Задача 3. Экстремум

$f(x,y) = e^{\left(\frac{x+y}{2}\right)}(x^2-4y^2)^3$

$D(f(x,y)) = R$; $f(x,y)=0 \Rightarrow e^{\left(\frac{x+y}{2}\right)}(x^2-4y^2)^3 = 0$ $\quad e^{\left(\frac{x+y}{2}\right)} \neq 0$

$x^2-4y^2=0$

$x = \pm 2y$

$z = f(x,y)$

$z = e^{\left(\frac{x+y}{2}\right)}(x^2-4y^2)^3$

1) Найдём частные производные по x и по y первого порядка:

$$z'_x = \frac{1}{2}e^{\left(\frac{x+y}{2}\right)}(x^2-4y^2)^3 + e^{\left(\frac{x+y}{2}\right)} \cdot 3(x^2-4y^2)^2 \cdot 2x =$$

$$= \frac{e^{\left(\frac{x+y}{2}\right)}(x^2-4y^2)^3}{2} + 6x e^{\left(\frac{x+y}{2}\right)}(x^2-4y^2)^2$$

$$z'_y = \frac{e^{\left(\frac{x+y}{2}\right)}(x^2-4y^2)^3}{2} + e^{\left(\frac{x+y}{2}\right)} \cdot 3(-8y)(x^2-4y^2)^2 =$$

$$= \frac{e^{\left(\frac{x+y}{2}\right)}(x^2-4y^2)^3}{2} + e^{\left(\frac{x+y}{2}\right)} \cdot (-24y)(x^2-4y^2)^2$$

2) $z'_x = 0$:

$$\frac{e^{\left(\frac{x+y}{2}\right)}(x^2-4y^2)^3}{2} + 6x e^{\left(\frac{x+y}{2}\right)}(x^2-4y^2)^2 = 0 \quad \Big| : \frac{e^{\left(\frac{x+y}{2}\right)}}{2}, \quad e^{\frac{x+y}{2}} > 0$$

$$(x^2-4y^2)^3 + 12x(x^2-4y^2)^2 = 0$$

$$(x^2-4y^2)^2(x^2-4y^2+12x) = 0$$

$z'_y = 0$:

$$\frac{e^{\left(\frac{x+y}{2}\right)}(x^2-4y^2)^3}{2} + e^{\left(\frac{x+y}{2}\right)}(-24y)(x^2-4y^2)^2 = 0 \quad \Big| : \frac{e^{\left(\frac{x+y}{2}\right)}}{2}, \quad e^{\frac{x+y}{2}} > 0$$

$(x^2-4y^2)^3-48y(x^2-4y^2)^2=0$

$(x^2-4y^2)^2(x^2-4y^2-48y)=0$

$$\begin{cases} z'_x=0 \\ z'_y=0 \end{cases} \Rightarrow - \begin{cases} (x^2-4y^2)^2(x^2-4y^2+12x)=0 \\ (x^2-4y^2)^2(x^2-4y^2-48y)=0 \end{cases}$$

$(x^2-4y^2)^2(\cancel{x^2}-\cancel{4y^2}+12x-\cancel{x^2}+\cancel{4y^2}+48y)=0 \quad |:(12)$

$(x^2-4y^2)^2(x+4y)=0$

$(x-2y)^2(x+2y)^2(x+4y)=0$

$x-2y=0$ или $x+2y=0$ или $x+4y=0$

$x=2y$ $\qquad x=-2y$ $\qquad -4y$

1) $\begin{cases} (\overset{0}{4y^2-4y^2})^2(x^2-4y^2+12x)=0 \\ x=2y \end{cases}$ при любых y

$x=2y,\ y\in R$ → при таком x $f(x,y)=0$ всегда

2) $\begin{cases} (\overset{0}{4y^2-4y^2})^2(x^2-4y^2+12x)=0 \\ x=-2y \end{cases}$ при любых y

$x=-2y,\ y\in R$

3) $\begin{cases} (16y^2-4y^2)^2(16y^2-4y^2-48y)=0 \\ x=-4y \end{cases}$

$\begin{cases} 144y^4(12y^2-48y)=0 \\ x=-4y \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 144y^2\cdot 12y(y-4)=0 \\ x=-4y \end{cases}$ $\quad |:144\cdot 12$

$$\begin{cases} y^3(y-4)=0 \\ x=-4y \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=+4 \end{array}\right. \\ x=-4y \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases} \\ \begin{cases} y=+4 \\ x=-16 \end{cases} \end{array}\right.$$

Точки (0,0) и (−16,+4) ~~экстремумы~~ являются точками возможных экстремумов.

Найдём частные производные второго порядка:

3) $\cancel{z''_x = \frac{1}{2} e^{\left(\frac{x+y}{2}\right)} (x^2-4y^2)^3 + 3 e^{\left(\frac{x+y}{2}\right)} (x^2-4y^2)^2 \cdot 2x}$

$$z'_x = e^{\left(\frac{x+y}{2}\right)}\left(\frac{(x^2-4y^2)^3}{2} + 6x(x^2-4y^2)^2\right)$$

$$z''_x = \frac{1}{2} e^{\left(\frac{x+y}{2}\right)}\left(\frac{(x^2-4y^2)^3}{2} + 6x(x^2-4y^2)^2\right) +$$

$$+ e^{\left(\frac{x+y}{2}\right)}\left(\frac{3(x^2-4y^2)^2 \cdot 2x}{2} + 6(x^2-4y^2)^2 + 6x \cdot 2(x^2-4y^2) \cdot 2x\right) =$$

$$= e^{\left(\frac{x+y}{2}\right)}\left(\frac{(x^2-4y^2)^3}{4} + 3x(x^2-4y^2)^2 + 3x(x^2-4y^2) +\right.$$

$$\left. + 6(x^2-4y^2)^2 + 24x^2(x^2-4y^2)\right) =$$

$$= e^{\left(\frac{x+y}{2}\right)}(x^2-4y^2)\left(\frac{(x^2-4y^2)^2}{4} + 6x(x^2-4y^2) + 6(x^2-4y^2) + 24x^2\right) =$$

$$= e^{\left(\frac{x+y}{2}\right)}(x^2-4y^2)\left(\frac{(x^2-4y^2)^2}{4} + 6x(x^2-4y^2) + 30x^2 - 24y^2\right)$$

$$z'_y = e^{\left(\frac{x+y}{2}\right)}\left(\frac{(x^2-4y^2)^3}{2} - 24y(x^2-4y^2)^2\right)$$

$$z''_y = \frac{1}{2}e^{\left(\frac{x+y}{2}\right)}\left(\frac{(x^2-4y^2)^3}{2} - 24y(x^2-4y^2)^2\right) + e^{\left(\frac{x+y}{2}\right)}\left(\frac{3(x^2-4y^2)^2\cdot(-4)\cdot 2y}{\cancel{2}}\right.$$

$$\left. - 24(x^2-4y^2)^2 - 24y\cdot 2(x^2-4y^2)\cdot(-4)\cdot 2y\right) =$$

$$= e^{\left(\frac{x+y}{2}\right)}\left(\frac{(x^2-4y^2)^3}{4} - 12y(x^2-4y^2)^2 - 12y(x^2-4y^2)^2 - 24(x^2-4y^2)^2 +\right.$$

$$\left. + \cancel{384y}\, 384y^2(x^2-4y^2)\right) =$$

$$= e^{\left(\frac{x+y}{2}\right)}(x^2-4y^2)\left(\frac{(x^2-4y^2)^2}{4} - 24y(x^2-4y^2) - 24x^2 + 96y^2 + 384y^2\right) =$$

$$= e^{\left(\frac{x+y}{2}\right)}(x^2-4y^2)\left(\frac{(x^2-4y^2)^2}{4} - 24y(x^2-4y^2) - 24x^2 + 480y^2\right)$$

$$z''_{xy} = \frac{1}{2}e^{\left(\frac{x+y}{2}\right)}\left(\frac{(x^2-4y^2)^3}{2} + 6x(x^2-4y^2)^2\right) + e^{\left(\frac{x+y}{2}\right)}\left(\frac{3(x^2-4y^2)^2\cdot(-4)\cdot 2y}{\cancel{2}} +\right.$$

$$\left. + 6x\cdot 2(x^2-4y^2)\cdot(-4)\cdot 2y\right) =$$

$$= e^{\left(\frac{x+y}{2}\right)}\left(\frac{(x^2-4y^2)^3}{4} + 3x(x^2-4y^2)^2 - 12y(x^2-4y^2)^2 - 96xy(x^2-4y^2)\right) =$$

$$= e^{\left(\frac{x+y}{2}\right)}(x^2-4y^2)\left(\frac{(x^2-4y^2)^2}{4} + 3x(x^2-4y^2) - 12y(x^2-4y^2) - 96xy\right)$$

4) Найдём $A = z''_{xx}(0,0)$, $B = z''_{xy}(0,0)$ и $C = z''_{yy}(0,0)$, чтобы узнать характер точки $(0;0)$ по достаточному условию экстремума ф-ии $(AC-B^2>0)$:

$A = z''_{xx}(0,0) = 0$; $B = z''_{xy}(0,0) = 0$; $C = z''_{yy}(0,0) = 0$

$AC - B^2 = 0$ – требуется дальнейшее исследование точки. (в точке $(0;0)$ функция $f(x,y)$ имеет то же значение, что и во всех точках вида $(-2y, y)$ и $(2y, y)$ – значение 0).

Выполним аналогичные действия для точки $(-16; 4)$:

$A = z''_{xx}(-16;4) = e^{\left(\frac{-16+4}{2}\right)}(256-64)\left(\frac{(256-64)^2}{4} + 6(-16)(256-64) + 30 \cdot 256 - 24 \cdot 16\right) = e^{-6} \cdot 192\left(\frac{192^2}{4} - 96 \cdot 192 + 30 \cdot 256 - 24 \cdot 16\right) \approx$

≈ -914

$B = z''_{xy}(-16,4) = e^{-6} \cdot 192\left(\frac{192^2}{4} - 48 \cdot 192 - 48 \cdot 192 + 96 \cdot 16 \cdot 4\right) \approx -1462$

$C = z''_{yy}(-16,4) = e^{-6} \cdot 192\left(\frac{192^2}{4} - 24 \cdot 4 \cdot 192 - 24 \cdot 256 + 480 \cdot 16\right) \approx$

≈ -3655

$AC - B^2 = (-914) \cdot (-1462) - (-3655) = 1336268 + 3655 = 1339923 > 0 \Rightarrow$ точка $(-16, 4)$ – экстремум, $A < 0 \Rightarrow$ точка $(-16, 4)$ – точка, в которой функция имеет максимум

Ответ: точка $(-16; 4)$ - максимум функции $f(x,y) = e^{\left(\frac{x+y}{2}\right)}(x^2-4y^2)^3$