

## Note per il corso di *Geometria e algebra lineare* 2023-24

### LT in Informatica

## 5 Basi

### 5.1 Coordinate

Sia  $V$  uno spazio vettoriale e  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  una base (ordinata) di  $V$ . Sia  $v \in V$ . Si ha allora  $v = \sum_{i=1}^n x_i v_i$ . I coefficienti  $x_i$  sono le *coordinate* di  $v$  rispetto alla base ordinata  $\mathcal{B}$ .

Indicheremo con  $T_{\mathcal{B}}(v)$  la  $n$ -upla delle coordinate di  $v$  rispetto alla base  $\mathcal{B}$  (talvolta si usa anche il simbolo  $(x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{B}}$  per indicare il vettore  $v$ ). Si osservi che al cambiare della base le coordinate dello stesso vettore, in generale, cambiano.

*Esempio.* I vettori  $v_1 = (2, -1, 0)$ ,  $v_2 = (-1, 2, 1)$ ,  $v_3 = (0, 0, 1)$  formano una base di  $\mathbb{R}^3$ . Infatti la matrice

$$M = [v_1 \ v_2 \ v_3] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ha rango 3. Dunque le sue colonne  $v_1, v_2, v_3$  sono linearmente indipendenti. Come vedremo nella prossima sezione, 3 vettori indipendenti di  $\mathbb{R}^3$  formano una base di  $\mathbb{R}^3$ . Il vettore  $v = (5, -4, 2)$  ha coordinate rispetto a  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$  gli scalari  $x_1, x_2, x_3$  tali che  $x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = v$ . Dunque  $x = (x_1, x_2, x_3)$  è la soluzione del sistema lineare non omogeneo

$$Mx = v.$$

L'unica soluzione è  $(2, -1, 3)$ . Quindi  $T_{\mathcal{B}}(v) = (2, -1, 3)$  e  $v = (2, -1, 3)_{\mathcal{B}} = 2v_1 - v_2 + 3v_3$ . Rispetto alla *base canonica* di  $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{E} = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$$

il vettore  $v$  ha coordinate uguali alle sue componenti:  $T_{\mathcal{E}}(v) = (5, -4, 2)$ .

### 5.2 Proprietà delle basi di $\mathbb{R}^n$

Si è visto negli esempi che lo spazio di  $n$ -uple  $\mathbb{R}^n$  ha molte basi. Tuttavia, con gli enunciati seguenti si dimostra che le basi di  $\mathbb{R}^n$  hanno tutte lo stesso numero  $n$  di vettori.

**Proposizione 1.** *In  $\mathbb{R}^n$   $m$  vettori, con  $m > n$ , sono sempre linearmente dipendenti.*

*Dimostrazione.* Si consideri la matrice  $M$ , di tipo  $(n, m)$ , le cui colonne sono gli  $m$  vettori. Essendo  $rg(M) \leq n$ , si ha  $null(M) = m - rg(M) > 0$  e quindi il sistema  $Mx = 0$  ha soluzioni non nulle: le colonne di  $M$  sono dipendenti.  $\square$

**Proposizione 2.** *Qualunque  $n$ -upla di vettori indipendenti di  $\mathbb{R}^n$  è una base di  $\mathbb{R}^n$ .*

*Dimostrazione.* Basta considerare la matrice  $M$ , di tipo  $(n, n+1)$ , che ha come prime  $n$  colonne i vettori indipendenti, e come  $(n+1)$ -esima colonna un qualunque altro vettore  $v \in \mathbb{R}^n$ , e ridurre  $M$  per righe. L'ultima colonna della matrice  $rref(M)$  contiene i coefficienti della combinazione lineare degli  $n$  vettori che genera il vettore  $v$ .  $\square$

**Proposizione 3.** *Un insieme  $\{v_1, \dots, v_m\}$  di vettori indipendenti di  $\mathbb{R}^n$ , con  $m < n$ , può sempre essere completato a una base di  $\mathbb{R}^n$  aggiungendo  $n - m$  vettori.*

*Dimostrazione.* Si consideri la matrice  $M$ , di tipo  $(n, m+n)$ , con colonne gli  $m$  vettori  $v_1, \dots, v_m$  e gli  $n$  elementi  $e_1, \dots, e_n$  della base canonica di  $\mathbb{R}^n$ . Abbiamo visto che il rango di  $M$  coincide col massimo numero di colonne indipendenti di  $M$ . Quindi la matrice  $M$  ha rango  $n$ , poiché contiene  $n$  colonne indipendenti e lo spazio delle colonne di  $M$  è tutto  $\mathbb{R}^n$ . La forma ridotta  $rref(M)$  ha  $e_1, \dots, e_m$  nelle prime  $m$  colonne, poiché le prime  $m$  colonne di  $M$  sono indipendenti, ed esistono altre  $n-m$  colonne di  $M$  (corrispondenti ai pivot di  $rref(M)$ ) che sono indipendenti da  $v_1, \dots, v_m$ . Aggiungendo all'insieme  $\{v_1, \dots, v_m\}$  questi  $n-m$  elementi della base canonica, si ottiene un insieme indipendente e quindi una base per la proposizione precedente.  $\square$

*Esempio.* Per completare l'insieme indipendente

$$\{v_1 = (1, 0, 2, 1), v_2 = (1, 1, -2, -1)\}$$

a una base di  $\mathbb{R}^4$ , basta considerare la riduzione per righe

$$rref \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Le colonne 1,2,3,5 sono indipendenti. Quindi l'insieme

$$\{v_1, v_2, e_1, e_3\}$$

forma una base di  $\mathbb{R}^4$ . Si osservi che è sufficiente ottenere una qualsiasi matrice a scalini (non necessariamente ridotta) per individuare le colonne indipendenti e quindi gli elementi da aggiungere per ottenere una base.

**Teorema 1.** Ogni base di  $\mathbb{R}^n$  contiene  $n$  vettori.

*Dimostrazione.* Per la Proposizione 1, rimane solo da stabilire che non può esistere una base formata da  $m$  vettori, con  $m < n$ . Supponiamo che  $v_1, \dots, v_m$  siano  $m$  vettori indipendenti, con  $m < n$ . Per la proposizione precedente esistono vettori  $v_{m+1}, \dots, v_n$  tali che l'insieme  $\{v_1, \dots, v_n\}$  sia una base di  $\mathbb{R}^n$ . Ma allora  $v_{m+1}, \dots, v_n \notin \langle v_1, \dots, v_m \rangle$  e i vettori  $v_1, \dots, v_m$  non possono essere generatori e quindi non sono una base di  $\mathbb{R}^n$ .  $\square$

Lo stesso procedimento seguito sopra per  $\mathbb{R}^n$  mostra che in ogni spazio di  $n$ -uple  $\mathbb{K}^n$  ogni base ha  $n$  elementi.

### 5.3 Dimensione degli spazi vettoriali

Sia  $V$  uno spazio vettoriale sul campo  $\mathbb{K}$ , che possiede una base  $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ . Attraverso la funzione  $T_{\mathcal{B}}$  che fa corrispondere a ogni vettore le sue coordinate rispetto a  $\mathcal{B}$ , tutte le proprietà dimostrate per le basi di  $\mathbb{K}^n$  si dimostrano per lo spazio  $V$ .

**Proposizione 4.** La funzione  $T_{\mathcal{B}} : V \rightarrow \mathbb{K}^n$  ha le seguenti proprietà:

- (i) è iniettiva e suriettiva (cioè biunivoca);
- (ii) è lineare:  $T_{\mathcal{B}}(a_1 v_1 + a_2 v_2) = a_1 T_{\mathcal{B}}(v_1) + a_2 T_{\mathcal{B}}(v_2)$ , per ogni  $a_1, a_2 \in \mathbb{K}$ ,  $v_1, v_2 \in V$ . In particolare, ponendo  $a_1 = a_2 = 0$ , si ha  $T_{\mathcal{B}}(0) = 0$ .

*Dimostrazione.* (i) è immediata dalla definizione, essendo  $T_{\mathcal{B}}$  invertibile:

$$T_{\mathcal{B}}^{-1}(x_1, \dots, x_n) = \sum_i x_i e_i.$$

(ii) se  $v_1 = \sum_i x_i e_i$  e  $v_2 = \sum_i y_i e_i$ , si ha

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 = \sum_i (a_1 x_i + a_2 y_i) e_i.$$

□

**Definizione 1.** Una funzione lineare biunivoca è detta *isomorfismo* tra i due spazi vettoriali.

L'esistenza dell'isomorfismo  $T_B$  tra  $V$  e  $\mathbb{K}^n$  permette di ottenere per  $V$  tutti i risultati noti per  $\mathbb{K}^n$ . Infatti vale la seguente:

**Proposizione 5.** I vettori  $v_1, \dots, v_m$  di  $V$  sono indipendenti (o generatori, o base di  $V$ ) se e solo se le immagini  $T_B(v_1), \dots, T_B(v_m)$  sono indipendenti (rispettivamente generatori, base di  $\mathbb{K}^n$ ).

Ad esempio, se  $v_1, \dots, v_m$  sono indipendenti, e  $\sum_i a_i T_B(v_i) = 0$ , si ha  $T_B(\sum_i a_i v_i) = 0 = T_B(0)$ . Per l'iniettività deve essere  $\sum_i a_i v_i = 0$ , e quindi  $a_i = 0 \forall i$  per l'indipendenza dei  $v_i$ . Dunque le immagini sono indipendenti. Si procede in modo simile per le altre condizioni.

*Esempio.* Si considerino i polinomi  $p_1(x) = x^2 - 2x$ ,  $p_2(x) = 2x^3 - x^2 + 4x + 2$ ,  $p_3(x) = x^3 + x + 1$  in  $\mathbb{R}_3[x]$ . Per stabilirne la in/dipendenza lineare basta considerare le quadruple delle coordinate rispetto ad una qualsiasi base di  $\mathbb{R}_3[x]$ . Scegliendo  $B = \{x^3, x^2, x, 1\}$ , si ottengono i tre vettori di  $\mathbb{R}^4$

$$T_B(p_1) = (0, 1, -2, 0), \quad T_B(p_2) = (2, -1, 4, 2), \quad T_B(p_3) = (1, 0, 1, 1)$$

Dalla matrice

$$\text{rref} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

si ottiene che  $p_1$  e  $p_2$  sono indipendenti, e  $p_3 = \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_2$ .

La Proposizione 5 permette di dimostrare facilmente il fondamentale Teorema della base, e quindi di definire correttamente la dimensione di uno spazio vettoriale finitamente generato.

**Teorema 2. (della base)** In uno spazio vettoriale  $V$  finitamente generato tutte le basi hanno lo stesso numero (finito) di vettori. Tale numero è la dimensione dello spazio  $V$ , indicata con  $\dim V$ . □

Si osservi che uno spazio vettoriale finitamente generato, diverso dallo spazio nullo  $\{0\}$ , ha sempre una base. Infatti, se  $V = \langle S \rangle$ ,  $S = \{v_1, \dots, v_m\}$  e  $S$  è dipendente, è sempre possibile, eliminando un vettore alla volta, scegliere in  $S$  vettori indipendenti che generano  $S$ , e quindi generano tutto lo spazio  $V$ .

Lo spazio nullo, contenente solo il vettore nullo, non contiene alcun vettore indipendente e quindi non ha basi. Per questo si conviene di porre  $\dim\{0\} = 0$ .

## 5.4 Somma e intersezione di sottospazi

Dati due sottospazi  $U, W$  di uno spazio vettoriale  $V$ , l'intersezione  $U \cap W$  è ancora un sottospazio (è una facile verifica), mentre l'unione  $U \cup W$  in generale non lo è.

Al posto dell'unione di  $U$  e  $W$ , si può considerare la *somma* dei due sottospazi:

$$U + W = \{v = u + w \in V \mid u \in U, w \in W\}$$

che è un sottospazio di  $V$  contenente  $U$  e  $W$ , generato dall'unione di insiemi di generatori di  $U$  e di  $W$ . Vale la seguente *formula di Grassmann* per le dimensioni:

$$\dim(U + W) + \dim(U \cap W) = \dim U + \dim W.$$

*Esempio.* Siano  $V = \mathbb{R}_3[x]$ ,

$$U = \{p \in \mathbb{R}_3[x] \mid xp'' = 2p'\}, \quad W = \{p \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(2) = p(4) = 0\}.$$

$$\begin{aligned} p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in U &\Leftrightarrow x(2a_2 + 6a_3x) = 2(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2) \\ &\Leftrightarrow a_1 = a_2 = 0. \end{aligned}$$

Dunque  $U = \langle 1, x^3 \rangle$  ha dimensione 2.

Anche  $W$  ha dimensione 2 (sono due equazioni lineari nelle 4 variabili  $a_0, a_1, a_2, a_3$ ), con generatori indipendenti  $(x-2)(x-4)$  e  $x(x-2)(x-4)$ .

Un polinomio  $p(x) = a_0 + a_3x^3 \in U$  sta anche in  $W$  se  $p(2) = a_0 + 8a_3 = 0$  e  $p(4) = a_0 + 64a_3 = 0$ . Dunque è  $p = 0$  e  $U \cap W = \{0\}$ . Per la formula di Grassmann si ha  $\dim(U + W) = 4$  e dunque  $U + W = \mathbb{R}_3[x]$ .

## 5.5 Applicazione: l'interpolazione polinomiale

L'uso di basi diverse da quella canonica (in  $\mathbb{R}^n$  o in  $\mathbb{R}_n[x]$ ) è conveniente nel caso in cui un problema assuma una forma più semplice quando viene espresso usando le coordinate rispetto alla nuova base.

*Esempio.* Si voglia studiare il seguente problema di *interpolazione polinomiale*: fissati  $n$  punti  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  del piano, con ascisse  $x_i$  tutte distinte, trovare un polinomio il cui grafico passi per tutti gli  $n$  punti.

Il problema ha un'unica soluzione se il polinomio cercato ha grado al più  $n-1$ . Per risolverlo, conviene utilizzare, al posto della base canonica  $\{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$ , la *base di Lagrange* costituita dai polinomi

$$f_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \quad (i = 1, \dots, n)$$

Il *polinomio di Lagrange*  $f_i(x)$  ha la proprietà di annullarsi in  $x_j$  per ogni  $j \neq i$  e valere 1 in  $x_i$ . L'insieme  $\mathcal{B} = \{f_1, \dots, f_n\}$  è una base di  $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ . Mostriamo che è linearmente indipendente: se

$$a_1 f_1(x) + \dots + a_n f_n(x) = 0,$$

valutando in  $x_k$  si ottiene  $\sum_i a_i f_i(x_k) = a_k = 0$ , per ogni  $k = 1, \dots, n$ .

Essendo  $n = \dim \mathbb{R}_{n-1}[x]$ , l'insieme  $\mathcal{B}$  è una base di  $\mathbb{R}_{n-1}[x]$  (per le Proposizioni 2 e 5).

Data la base di Lagrange, il problema di interpolazione si risolve immediatamente: la combinazione lineare  $f(x) = \sum_i y_i f_i(x)$  è un polinomio con grafico passante per i punti  $(x_i, y_i)$ . Si noti che la base di Lagrange dipende solo dalle ascisse  $x_i$ , non dalle ordinate  $y_i$ .

Ad esempio, se le ascisse dei punti sono  $x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = 5$ , i polinomi di Lagrange sono

$$f_1(x) = \frac{1}{6}(x-4)(x-5), \quad f_2(x) = -\frac{1}{2}(x-2)(x-5), \quad f_3(x) = \frac{1}{3}(x-2)(x-4)$$

e il polinomio con grafico passante per i punti  $(2, 1), (4, 2), (5, 0)$  è

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 \cdot f_1(x) + 2 \cdot f_2(x) + 0 \cdot f_3(x) = \frac{1}{6}(x-4)(x-5) - (x-2)(x-5) \\ &= -\frac{1}{6}(x-5)(5x-8). \end{aligned}$$