Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità.

Sia X una v.a. discreta e $A \in \mathcal{F}$ un evento

Chiamiamo speranza condizionata di X rispetto ad A il numero

$$\mathbb{E}[X \mid A] = \sum_{x \in R_X} x \, \mathbb{P}(X = x \mid A)$$

Sia Y un'altra v.a. discreta e $y \in R_Y$.

Allora nel caso particolare $A = \{Y = y\}$ abbiamo

$$\mathbb{E}[X \mid Y=y] = \sum_{x \in R_X} x \, \mathbb{P}(X=x \mid Y=y) = \sum_{x \in R_X} x \, \varphi_{X|Y}(x \mid y)$$

Valore medio di X quando $Y = y$

Oss. $\mathbb{E}[X \mid Y=y]$ è una funzione di y:

$$h(y) = \mathbb{E}[X \mid Y=y]$$

- In pratica si può fissare $Y = y$ e si lavora con la probabilità $\mathbb{P}(\cdot \mid Y=y)$ nota
- La funzione $h(y)$ può essere valutata in Y e otteniamo una nuova v.a., cioè $h(Y)$

Esempio: lanciamo un dado da 6.

D v.a. che vale 1 se il risultato è Dispari e 0 altrimenti

P v.a. che vale 1 se il risultato è un primo e 0 altrimenti

- Calcolare il valore atteso di D sapendo che $P=1$

$$\mathbb{E}[D \mid P=1] = \sum_{x \in R_D} x \, \mathbb{P}(D=x \mid P=1)$$

Oss: $R_D = \{0,1\}$

$$= 0 \cdot \mathbb{P}(D=0 \mid P=1) + 1 \cdot \underbrace{\mathbb{P}(D=1 \mid P=1)}$$

$$= \frac{2}{3}$$

$= \frac{2}{3}$ perché ci sono 3 primi di cui 2 dispari

- Sia $h(p) = \mathbb{E}[D \mid P=p]$

$\forall x$ Calcoliamo $\mathbb{P}(h(P) = x)$

Ragionando come prima vediamo che, per $p \in \{0,1\}$

$$h(p) = \mathbb{E}[D \mid P=p] = \mathbb{P}(D=1 \mid P=p) = \begin{cases} 2/3 & p=1 \\ 1/3 & p=0 \end{cases}$$

Poiché $h(p)$ può assumere solo i valori $\frac{2}{3}$ ed $\frac{1}{3}$ abbiamo

$$\mathbb{P}(h(P)=x) = \begin{cases} \mathbb{P}(P=1) = 1/2 & x = 2/3 \\ \mathbb{P}(P=0) = 1/2 & x = 1/3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\square$