Note per il corso di *Geometria e algebra lineare* 2023-24
LT in Informatica

3 Sistemi lineari. Metodo di eliminazione di Gauss–Jordan

3.1 Operazioni elementari

Abbiamo visto che un sistema di m equazioni lineari in n incognite può essere scritto nella forma matriciale $Ax = b$. Tutti i dati del sistema sono contenuti nella *matrice completa* $(A \mid b)$, di tipo $(m, n+1)$.

Diremo che due sistemi lineari sono *equivalenti* se hanno le stesse soluzioni. Consideriamo ad esempio i sistemi lineari

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 11 \\ 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 24 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_2 + 4x_3 = 8 \\ 3x_3 = 3 \end{cases}$$

Essi hanno entrambi l'unica soluzione $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 1$. Il secondo, per cui la soluzione si calcola facilmente a partire dalla terza equazione e risalendo, è ottenuto dal primo eseguendo semplici operazioni sulle equazioni.

Le operazioni eseguite sulle equazioni del sistema corrispondono ad analoghe operazioni sulle righe della matrice completa del sistema, dette *operazioni elementari* sulle righe della matrice. Esse sono dunque di tre tipi:

(I) Scambio di due righe
(II) Moltiplicazione di una riga per uno scalare non nullo
(III) Somma a una riga di un'altra riga moltiplicata per uno scalare.

Una matrice ottenuta eseguendo operazioni elementari sulle righe di una matrice si dice *equivalente per righe* alla matrice data. Dunque se la matrice completa $(A' \mid b')$ è equivalente per righe alla $(A \mid b)$, le soluzioni del sistema $Ax = b$ sono soluzioni anche del sistema $A'x = b'$.

Nel seguito useremo le seguenti abbreviazioni per indicare le operazioni elementari eseguite sulle righe di una matrice:

(I) S_{ij} indica lo scambio delle righe i e j
(II) $D_i(c)$ indica la moltiplicazione della riga i per lo scalare non nullo c
(III) $E_{ij}(c)$ indica la somma alla riga i-esima della riga j-esima moltiplicata per lo scalare c.

Osservazione. Ogni operazione elementare è reversibile: l'operazione inversa dello scambio S_{ij} è ancora S_{ij}; l'inversa di $D_i(c)$ è $D_i(1/c)$ e l'inversa dell'operazione $E_{ij}(c)$ è $E_{ij}(-c)$.

Dunque se la matrice $(A' \mid b')$ è equivalente per righe alla $(A \mid b)$ possiamo anche dire che $(A \mid b)$ è equivalente per righe alla $(A' \mid b')$ (basta invertire tutte le operazioni elementari fatte a partire dall'ultima). Dunque i due sistemi $Ax = b$ e $A'x = b'$ sono equivalenti.

Esempio. Trasformiamo la matrice completa del sistema introdotto sopra:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 5 & 11 \\ 4 & 6 & 8 & 24 \end{bmatrix} \underset{E_{21}(-2)}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 4 & 6 & 8 & 24 \end{bmatrix} \underset{E_{31}(-4)}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \underset{S_{23}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Osserviamo che è possibile trasformare ancora l'ultima matrice per ottenere la matrice completa di un sistema in forma ancora più semplice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \overrightarrow{\begin{matrix} D_3(1/3) \\ D_2(1/2) \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overrightarrow{E_{23}(-2)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overrightarrow{E_{13}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{E_{12}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dunque il sistema iniziale è equivalente al sistema $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 1:$ la soluzione è unica.

La trasformazione del sistema eseguita nell'esempio precedente è detta *eliminazione* (o *riduzione) di Gauss–Jordan*. La prima parte della riduzione è detta *risoluzione in avanti*, la seconda *risoluzione all'indietro*. La prima parte è sufficiente per ottenere un sistema equivalente in forma a scalini (nel quale la seconda equazione contiene meno incognite della prima, la terza meno della seconda e così via). Dal sistema a scalini si può dedurre immediatamente se il sistema originario è risolubile e, nel caso lo sia, quante soluzioni ammette. Se il sistema è risolubile e si prosegue nella riduzione (risoluzione all'indietro) le soluzioni si leggono immediatamente sulla matrice.

Esempio. Si consideri il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 3 \\ -2x_1 - 4x_2 + 4x_3 = -1 \end{cases}$$

$$(A \mid b) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & -1 & 3 \\ -2 & -4 & 4 & -1 \end{bmatrix} \overrightarrow{\begin{matrix} E_{21}(-3) \\ E_{31}(2) \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -10 & -3 \\ 0 & -2 & 10 & 3 \end{bmatrix} \overrightarrow{E_{32}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -10 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il sistema originario è quindi equivalente al sistema di *due* sole equazioni

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_2 - 10x_3 = -3 \end{cases}$$

Qualunque sia il valore attribuito a x_3, dalla seconda equazione si ottiene un valore per x_2 e dalla prima un valore per $x_1:$ il sistema ha *infinite* soluzioni

$$x_1 = 7/2 - 8t,\ x_2 = -3/2 + 5t,\ x_3 = t \quad (t \in \mathbb{R})$$

che possono essere ottenute anche proseguendo nella riduzione della matrice completa (risoluzione all'indietro):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -10 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overrightarrow{D_2(1/2)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overrightarrow{E_{12}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & 7/2 \\ 0 & 1 & -5 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le variabili che nel sistema ridotto a scalini possono assumere qualsiasi valore sono dette *variabili libere*, mentre le rimanenti sono le *variabili dipendenti*. Nell'esempio precedente c'è *una* variabile libera e due variabili dipendenti. Il sistema ha dunque infinite soluzioni dipendenti da *un* parametro.

Si noti che la scelta delle variabili libere può dipendere dall'ordine delle variabili: nell'esempio si è scelta x_3 come variabile libera e le altre come variabili dipendenti (da x_3), ma si sarebbe potuto scegliere come variabile libera anche x_2 (usando la stessa riduzione) o x_1 (scambiando l'ordine delle variabili all'inizio della riduzione).

Esempio. Modifichiamo il termine noto della terza equazione del sistema precedente:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 3 \\ -2x_1 - 4x_2 + 4x_3 = -4 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & -1 & 3 \\ -2 & -4 & 4 & -4 \end{bmatrix} \underset{\substack{E_{21}(-3) \\ E_{31}(2)}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -10 & -3 \\ 0 & -2 & 10 & 0 \end{bmatrix} \underset{E_{32}(1)}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -10 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Il sistema è equivalente ad un nuovo sistema con terza equazione *impossibile*: $0 = -3$. Naturalmente non occorre continuare la riduzione: il sistema originario non è risolubile.

3.2 Matrici a scalini

Definizione 1. Una matrice si dice *a scalini* se il numero degli elementi nulli di una riga precedenti il primo elemento non nullo (*elemento conduttore* o *pivot*) cresce riga per riga.

A è in *forma a scalini ridotta* (useremo l'abbreviazione della dizione inglese *Reduced Row Echelon Form*, rref) se A è una matrice a scalini, in cui ogni elemento conduttore sia 1, e sia l'unico elemento non nullo nella sua colonna.

Ad esempio, tutte le matrici finali ottenute negli esempi precedenti sono in forma a scalini (dopo la risoluzione in avanti) o a scalini ridotta (dopo la risoluzione all'indietro).

Teorema 1. *Ogni matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ può essere trasformata in forma a scalini ridotta mediante operazioni elementari sulle righe, cioè A è equivalente per righe a una matrice a scalini ridotta.*

La forma a scalini ridotta per righe di una matrice A è unica (non è più vero se la matrice è solo a scalini). Chiameremo tale matrice $rref(A)$.

Descriviamo il procedimento di riduzione gaussiana per una matrice A:

(1) Primo caso: se la prima colonna di A ha almeno un elemento non nullo, che chiameremo *pivot*, è sempre possibile portare tale elemento, con uno scambio di righe, al posto $(1,1)$. Supponiamo dunque $a_{11} \neq 0$. Se alla seconda riga si aggiunge la prima moltiplicata per $-a_{21}/a_{11}$ e similmente alla i-esima, con $i = 3, 4, \ldots, m$, si aggiunge la prima moltiplicata per $-a_{i1}/a_{11}$, si ottiene una matrice in cui la prima colonna ha tutti gli elementi nulli, tranne il primo. Si procede ora allo stesso modo sulla matrice che si ottiene da questa nuova matrice non considerando la prima riga e la prima colonna.

(2) Secondo caso: se la prima colonna è tutta nulla, si deve operare, come si è fatto su A, sulla matrice che si ottiene togliendo la prima colonna.

Dopo una successione finita di passi, si ottiene una matrice a scalini equivalente ad A.

I pivot possono essere resi uguali a 1 con operazioni elementari del secondo tipo. Il procedimento di riduzione alla forma a scalini può essere continuato usando gli elementi pivot per annullare non solo i coefficienti al di sotto dei pivot, ma anche quelli al di sopra di essi nella colonna.

Si ottiene così la $rref(A)$.

3.3 Rango e nullità di una matrice

Definizione 2. Il *rango* $rg(A)$ di una matrice A è il numero di pivot in $rref(A)$.

Dunque il rango di A è il numero di righe non nulle di $rref(A)$ o di una qualsiasi matrice a scalini equivalente per righe ad A. Dalla definizione si ha immediatamente che

$$0 \leq rg(A) \leq \text{minimo}\{m, n\}$$

per ogni matrice A di tipo (m, n).

Osservazione. La risolubilità di un sistema lineare $Ax = b$ in n incognite si riconosce dalla forma di una matrice a scalini S equivalente ad $(A \mid b)$. Il sistema è risolubile (o *compatibile*) esattamente quando l'ultima colonna di S non contiene pivot. Infatti, se non è così, il sistema a scalini equivalente ad $Ax = b$ contiene un'equazione impossibile del tipo $0 = p_r$, con $p_r \neq 0$ pivot.

Inoltre, se il sistema è compatibile e la matrice completa ha rango r, ci sono esattamente $n - r$ variabili libere (quelle corrispondenti alle colonne che *non* contengono i pivot) e r variabili dipendenti.

Ad esempio, se $(A \mid b)$ è equivalente a

$$\begin{bmatrix} \mathbf{3} & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

la matrice A e la matrice $(A \mid b)$ hanno rango 2 (i pivot sono 3 e 2) e il sistema ha due variabili libere (x_2 e x_3) e due variabili dipendenti (x_1 e x_4): il sistema $Ax = b$ ha infinite soluzioni dipendenti da due parametri.

Possiamo riassumere questi risultati nel seguente teorema:

Teorema 2. *(i) (Rouché–Capelli) Il sistema $Ax = b$ è risolubile se e solo se $rg(A \mid b) = rg(A)$.*

(ii) Un sistema risolubile $Ax = b$, di tipo $m \times n$, ha un'unica soluzione se $rg(A) = n$, infinite soluzioni se $rg(A) < n$, dipendenti da $n - rg(A)$ parametri.

Definizione 3. La *nullità* $null(A)$ di una matrice A è il numero delle colonne di $rref(A)$ che non contengono pivot. Dunque, se A è di tipo $m \times n$, si ha $null(A) = n - rg(A)$.

Il termine "nullità" deriva da un proprietà del sistema lineare *omogeneo* (cioè con termine noto *nullo*)

$$Ax = 0$$

Il sistema è sempre compatibile (perché?) e le sue soluzioni dipendono da un numero di parametri uguale alla nullità di A.

I sistemi omogenei hanno un'altra proprietà notevole: la somma di due soluzioni x e y è una soluzione dello stesso sistema e il multiplo di una soluzione x per uno scalare c è ancora una soluzione:

$$Ax = 0 \text{ e } Ay = 0 \Rightarrow A(x + y) = Ax + Ay = 0 \text{ e } A(cx) = c(Ax) = 0.$$

Come conseguenza, ogni combinazione lineare di elementi dello spazio delle soluzioni

$$Sol(Ax = 0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$$

è ancora una soluzione, cioè un elemento di $Sol(Ax = 0)$. Un insieme con queste proprietà è detto *sottospazio vettoriale* di $\mathbb{R}^n$ e la nullità $null(A)$ è anche chiamata *dimensione* del sottospazio $Sol(Ax = 0)$.

Si noti che le soluzioni di un sistema lineare in n incognite vengono scritte, a seconda del caso, come vettori colonna o come n-uple.

I sistemi *non-omogenei* $Ax = b$, con $b \neq 0$, non hanno le stesse proprietà. L'insieme delle soluzioni non è un sottospazio ma è il *traslato* di un sottospazio:

Teorema 3. *Sia $Ax = b$ un sistema lineare compatibile. Sia y una* soluzione particolare *del sistema $Ax = b$. Allora*

$$Sol(Ax = b) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = y + x_0, Ax_0 = 0\}$$

Il sistema $Ax = 0$ è detto sistema omogeneo associato *al sistema $Ax = b$.*

Dimostrazione. Se $x \in Sol(Ax = b)$ allora $A(x - y) = Ax - Ay = b - b = 0$. Dunque $x - y = x_0 \in Sol(Ax = 0)$. Viceversa, se $Ax_0 = 0$, si ha $A(y + x_0) = Ay + Ax_0 = b + 0 = b$. □

Nel caso $n = 2$ o $n = 3$, come già visto, l'insieme delle soluzioni (se non è vuoto) è un punto oppure una retta o un piano, traslati dell'insieme $\{0\}$ (dimensione 0) o di una retta per l'origine (dimensione 1) o di un piano contenente l'origine (dimensione 2).

Esempio. Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 4 \\ 6x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 9 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \end{cases}$$

$$(A \mid b) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 6 & 2 & 4 & 0 & 9 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \underset{\substack{E_{21}(-2) \\ E_{31}(-1)}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \underset{E_{32}(-1)}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

da cui si deduce la risolubilità, il rango 2, la nullità 2, le variabili libere $\{x_2, x_3\}$ e quelle dipendenti $\{x_1, x_4\}$.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{D_2(1/2)}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{E_{12}(1)}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 & 9/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{D_1(1/3)}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 2/3 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3 \\ x_4 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Una soluzione particolare y si ottiene ponendo $x_2 = x_3 = 0$: $y = (3/2, 0, 0, 1/2)$. Le soluzioni del sistema omogeneo associato possono essere scritte come combinazioni lineari con le variabili libere come coefficienti:

$$Sol(Ax = 0) = \left\{ \left(-\frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3, x_2, x_3, 0 \right) \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \{x_2v_1 + x_3v_2 \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R}\},$$

con $v_1 = \left(-\frac{1}{3}, 1, 0, 0\right)$ e $v_2 = \left(-\frac{2}{3}, 0, 1, 0\right)$. Le due soluzioni v_1 e v_2 del sistema omogeneo sono dette *soluzioni di base*: corrispondono rispettivamente ai valori $x_2 = 1, x_3 = 0$ e $x_2 = 0, x_3 = 1$ delle variabili libere.

Le soluzioni del sistema originario si scrivono nella forma seguente:

$$x = y + x_2v_1 + x_3v_2, \quad \text{con } x_2, x_3 \in \mathbb{R} \text{ parametri reali.}$$

3.4 Matrici delle operazioni elementari

Per eseguire un'operazione elementare sulle righe di una matrice A di tipo (m,n) si può moltiplicare a sinistra la matrice A per un'opportuna matrice quadrata di ordine m. Tali matrici, dette *matrici delle operazioni elementari* (o *matrici elementari*), si ottengono dalla matrice identica I_m eseguendo su di essa l'operazione che si vuole compiere. Per le matrici useremo la stessa notazione introdotta per le operazioni.

Precisamente, per scambiare la riga i-esima con la riga j-esima si costruisce la matrice S_{ij} ottenuta da I_m scambiando la riga i-esima con la j-esima.

Per moltiplicare la riga i-esima per lo scalare non nullo c si costruisce la matrice diagonale $D_i(c)$ ottenuta da I_m sostituendo c al posto (i,i).

Per aggiungere alla riga i-esima la riga j-esima moltiplicata per c, si costruisce la matrice $E_{ij}(c)$ ottenuta da I_m ponendo c al posto (i,j).

Abbiamo già visto che ogni operazione elementare è reversibile. Questo fatto corrisponde all'invertibilità delle matrici elementari: $S_{ij}^{-1} = S_{ij}$, $D_i(c)^{-1} = D_i(1/c)$, $E_{ij}(c)^{-1} = E_{ij}(-c)$.

Proposizione 1. *Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Esiste una matrice $P \in M_m(\mathbb{R})$, invertibile, per cui vale $PA = S$, con S matrice a scalini. Se $m = n$, S è ridotta e $rg(A) = n$, allora $S = rref(A) = I_n$, A è invertibile e $P = A^{-1}$.*

Dimostrazione. La matrice P è il prodotto delle matrici elementari corrispondenti alle operazioni sulle righe che si eseguono per ridurre A in forma a scalini. In particolare, si può prendere S a scalini ridotta:

$$(E_k E_{k-1} \cdots E_1)A = rref(A).$$

In questo caso $P = E_k E_{k-1} \cdots E_1$. Ma il prodotto di matrici invertibili è invertibile:

$$(E_k E_{k-1} \cdots E_1)^{-1} = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1}.$$

La seconda parte si ottiene osservando che $PA = I_n$ implica $P^{-1}PA = P^{-1} \Rightarrow A = P^{-1}$ e dunque anche $AP = P^{-1}P = I_n \Rightarrow P = A^{-1}$. □

Esempio.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{E_{31}(-2) \\ E_{41}(-1)}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \underset{E_{32}(-1)}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \underset{E_{43}(-\frac{1}{2})}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{D_3(-\frac{1}{2})}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\substack{E_{23}(1) \\ E_{13}(-2)}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{E_{12}(-1)}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = rref(A)$$

Dunque $PA = rref(A)$, con

$$P = E_{12}(-1)E_{13}(-2)E_{23}(1)D_3(-\tfrac{1}{2})E_{43}(-\tfrac{1}{2})E_{32}(-1)E_{41}(-1)E_{31}(-2).$$

Teorema 4. *(a) Se A è invertibile, il sistema lineare $Ax = b$ ha un'unica soluzione $x = A^{-1}b$.*

(b) Una matrice quadrata A, di tipo (n,n), è invertibile se e solo se $rg(A) = n$.

Dimostrazione. Se A è invertibile, $A(A^{-1}b) = b$ e quindi $A^{-1}b$ è soluzione. Viceversa, se x è soluzione, si ha $x = A^{-1}Ax = A^{-1}b$. Se $rg(A) = n$, si ha $rref(A) = I_n$. Per la Proposizione precedente A è invertibile. Viceversa, se A è invertibile, $Ax = 0$ ha soluzione unica e dunque deve essere $null(A) = n - rg(A) = 0$. □

3.5 Calcolo della matrice inversa

Per trovare la matrice inversa di una matrice quadrata A di ordine n, cioè la matrice P prodotto delle matrici elementari che trasformano A nella $rref(A)$, si può calcolare la $rref$ della matrice $(A \mid I_n)$, ottenuta accostando alla matrice A la matrice identità di ordine n.

Sia B la matrice che compare nel blocco $n \times n$ a destra nella $rref(A \mid I_n)$. Se le prime n colonne della $rref$ contengono meno di n pivot, il rango di A è minore di n e A non è invertibile, altrimenti B è la matrice inversa di A.

Infatti, se le prime n colonne della $rref$ contengono n pivot, si ha $rref(A \mid I_n) = (I_n \mid B) = P(A \mid I_n) = (PA \mid PI_n)$, con P invertibile e quindi $PA = I_n$ e $P = PI_n = B$. Quindi $A^{-1} = B$.

Esempio. Sia $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

$$(A \mid I_3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overrightarrow{E_{31}(-2)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{E_{32}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \overrightarrow{D_3(-\frac{1}{2})} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{\substack{E_{23}(1) \\ E_{13}(-2)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \overrightarrow{E_{12}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -5/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} = (I_3 \mid B)$$

Dunque $A^{-1} = B = \begin{bmatrix} -2 & -5/2 & 3/2 \\ 1 & 3/2 & -1/2 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$

Esercizio. Mostrare che la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & k & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & k & -k \end{bmatrix}$$

è invertibile per $k \neq 0, 1$ e in tal caso l'inversa è

$$A^{-1} = \frac{1}{1-k} \begin{bmatrix} 2 & -k-1 & -2 \\ -\frac{k+2}{k} & \frac{2k+1}{k} & \frac{3}{k} \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$