

# Содержание

<b>1</b>	<b>Семинар 5</b>	<b>2</b>
1.1	Задача 1	2
1.2	Задача 2	2
1.3	Задача 3	2
1.4	Задача 4	2
1.5	Задача 5	2
1.6	Задача 6	3
1.7	Задача 7	3
1.8	Задача 8	3
1.9	Задача 9	3
1.10	Задача 10	4
1.11	Задача 11	4
<b>2</b>	<b>Семинар 6</b>	<b>5</b>
2.1	Задача 1	5
2.2	Задача 2	5
2.3	Задача 3	5
2.3.1	Пункт А	5
2.3.2	Пункт Б	6
2.4	Задача 4	6
2.5	Задача 5	6
2.6	Задача 6	7
2.7	Задача 7	7
2.8	Задача 8	7
2.9	Задача 9	7
<b>3</b>	<b>Семинар 7</b>	<b>7</b>
3.1	Задача 1	7
3.2	Задача 2	8
3.3	Задача 3	8
3.4	Задача 5	8
3.5	Задача 7	8
<b>4</b>	<b>Семинар 9</b>	<b>9</b>
4.1	Задача 1	9
4.2	Задача 2	9
4.3	Задача 3	9
4.4	Задача 4	9
4.5	Задача 5	10
4.6	Задача 6	10

# 1 Семинар 5

## 1.1 Задача 1

Докажите, что любая нетождественная перестановка единственным образом представима в виде произведения независимых циклов.

*Доказательство.* Рассмотрим элемент 1. Он переходит в  $\sigma(1)$  под действием перестановки  $\sigma$ .

Если 1 перешла в себя, то цикл закончился.

Если 1 перешла не в себя, то рассматриваем  $\sigma(\sigma(1)), \dots, \sigma^k(1)$ . Рано или поздно мы перейдем в единицу.

В любом случае, мы получили какой-то цикл. Запомним его.

Рассмотрим  $i$ , который не участвовал в этом цикле и проделаем с ним то же самое. Получим ещё один цикл. Продолжаем так действовать до тех пор, пока все элементы не распадутся в циклы. Это обеспечивает существование такого произведения независимых циклов.

Ясно, что каждый элемент присутствует только в одном цикле (то есть зная лишь один элемент цикла, мы понимаем, как устроен весь цикл). Это обеспечивает единственность (с точностью до перестановки циклов).  $\square$

## 1.2 Задача 2

Докажите, что любая перестановка  $\sigma$  в некоторой степени дает тождественную перестановку  $id$ .

*Доказательство.* Если  $\sigma = id$ , то и доказывать нечего.

Если  $\sigma \neq id$ , то давайте рассмотрим представление этой перестановки в виде произведения независимых циклов. Возьмём произведение длин этих циклов и победим.  $\square$

## 1.3 Задача 3

Докажите, что порядок перестановки равен наименьшему общему кратному длин независимых циклов, в произведение которых раскладывается перестановка.

*Доказательство.* Если  $\sigma = id$ , то и доказывать нечего.

Если  $\sigma \neq id$ , то давайте рассмотрим представление этой перестановки в виде произведения независимых циклов. Ясно, что каждый из циклов возвращает действует на своих элементах тождественно тогда и только тогда, когда он применен  $k \cdot \alpha_i$  раз, где  $\alpha_i$  - длина соответствующего независимого цикла,  $k$  - натуральное.

Значит, порядок перестановки должен делить длину каждого независимого цикла. Вот и получается, что порядок перестановки хотя бы НОК.

Предположим, что мы нашли число  $q$ , меньшее НОКа, для которого  $\sigma^q = id$ .  $q$  делится на длину каждого цикла. Но тогда и получается, что  $q$  хотя бы НОК.  $\square$

## 1.4 Задача 4

Илья взял собранный кубик Рубика, проделал над ним некоторую комбинацию вращений и положил на место. Докажите, что можно повторить точно такие же действия над кубиком еще несколько раз, чтобы он оказался вновь в собранном состоянии.

*Доказательство.* Илья действует перестановками  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$  на кубике Рубика. Если Илья в результате  $\sigma_n \cdot \dots \cdot \sigma_1$  привёл кубик Рубика в собранное состояние, то и доказывать нечего.

Иначе давайте применять эти перестановки так, что в какой-то момент две из них повторяться (кубик Рубика имеет конечное число состояний, значит, точно повторится)  $\sigma_1 \cdot \dots \cdot \sigma_i = \sigma_1 \cdot \dots \cdot \sigma_j$ . Пусть справа множителей больше. Домножим обе части на  $(\sigma_{i+1} \cdot \dots \cdot \sigma_j)^{-1}$  (то есть просто откатимся на несколько действий). И тогда получим:  $\sigma_1 \cdot \dots \cdot \sigma_i = id$   $\square$

## 1.5 Задача 5

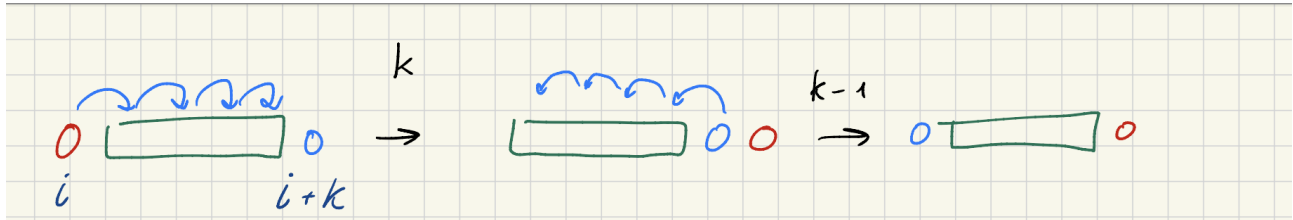
Любая транспозиция является нечетной перестановкой

**Определение 1.** Элементарная транспозиция - транспозиция элементов  $i, i + 1$ .

**Утверждение.** Элементарная транспозиция меняет знак перестановки (то есть количество инверсий на 1).

*Доказательство.* Ну действительно: если элементарная транспозиция меняет местами два элемента подряд, то было так, что  $i < i + 1$ , а после перестановки они поменялись местами. Вот и получилась смена знака.

Далее заметим, что любая транспозиция распадается в  $2k - 1$  элементарную транспозицию. Действительно: нужно  $k$  свапов, чтобы  $i$ -ый элемент встал в  $j$ -ую ячейку. После этого нужно  $k - 1$  свапов, чтобы  $j$ -ый элемент встал в  $i$ -ую ячейку. Но  $2k - 1$  это нечетное число, каждая элементарная транспозиция меняет знак, поэтому поменяется знак  $2k - 1$  раз, то есть нечетное число раз.  $\square$



## 1.6 Задача 6

Домножение любой перестановки на транспозицию меняет четность исходной перестановки.

*Доказательство.* Каждая транспозиция распадается в  $2k - 1$  элементарных (по 5-ой задаче), и каждая элементарная транспозиция меняет знак. Получается, транспозиция меняет знак.  $\square$

## 1.7 Задача 7

- Любая перестановка представима в виде произведения нескольких транспозиций.
- Та же задача) На уроке физкультуры школьники некоторого класса выстроились в шеренгу. Учитель может попросить любых двух школьников поменяться местами. Докажите, что он всегда может расставить школьников по росту.

*Доказательство.* Оба пункта решаются идеей пузырьковой сортировки. По сути на это можно смотреть так: применение элементарной транспозиции – это просто swar двух элементов. Последовательно поднимаем «пузырьком» элементы так, чтобы все стояли на своих местах.  $\square$

## 1.8 Задача 8

Цикл длины  $k$  является четной перестановкой тогда и только тогда, когда  $k$  нечетно.

*Доказательство.* Любой цикл длины  $k$  распадается в  $k - 1$  транспозицию. Применение  $k - 1$  транспозиции меняет знак  $k - 1$  раз. Вот и получается, что цикл длины  $k$  является четным тогда и только тогда, когда  $k$  нечетно.  $\square$

## 1.9 Задача 9

При умножении любой перестановки на четную перестановку четность исходной перестановки сохраняется, при умножении на нечетную перестановку четность меняется.

Оставлю доказательство Димы.

**Утверждение.** Пусть  $\sigma, \tau \in S_n$  – произвольные перестановки, тогда

$$\text{sgn}(\sigma\tau) = \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\tau)$$

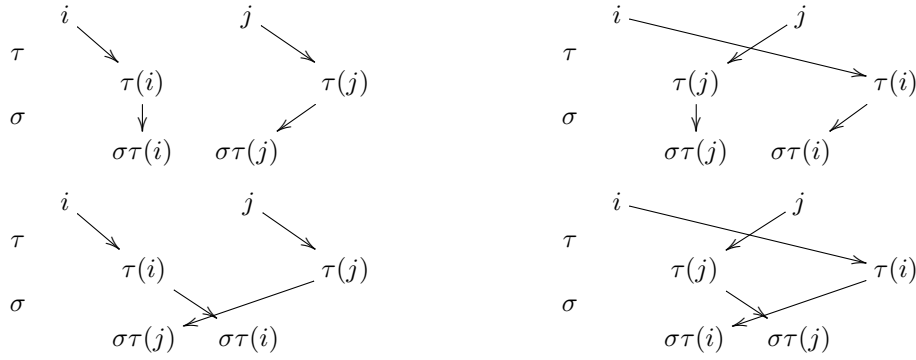
*Доказательство.* Надо показать, что

$$d(\sigma) + d(\tau) = d(\sigma\tau) \pmod{2}$$

Давайте фиксируем пару  $i, j$  и докажем следующее равенство

$$d_{ij}(\tau) + d_{\tau(i)\tau(j)}(\sigma) = d_{ij}(\sigma\tau) \pmod{2}$$

Возможны следующие 4 случая:



Занесем результаты в таблицу

$d_{ij}(\tau)$	0	1	0	1
$d_{\tau(i)\tau(j)}(\sigma)$	0	0	1	1
$d_{ij} + d_{\tau(i)\tau(j)}(\sigma)$	0	1	1	2
$d_{ij}(\sigma\tau)$	0	1	1	0

Что доказывает равенство

$$d_{ij}(\tau) + d_{\tau(i)\tau(j)}(\sigma) = d_{ij}(\sigma\tau) \pmod{2}$$

Теперь сложим его для всех пар  $i < j$ . Получим

$$\sum_{i < j} d_{ij}(\tau) + \sum_{i < j} d_{\tau(i)\tau(j)}(\sigma) = \sum_{i < j} d_{ij}(\sigma\tau) \pmod{2}$$

Откуда

$$d(\tau) + \sum_{i < j} d_{\tau(i)\tau(j)}(\sigma) = d(\sigma\tau) \pmod{2}$$

Так как  $\tau: X_n \rightarrow X_n$  – биекция, то если  $(i, j)$  пробегает все разные пары, то и  $(\tau(i), \tau(j))$  пробегает все разные пары. Значит оставшаяся сумма равна  $d(\sigma)$ , что завершает доказательство.  $\square$

## 1.10 Задача 10

Четных перестановок  $n$  элементов столько же, сколько и нечетных, то есть и тех, и других ровно  $\frac{n!}{2}$ .

*Доказательство.* Нужно лишь показать, что между четными и нечетными перестановками есть биекция. Но это совсем просто сделать. Из любой четной перестановки при помощи транспозиции  $(1; 2)$  можно получить нечетную, а из получившейся нечетной с помощью этой же транспозиции можно получить исходную четную.

Значит, эта биекция и в правду есть, но тогда количество четных и нечетных перестановок равны. Всего перестановок  $n!$ , тогда четных и нечетных по  $\frac{n!}{2}$ .  $\square$

## 1.11 Задача 11

**Игра в пятнашки.** В таблицу  $4 \times 4$  вписаны подряд (слева направо, сверху вниз) числа от 1 до 15, так, что правый нижний угол остался свободным. За ход можно сдвинуть на свободное место любое из чисел, которое соседствует с ним по стороне (и таким образом свободное место поменяет свое расположение). Докажите, что такими ходами нельзя получить комбинацию, отличающуюся от исходной лишь транспозицией чисел 14 и 15.

*Доказательство.* Давайте назовём пустое место числом 0.

Тогда нам разрешены лишь «элементарные» транспозиции с нулём. «Элементарные» в том плане, что мы можем их свопнуть в этой игре лишь с теми числами, которые стоят с нулём, а не в смысле определения 1. Ну вообще формально говоря, нехорошо делать перестановку на множестве с нулём, так как перестановка бьёт из множества  $\{1, \dots, n\}$  в себя, но очевидно, что между ними есть биекция, поэтому пофиг.

Пусть мы смогли с помощью перестановки  $\sigma$  (не обязательно той, что является композицией элементарных транспозиций) добиться того, что 14 и 15 поменялись местами. Тогда мы действовали транспозицией 14 и 15. А транспозиция это вообще говоря нечетная перестановка. Значит, если за  $N$  ходов мы сможем добиться того, что 14 и 15 поменялись местами, то  $N$  обязательно нечетно.

С другой стороны, нам разрешены только «элементарные» преобразования с нулём, поэтому каждое действие - это применение транспозиции с нулём. За одно действие ноль двигается в одно из четырёх направлений: влево, вправо, вниз, вверх. В результате наших преобразований ноль вернулся на то же место. Значит, число преобразований влево было таким же, как и число преобразований вправо и аналогично по вертикали. В итоге получаем, что на самом деле наша перестановка является четной. Но так как каждая транспозиция нечетна, то  $N$  - четно. Получили противоречие с тем, что  $N$  - нечетно.  $\square$

## 2 Семинар 6

### 2.1 Задача 1

Докажи, что количество перестановок  $n$  элементов, при которых ни один элемент не остается на своем месте (то есть таких перестановок  $\sigma$ , что  $\forall k \rightsquigarrow \sigma(k) \neq k$ , равно:

$$n! \cdot \left(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!}\right)$$

*Доказательство.* Давайте посчитаем количество перестановок, где есть неподвижный элемент.

Пусть  $N_{i_1, \dots, i_n}$  - это число перестановок, где  $i_1, \dots, i_n$  - неподвижные элементы<sup>1</sup>.

Ясно, что  $N_i = (n-1)!$ ,  $N_{ij} = (n-2)!$ , ...

Мы хотим посчитать  $|A_1 \cup A_2 \dots A_n|$ .

По формуле включений-исключений это равно:

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| &= \sum_{i=1}^n N_i - \sum_{i < j} N_{ij} + \sum_{i < j < k} N_{ijk} - \dots + (-1)^n N_{1\dots n} = \\ &= n \cdot (n-1)! - C_n^2 \cdot (n-2)! + \dots + (-1)^n \cdot 1 = \frac{n!}{1} - \frac{n!}{2} + \frac{n!}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{n!}{n!} = n! \cdot \left(1 - \frac{1}{2} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right) \end{aligned}$$

Всего перестановок на  $n$  элементах  $n!$ , поэтому чтобы получить итоговый ответ, нужно лишь вычесть эту сумму из  $n!$ .

**Ответ:**

$$n! \cdot \left(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!}\right)$$

### 2.2 Задача 2

Ясно, что нужно просто поделить на  $n!$  ответ из прошлой задачи, так как нам не важен порядок людей, которые взяли свою бумажку.

**Ответ:**  $1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!}$

### 2.3 Задача 3

1. Докажи, что:

$$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)!$$

2. Найди  $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

#### 2.3.1 Пункт А

*Доказательство.* Заметим, что обе штуки можно интерпретировать как число хороводов (то есть  $n$  людей, которые идут в одном направлении). В левой части мы просто выбрали 1 цикл и это однозначно задает, кто за кем идет. В правой части мы взяли любого человека и для него решили, за кем из оставшихся  $n-1$  людей он идет. Вот и получается, что части равны.  $\square$

<sup>1</sup>То есть те перестановки, где  $\sigma(i) = i \ \forall i$

### 2.3.2 Пункт Б

Нас устраивают перестановки вида  $(*)(***)$  и  $(**)(**)$ .

Перестановок первого вида  $4 \cdot 2!$  (выберем кто идет в одиночный цикл, а для оставшихся двух воспользуемся результатом из пункта А)

Перестановок второго вида  $\frac{C_4^2}{2}$  (выбрать двух из четырех в первый цикл, и нам не важна перестановка циклов).

**Ответ:**  $4 \cdot 2! + \frac{C_4^2}{2}$

□

## 2.4 Задача 4

Докажи, что:

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} = n \cdot \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}$$

*Доказательство.* Пусть есть один выделенный элемент.

Ясно, что второе слагаемое соответствует случаю, когда выделенный элемент находится в одиночном цикле (на оставшихся  $n$  элементах нам остается лишь распределить их по  $k-1$  циклу).

Подумаем над первым слагаемым. Там написано разбиение  $n$  элементов на  $k$  циклов. Теперь попробуем вставить выделенный элемент в какой-нибудь из циклов.

В любой цикл длины  $m_i$  можно поставить этот выделенный элемент на любое из  $m_i + 1$  мест, но на самом деле случай, когда выделенный элемент стоит в начале и конце цикла – это одно и то же. Поэтому, на самом деле в любом цикле длины  $m_i$  есть  $m_i$  способов.

Ясно, что выделенный элемент можно поставить в любой из циклов, поэтому для этого слагаемого есть  $\sum_i m_i$  способов. Но суммарная длина циклов равна  $n$ . Вот и получается  $n$  способов. □

## 2.5 Задача 5

Пусть  $s(n, k)$  обозначает коэффициент при  $x^k$  в многочлене

$$x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)$$

Докажи, что  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = |s(n, k)|$

*Доказательство.* Поменяем все минусы на плюсы, так как у нас есть модуль, то это ничего не поменяет.

Введём обозначения:

$$x^{\overline{1}} = x$$

$$x^{\overline{2}} = x(x+1)$$

...

$$x^{\overline{n}} = x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)^2$$

Будем доказывать это утверждение по индукции.

База при  $n=1$  очевидна.

Покажем индукционный переход.

Заметим, что  $(x+(n-1))x^k = x^{k+1} + (n-1)x^k$ . Но:

$$x^{\overline{n}} = (x+(n-1))x^{\overline{n-1}}$$

В силу индукционного предположения:

$$\begin{aligned} x^{\overline{n}} &= (x+(n-1)) \sum_{k=1}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} x^k = \sum_{k=1}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} x^{k+1} + \sum_{k=1}^{n-1} (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} x^k = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} x^k + \sum_{k=1}^{n-1} (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} x^k = \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} \right) x^k \end{aligned}$$

Воспользуемся утверждением из прошлой задачи и получим, что:

$$\sum_{k=1}^n \left( \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} \right) x^k = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k$$

Это доказывает индукционный переход. □

<sup>2</sup>Такие обозначения называются восходящим факториалом (rising factorial) или Символом Похгаммера (Pochhammer symbol)

## 2.6 Задача 6

Докажи, что  $S(n, k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k)$ .

*Доказательство.* Первое слагаемое соответствует тому, что выделенный элемент занял одну новую коробку. На оставшихся  $n-1$  элементах остается  $k-1$  коробка.

Второе слагаемое соответствует тому, что мы распределили  $n-1$  элемент по  $k$  коробкам, а потом выделенный засунули в одну из них.

Вот и получается, что это тождество верно.  $\square$

## 2.7 Задача 7

Докажи, что  $S(n, k) = k^n - C_k^1 \cdot (k-1)^n + C_k^2 \cdot (k-2)^n - \dots + (-1)^{k-1} \cdot C_k^{k-1} \cdot 1^n$

*Доказательство.* Это неслучайно похоже на формулу включений-исключений.

Давайте посчитаем величину  $|A_1 \cup A_2 \dots \cup A_k|$ , где  $A_i$  – это множество способов, при которых  $A_i$  пуста.

Ясно, что  $|A_i| = \frac{(k-1)^n}{k!}$ , так как это интерпретируется так: у нас остается  $k-1$  коробка и мы для каждого из  $n$  элементов можем положить любой из  $n$  элементов лишь в одну из  $k-1$  коробок. Но мы не различаем коробки. Вот и возникает деление.

Аналогично:  $|A_i \cap A_j| = \frac{(k-2)^n}{k!}$

Ну и так далее вплоть до  $|A_1 \cap A_2 \dots \cap A_k| = 0$  (если ни в какую коробку нельзя ничего положить, то у нас 0 способов разложить  $n$  элементов по этим коробкам).

Тогда по формуле включений-исключений:

$$|A_1 \cup A_2 \dots \cup A_k| = \frac{k^n}{k!} - C_k^1 \cdot \frac{(k-1)^n}{k!} + C_k^2 \cdot \frac{(k-2)^n}{k!} - \dots + (-1)^{k-1} \cdot C_k^{k-1} \cdot 1^n = \frac{1}{k!} \cdot \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \cdot C_k^{k-i} \cdot (k-i)^n$$

$\square$

## 2.8 Задача 8

Пусть  $X, Y$  – конечные множества, причем в первом из них  $k$  элементов, во втором  $n$  элементов. Напомним, что сюръекцией из множества  $X$  в множество  $Y$  называется такая функция  $f$  из  $X$  в  $Y$ , что для любого  $y \in Y$  найдется  $x \in X$ , такой что  $f(x) = y$ . Сколько существует различных сюръекций из  $X$  в  $Y$ ?

Пусть элементы в  $Y$  – это  $n$  коробок, а элементы в  $X$  – это  $k$  элементов, которые мы хотим распределить по  $n$  коробкам. Тогда ясно, что нас интересует число  $S(k, n)$ . Но число Стирлинга второго рода не различает коробки между собой, а для нас очень важно, в какой именно элемент из  $Y$  отображаться. Поэтому нужно домножить на  $n!$ .

**Ответ:**  $S(k, n) \cdot n!$

## 2.9 Задача 9

Докажи, что  $B_n = \sum_{k=0}^n S(n, k)$

*Доказательство.* Слагаемое с  $k=0$  можно сразу выкинуть, так как очевидно, что оно равно нулю (0 способов разложить  $n$  элементов по  $k$  коробкам).

Остальные слагаемые с  $k \neq 0$  интерпретируются так: мы задаем  $k$  классов эквивалентности и для этого числа классов эквивалентности смотрим все способы разбить  $n$  элементов на эти классы эквивалентности, чтобы ни один из них не был пуст.  $\square$

## 3 Семинар 7

### 3.1 Задача 1

Существует ли 1000000 подряд идущих натуральных чисел, среди которых ровно 7 простых?

*Доказательство.* Ясно, что среди первого миллиона чисел есть больше 7 простых чисел.

Но при этом среди чисел  $100001! + 2, 100001! + 3, \dots, 100001! + 1000001$  нет ни одного простого числа. Действительно: первое число делится на 2, второе – на 3, ..., последнее – на 1000001.

Тогда по принципу дискретной непрерывности двигая «окошко» из миллиона простых чисел обязательно найдется миллион простых чисел, среди которых ровно 7 простых чисел.  $\square$

### 3.2 Задача 2

На клетчатой доске  $100 \times 100$  половина клеток белые, а половина – черные. Докажи, что можно разрезать ее по границам клеток на две части с равным числом черных клеток.

*Доказательство.* Будем добавлять по одной клетке, начиная с угловой. Количество черных клеток увеличивается либо на 0, либо на 1. В начале число черных клеток либо 0, либо 1. В конце их 5000. По принципу дискретной непрерывности будет момент, в который будет 2500 черных клеток.  $\square$

### 3.3 Задача 3

**[Всерос, закл 2016, 10-11 класс]** По кругу стоят  $n$  мальчиков и  $n$  девочек. Назовём пару из мальчика и девочки хорошей, если на одной из дуг между ними стоит поровну мальчиков и девочек (в частности, стоящие рядом мальчик и девочка образуют хорошую пару). Оказалось, что есть девочка, которая участвует ровно в 10 хороших парах. Докажи, что есть и мальчик, который участвует ровно в 10 хороших парах.

Решение взято с сайта [problems.ru](http://problems.ru)

Заметим, что на любой дуге между членами хорошей пары поровну девочек и мальчиков. Пусть  $D$  – девочка, участвующая в 10 хороших парах. Обозначим всех детей по часовой стрелке  $K_1, K_2, \dots, K_{2n}$  так, что  $K_1$  – это  $D$ , и продолжим нумерацию циклически (например,  $K_0 = K_{2n}$  и  $K_{2n+1} = K_1$ ). При  $i = 1, 2, \dots, 2n$  обозначим через  $d_i$  разность между количествами девочек и мальчиков среди  $K_1, K_2, \dots, K_i$ ; в частности,  $d_1 = 1 - 0 = 1$  и  $d_{2n} = 0$  (поэтому можно продолжить эту последовательность, полагая  $d_{2n+1} = d_1$  и т. д.). Девочка  $D$  образует с  $K_i$  хорошую пару тогда и только тогда, когда  $d_i = 0$  и  $K_i$  – мальчик, то есть  $d_i = 0$  и  $d_{i-1} = 1$ . Итак, найдутся ровно 10 индексов  $i$  с такими свойствами.

Рассмотрим любого мальчика  $M = K_s$ , образующего с  $D$  хорошую пару; тогда  $d_s = 0$  и  $d_{s-1} = 1$ . Аналогично получаем, что мальчик  $M$  образует хорошую пару с  $K_i$  ровно тогда, когда  $d_s = d_{i-1}$  и  $K_i$  – девочка (то есть  $d_{i-1} = 0$  и  $d_i = 1$ ).

Заметим, что любые два числа  $d_i$  и  $d_{i+1}$  отличаются на единицу. Разобьём их на группы последовательных чисел, не меньших единицы, и группы последовательных чисел, не больших нуля. Тогда при обходе круга по часовой стрелке "переходов" из первых групп во вторые будет столько же, сколько и "переходов" из вторых групп в первые. Значит, у  $M$  столько же хороших напарниц, сколько у  $D$  хороших напарников. Это и требовалось доказать.

### 3.4 Задача 5

Клетки шахматной доски  $8 \times 8$  занумерованы числами от 1 до 32 так, что каждое число использовано дважды. Доказать, что можно выбрать 32 клетки, занумерованные разными числами, так, что на каждой вертикали и каждой горизонтали найдется хотя бы по одной выбранной клетке.

*Доказательство.* Ясно, что всего выборов клеток  $2^{32}$ . А сколько «плохих» выборов?

Пусть в 1-ом столбце ничего не выбрано. Значит, мы не выбрали ни одно число из этого столбца. Тогда у меня лишь свобода на оставшихся 24 числах. То есть таких способов  $2^{24}$

Аналогично для оставшихся 7 столбцов и 8 строк. Тогда получается, что этих «плохих» способов  $16 \cdot 2^{24} = 2^{28}$

Плохих способов меньше чем всего способов. Значит есть и хороший способ.  $\square$

### 3.5 Задача 7

*Доказательство.* На турнир приехали  $n$  игроков. Каждая пара игроков, согласно регламенту турнира, должна провести одну встречу (ничьих не бывает). Доказать, что при некотором  $n$  игроки могли сыграть так, что для каждого множества из  $k$  игроков найдется игрок, победивший их всех

Ясно, что игр было сыграно  $C_n^2$ .

Но тогда каждой игры есть 2 исхода: победил первый или победил второй.

Значит, существует всего  $2^{C_n^2}$  турниров.

Пусть  $A_k$  – множество всех турниров, когда для набора игроков  $K$  ( $|K| = k$ ) не существует игрока из  $K$ , который победил всех других игроков  $K$ .

Заметим, что  $|\cup A_k| = C_n^k \cdot (2^k - 1)^{n-k}$ .

Теперь единственное, что нужно понять: почему это число меньше, чем общее число турниров.

Заметим, что  $C_n^k \cdot (2^k - 1)^{n-k} < 2^{n-1} (2^k)^{n-k} = 2^{-k^2+nk+(n-1)} = 2^{-\frac{n^2}{4}+n-1}$

Ну и по индукции там ещё с помощью технической возни доказывается, что эта штука и вправду меньше, чем общее число турниров.  $\square$



## 4 Семинар 9

Для удобства независимое множество иногда называется анти-кликой.

### 4.1 Задача 1

Докажите, что для всех возможных значений переменных верно:  $R(s, t) = R(t, s)$ ,  $R(1, n) = 1$ ,  $R(2, n) = n$ ,  $R(3, 3) = 6$ .

*Доказательство.* Свойство  $R(s, t) = R(t, s)$  очевидно из определения (надо поменять синий и красный цвет).

$R(1, n) = 1$  тоже ясно. Существует один неизоморфный граф на 1 вершине, для которого всё очевидно.

$R(2, n) = n$  уже стоит пояснить. Рассмотрим граф на  $n$  вершинах. Ясно, что либо есть пара знакомых людей, либо никто никого не знает. Поэтому  $R(2, n) \leq n$ .

Предположим, что  $R(2, n) = s < n$ . Если в графе на  $s$  вершинах нет ребра, то ясно, что нет ни клики на 2 вершинах, ни анти-клики на  $n$  вершинах (так как банально  $s < n$ ).

$R(3, 3) = 6$ . То, что  $R(3, 3) \leq 6$  – ясно из рассуждения на 8 красном задаче.

То, что  $R(3, 3)$  в точности равно 6 доказывается с помощью контр-примера на 5. Важно, что контр-пример на 5 автоматически доказывает, что меньше 5 тем более не получится (ну так как можно выкинуть вершины из графа на 5 вершинах и рассуждения останутся верны).  $\square$

### 4.2 Задача 2

Докажите, что:  $R(s, t) \leq C_{s+t-2}^{t-1}$

*Доказательство.* Будем доказывать по индукции.

Ясно, что  $R(2, n) = n = C_{n+2-2}^{2-1}$

Отсюда видно, что наша оценка в некотором смысле точная (то есть хоть где-то она достигается).

Воспользуемся теоремой Рамсея и предположением индукции:

$$R(s, t) \leq \underbrace{R(s-1, t)}_{\leq C_{s+t-3}^{t-1}} + \underbrace{R(s, t-1)}_{\leq C_{s+t-3}^{t-2}} \leq C_{s+t-2}^{t-1} \quad (C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1})$$

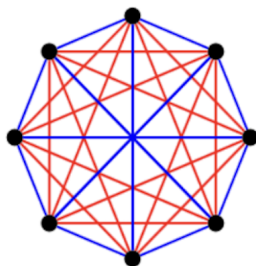
$\square$

### 4.3 Задача 3

Докажите, что  $R(3, 4) = 9$ .

*Доказательство.*  $R(3, 4) \leq \underbrace{R(2, 4)}_4 + \underbrace{R(3, 3)}_6 - 1 = 9$  в силу усиления теоремы Рамсея.

Контр-пример на 8 вот:



$\square$

### 4.4 Задача 4

Докажите, что  $R(3, 5) = 14$ .

*Доказательство.*  $R(3, 5) \leq \underbrace{R(2, 5)}_5 + \underbrace{R(3, 4)}_9 = 14$

Контр-пример на 13 строится довольно интересно, с рассмотрением некоторых специфичных остатков из группы  $\mathbb{Z}_{13}$ . Можно почитать [тут](#)  $\square$

## 4.5 Задача 5

Докажите, что  $R(4, 4) = 18$

Доказательство.  $R(4, 4) \leq \underbrace{R(3, 4)}_9 + \underbrace{R(4, 3)}_9 = 18$

Контр-пример на 17 [тут](#)

□

Если вам любопытно, то вот что известно человечеству о числах Рамсея:

Values / known bounding ranges for Ramsey numbers  $R(r, s)$  (sequence [A212954](#) in the [OEIS](#))

$r \backslash s$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2		2	3	4	5	6	7	8	9	10
3			6	9	14	18	23	28	36	40–41 <sup>[14]</sup>
4				18	25 <sup>[9]</sup>	36–40	49–58	59 <sup>[15]</sup> –79	73–105	92–135
5					43– 46 <sup>[11]</sup>	59 <sup>[16]</sup> – 85	80–133	101–193	133–282	149 <sup>[15]</sup> – 381
6						102– 160	115 <sup>[15]</sup> – 270	134 <sup>[15]</sup> – 423	183–651	204–944
7							205–492	219–832	252– 1368	292–2119
8								282–1518	329– 2662	343–4402
9									565– 4956	581–8675
10										798– 16064

## 4.6 Задача 6

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству теоремы Рамсея.

□