ненулевых разностей), то нулевая гипотеза отвергается.

t-критерий Стьюдента

Можем получить более мощный критерий, если сделаем предположение о нормальном распределении наших данных.

Формальная постановка:

- Выборки связанные: $X_1^n = (X_{11}, \dots, X_{1n}),\ X_2^n = (X_{21}, \dots, X_{2n})$,
$$X_i^n \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i).$$
- $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ (средние температуры при использовании обоих типов одеял не отличаются),

  $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ (средние температуры различаются).
- $T(X_1^n, X_2^n) = \dfrac{\overline{X_1} - \overline{X_2}}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})}} \cdot \sqrt{n}$, где $X_i = X_{1i} - X_{2i}$.
- Нулевое распределение: $St(n-1)$.

P-value можно рассчитать таблично для квантилей $St(13)$. В итоге получаем

$$\boxed{H_0 \text{ отвергается} \leftrightarrow \text{p-value} \notin \left[\frac{\alpha}{2}, \frac{1-\alpha}{2}\right]}$$