Содержание

1 Семинар 5

1.1 Задача 1

Сколько существует способов переставить буквы в слове ОБОРОНОСПОСОБНОСТЬ так, чтобы никакие две буквы О не стояли рядом?

Слово ОБОРОНОСПОСОБНОСТЬ содержит 7 букв «О» и 11 букв не «О», а именно: 2 буквы Б, 2 буквы Н, 3 буквы С, остальные буквы по одному разу. Тогда ясно, что способов переставить «не О» $\frac{11!}{2!\cdot 2!\cdot 3!}$

Теперь давайте считать все буквы «не О» перегородками, а буквы «О» – шарами. Тогда нужно в каждый промежуток между перегородками (а также до и после перегородок) поставить не более одного шара. Или другими словами, для каждого шара выбрать промежуток, куда мы его поставим, но при этом повторяться эти промежутки не могут.

Перегородок 11 штук, поэтому подходящих промежуток 12 (один слева от первой перегородки, 10 между перегородками, один справа от последней перегородки). Тогда для первого шара я могу выбрать один из 12 промежутков, для второго – один из 11, $\ldots$, для седьмого – один из шести. Но вообще говоря, я не различаю буквы О (шары) между собой, поэтому ещё нужно делить на 7! Получаем C_{12}^{7}.

Не забываем домножить на количество способов переставить буквы не О и получаем ответ.

Ответ: $C_{12}^{7}\cdot\frac{11!}{2!\cdot 2!\cdot 3!}$

1.2 Задача 2

Сколькими способами можно разделить 15 одинаковых монет между 7 нумизматами так, чтобы каждому досталось хотя бы по монете?

Давайте всем ребятам сразу дадим по монетке, чтобы никого не обидеть. Тогда останется 8 монеток, которые нужно распределить между 7 ребятами.

Будем считать, что у нас 6 перегородок (на 1 меньше, чем число ребят), а 8 монеток – шарами. Ну и все что нужно сделать – это любыми способами расставить 8 шаров и 6 перегородок. Ясно, что число способов это сделать – C_{14}^{6}

Ответ: C_{14}^{6}

1.3 Задача 3

Давайте сразу дадим всем числам по 5. Тогда останется раздать 75 между 5 числами. Поставим 4 перегородки и 75 шариков. Думаю, понятно, что всё, что идёт до первой перегородки – идет в первое число, всё что идет между первой и второй перегородкой – идёт во второе число ну и так далее.

79 мест и надо просто расставить 4 перегородки, на эти 79 мест. Итог: C_{79}^{4}

Ответ: C_{79}^{4}

1.4 Задача 4

Сколько существует способов представить число n в виде суммы натуральных слагаемых, если способы, отличающиеся лишь порядком слагаемых, считаются различными?

Ясно, что слагаемых не более, чем n. Пусть слагаемых k штук. Аналогично предыдущей задаче можно про это думать так: каждому из k слагаемых мы раздали по единице. А оставшиеся $n-k$ можно распределять как угодно. Для этого нужно лишь расставить $n-k$ шаров и $k-1$ перегородок. Ясно, что всего объектов n, а расстановка $k-1$ перегородок однозначно задаёт всё. Поэтому число способов это сделать C_n^{k-1}.

Тогда всё что нужно сделать это взять сумму

$$\sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} C_n^{k} = 2^{n-1}$$

Ответ: 2^{n-1}

1.5 Задача 5

Докажи тождество, не применяя формулу для количества сочетаний:

$$C_n^k \cdot C_k^m = C_n^m \cdot C_{n-m}^{k-m}$$

Доказательство. Слева написано следующее: сначала из n человек выберем k крутых ребят, а потом из k крутых ребят выберем m мега-крутых ребят.

Справа написано следующее: сначала из n человек выберем m мега-крутых ребят, а потом из оставшихся $n-m$ выберем $k-m$ просто крутых ребят.

Ясно, что мы посчитали одно и то же двумя способами, что доказывает это тождество □

1.6 Задача 6

Докажи тождество, не применяя формулу для количества сочетаний:

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_{n-1}^k + C_{n-2}^k + \ldots + C_k^k$$

Доказательство. Заметим, что $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$. (Либо мы берем $n+1$ элемент и тогда среди оставшихся n нужно выбрать ещё k, либо мы не берем $n+1$ элемент и тогда среди оставшихся всё ещё нужно выбрать $k+1$).

Аналогично можно расписать последнее слагаемое в этой сумме:

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1} = C_n^k + C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k+1}$$

Продолжаем действовать аналогично и в итоге приходим к такой сумме:

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_{n-1}^k + C_{n-2}^k + \ldots + C_k^k$$

□

1.7 Задача 7

а) В столовой университета продается n различных блюд. Илья каждый день ходит в столовую и заказывает некоторый набор блюд, но со странным ограничением: ни в какие два дня наборы блюд, которые он заказал, не должны повторяться. Какое максимальное количество дней Илья сможет так ходить в столовую и какое суммарное количество блюд он закажет за это время?

б) Из n человек нужно выбрать команду и назначить в ней капитана. Команда может состоять и из одного человека, тогда он будет капитаном.) Сколько существует способов это сделать?

в) Используя пункты (а) и (б), докажи тождество:

$$C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + nC_n^n = n \cdot 2^{n-1}$$

1.7.1 Пункт А

Ясно, что Илья сможет ходить в столовую 2^n дней, так как на наборе из n элементов есть 2^n уникальных подмножеств (каждый элемент либо берем, либо не берем).

Какое число блюд Илья съест за это время? Фиксируем конкретное блюдо. Тогда на оставшихся $n-1$ типах блюд он мог заказать всё что угодно (по 2 варианта для каждого типа блюда: берём в заказ, или не берём. Тогда для фиксированного типа блюда Илья съест их 2^{n-1}.

Но так как различных типов блюд всего n, то всего блюд будет съедено $n \cdot 2^{n-1}$

1.7.2 Пункт Б

Можно взять в команду одного человека и из этого одного выбрать капитана. Можно взять в команду двух людей и из этих двоих выбрать одного капитаном. Можно взять в команду k людей и из этих k выбрать одного капитаном.

Ясно, что итоговое число способов будет равно:

$$C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + nC_n^n$$

1.7.3 Пункт В

Доказательство. Надо лишь понять, почему пункты а и б решают одну и ту же задачу. Ну, например, увидим задачу про блюда в задаче про капитанов. Давайте сначала выберем одного из n людей капитаном, а затем из оставшихся $n-1$ людей каждого мы либо берём, либо не берём. Получается, что всего способов набрать команду таким образом ровно $n \cdot 2^{n-1}$. Это объясняет тождество

$$C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + nC_n^n = n \cdot 2^{n-1}$$

В задаче про блюда это можно увидеть следующим образом: если Илья заказал набор из k блюд, то он (удивительно) съест k блюд. Способов выбрать k блюд из n всего C_n^k. Поэтому Илья съест следующее число блюд:

$$C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + nC_n^n$$

Ну а ранее мы уже показали, что эту же величину можно посчитать и как $n \cdot 2^{n-1}$ □

1.8 Задача 8

В предыдущих задачах, а также в лонгриде мы доказывали нижеперечисленные тождества комбинаторным способом. Докажи эти тождества, используя бином Ньютона:

а) $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots$

б) $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \cdots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$

в) $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \cdots + nC_n^n = n \cdot 2^{n-1}$

1.8.1 Пункт А

Доказательство. Нетрудно заметить, что $(1-1)^n = C_n^n \cdot 1^n \cdot (-1)^0 + C_n^{n-1} \cdot 1^{n-1} \cdot (-1)^1 + \ldots + C_n^0 \cdot 1^0 \cdot (-1)^n$.

Слева написан ноль, поэтому давайте перенесем слагаемые, у которых цэшка написана с минусом влево (то есть у которых минус единица в четной степени). Тогда получим требуемое. □

1.8.2 Пункт Б

Доказательство. Нетрудно заметить, что $(1+x)^n \cdot (1+x)^n = (1+x)^{2n}$

Раскроем по биному скобки слева, а именно посчитаем коэффициент при x^n:

$$(1+x)^n \cdot (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} = C_n^k \cdot C_n^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot C_n^k = \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2$$

А скобки справа раскрываются совсем просто, это просто C_{2n}^n. Это доказывает требуемое. □

1.8.3 Пункт В

Доказательство.

$$(x+1)^n = C_n^0 + C_n^1 x + \ldots + C_n^n x^n$$

Продифференцируем по x:

$$n \cdot (x+1)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 \cdot x + \ldots + nC_n^n x^{n-1}$$

Подставим $x = 1$:

$$n \cdot 2^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 \cdot + \ldots + nC_n^n$$

□

1.9 Задача 9

Докажи эти тождества, используя треугольник Паскаля:

а) $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots$

б) $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \cdots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$

1.9.1 Пункт А

Доказательство. Если n четно, то достаточно воспользоваться симметрией треугольника Паскаля.

Если же n нечетно, то можно воспользоваться тем, что каждое число в треугольнике Паскаля получено из суммы двух чисел выше него и свести задачу к четному случаю, не хочу это подробно расписывать. □

1.9.2 Пункт Б

Доказательство. Интерпретация правой части такая: оказывается, что C_{2n}^n - количество путей из верха треугольника Паскаля до C_{2n}^n (и вообще число путей до C_n^k в треугольнике Паскаля равно C_n^k, так как по сути на каждом «шаге» из вершины треугольника вы можете пойти либо вправо, либо влево, следовательно, достаточно выбрать k раз, когда вы пойдете вправо)

А что написано в левой части? Смотрите: чтобы дойти до точки C_{2n}^n нужно сделать n шагов влево и n шагов вправо.

Тогда просто нужно выбрать стрелки влево, оставшиеся - будут стрелки вправо.

Но n стрелок влево можно выбрать так: из первых n выбираем 0 стрелок влево, из последних n выбираем n стрелок влево. Либо из первых n стрелок выбираем 1 стрелку влево, из последних n выбираем $n-1$ стрелку влево. Ну и так далее. Итог: $C_n^0 C_n^n + C_n^1 C_n^{n-1} + \dots C_n^n C_n^0$.

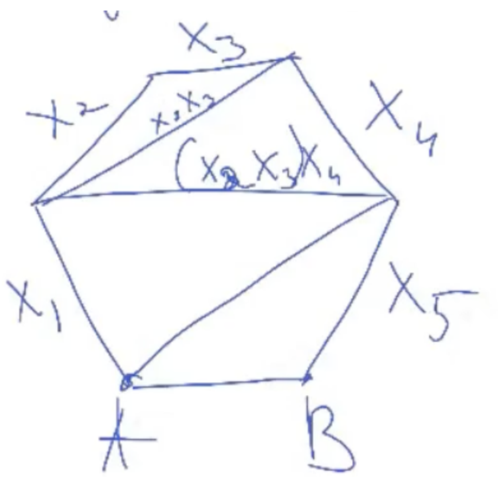
Вот и получается, что мы посчитали одно и то же двумя способами. ☐

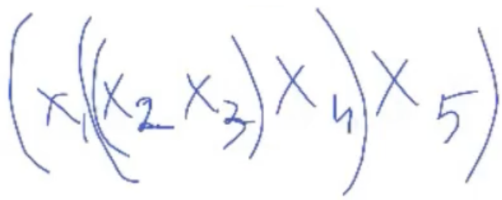
1.10 Задача 10

Сколькими способами можно разрезать правильный n-угольник на треугольники, проводя непересекающиеся диагонали?

Утверждение. *Для правильного n-угольника количество его триангуляций равно c_{n-2} (c_k - кол-во правильных скобочных последовательный из $2k$ скобок).*

Доказательство. Давайте просто покажем, что между триангуляциями и правильными скобочными последовательностями (ПСП) есть биекция. Это объяснит наше утверждение.





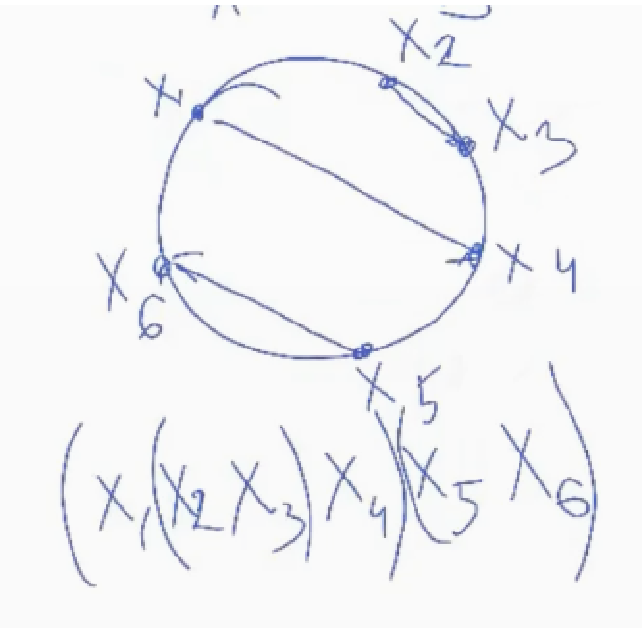
Думаю, по этой картинке понятно, как устроена биекция и как получать картинку из ПСП и наоборот. Не хочется подробно расписывать =) ☐

1.11 Задача 11

На окружности отмечено $2n$ различных точек. Сколькими способами можно провести n попарно непересекающихся хорд, соединяющих эти точки, так, чтобы каждая точка была концом ровно одной из проведенных хорд?

Утверждение. *Для правильного $2n$ различных точек число искомых способов равно c_n*

Доказательство. Давайте просто покажем, что между выбором хорд и правильными скобочными последовательностями (ПСП) есть биекция.



Опять же не хочу ничего подробно распмсывать, картинка многое объясняет, ну, разве что стоит немного аккуратно поговорить про то, что хорды не пересекаются, но я не хочу этим заниматься. $\square$

2 Семинар 6

2.1 Задача 1

Докажи, что клетчатый квадрат размера $2^n \times 2^n$ без любой клетки можно разрезать на уголки, состоящие из трёх клеток.

Доказательство. База индукции при $n = 1$ очевидна.

Предположим, что я умею разрезать квадратик $2^n \times 2^n$ без любой клетки на уголки, состоящие из трёх клеток, и мне дали любой квадрат $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ без любой клетки.

Первое, что нужно сделать – разрезать его на 4 квадрата $2^n \times 2^n$ как показано на рисунке:

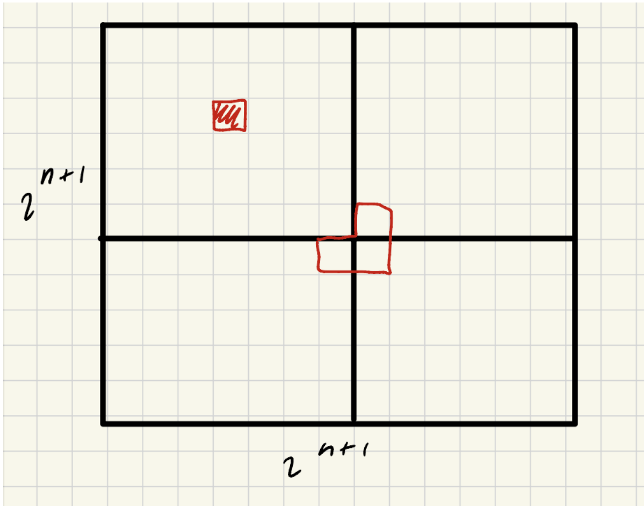


Рис. 1: Заштрихованная красная клетка отсутствует в квадрате $2^{n+1} \times 2^{n+1}$

Тогда отсутствующая клетка попадает в один из этих квадратов. Но тогда в оставшихся трёх я могу вырезать по клетке так, чтобы в итоге образовался уголок (аналогично картинке). Тогда получается 4 квадрата $2^n \times 2^n$. По предположению индукции я умею разрезать квадрат $2^n \times 2^n$ без любой клетки на уголки, состоящие из трёх клеток. Поэтому я смогу разрезать каждый из четырех квадратов на уголки. Значит, и весь квадрат $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ без одной клетки тоже побьётся на уголки. Переход доказан. $\square$

2.2 Задача 2

На плоскости провели n прямых так, что любые две проведённые прямые пересекаются, и никакие три прямые не пересекаются в одной точке. На сколько частей прямые поделят плоскость?

Посмотрим, как устроен ответ при маленьких n:

Кол-во прямых	**Кол-во частей плоскости**
0	1
1	2
2	4
3	7
4	11

Возникает гипотеза, что ответ вычисляется по такой формуле:

$$\frac{n(n+1)}{2} + 1$$

Доказательство. Докажем это по индукции:

База индукции. при $n = 0$ очевидна.

Предположение индукции. Предположим, что n прямых делят плоскость на $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ частей

Доказательство перехода индукции. Хотим доказать, что $n+1$ прямая делит плоскость на $\frac{(n+1)(n+2)}{2} + 1$ частей.

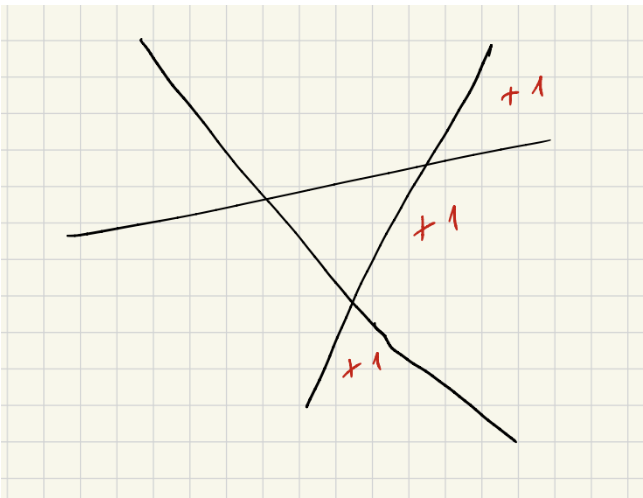
Давайте выкинем из конструкции с $n+1$ прямой одну прямую, проверим, что она является корректной конструкцией (любые две проведённые прямые пересекаются, и никакие три прямые не пересекаются в одной точке, далее такие конструкции называются конструкцией общего положения) из условия с n прямыми, а затем убедимся в верности утверждения для $n+1$.

Важно: мы делаем именно так, а не прибавляем к n прямых ещё одну потому что не ясно, почему это не испортит конструкцию из условия.

Действительно: если мы из конструкции с $n+1$ прямых общего положения выкидываем одну прямую, то получаем конструкцию общего положения из n прямых. Следовательно, в ней есть ровно $\frac{n(n+1)}{2} + 1$

Давайте вернем выкинутую прямую и проверим, что с ней тоже утверждение.

По условию любые 2 прямые пересекаются, следовательно, $n+1$ прямая пересекается с n прямыми. Они разбивают эту прямую на $n+1$ кусок. При этом каждый кусок лежит ровно в одной «старой» части плоскости.



Тогда ясно, что каждый кусок прямой разбивает свою часть плоскости на две. То есть, делает вклад $+1$ к количеству частей. Значит, всего добавится $n+1$ часть.

$$\frac{n(n+1)}{2} + 1 + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2} + 1$$

Переход индукции доказан. □

2.3 Задача 3

Шеренга новобранцев стоит перед старшиной. Он командует «налево». По неопытности часть солдат поворачивается налево, а часть – направо. После этого каждую секунду происходит следующее: солдаты, оказавшиеся друг к другу лицом, понимают, что произошла ошибка, и поворачиваются кругом. В следующую секунду ситуация повторяется. Докажи, что рано или поздно шеренга встанет неподвижно. Эту задачу можно было бы решить с помощью полуинвариантов. Но сейчас мы предлагаем решить ее индукцией по числу солдат.

Доказательство. Будем доказывать индукцией по n (числу солдат).

База индукции при $n = 1$ очевидна.

Рассмотрим $n+1$ солдата. Если к нему никто никогда не поворачивается лицом, то забываем про этого солдата и рассматриваем оставшихся n.

Если же к нему кто-нибудь когда-нибудь повернется лицом, то он отвернется от этого человека и будет смотреть в воздух, и уже больше точно никогда не повернется и опять перейдем к оставшимся n солдатам. □

2.4 Задача 4

Скорее всего, в задаче опечатка, иначе она из милой доброй задачи про рекурру превращается в жуткий гроб с бесконечным счётом. Буду решать в такой формулировке:

Реши рекуррентное уравнение:

$$x_0 = 43, x_1 = 70, \quad x_{n+2} = 29x_{n+1} - 28x_n$$

Решаем характеристическое уравнение.

$$\lambda^2 - 29\lambda + 28 = 0$$

Корни:

$$\lambda_1 = 28, \quad \lambda_2 = 1$$

Общее решение:

$$x_n = A \cdot 28^n + B$$

Найдем константы:

$$\begin{cases} A + B = 43, \\ 28A + B = 70 \end{cases} \implies A = 1, \quad B = 42$$

Итоговое решение:

$$x_n = 28^n + 42$$

Ответ: $x_n = A \cdot 28^n + B$

2.5 Задача 5

Зайчик стоит у подножия лесенки высотой n ступенек. За один прыжок он может подняться либо на одну, либо на две ступеньки вверх. Сколькими способами он может добраться до верха?

Пусть x_k – число способов прыгнуть в k-ую ступеньку. Ясно, что $x_k = x_{k-1} + x_{k-2}$, так как зайчик может прыгнуть в k-ую ступеньку либо с $k-1$ ступеньки, либо с $k-2$ ступеньки.

Тогда это просто задача про рекуррентное уравнение вида

$$x_k = x_{k-1} + x_{k-2}$$

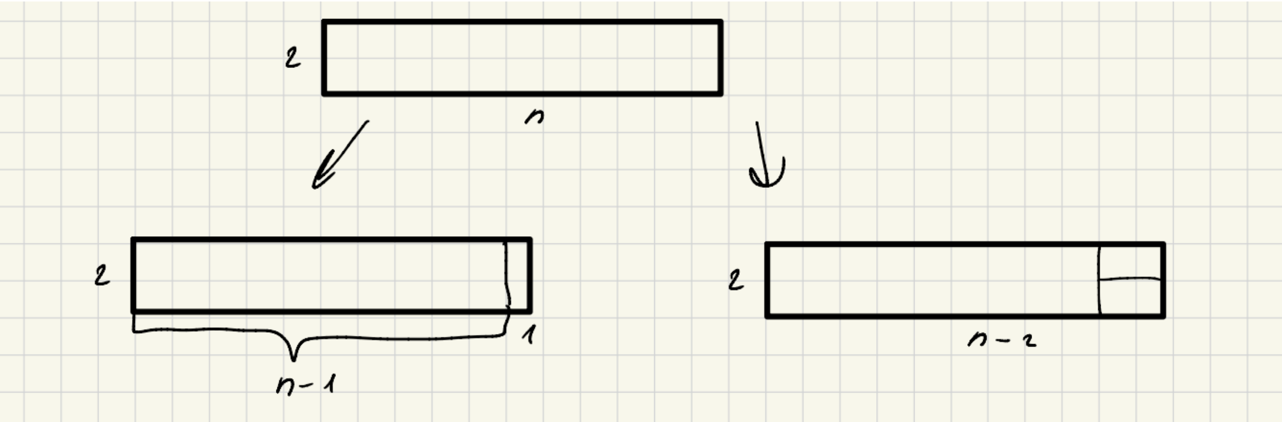
Ясно, что на первую ступеньку зайчик может прыгнуть только с самого низа (1 способ), а на вторую – либо с самого низа, либо с первой ступеньки (2 способа).

Тогда $x_n = F_{n+2}$, где F_i - i-ое число Фибоначчи.

Ответ: $x_n = F_{n-2}$

2.6 Задача 6

Есть 2 принципиально разных способа получить прямоугольник $2 \times n$.



Либо из прямоугольника $2\times(n-1)$ прибавлением одной доминошки, либо из прямоугольника $2\times(n-2)$ прибавлением двух доминошек.

Получаем рекуррентное уравнение $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$, где x_i – число способов получить прямоугольник $2 \times i$

Тогда ясно, что ответ на задачу – это числа Фибоначчи (возможно, с каким-то сдвигом).

$x_1 = 1$ (одна вертикальная доминошка)

$x_2 = 2$ (две вертикальных, либо две горизонтальных доминошек).

Тогда ясно, что $x_i = F_{i+2}$

Ответ: F_{i+2}

2.7 Задача 7

Докажи тождества для всех натуральных m, n:

а) **(тождество Кассини)** $F_{n+1} \cdot F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$

б) $F_{m+n} = F_m \cdot F_{n+1} + F_{m-1} \cdot F_n$

в) $F_{2n+1} = F_n^2 + F_{n+1}^2$

2.7.1 Пункт Б

$$F_{m+n} = F_m \cdot F_{n+1} + F_{m-1} \cdot F_n$$

Доказательство. Проверим базу при $n = 1$:

$$F_{m+1} = F_m \cdot F_2 + F_{m-1} F_2 = F_m + F_{m-1}$$

Верность равенства очевидна в силу определения чисел Фибоначчи. Заметьте, что это равенство верно при любом m (ну то есть я никак не пользуюсь тем, чему равно m).

Предположим, что $F_{m+n} = F_m \cdot F_{n+1} + F_{m-1} \cdot F_n$ при всех значениях $\leq n$.

Докажем, что тогда формула верна и для $n+1$, то есть покажем справедливость формулы:

$$F_{m+n+1} = F_m \cdot F_{n+2} + F_{m-1} \cdot F_{n+1}$$

По определению чисел Фибоначчи:

$$F_{m+(n+1)} = F_{m+n} + F_{m+(n-1)}$$

Воспользуемся предположением индукции:

$$F_{m+(n+1)} = F_m \cdot F_{n+1} + F_{m-1} \cdot F_n + F_m \cdot F_n + F_{m-1} \cdot F_{n-1} = F_m(F_{n+1} + F_n) + F_{m-1} \cdot (F_n + F_{n-1}) = F_m \cdot F_{n+2} + F_{m-1} \cdot F_{n+1}$$

Это доказывает переход по n. А для m не надо доказывать, так как мы нигде его не фиксировали. $\square$

2.7.2 Пункт В

$$F_{2n+1} = F_n^2 + F_{n+1}^2$$

Доказательство. Воспользуемся результатом из пункта Б для $m := n+1, n := n$ $(F_{m+n} = F_m \cdot F_{n+1} + F_{m-1} \cdot F_n)$ Получим:

$$F_{n+(n+1)} = F_{n+1} \cdot F_{n+1} + F_n \cdot F_n = F_n^2 + F_{n+1}^2$$

□

2.8 Задача 8

Ясно, что из условия возникает следующее рекуррентное уравнение:

$$x_n = x_{n-1} + 6x_{n-2}$$

Решаем характеристическое уравнение:
$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$
$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 3$
Тогда:

$$x_n = c_1 \cdot (-2)^n + c_2 \cdot 3^n \tag{1}$$

У нас есть два условия: $x_0 = 0, x_1 = 1$.
Подставим $n = 0$ и $n = 1$ в уравнение 1 и получим:

$$\begin{cases} 0 = c_1 + c_2 \\ 1 = -2c_1 + 3c_2 \end{cases}$$

Решая эту систему находим: $c_1 = -1/5, c_2 = 1/5$
Ответ: $x_n = \frac{1}{5}(3^n - (-2)^n)$

2.9 Задача 9

Пусть: A_n – количество способов добраться от A до A за n шагов.
B_n – количество способов добраться от A до B за n шагов.
C_n – количество способов добраться от A до C за n шагов.
D_n – количество способов добраться от A до D за n шагов.

Заметим, что $A_n = C_n$. Действительно: в эти вершины я могу прийти только из B или D.
Аналогично: $B_n = D_n$
Так как в A можно попасть либо из B, либо из D, то: $A_n = 2B_{n-1}$
Аналогично: $B_n = 2A_{n-1}$. Подставим это в уравнение строчкой выше:

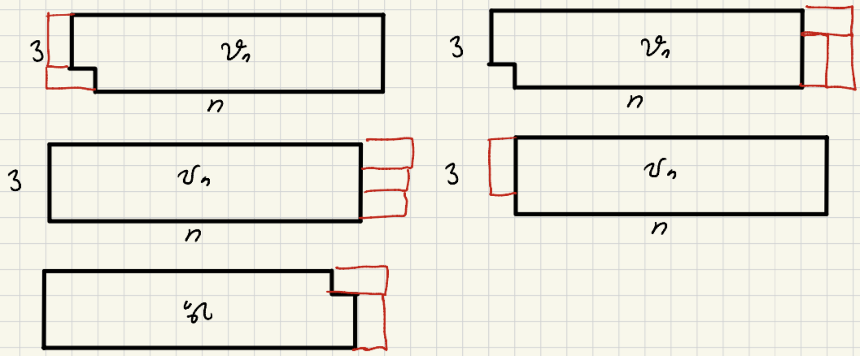
$$A_n = 4A_{n-2} \tag{2}$$

Ясно, что: $A_1 = 0,\ A_2 = 2$
Тогда решая рекуррентное уравнение 2, получаем: $A_{2k+1} = 0$
$A_{2k} = 2^{2k-1}$
Ответ: если $n = 2k+1$, то 0. если $n = 2k$, то 2^{2k-1}

2.10 Задача 10

Приложу картинку, из которой примерно можно понять идею решения, нет времени подробно расписывать.

$V_n = 2v_n + V_{n-2}$ $\qquad$ $v_n = v_{n-1} + v_{n-2}$



$V_n = 4V_{n-2} - V_{n-4}$

Замена $V_k \leftrightarrow V_{n-2k}$

$V_k = 4V_k - V_{k-2}$

$\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$ $\qquad$ $\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$