Содержание

1 Семинар 5

1.1 Задача 1

Докажите, что любая нетождественная перестановка единственным образом представима в виде произведения независимых циклов.

Доказательство. Рассмотрим элемент 1. Он переходит в $\sigma(1)$ под действием перестановки σ.

Если 1 перешла в себя, то цикл закончился.

Если 1 перешла не в себя, то рассматриваем $\sigma(\sigma(1)), \ldots \sigma^k(1)$. Рано или поздно мы перейдем в единицу.

В любом случае, мы получили какой-то цикл. Запомним его.

Рассмотрим i, который не участвовал в этом цикле и проделаем с ним то же самое. Получим ещё один цикл. Продолжаем так действовать до тех пор, пока все элементы не распадутся в циклы. Это обеспечивает существование такого произведения независимых циклов.

Ясно, что каждый элемент присутствует только в одном цикле (то есть зная лишь один элемент цикла, мы понимаем, как устроен весь цикл). Это обеспечивает единственность (с точностью до перестановки циклов). □

1.2 Задача 2

Докажите, что любая перестановка σ в некоторой степени дает тождественную перестановку id.

Доказательство. Если $\sigma = id$, то и доказывать нечего.

Если $\sigma \neq id$, то давайте рассмотрим представление этой перестановки в виде произведения независимых циклов. Возьмём произведение длин этих циклов и победим. □

1.3 Задача 3

Докажите, что порядок перестановки равен наименьшему общему кратному длин независимых циклов, в произведение которых раскладывается перестановка.

Доказательство. Если $\sigma = id$, то и доказывать нечего.

Если $\sigma \neq id$, то давайте рассмотрим представление этой перестановки в виде произведения независимых циклов. Ясно, что каждый из циклов возвращает действует на своих элементов тождественно тогда и только тогда, когда он применен $k \cdot \alpha_i$ раз, где α_i - длина соответствующего независимого цикла, k - натуральное.

Значит, порядок перестановки должен делить длину каждого независимого цикла. Вот и получается, что порядок перестановки хотя бы НОК.

Предположим, что мы нашли число q, меньшее НОКа, для которого $\sigma^q = id$. q делится на длину каждого цикла. Но тогда и получается, что q хотя бы НОК. □

1.4 Задача 4

Илья взял собранный кубик Рубика, проделал над ним некоторую комбинацию вращений и положил на место. Докажите, что можно повторить точно такие же действия над кубиком еще несколько раз, чтобы он оказался вновь в собранном состоянии.

Доказательство. Илья действует перестановками $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ на кубике Рубика. Если Илья в результате $\sigma_n \cdot \ldots \sigma_1$ привёл кубик Рубика в собранное состояние, то и доказывать нечего.

Иначе давайте применять эти перестановки так, что в какой-то момент две из них повторяться (кубик Рубика имеет конечное число состояний, значит, точно повторится) $\sigma_1 \cdot \ldots \sigma_i = \sigma_1 \cdot \ldots \sigma_j$. Пусть справа множителей больше. Домножим обе части на $(\sigma_{i+1} \cdot \ldots \cdot \sigma_j)^-1$ (то есть просто откатимся на несколько действий). И тогда получим: $\sigma_1 \cdot \ldots \sigma_i = id$

□

1.5 Задача 5

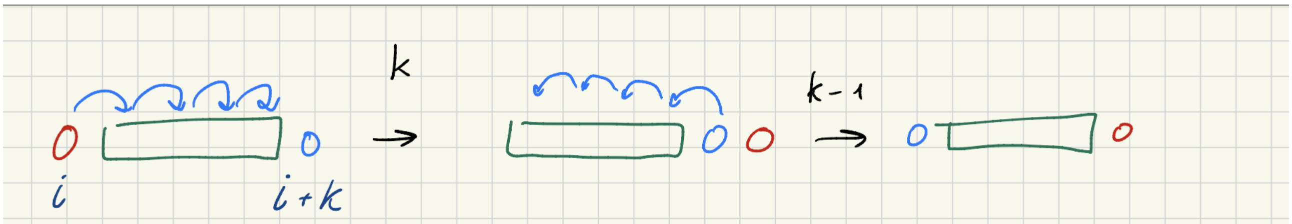
Любая транспозиция является нечетной перестановкой

Определение 1. Элементарная транспозиция - транспозиция элементов $i, i+1$.

Утверждение. *Элементарная транспозиция меняет знак перестановки (то есть количество инверсий на 1).*

Доказательство. Ну действительно: если элементарная транспозиция меняет местами два элемента подряд, то было так, что $i < i+1$, а после перестановки они поменялись местами. Вот и получилась смена знака.

Далее заметим, что любая транспозиция распадается в $2k-1$ элементарную транспозицию. Действительно: нужно k свапов, чтобы i-ый элемнт встал в j-ую ячейку. После этого нужно $k-1$ свапов, чтобы j-ый элемент в стал в i-ую ячейку. Но $2k-1$ это нечетное число, каждая элементарная транспозиция меняет знак, поэтому поменяется знак $2k-1$ раз, то есть нечетное число раз. □



1.6 Задача 6

Домножение любой перестановки на транспозицию меняет четность исходной перестановки.

Доказательство. Каждая транспозиция распадается в $2k-1$ элементарных (по 5-ой задаче), и каждая элементарная транспозиция меняет знак. Получается, транспозиция меняет знак. □

1.7 Задача 7

а) Любая перестановка представима в виде произведения нескольких транспозиций.

б) Та же задача) На уроке физкультуры школьники некоторого класса выстроились в шеренгу. Учитель может попросить любых двух школьников поменяться местами. Докажите, что он всегда может расставить школьников по росту.

Доказательство. Оба пункта решаются идей пузырьковой сортировки. По сути на это можно смотреть так: применение элементарной транспозиции – это просто swap двух элементов. Последовательно поднимаем «пузырьком» элементы так, чтобы все стояли на своих местах. □

1.8 Задача 8

Цикл длины k является четной перестановкой тогда и только тогда, когда k нечетно.

Доказательство. Любой цикл длины k распадается в $k-1$ транспозицию. Применение $k-1$ транспозиции меняет знак $k-1$ раз. Вот и получается, что цикл длины k является четным тогда и только тогда, когда k нечетно. □

1.9 Задача 9

При умножении любой перестановки на четную перестановку четность исходной перестановки сохраняется, при умножении на нечетную перестановку четность меняется.

Оставлю доказательство Димы.

Утверждение. *Пусть* $\sigma, \tau \in \mathrm{S}_n$ *– произвольные перестановки, тогда*

$$\operatorname{sgn}(\sigma\tau) = \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau)$$

Доказательство. Надо показать, что

$$d(\sigma) + d(\tau) = d(\sigma\tau) \pmod 2$$

Давайте фиксируем пару i, j и докажем следующее равенство

$$d_{ij}(\tau) + d_{\tau(i)\tau(j)}(\sigma) = d_{ij}(\sigma\tau) \pmod 2$$

Возможны следующие 4 случая:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& i \arrow[dr] & & j \arrow[dr] & \\
\tau & & \tau(i) \arrow[d] & & \tau(j) \arrow[dl] \\
\sigma & & \sigma\tau(i) & \sigma\tau(j) &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
& i \arrow[drrr] & & j \arrow[dl] & \\
\tau & & \tau(j) \arrow[d] & & \tau(i) \arrow[dl] \\
\sigma & & \sigma\tau(j) & \sigma\tau(i) &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& i \arrow[dr] & & j \arrow[dr] & \\
\tau & & \tau(i) \arrow[dr] & & \tau(j) \arrow[dll] \\
\sigma & & \sigma\tau(j) & \sigma\tau(i) &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
& i \arrow[drrr] & & j \arrow[dl] & \\
\tau & & \tau(j) \arrow[dr] & & \tau(i) \arrow[dll] \\
\sigma & & \sigma\tau(i) & \sigma\tau(j) &
\end{tikzcd}$$

Занесем результаты в таблицу

$d_{ij}(\tau)$	0	1	0	1
$d_{\tau(i)\tau(j)}(\sigma)$	0	0	1	1
$d_{ij} + d_{\tau(i)\tau(j)}(\sigma)$	0	1	1	2
$d_{ij}(\sigma\tau)$	0	1	1	0

Что доказывает равенство

$$d_{ij}(\tau) + d_{\tau(i)\tau(j)}(\sigma) = d_{ij}(\sigma\tau) \pmod 2$$

Теперь сложим его для всех пар $i < j$. Получим

$$\sum_{i<j} d_{ij}(\tau) + \sum_{i<j} d_{\tau(i)\tau(j)}(\sigma) = \sum_{i<j} d_{ij}(\sigma\tau) \pmod 2$$

Откуда

$$d(\tau) + \sum_{i<j} d_{\tau(i)\tau(j)}(\sigma) = d(\sigma\tau) \pmod 2$$

Так как $\tau\colon X_n \to X_n$ – биекция, то если (i, j) пробегает все разные пары, то и $(\tau(i), \tau(j))$ пробегает все разные пары. Значит оставшаяся сумма равна $d(\sigma)$, что завершает доказательство. □

1.10 Задача 10

Четных перестановок n элементов столько же, сколько и нечетных, то есть и тех, и других ровно $\frac{n!}{2}$.

Доказательство. Нужно лишь показать, что между четными и нечетными перестановками есть биекция. Но это совсем просто сделать. Из любой четной перестановки при помощи транспозиции (1; 2) можно получить нечетную, а из получившейся нечетной с помощью этой же транспозиции можно получить исходную чётную.

Значит, эта биекция и в правду есть, но тогда количество четных и нечетных перестановок равны. Всего перестановок $n!$, тогда четных и нечетных по $\frac{n!}{2}$ □

1.11 Задача 11

Игра в пятнашки. В таблицу 4×4 вписаны подряд (слева направо, сверху вниз) числа от 1 до 15, так, что правый нижний угол остался свободным. За ход можно сдвинуть на свободное место любое из чисел, которое соседствует с ним по стороне (и таким образом свободное место поменяет свое расположение). Докажите, что такими ходами нельзя получить комбинацию, отличающуюся от исходной лишь транспозицией чисел 14 и 15.

Доказательство. Давайте назовём пустое место числом 0.

Тогда нам разрешены лишь «элементарные» транспозиции с нулём. «Элементарные» в том плане, что мы можем их свапнуть в этой игре лишь с теми числами, которые стоят с нулём, а не в смысле определения 1. Ну вообще формально говоря, нехорошо делать перестановку на множестве с нулем, так как перестановка бьёт из множества $\{1, ..., n\}$ в себя, но очевидно, что между ними есть биекция, поэтому пофиг.

Пусть мы смогли с помощью перестановки σ (не обязательно той, что является композицией элементарных транспозиций) добиться того, что 14 и 15 поменялись местами. Тогда мы подействовали транспозицией 14 и 15. А транспозиция это вообще говоря нечетная перестановка. Значит, если за N ходов мы сможем добиться того, что 14 и 15 поменялись местами, то N обязательно нечетно.

С другой стороны, нам разрешены только «элементарные» преобразования с нулём, поэтому каждое действие - это применение транспозиции с нулём. За одно действие ноль двигается в одно из четырёх направлений: влево, вправо, вниз, вверх. В результате наших преобразований ноль вернулся на то же место. Значит, число преобразований влево было таким же, как и число преобразований вправо и аналогично по вертикали. В итоге получаем, что на самом деле наша перестановка является четной. Но так как каждая транспозиция нечетна, то N – четно. Получили противоречие с тем, что N – нечетно. □

2 Семинар 6

2.1 Задача 1

Докажи, что количество перестановок n элементов, при которых ни один элемент не остается на своем месте (то есть таких перестановок σ, что $\forall k \rightsquigarrow \sigma(k) \neq k$, равно:

$$n! \cdot (1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!})$$

Доказательство. Давайте посчитаем количество перестановок, где есть неподвижный элемент.

Пусть $N_{i_1,\ldots i_n}$ - это число перестановок, где $i_1, \ldots, i_n$ – неподвижные элементы[1].

Ясно, что $N_i = (n-1)!$, $N_{ij} = (n-2)!, \ldots$

Мы хотим посчитать $|A_1 \cup A_2 \ldots A_n|$.

По формуле включений-исключений это равно:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} N_i - \sum_{i<j} N_{ij} + \sum_{i<j<k} N_{ijk} - \ldots + (-1)^n N_{1\ldots n} =$$

$$= n \cdot (n-1)! - C_n^2 \cdot (n-2)! + \ldots + (-1)^n \cdot 1 = \frac{n!}{1} - \frac{n!}{2} + \frac{n!}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{n!}{n!} = n! \cdot (1 - \frac{1}{2} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!})$$

Всего перестановок на n элементах $n!$, поэтому чтобы получить итоговый ответ, нужно лишь вычесть эту сумму из $n!$.

Ответ:

$$n! \cdot (1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!})$$

2.2 Задача 2

Ясно, что нужно просто поделить на $n!$ ответ из прошлой задачи, так как нам не важен порядок людей, которые взяли свою бумажку.

Ответ: $1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!}$

2.3 Задача 3

1. Докажи, что:
$$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)!$$
2. Найди $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

2.3.1 Пункт А

Доказательство. Заметим, что обе штуки можно интерпретировать как число хороводов (то есть n людей, которые идут в одном направлении). В левой части мы просто выбрали 1 цикл и это однозначно задает, кто за кем идет. В правой части мы взяли любого человека и для него решили, за кем из оставшихся $n-1$ людей он идёт. Вот и получается, что части равны. □

[1] То есть те перестановки, где $\sigma(i) = i\ \forall i$

2.3.2 Пункт Б

Нас устраивают перестановки вида $(*)(***)$ и $(**)(**)$.

Перестановок первого вида $4 \cdot 2!$ (выберем кто идет в одиночный цикл, а для оставшихся двух воспользуемся результатом из пункта А)

Перестановок второго вида $\frac{C_4^2}{2}$ (выбрать двух из четырех в первый цикл, и нам не важна перестановка циклов).

Ответ: $4 \cdot 2! + \frac{C_4^2}{2}$

$\square$

2.4 Задача 4

Докажи, что:

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} = n \cdot \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}$$

Доказательство. Пусть есть один выделенный элемент.

Ясно, что второе слагаемое соответствует случаю, когда выделенный элемент находится в одиночном цикле (на оставшихся n элементах нам остается лишь распределить их по $k-1$ циклу).

Подумаем над первым слагаемым. Там написано разбиение n элементов на k циклов. Теперь попробуем вставить выделенный элемент в какой-нибудь из циклов.

В любой цикл длины m_i можно поставить этот выделенный элемент на любое из $m_i + 1$ мест, но на самом деле случай, когда выделенный элемент стоит в начале и конце цикла – это одно и то же. Поэтому, на самом деле в любом цикле длины m_i есть m_i способов.

Ясно, что выделенный элемент можно поставить в любой из циклов, поэтому для этого слагаемого есть $\sum_i m_i$ способов. Но суммарная длина циклов равна n. Вот и получается n способов. $\square$

2.5 Задача 5

Пусть $s(n,k)$ обозначает коэффициент при x^k в многочлене

$$x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)$$

Докажи, что $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = |s(n,k)|$

Доказательство. Помянем все минусы на плюсы, так как у нас есть модуль, то это ничего не поменяет.

Введём обозначения:
$x^{\overline{1}} = x$
$x^{\overline{2}} = x(x+1)$
$\dots$
$x^{\overline{n}} = x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)$[2]
Будем доказывать это утверждение по индукции.
База при $n = 1$ очевидна.
Покажем индукционный переход.
Заметим, что $(x + (n-1))x^k = x^{k+1} + (n-1)x^k$. Но:

$$x^{\overline{n}} = (x + (n-1))x^{\overline{n-1}}$$

В силу индукционного предположения:

$$x^{\overline{n}} = (x + (n-1)) \sum_{k=1}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} x^k = \sum_{k=1}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} x^{k+1} + \sum_{k=1}^{n-1} (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} \cdot x^k = \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} x^k + \sum_{k=1}^{n-1} (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} \right) x^k$$

Воспользуемся утверждением из прошлой задачи и получим, что:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} \right) x^k = \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k$$

Это доказывает индукционный переход. $\square$

[2] Такие обозначения называются восходящим факториалом (rising factorial) или Символом Похгаммера (Pochhammer symbol)

2.6 Задача 6

Докажи, что $S(n, k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k)$.

Доказательство. Первое слагаемое соответствует тому, что выделенный элемент занял одну новую коробку. На оставшихся $n1$ элементах остается $k-1$ коробка

Второе слагаемое соответствует тому, что мы распределили $n-1$ элемент по k коробкам, а потом выделенный засунули в одну из них.

Вот и получается, что это тождество верно. □

2.7 Задача 7

Докажи, что $S(n, k) = k^n - C_k^1 \cdot (k-1)^n + C_k^2 \cdot (k-2)^n - \ldots + (-1)^{k-1} \cdot C_k^{k-1} \cdot 1^n$

Доказательство. Это неслучайно похоже на формулу включений-исключений.

Давайте посчитаем величину $|A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_k|$, где A_i – это множество способов, при которых A_i пуста.

Ясно, что $|A_i| = \frac{(k-1)^n}{k!}$, так как это интерпретируется так: у нас остается $k-1$ коробка и мы для каждого из n элементов можем положить любой из n элементов лишь в одну из $k-1$ коробок. Но мы не различаем коробки. Вот и возникает деление.

Аналогично: $|A_i \cap A_j| = \frac{(k-2)^n}{k!}$

Ну и так далее вплоть до $|A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_k| = 0$ (если ни в какую коробку нельзя ничего положить, то у нас 0 способов разложить n элементов по этим коробкам).

Тогда по формуле включений-исключений:

$$|A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_k| = \frac{k^n}{k!} - C_k^1 \cdot \frac{(k-1)^n}{k!} + C_k^2 \cdot \frac{(k-2)^n}{k!} - \ldots + (-1)^{k-1} \cdot C_k^{k-1} \cdot 1^n = \frac{1}{k!} \cdot \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \cdot C_k^{k-i} \cdot (k-i)^n$$

□

2.8 Задача 8

Пусть X, Y – конечные множества, причем в первом из них k элементов, во втором n элементов. Напомним, что сюръекцией из множества X в множество Y называется такая функция f из X в Y, что для любого $y \in Y$ найдется $x \in X$, такой что $f(x) = Y$. Сколько существует различных сюръекций из X в Y?

Пусть элементы в Y – это n коробок, а элементы в X – это k элементов, которые мы хотим распределить по n коробкам. Тогда ясно, что нас интересует число $S(k, n)$. Но число Стирглинга второго рода не различает коробки между собой, а для нас очень важно, в какой именно элемент из Y отображаться. Поэтому нужно домножить на $n!$.

Ответ: $S(k, n) \cdot n!$

2.9 Задача 9

Докажи, что $B_n = \sum\limits_{k=0}^{n} S(n, k)$

Доказательство. Слагаемое с $k = 0$ можно сразу выкинуть, так как очевидно, что оно равно нулю (0 способов разложить n элементов по k коробкам).

Остальные слагаемые с $k \neq 0$ интерпретируются так: мы задаем k классов эквивалентности и для этого числа классов эквивалентности смотрим все способы разбить n элементов на эти классы эквивалентности, чтобы ни один из них не был пуст. □