

# Algoritmi e Strutture Dati

## Analisi di algoritmi Introduzione

Alberto Montresor

Università di Trento

2022/09/24

This work is licensed under a Creative Commons  
Attribution-ShareAlike 4.0 International License.



# Sommario

- 1 Modelli di calcolo
  - Definizioni
  - Esempi di analisi
  - Ordini di complessità
- 2 Notazione asintotica
  - Definizioni
  - Esercizi
- 3 Complessità problemi vs algoritmi
  - Moltiplicare numeri complessi
  - Sommare numeri binari
  - Moltiplicare numeri binari
- 4 Tipologia dell'input
  - Selection Sort
  - Insertion Sort
  - Merge Sort

# Introduzione

## Obiettivo: **stimare la complessità in tempo**

- Definizioni
- Modelli di calcolo
- Esempi di valutazioni
- Ordini di complessità

## Perché?

- Per stimare il tempo impiegato per un dato input
- Per stimare il più grande input gestibile in tempi ragionevoli
- Per confrontare l'efficienza di algoritmi diversi
- Per ottimizzare le parti più importanti

# Complessità

Complessità: "**Dimensione dell'input**"  $\rightarrow$  "**Tempo**"

- Come definire la dimensione dell'input?
- Come misurare il tempo?

# Dimensione dell'input

## Criterio di **costo logaritmico**

- *La taglia dell'input è il numero di bit necessari per rappresentarlo*
- Esempio: moltiplicazione di numeri binari lunghi  $n$  bit

## Criterio di **costo uniforme**

- *La taglia dell'input è il numero di elementi di cui è costituito*
- Esempio: ricerca minimo in un vettore di  $n$  elementi

## In molti casi...

- Possiamo assumere che gli "elementi" siano rappresentati da un numero costante di bit
- Le due misure coincidono a meno di una costante moltiplicativa

# Definizione di tempo

## **Tempo $\equiv$ n. istruzioni elementari**

Un'istruzione si considera elementare se può essere eseguita in tempo "costante" dal processore.

## **Operazioni elementari**

- `a *= 2` ?
- `Math.cos(d)` ?
- `min(A, n)` ?

# Modelli di calcolo

## Modello di calcolo

Rappresentazione astratta di un calcolatore

- **Astrazione**: deve permettere di nascondere i dettagli
- **Realismo**: deve riflettere la situazione reale
- **Potenza matematica**: deve permettere di trarre conclusioni "formali" sul costo

# Modelli di calcolo – Wikipedia

## Pages in category "Models of computation"

The following 108 pages are in this category, out of 108 total. This list may not reflect recent changes ([learn more](#)).

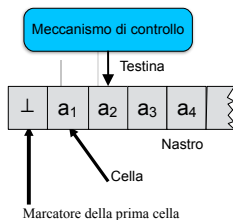
	<b>E cont.</b>	<b>P cont.</b>
<b>A</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Model of computation</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Event-driven finite-state machine</li> <li>Evolution in Variable Environment</li> <li>Extended finite-state machine</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>Abstract Job Object</li> <li>Abstract machine</li> <li>Abstract state machines</li> <li>Agent-based model</li> <li>Algorithm characterizations</li> <li>Alternating Turing machine</li> <li>Applicative computing systems</li> </ul>	<b>F</b>	<b>Q</b>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Finite state machine with datapath</li> <li>Finite state transducer</li> <li>Finite-state machine</li> <li>FRACTRAN</li> <li>Funnelsort</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Probabilistic Turing machine</li> <li>Pushdown automaton</li> </ul>
<b>B</b>	<b>H</b>	<b>R</b>
		<ul style="list-style-type: none"> <li>Quantum capacity</li> <li>Quantum circuit</li> <li>Quantum computer</li> </ul>
		<ul style="list-style-type: none"> <li>Realization (systems)</li> <li>Register machine</li> </ul>



# Modelli di calcolo

## Macchina di Turing

Una macchina ideale che manipola i dati contenuti su un nastro di lunghezza infinita, secondo un insieme prefissato di regole.



Ad ogni passo, la Macchina di Turing:

- legge il simbolo sotto la testina
- modifica il proprio stato interno
- scrive un nuovo simbolo nella cella
- muove la testina a destra o a sinistra

- Fondamentale nello studio della calcolabilità
- Livello troppo basso per i nostri scopi

# Modelli di calcolo

## Random Access Machine (RAM)

- **Memoria:**
  - Quantità infinita di celle di dimensione finita
  - Accesso in tempo costante (indipendente dalla posizione)
- **Processore (singolo)**
  - Set di istruzioni elementari simile a quelli reali:
    - somme, sottrazioni, moltiplicazioni, operazioni logiche, etc.
    - istruzioni di controllo (salti, salti condizionati)
- **Costo delle istruzioni elementari**
  - Uniforme, ininfluyente ai fini della valutazione (come vedremo)

# Tempo di calcolo $\min()$

- Ogni istruzione richiede un tempo costante per essere eseguita
- La costante è potenzialmente diversa da istruzione a istruzione
- Ogni istruzione viene eseguita un certo  $\#$  di volte, dipendente da  $n$

---

```
ITEM  min(ITEM[] A, int n)
```

---

	Costo	# Volte
ITEM $min = A[1]$	$c_1$	1
<b>for</b> $i = 2$ <b>to</b> $n$ <b>do</b>	$c_2$	$n$
<b>if</b> $A[i] < min$ <b>then</b>	$c_3$	$n - 1$
$min = A[i]$	$c_4$	$n - 1$
<b>return</b> $min$	$c_5$	1

---

$$\begin{aligned}
 T(n) &= c_1 + c_2n + c_3(n - 1) + c_4(n - 1) + c_5 \\
 &= (c_2 + c_3 + c_4)n + (c_1 + c_5 - c_3 - c_4) = \textcolor{red}{an} + \textcolor{red}{b}
 \end{aligned}$$

Il vettore viene suddiviso in due parti:

Parte SX:	$\lfloor (n-1)/2 \rfloor$
Parte DX:	$\lfloor n/2 \rfloor$

	Costo	# ( $i > j$ )	# ( $i \leq j$ )
if $i > j$ then	$c_1$	1	1
return 0	$c_2$	1	0
else			
int $m = \lfloor (i + j)/2 \rfloor$	$c_3$	0	1
if $A[m] = v$ then	$c_4$	0	1
return $m$	$c_5$	0	0
else if $A[m] < v$ then	$c_6$	0	1
return binarySearch( $A, v, m + 1, j$ )	$c_7 + T(\lfloor n/2 \rfloor)$	0	0/1
else			
return binarySearch( $A, v, i, m - 1$ )	$c_7 + T(\lfloor (n - 1)/2 \rfloor)$	0	1/0

# Tempo di calcolo `binarySearch()`

- Assunzioni (Caso pessimo):

- Per semplicità, assumiamo  $n$  potenza di 2:  $n = 2^k$
- L'elemento cercato non è presente
- Ad ogni passo, scegliamo sempre la parte DX di dimensione  $n/2$

- Due casi:

$$i > j \quad (n = 0) \qquad T(n) = c_1 + c_2 = c$$

$$i \leq j \quad (n > 0) \qquad \begin{aligned} T(n) &= T(n/2) + c_1 + c_3 + c_4 + c_6 + c_7 \\ &= T(n/2) + d \end{aligned}$$

- Relazione di ricorrenza:

$$T(n) = \begin{cases} c & \text{se } n = 0 \\ T(n/2) + d & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

# Tempo di calcolo `binarySearch()`

Soluzione della relazione di ricorrenza tramite espansione

$$T(n) = T(n/2) + d$$

$$= T(n/4) + 2d$$

$$= T(n/8) + 3d$$

...

$$= T(1) + kd$$

$$= T(0) + (k + 1)d$$

$$= kd + (c + d)$$

$$= d \log n + e.$$

$$n = 2^k \Rightarrow k = \log n$$

# Ordini di complessità

Per ora, abbiamo analizzato precisamente due algoritmi e abbiamo ottenuto due *funzioni di complessità*:

- Ricerca:  $T(n) = d \log n + e$
- Minimo:  $T(n) = an + b$

# Ordini di complessità

Per ora, abbiamo analizzato precisamente due algoritmi e abbiamo ottenuto due *funzioni di complessità*:

- Ricerca:  $T(n) = d \log n + e$       **logaritmica**       $O(\log n)$
- Minimo:  $T(n) = an + b$       **lineare**       $O(n)$



# Ordini di complessità

Per ora, abbiamo analizzato precisamente due algoritmi e abbiamo ottenuto due *funzioni di complessità*:

- Ricerca:  $T(n) = d \log n + e$       **logaritmica**       $O(\log n)$
- Minimo:  $T(n) = an + b$       **lineare**       $O(n)$

Una terza funzione deriva dall'*algoritmo naïf* per il minimo:

- Minimo:  $T(n) = fn^2 + gn + h$       **quadratica**       $O(n^2)$

# Classi di complessità

$f(n)$	$n = 10^1$	$n = 10^2$	$n = 10^3$	$n = 10^4$	<b>Tipo</b>
$\log n$	3	6	9	13	logaritmico
$\sqrt{n}$	3	10	31	100	sublineare
$n$	10	100	1000	10000	lineare
$n \log n$	30	664	9965	132877	loglineare
$n^2$	$10^2$	$10^4$	$10^6$	$10^8$	quadratico
$n^3$	$10^3$	$10^6$	$10^9$	$10^{12}$	cubico
$2^n$	1024	$10^{30}$	$10^{300}$	$10^{3000}$	esponenziale

Come sbagliare completamente l'algoritmo di controllo degli update in Windows XP e renderlo esponenziale:

<http://m.slashdot.org/story/195683>

# Algoritmi e Strutture Dati

Analisi di algoritmi  
Funzioni di costo, notazione asintotica

Alberto Montresor

Università di Trento

2022/09/24

This work is licensed under a Creative Commons  
Attribution-ShareAlike 4.0 International License.



# Sommario

- 1 Modelli di calcolo
  - Definizioni
  - Esempi di analisi
  - Ordini di complessità
- 2 Notazione asintotica
  - Definizioni
  - Esercizi
- 3 Complessità problemi vs algoritmi
  - Moltiplicare numeri complessi
  - Sommare numeri binari
  - Moltiplicare numeri binari
- 4 Tipologia dell'input
  - Selection Sort
  - Insertion Sort
  - Merge Sort

# Notazioni $O$ , $\Omega$ , $\Theta$

## Definizione – Notazione $O$

Sia  $g(n)$  una funzione di costo; indichiamo con  $O(g(n))$  l'insieme delle funzioni  $f(n)$  tali per cui:

$$\exists c > 0, \exists m \geq 0 : f(n) \leq cg(n), \forall n \geq m$$

- Come si legge:  $f(n)$  è “**O grande**” (big-O) di  $g(n)$
- Come si scrive:  $f(n) = O(g(n))$
- $g(n)$  è un **limite asintotico superiore** per  $f(n)$
- $f(n)$  cresce al più come  $g(n)$

# Notazioni $O$ , $\Omega$ , $\Theta$

## Definizione – Notazione $\Omega$

Sia  $g(n)$  una funzione di costo; indichiamo con  $\Omega(g(n))$  l'insieme delle funzioni  $f(n)$  tali per cui:

$$\exists c > 0, \exists m \geq 0 : f(n) \geq cg(n), \forall n \geq m$$

- Come si legge:  $f(n)$  è “**Omega grande**” di  $g(n)$
- Come si scrive:  $f(n) = \Omega(g(n))$
- $g(n)$  è un **limite asintotico inferiore** per  $f(n)$
- $f(n)$  cresce almeno quanto  $g(n)$

# Notazioni $O$ , $\Omega$ , $\Theta$

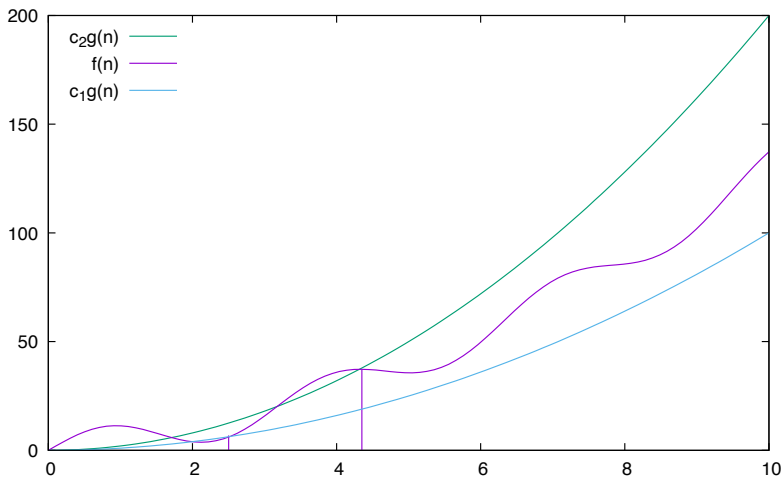
## Definizione – Notazione $\Theta$

Sia  $g(n)$  una funzione di costo; indichiamo con  $\Theta(g(n))$  l'insieme delle funzioni  $f(n)$  tali per cui:

$$\exists c_1 > 0, \exists c_2 > 0, \exists m \geq 0 : c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n), \forall n \geq m$$

- Come si legge:  $f(n)$  è “**Theta**” di  $g(n)$
- Come si scrive:  $f(n) = \Theta(g(n))$
- $f(n)$  cresce esattamente come  $g(n)$
- $f(n) = \Theta(g(n))$  se e solo se  $f(n) = O(g(n))$  e  $f(n) = \Omega(g(n))$

# Graficamente





## Vero o falso?

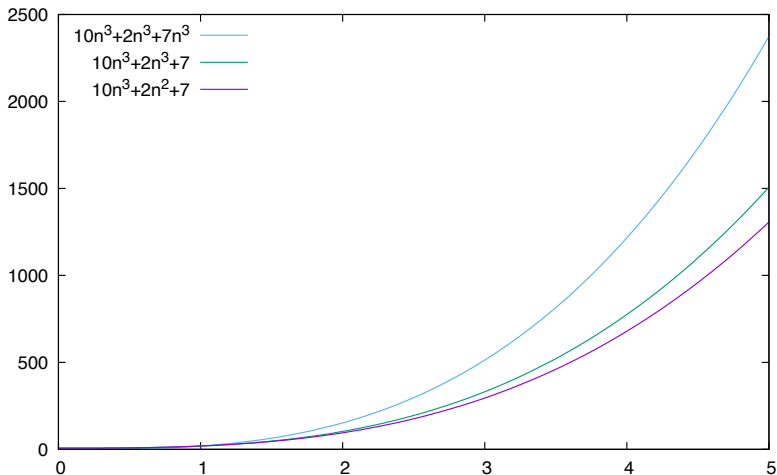
$$f(n) = 10n^3 + 2n^2 + 7 \stackrel{?}{=} O(n^3)$$

Dobbiamo provare che  $\exists c > 0, \exists m \geq 0 : f(n) \leq cn^3, \forall n \geq m$

$$\begin{aligned} f(n) &= 10n^3 + 2n^2 + 7 \\ &\leq 10n^3 + 2n^3 + 7 && \forall n \geq 1 \\ &\leq 10n^3 + 2n^3 + 7n^3 && \forall n \geq 1 \\ &= 19n^3 \\ &\stackrel{?}{\leq} cn^3 \end{aligned}$$

che è vera per ogni  $c \geq 19$  e per ogni  $n \geq 1$ , quindi  $m = 1$ .

# Graficamente



# Non è l'unico modo di procedere

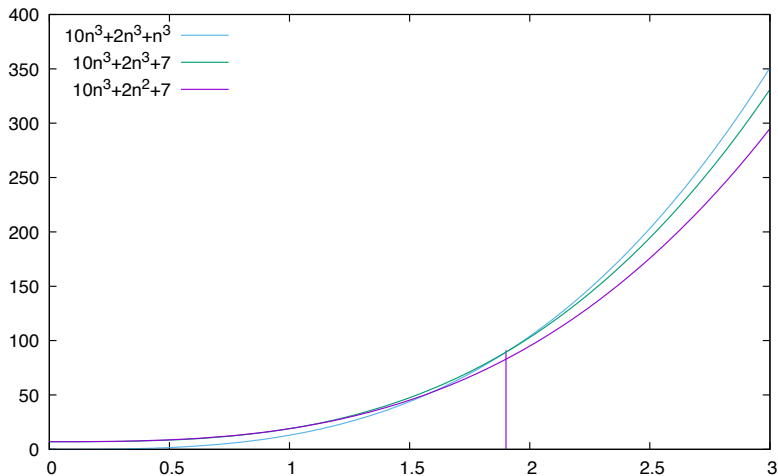
$$f(n) = 10n^3 + 2n^2 + 7 \stackrel{?}{=} O(n^3)$$

Dobbiamo provare che  $\exists c > 0, \exists m \geq 0 : f(n) \leq cn^3, \forall n \geq m$

$$\begin{aligned} f(n) &= 10n^3 + 2n^2 + 7 \\ &\leq 10n^3 + 2n^3 + 7 && \forall n \geq 1 \\ &\leq 10n^3 + 2n^3 + n^3 && \forall n \geq \sqrt[3]{7} \\ &= 13n^3 \\ &\stackrel{?}{\leq} cn^3 \end{aligned}$$

che è vera per ogni  $c \geq 13$  e per ogni  $n \geq \sqrt[3]{7}$ , quindi usiamo  $m = 2$

# Graficamente



# Vero o falso?

$$f(n) = 3n^2 + 7n \stackrel{?}{=} \Theta(n^2)$$

**Limite inferiore:**  $\exists c_1 > 0, \exists m_1 \geq 0 : f(n) \geq c_1 n^2, \forall n \geq m_1$

## Vero o falso?

$$f(n) = 3n^2 + 7n \stackrel{?}{=} \Theta(n^2)$$

**Limite inferiore:**  $\exists c_1 > 0, \exists m_1 \geq 0 : f(n) \geq c_1 n^2, \forall n \geq m_1$

$$f(n) = 3n^2 + 7n$$

$$\geq 3n^2$$

Per  $n \geq 0$

$$\stackrel{?}{\geq} c_1 n^2$$

che è vera per ogni  $c_1 \leq 3$  e per ogni  $n \geq 0$ , quindi  $m_1 = 0$

# Vero o falso?

$$f(n) = 3n^2 + 7n \stackrel{?}{=} \Theta(n^2)$$

**Limite superiore:**  $\exists c_2 > 0, \exists m_2 \geq 0 : f(n) \leq c_2 n^2, \forall n \geq m_2$

## Vero o falso?

$$f(n) = 3n^2 + 7n \stackrel{?}{=} \Theta(n^2)$$

**Limite superiore:**  $\exists c_2 > 0, \exists m_2 \geq 0 : f(n) \leq c_2 n^2, \forall n \geq m_2$

$$\begin{aligned} f(n) &= 3n^2 + 7n \\ &\leq 3n^2 + 7n^2 && \text{Per } n \geq 1 \\ &= 10n^2 \\ &\stackrel{?}{\leq} c_2 n^2 \end{aligned}$$

che è vera per ogni  $c_2 \geq 10$  e per ogni  $n \geq 1$ , quindi  $m_2 = 1$



# Vero o falso?

$$f(n) = 3n^2 + 7n \stackrel{?}{=} \Theta(n^2)$$

**Notazione  $\Theta$ :**

$$\exists c_1 > 0, \exists c_2 > 0, \exists m \geq 0 : c_1 n^2 \leq f(n) \leq c_2 n^2, \forall n \geq m$$

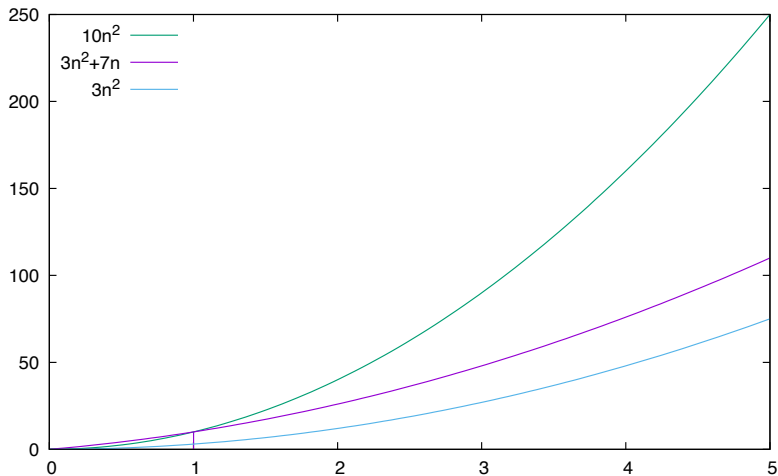
Con questi parametri:

$$c_1 = 3$$

$$c_2 = 10$$

$$m = \max\{m_1, m_2\} = \max\{0, 1\} = 1$$

# Graficamente



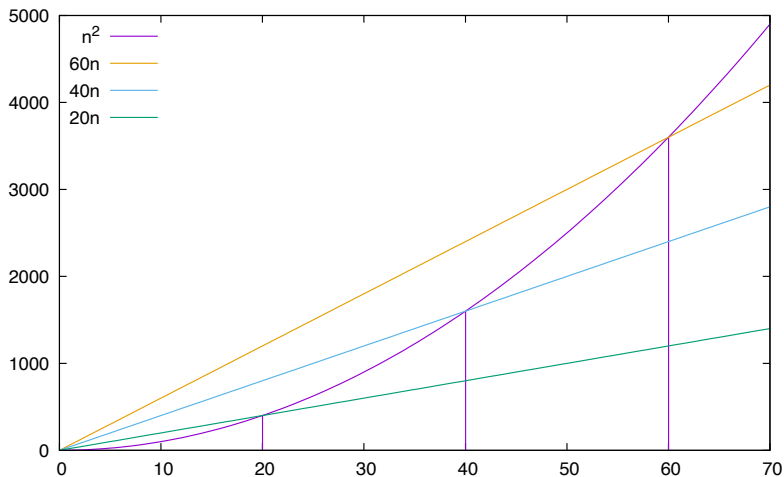
# Vero o falso?

$$n^2 \stackrel{?}{=} O(n)$$

Dobbiamo dimostrare che  $\exists c > 0, \exists m > 0 : n^2 \leq cn, \forall n \geq m$

- Otteniamo questo:  $n^2 \leq cn \Leftrightarrow c \geq n$
- Questo significa che  $c$  cresce con il crescere di  $n$ , ovvero che non possiamo scegliere una costante  $c$

# Graficamente



# Vero o falso?

$$n^2 \stackrel{?}{=} O(n^3)$$

Dobbiamo dimostrare che  $\exists c > 0, \exists m > 0 : n^2 \leq cn^3, \forall n \geq m$

- Otteniamo questo:  $n^2 \leq cn^3 \Leftrightarrow c \geq \frac{1}{n}$
- La funzione  $1/n$  è monotona decrescente per  $n > 0$ .
- In altre parole, possiamo prendere un qualunque valore  $m$  (e.g.,  $m = 1$ ), e prendere un costante  $c \geq 1/m$ , come ad esempio  $c = 1$ .

# Algoritmi e strutture dati

Analisi di algoritmi

Complessità algoritmi vs Complessità problemi

Alberto Montresor

Università di Trento

2022/09/24

This work is licensed under a Creative Commons  
Attribution-ShareAlike 4.0 International License.



# Sommario

- 1 Modelli di calcolo
  - Definizioni
  - Esempi di analisi
  - Ordini di complessità
- 2 Notazione asintotica
  - Definizioni
  - Esercizi
- 3 Complessità problemi vs algoritmi
  - Moltiplicare numeri complessi
  - Sommare numeri binari
  - Moltiplicare numeri binari
- 4 Tipologia dell'input
  - Selection Sort
  - Insertion Sort
  - Merge Sort

# Introduzione

## Obiettivo: riflettere su complessità di problemi/algoritmi

- In alcuni casi, si può migliorare quanto si ritiene "normale"
- In altri casi, è impossibile fare di meglio
- Qual è il rapporto fra un problema computazionale e l'algoritmo?

## Back to basics!

- Somme
- Moltiplicazioni



# Moltiplicare numeri complessi

## Moltiplicazione numeri complessi

- $(a + bi)(c + di) = [ac - bd] + [ad + bc]i$
- Input:  $a, b, c, d$
- Output:  $ac - bd, ad + bc$

## Domande

Considerate un modello di calcolo dove la moltiplicazione costa 1, le addizioni/sottrazioni costano 0.01,

- Quanto costa l'algoritmo dettato dalla definizione?
- Potete fare meglio di così?
- Qual è il ruolo del modello di calcolo?

# Moltiplicare numeri complessi

## Questioni aperte

- Si può fare ancora meglio?
- Oppure, è possibile dimostrare che non si può fare meglio di così?

## Alcune riflessioni

- In questo modello, effettuare 3 moltiplicazioni invece di 4 risparmia il 25% del costo
- Esistono contesti in cui effettuare 3 moltiplicazioni invece di 4 può produrre un risparmio maggiore

# Sommare numeri binari

## Algoritmo elementare della somma – `sum()`

- richiede di esaminare tutti gli  $n$  bit
- costo totale  $cn = O(n)$   
( $c \equiv$  costo per sommare tre bit e generare riporto)

## Domanda

Esiste un metodo più efficiente?

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & + \\
 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \\
 \hline
 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
 \end{array}$$

# Limite superiore alla complessità di un problema

## Notazione $O(f(n))$ – Limite superiore

Un problema ha complessità  $O(f(n))$  se esiste almeno un algoritmo che ha complessità  $O(f(n))$

## Limite superiore della somma di numeri binari

Il problema della somma di numeri binari ha complessità  $O(n)$ .

# Limite inferiore alla complessità di un problema

## Notazione $\Omega(f(n))$ – Limite inferiore

Un problema ha complessità  $\Omega(f(n))$  se tutti i possibili algoritmi che lo risolvono hanno complessità  $\Omega(f(n))$ .

## Limite inferiore della somma di numeri binari

Il problema della somma di numeri binari ha complessità  $\Omega(n)$ .

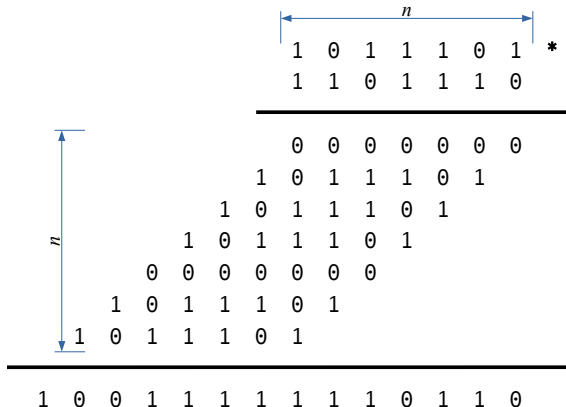
## Domanda

Riuscite a dimostrarlo?

# Moltiplicare numeri binari

## Algoritmo elementare del prodotto – prod()

- moltiplicazione di ogni bit con ogni altro bit
- costo totale  $cn^2 = O(n^2)$



# Algoritmi aritmetici

## Confronto della complessità computazionale

- Somma :  $T_{sum}(n) = O(n)$
- Prodotto :  $T_{prod}(n) = O(n^2)$

Si potrebbe concludere che...

- Il problema della moltiplicazione è inerentemente più costoso del problema dell'addizione
- Conferma la nostra esperienza

# Algoritmi aritmetici

## Confronto fra problemi

Per provare che il problema del prodotto è più costoso del problema della somma, dobbiamo provare che **non esiste** una soluzione in tempo sub-quadratico per il prodotto

- Abbiamo confrontato gli algoritmi, non i problemi!
- Sappiamo solo che l'algoritmo di somma delle elementari è più efficiente dell'algoritmo del prodotto delle elementari

## Un po' di storia

- Nel 1960, Kolmogorov enunciò in una conferenza che la moltiplicazione ha limite inferiore  $\Omega(n^2)$
- Una settimana dopo, un suo studente provò il contrario!



# Moltiplicare numeri binari

## Divide-et-impera

- **Divide**: dividi il problema in sottoproblemi di dimensioni inferiori
- **Impera**: risolvi i sottoproblemi in maniera ricorsiva
- **Combina**: unisci le soluzioni dei sottoproblemi in modo da ottenere la risposta del problema principale

## Moltiplicazione divide-et-impera

$$X = a \cdot 2^{n/2} + b$$

$$Y = c \cdot 2^{n/2} + d$$

$$XY = ac \cdot 2^n + (ad + bc) \cdot 2^{n/2} + bd$$

X	a	b
Y	c	d

# Moltiplicare numeri binari tramite Divide-et-impera

---

```
boolean[] pdi(boolean[] X, boolean[] Y, int n)
```

---

```
if n == 1 then
```

```
    return X[1] · Y[1]
```

```
else
```

```
    spezza X in a; b e Y in c; d
```

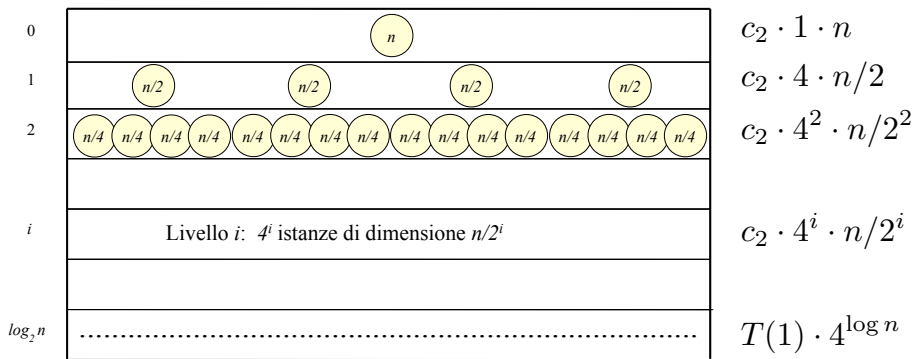
```
    return pdi(a, c, n/2) · 2n + (pdi(a, d, n/2) +  
        pdi(b, c, n/2)) · 2n/2 + pdi(b, d, n/2)
```

---

$$T(n) = \begin{cases} c_1 & n = 1 \\ 4T(n/2) + c_2 \cdot n & n > 1 \end{cases}$$

**Nota:** Moltiplicare per  $2^t \equiv$  shift di  $t$  posizioni, in tempo lineare

# Analisi della ricorsione



$$T(n) = \begin{cases} c_1 & n = 1 \\ 4T(n/2) + c_2 \cdot n & n > 1 \end{cases}$$

$$= c_1 \cdot n^{\log 4}$$

$$= c_1 \cdot n^2$$

# Moltiplicare numeri binari

## Confronto della complessità computazionale

- Prodotto :  $T_{prod}(n) = O(n^2)$
- Prodotto :  $T_{pdi}(n) = O(n^2)$

## Domanda: Tutto questo lavoro per nulla?

Non solo la complessità è uguale, ma le costanti moltiplicative sono più alte.

## Domanda: E' possibile fare meglio di così?

Notate che la versione ricorsiva chiama se stessa 4 volte.

# Moltiplicazione di Karatsuba (1962)

$$A_1 = a \times c$$

$$A_3 = b \times d$$

$$m = (a + b) \times (c + d) = ac + ad + bc + bd$$

$$A_2 = m - A_1 - A_3 = ad + bc$$




---

```
boolean [ ] KARATSUBA(boolean[ ] X, boolean[ ] Y, int n)
```

---

```
if n == 1 then
```

```
    return X[1] · Y[1]
```

```
else
```

```
    spezza X in a; b e Y in c; d
```

```
    boolean[ ] A1 = KARATSUBA(a, c, n/2)
```

```
    boolean[ ] A3 = KARATSUBA(b, d, n/2)
```

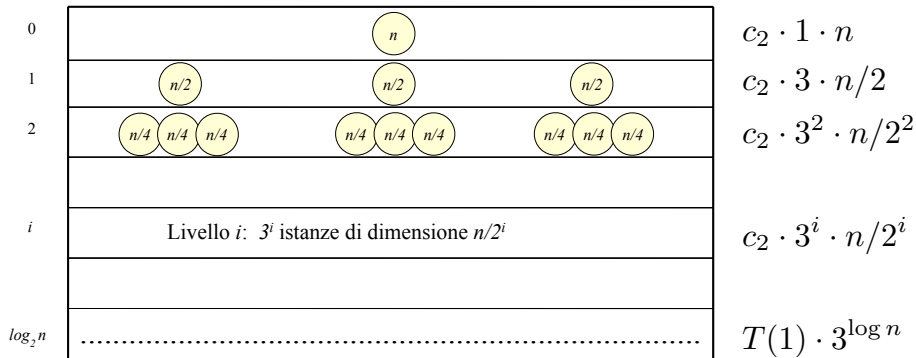
```
    boolean[ ] m = KARATSUBA(a + b, c + d, n/2)
```

```
    boolean[ ] A2 = m - A1 - A3
```

```
    return A1 · 2n + A2 · 2n/2 + A3
```

---

# Analisi della ricorsione



$$T(n) = \begin{cases} c_1 & n = 1 \\ 3T(n/2) + c_2 \cdot n & n > 1 \end{cases} \quad \begin{aligned} &= c_1 \cdot n^{\log 3} \\ &= c_1 \cdot n^{1.58\dots} \end{aligned}$$

# Moltiplicare numeri binari

## Confronto della complessità computazionale

- Prodotto :  $T_{prod}(n) = O(n^2)$       Es.  $T_{prod}(10^6) = 10^{12}$
- Prodotto :  $T_{kara}(n) = O(n^{1.58...})$       Es.  $T_{kara}(10^6) = 3 \cdot 10^9$

## Conclusioni

- L'algoritmo "naif" non è sempre il migliore ...
- ... può esistere spazio di miglioramento ...
- ... a meno che non sia possibile dimostrare il contrario!

# Non finisce qui ...

## • Toom-Cook (1963)

- Detto anche Toom3, ha complessità  $O(n^{\log 5 / \log 3}) \approx O(n^{1.465})$
- Karatsuba  $\equiv$  Toom2
- Moltiplicazione normale  $\equiv$  Toom1

## • Schönhage–Strassen (1971)

- Complessità  $O(n \cdot \log n \cdot \log \log n)$
- Basato su Fast Fourier Transforms

## • Fürer (2007)

- Complessità  $O(n \cdot \log n \cdot K^{O(\log^* n)})$ , per qualche  $K > 1$

## • Harvey–van der Hoeven–Lecerf (2014)

- Complessità  $O(n \cdot \log n \cdot 8^{O(\log^* n)})$

## • Harvey–van der Hoeven (2019-2021)

- Complessità  $O(n \cdot \log n)$  ([\[Articolo\]](#)[\[Video\]](#))

## • Limite inferiore: $\Omega(n \log n)$ (congettura)

## Crescita funzioni

$n$	$\log^* n$	$\log \log n$
1	0	
2	1	0
4	2	1
16	3	2
$2^{16}$	4	4
$2^{2^{16}}$	5	16



# Algoritmi vs problemi

## Complessità in tempo di un **algoritmo**

*La quantità di tempo richiesta per input di dimensione  $n$*

- $O(f(n))$ : Per tutti gli input, l'algoritmo costa al più  $f(n)$
- $\Omega(f(n))$ : Per tutti gli input, l'algoritmo costa almeno  $f(n)$
- $\Theta(f(n))$ : L'algoritmo richiede  $\Theta(f(n))$  per tutti gli input

## Complessità in tempo di un **problema computazionale**

*La complessità in tempo relative a tutte le possibili soluzioni*

- $O(f(n))$ : Complessità del miglior algoritmo che risolve il problema
- $\Omega(f(n))$ : Dimostrare che nessun algoritmo può risolvere il problema in tempo inferiore a  $\Omega(f(n))$
- $\Theta(f(n))$ : Algoritmo ottimo

# Algoritmi e strutture dati

## Analisi di algoritmi Algoritmi di ordinamento

Alberto Montresor

Università di Trento

2022/09/24

This work is licensed under a Creative Commons  
Attribution-ShareAlike 4.0 International License.



# Sommario

- 1 Modelli di calcolo
  - Definizioni
  - Esempi di analisi
  - Ordini di complessità
- 2 Notazione asintotica
  - Definizioni
  - Esercizi
- 3 Complessità problemi vs algoritmi
  - Moltiplicare numeri complessi
  - Sommare numeri binari
  - Moltiplicare numeri binari
- 4 Tipologia dell'input
  - Selection Sort
  - Insertion Sort
  - Merge Sort

# Introduzione

## Obiettivo: valutare gli algoritmi in base all'input

- In alcuni casi, gli algoritmi si comportano diversamente a seconda delle caratteristiche dell'input
- Conoscere in anticipo tali caratteristiche permette di scegliere il miglior algoritmo in quella situazione
- Il problema dell'ordinamento è una buona palestra dove mostrare questi concetti

## Algoritmi d'ordinamento

- Selection Sort
- Insertion Sort
- Merge Sort

# Tipologia di analisi

## Analisi del **caso pessimo**

- La più importante
- Il tempo di esecuzione nel caso peggiore è un **limite superiore** al tempo di esecuzione per qualsiasi input
- Per alcuni algoritmi, il caso peggiore si verifica molto spesso  
Es.: ricerca di dati non presenti in un database

## Analisi del **caso medio**

- Difficile in alcuni casi: cosa si intende per "medio"?
- Distribuzione uniforme

## Analisi del **caso ottimo**

- Può avere senso se si hanno informazioni particolari sull'input

# Ordinamento

## Problema dell'ordinamento

- **Input:** Una sequenza  $A = a_1, a_2, \dots, a_n$  di  $n$  valori
- **Output:** Una sequenza  $B = b_1, b_2, \dots, b_n$  che sia una permutazione di  $A$  e tale per cui  $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$

Approccio "demente":

- Genero tutte le possibili permutazioni fino a quando non ne trovo una già ordinata

# Ordinamento

## Problema dell'ordinamento

- **Input:** Una sequenza  $A = a_1, a_2, \dots, a_n$  di  $n$  valori
- **Output:** Una sequenza  $B = b_1, b_2, \dots, b_n$  che sia una permutazione di  $A$  e tale per cui  $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$

Approccio "demente":

- Genero tutte le possibili permutazioni fino a quando non ne trovo una già ordinata

Approccio "naif":

- Cerco il minimo e lo metto in posizione corretta, riducendo il problema agli  $n - 1$  restanti valori.

# Selection Sort

---

```
SelectionSort(ITEM[] A, int n)
```

---

```
for  $i = 1$  to  $n - 1$  do
```

```
    | int  $min = \min(A, i, n)$   
    |  $A[i] \leftrightarrow A[min]$   
    |
```

---

---

```
int min(ITEM[] A, int i, int n)
```

---

```
% Posizione del minimo parziale
```

```
int  $min = i$ 
```

```
for  $j = i + 1$  to  $n$  do
```

```
    | if  $A[j] < A[min]$  then  
    |     | % Nuovo minimo parziale  
    |     |  $min = j$   
    |
```

```
return  $min$ 
```

---



# Selection Sort

---

```
SelectionSort(ITEM[] A, int n)
```

---

```
for i = 1 to n - 1 do
```

```
    int min = min(A, i, n)
    A[i] ↔ A[min]
```

---



---

```
int min(ITEM[] A, int i, int n)
```

---

```
% Posizione del minimo parziale
```

```
int min = i
```

```
for j = i + 1 to n do
```

```
    if A[j] < A[min] then
        % Nuovo minimo parziale
        min = j
```

```
return min
```

---

	<i>j</i> = 1	<i>j</i> = 2	<i>j</i> = 3	<i>j</i> = 4	<i>j</i> = 5	<i>j</i> = 6	<i>j</i> = 7
<i>i</i> = 1	7	4	2	1	8	3	5
<i>i</i> = 2	1	4	2	7	8	3	5
<i>i</i> = 3	1	2	4	7	8	3	5
<i>i</i> = 4	1	2	3	7	8	4	5
<i>i</i> = 5	1	2	3	4	8	7	5
<i>i</i> = 6	1	2	3	4	5	7	8
<i>i</i> = 7	1	2	3	4	5	7	8

# Selection Sort

---

```
SelectionSort(ITEM[] A, int n)
```

---

```
for i = 1 to n - 1 do
```

```
    int min = min(A, i, n)
    A[i] ↔ A[min]
```

---



---

```
int min(ITEM[] A, int i, int n)
```

---

```
% Posizione del minimo parziale
```

```
int min = i
```

```
for j = i + 1 to n do
```

```
    if A[j] < A[min] then
```

```
        % Nuovo minimo
        parziale
```

```
        min = j
```

```
return min
```

---

Complessità nel caso medio, pessimo, ottimo?

# Selection Sort

---

```
SelectionSort(ITEM[] A, int n)
```

---

```
for i = 1 to n - 1 do
```

```
    int min = min(A, i, n)
    A[i] ↔ A[min]
```

---



---

```
int min(ITEM[] A, int i, int n)
```

---

```
% Posizione del minimo parziale
```

```
int min = i
```

```
for j = i + 1 to n do
```

```
    if A[j] < A[min] then
```

```
        % Nuovo minimo
        parziale
```

```
        min = j
```

```
return min
```

---

Complessità nel caso medio, pessimo, ottimo?

$$\sum_{i=1}^{n-1} (n-i) = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2} = n^2 - n/2 = O(n^2)$$

# Insertion Sort

- Algoritmo efficiente per ordinare piccoli insiemi di elementi
- Si basa sul principio di ordinamento di una "mano" di carte da gioco (e.g. scala quaranta)

---

```
insertionSort(ITEM[] A, int n)
```

---

```
for  $i = 2$  to  $n$  do
```

```
    ITEM  $temp = A[i]$ 
```

```
    int  $j = i$ 
```

```
    while  $j > 1$  and  $A[j - 1] > temp$  do
```

```
         $A[j] = A[j - 1]$ 
```

```
         $j = j - 1$ 
```

```
     $A[j] = temp$ 
```

---

# Insertion Sort

	1	2	3	4	5	6	7	<i>temp</i>
	7	4	2	1	8	3	5	
$i = 2, j = 2$	7	7	2	1	8	3	5	4
$i = 2, j = 1$	4	7	2	1	8	3	5	4
$i = 3, j = 3$	4	7	7	1	8	3	5	2
$i = 3, j = 2$	4	4	7	1	8	3	5	2
$i = 3, j = 1$	2	4	7	1	8	3	5	2

# Insertion Sort

	1	2	3	4	5	6	7	<i>temp</i>
$i = 4, j = 4$	2	4	7	7	8	3	5	1
$i = 4, j = 3$	2	4	4	7	8	3	5	1
$i = 4, j = 2$	2	2	4	7	8	3	5	1
$i = 4, j = 1$	1	2	4	7	8	3	5	1
$i = 5, j = 5$	1	2	4	7	8	3	5	8
$i = 6, j = 6$	1	2	4	7	8	8	5	3

# Insertion Sort

	1	2	3	4	5	6	7	<i>temp</i>
$i = 6, j = 5$	1	2	4	7	7	8	5	3
$i = 6, j = 4$	1	2	4	4	7	8	5	3
$i = 6, j = 3$	1	2	3	4	7	8	5	3
$i = 7, j = 7$	1	2	3	4	7	8	8	5
$i = 7, j = 6$	1	2	3	4	7	7	8	5
$i = 7, j = 5$	1	2	3	4	5	7	8	5

# Correttezza e complessità

## In questo algoritmo

- Il costo di esecuzione non dipende solo dalla dimensione...
- ma anche dalla distribuzione dei dati in ingresso

## Domande

- Dimostrare che l'algoritmo è corretto
- Qual è il costo nel caso il vettore sia già ordinato?
- Qual è il costo nel caso il vettore sia ordinato in ordine inverso?
- Cosa succede "in media"? (informalmente)



# Merge Sort

## Divide et impera

Merge Sort è basato sulla tecnica **divide-et-impera** vista in precedenza

- **Divide**: Spezza virtualmente il vettore di  $n$  elementi in due sottovettori di  $n/2$  elementi
- **Impera**: Chiama Merge Sort ricorsivamente sui due sottovettori
- **Combina**: Unisci (**merge**) le due sequenze ordinate

## Idea

Si sfrutta il fatto che i due sottovettori sono già ordinati per ordinare più velocemente

# Merge



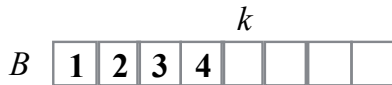
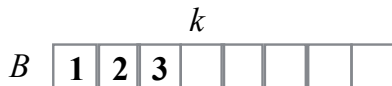
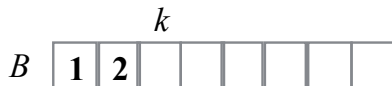
**Input:**

- $A$  è un vettore di  $n$  interi
- $start, end, mid$  sono tali che  $1 \leq start \leq mid < end \leq n$
- I sottovettori  $A[start \dots mid]$  e  $A[mid + 1 \dots end]$  sono già ordinati

**Output:**

- I due sottovettori sono fusi in un unico sottovettore ordinato  $A[start \dots end]$  tramite un vettore di appoggio  $B$

# Funzionamento Merge()



# Funzionamento Merge()



# Merge()

---

Merge(ITEM  $A[]$ , **int**  $start$ , **int**  $end$ , **int**  $mid$ )

---

**int**  $i, j, k, h$

$i = start$

$j = mid + 1$

$k = start$

**while**  $i \leq mid$  **and**  $j \leq end$  **do**

**if**  $A[i] \leq A[j]$  **then**

$B[k] = A[i]$

$i = i + 1$

**else**

$B[k] = A[j]$

$j = j + 1$

$k = k + 1$

---

$j = end$

**for**  $h = mid$  **downto**  $i$  **do**

$A[j] = A[h]$

$j = j - 1$

**for**  $j = start$  **to**  $k - 1$  **do**

$A[j] = B[j]$

# Costo computazionale

## Domanda

Qual è il costo computazionale di Merge()?

# Costo computazionale

## Domanda

Qual è il costo computazionale di Merge()?  $\Rightarrow O(n)$

# MergeSort

Programma completo:

- Chiama ricorsivamente se stesso e usa Merge() per unire i risultati
- Caso base: sequenze di lunghezza  $\leq 1$  sono già ordinate

---

```
MergeSort(ITEM A[ ], int start, int end)
```

---

```
if start < end then
```

```
    int mid =  $\lfloor (start + end) / 2 \rfloor$ 
```

```
    MergeSort(A, start, mid)
```

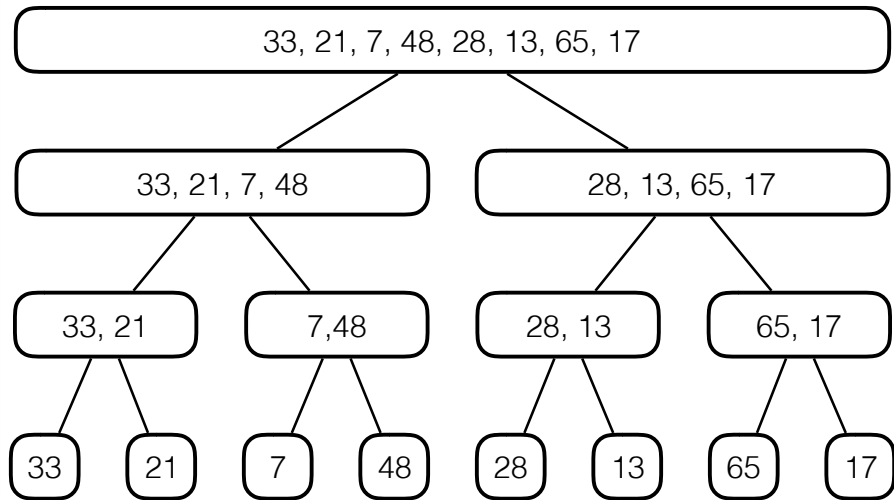
```
    MergeSort(A, mid + 1, end)
```

```
    Merge(A, start, end, mid)
```

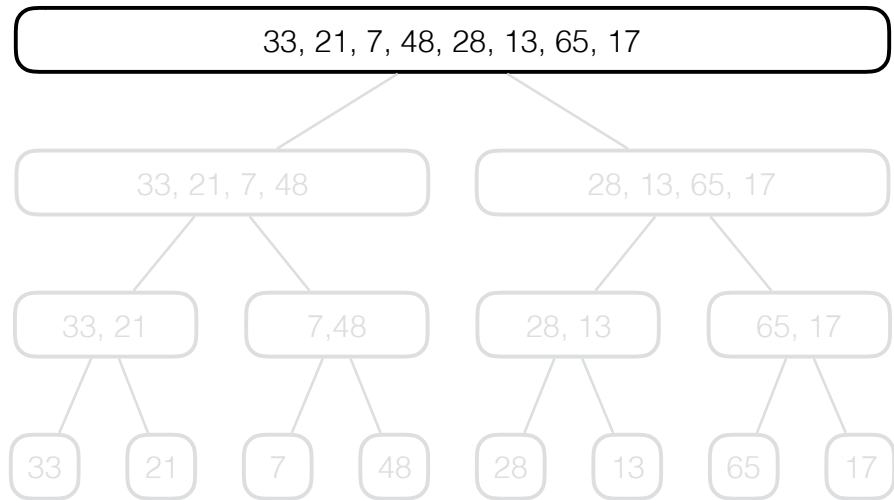
---



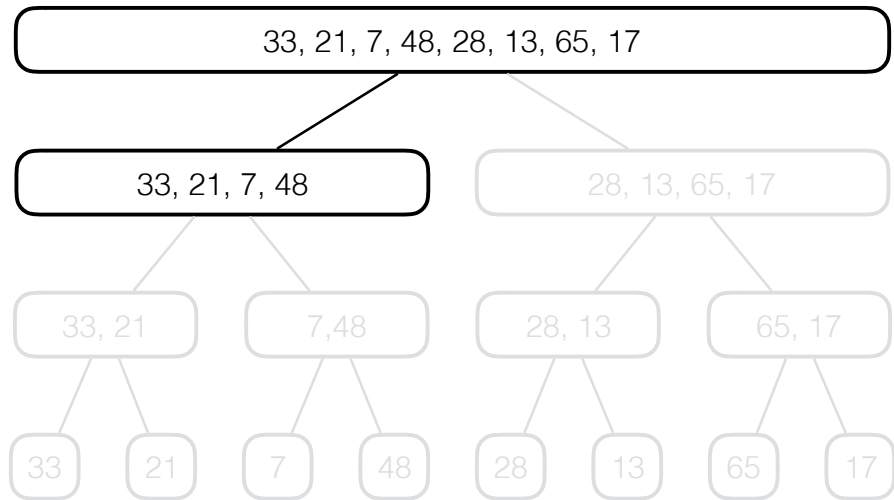
## MergeSort(): Esecuzione



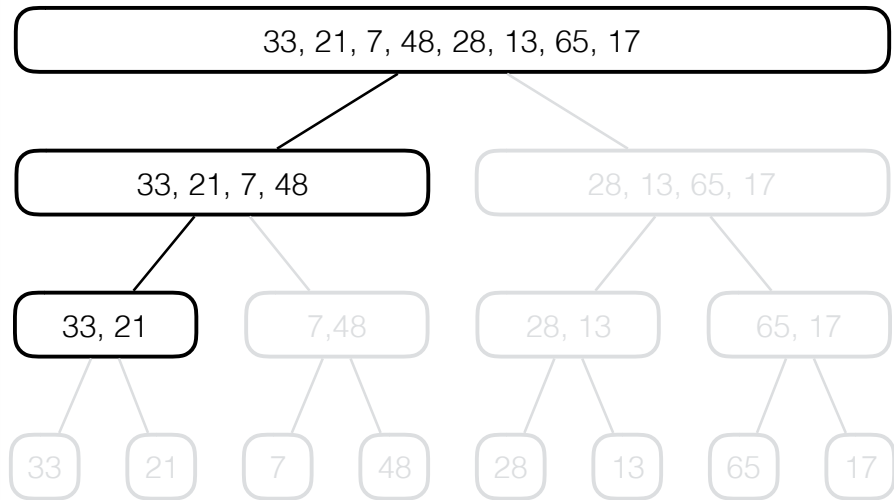
## MergeSort(): Esecuzione



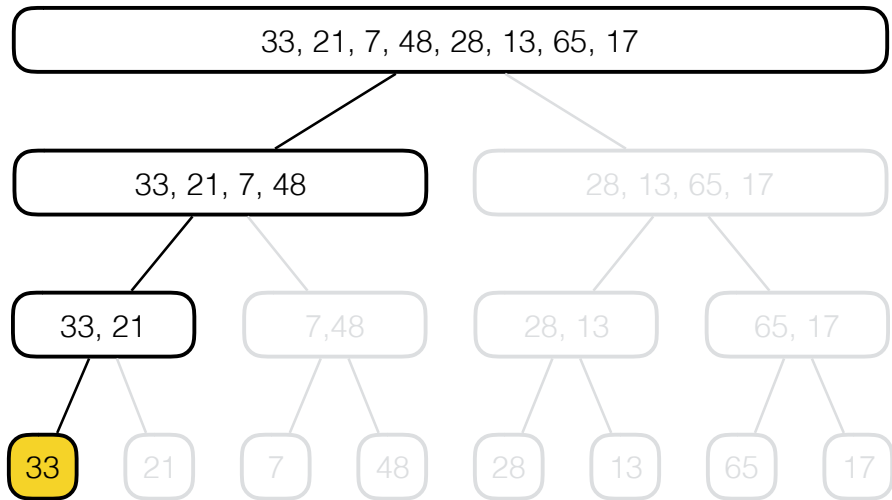
## MergeSort(): Esecuzione



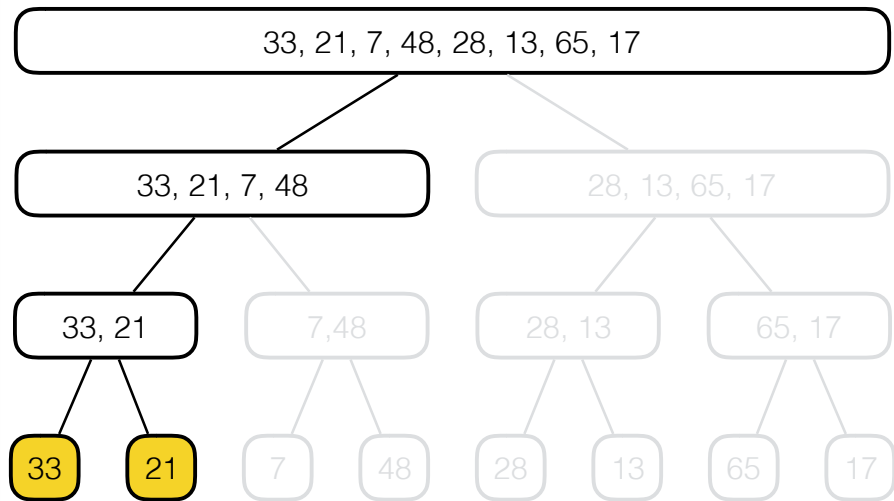
## MergeSort(): Esecuzione



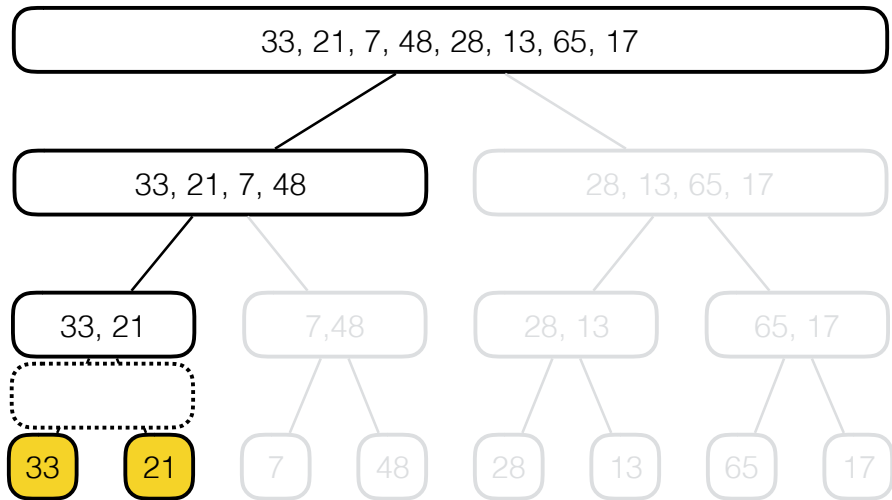
## MergeSort(): Esecuzione



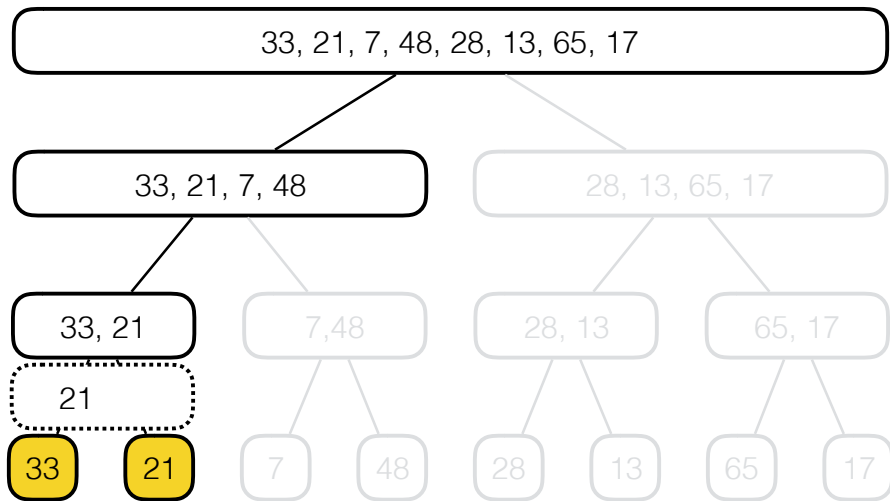
# MergeSort(): Esecuzione



## MergeSort(): Esecuzione

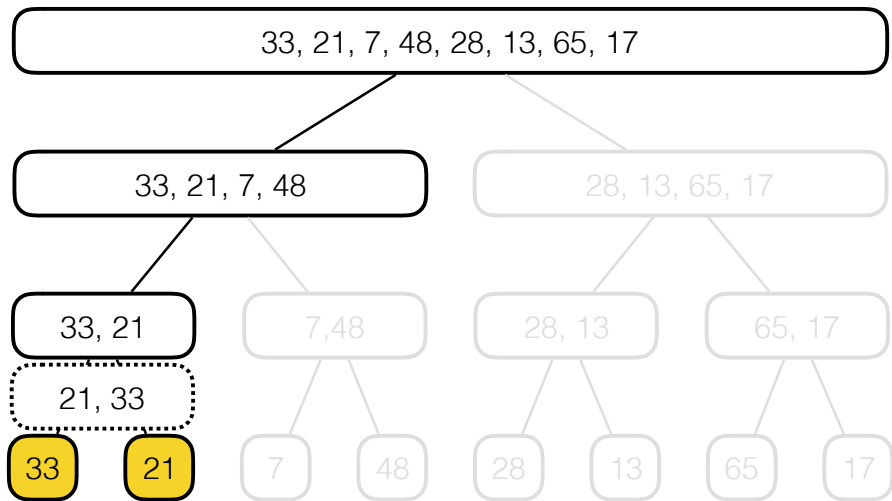


# MergeSort(): Esecuzione

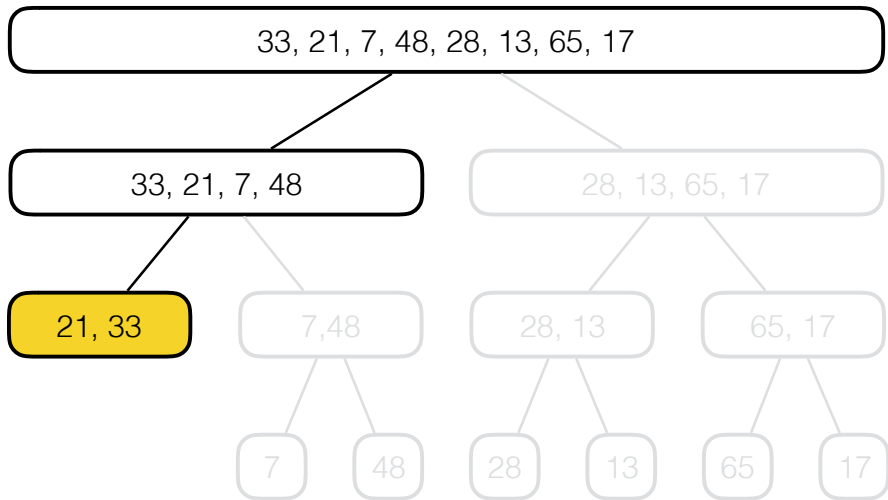




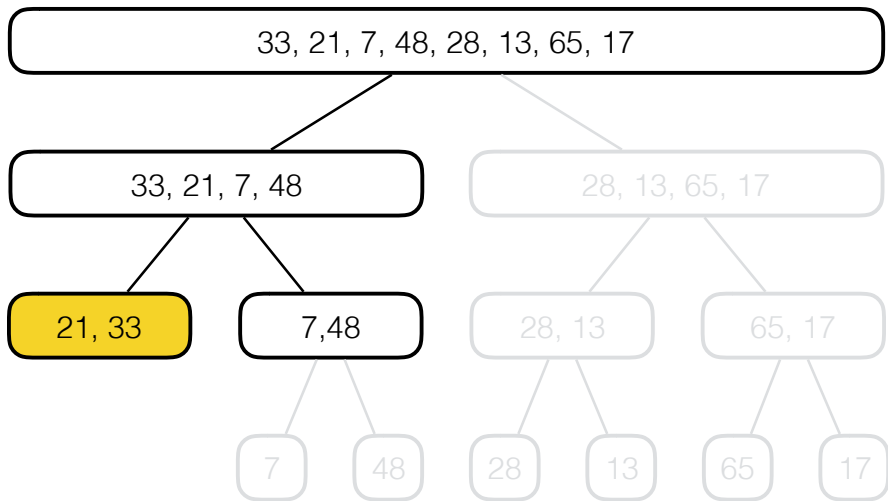
# MergeSort(): Esecuzione



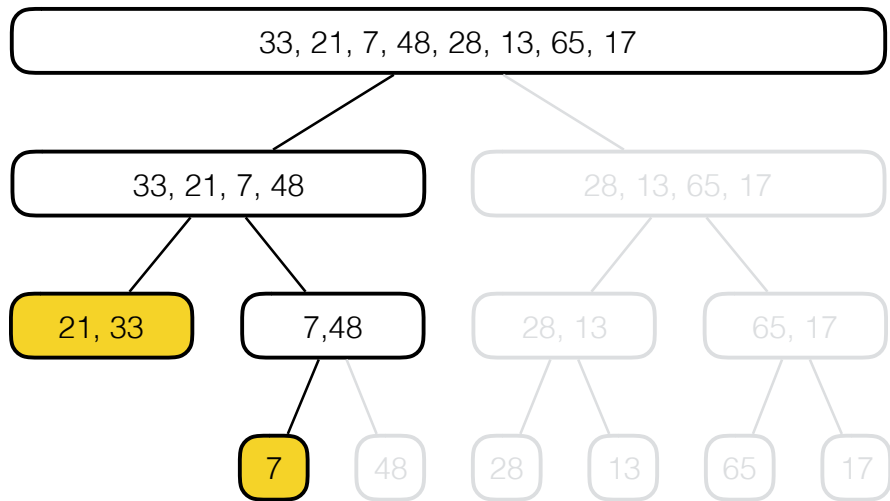
## MergeSort(): Esecuzione



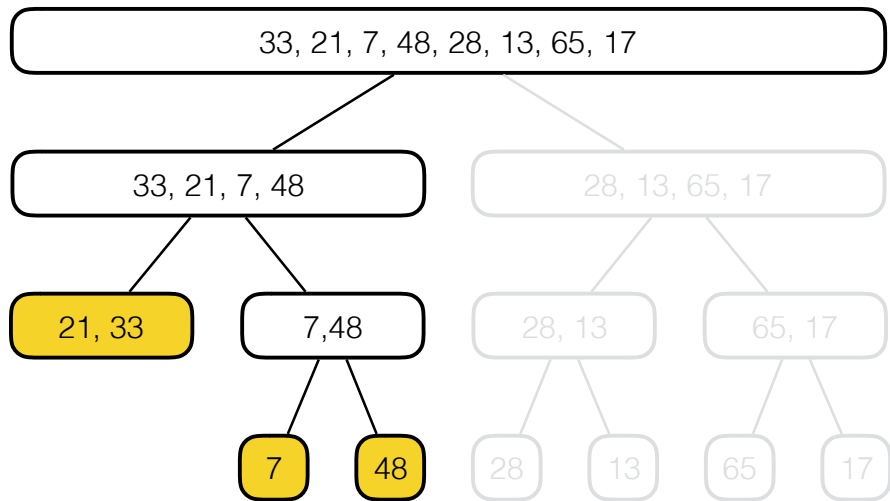
# MergeSort(): Esecuzione



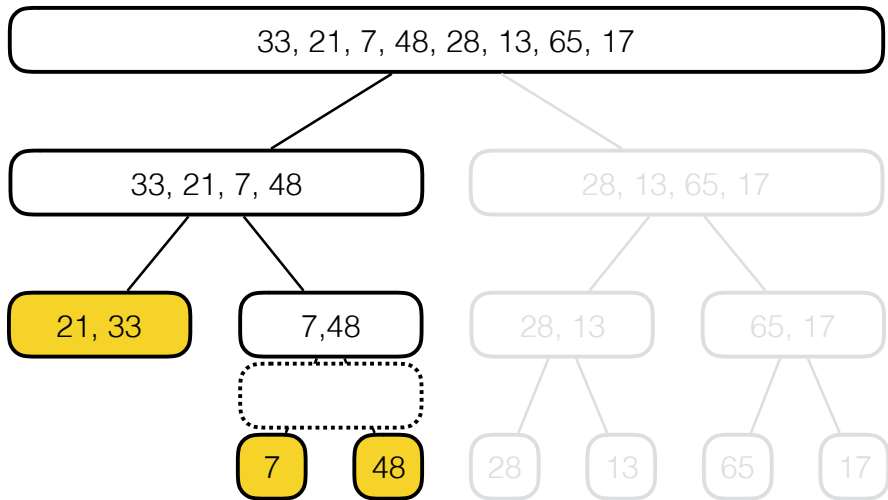
# MergeSort(): Esecuzione



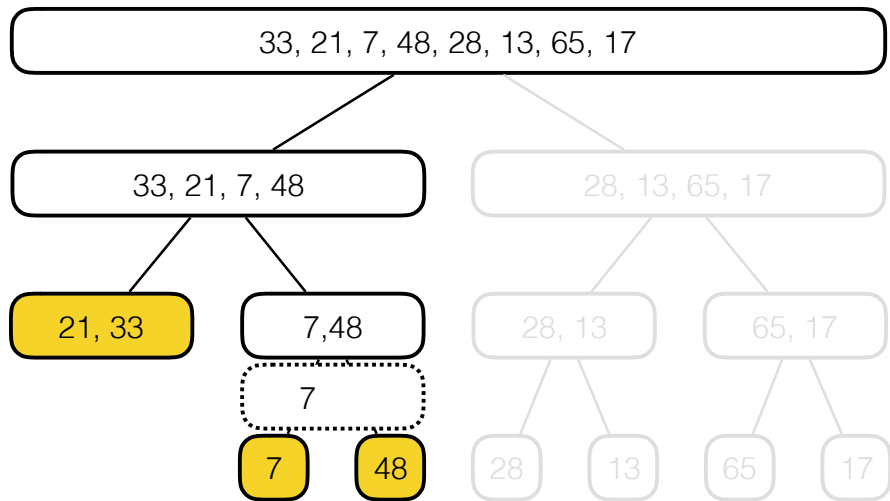
# MergeSort(): Esecuzione



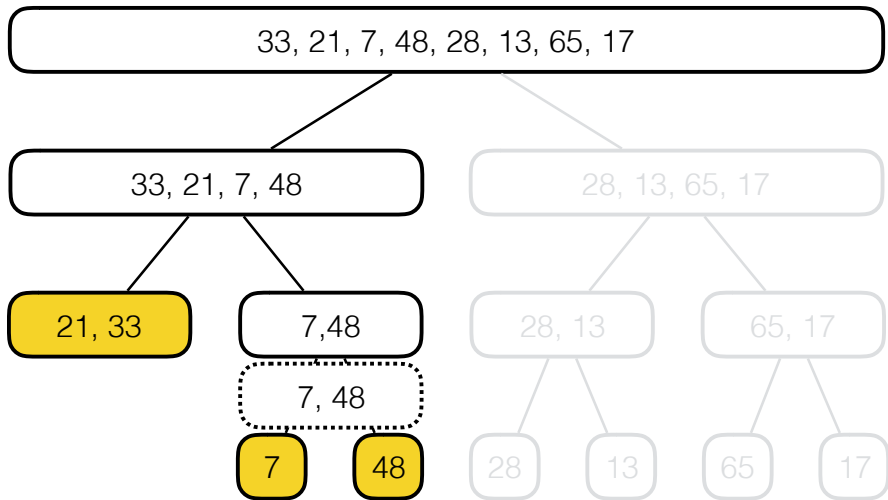
## MergeSort(): Esecuzione



# MergeSort(): Esecuzione

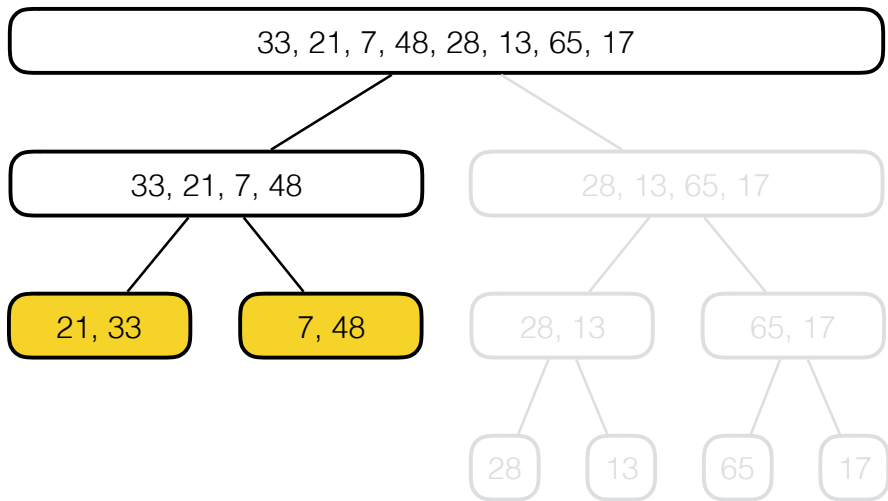


# MergeSort(): Esecuzione

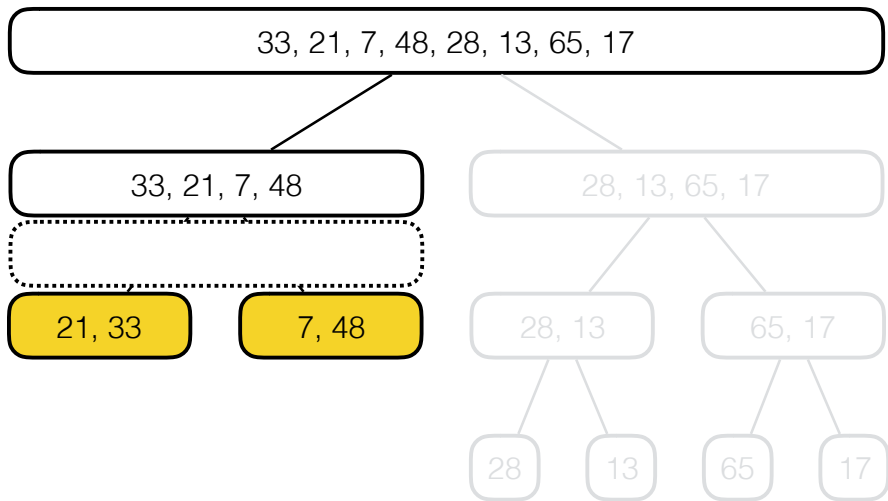




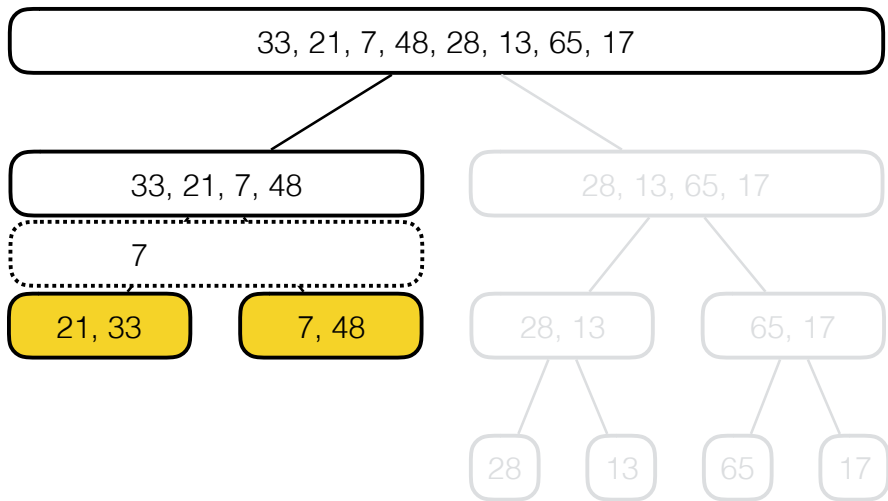
# MergeSort(): Esecuzione



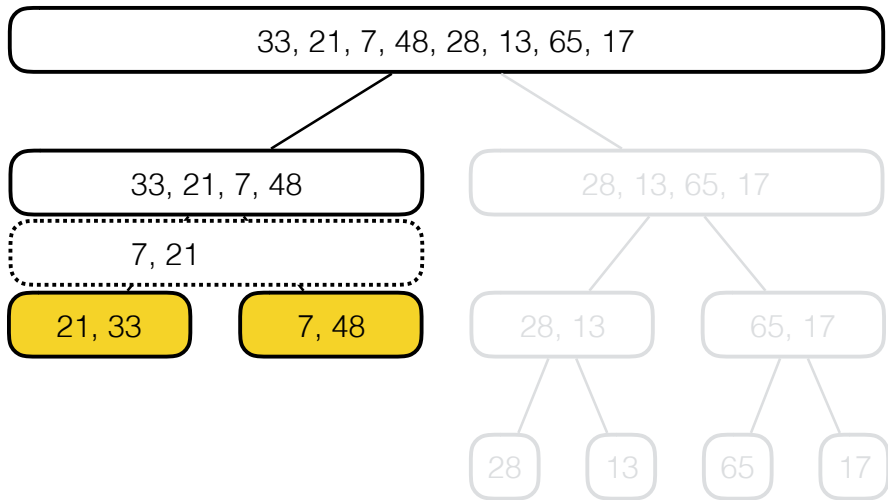
# MergeSort(): Esecuzione



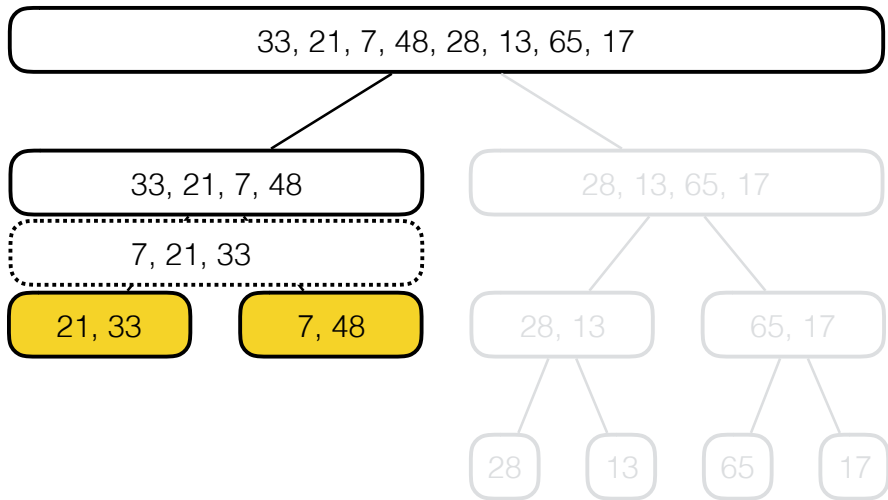
# MergeSort(): Esecuzione



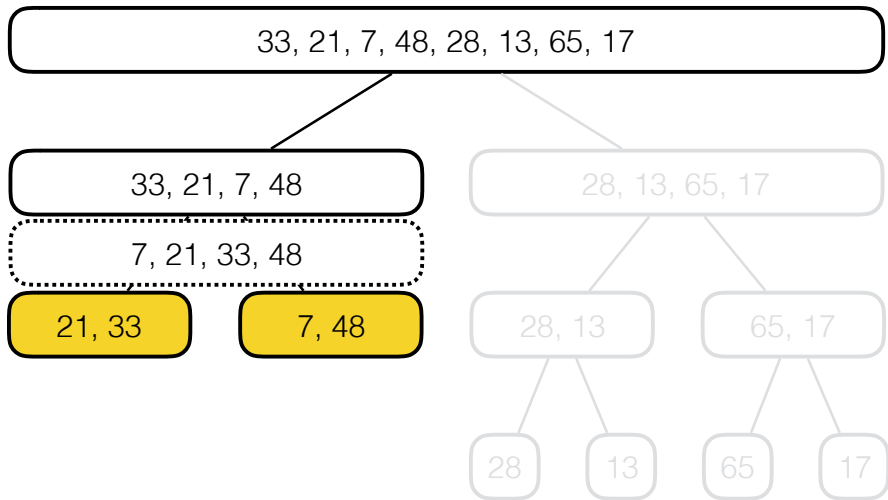
# MergeSort(): Esecuzione



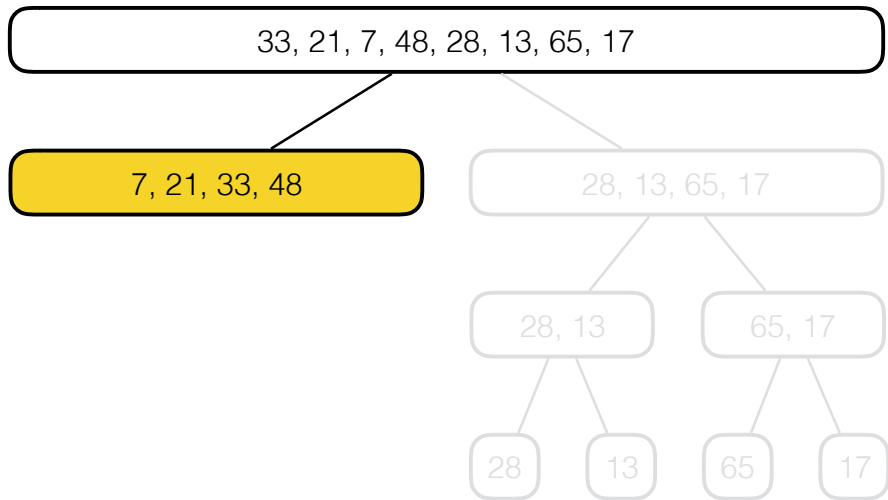
# MergeSort(): Esecuzione



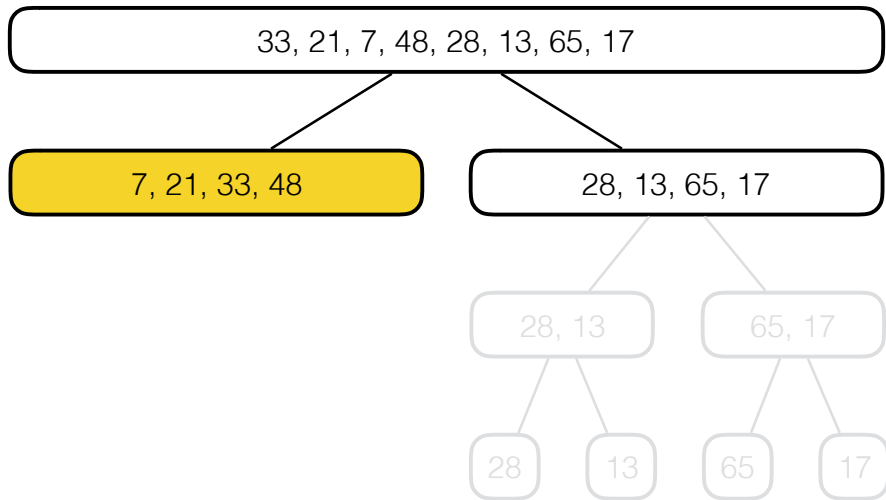
# MergeSort(): Esecuzione



## MergeSort(): Esecuzione

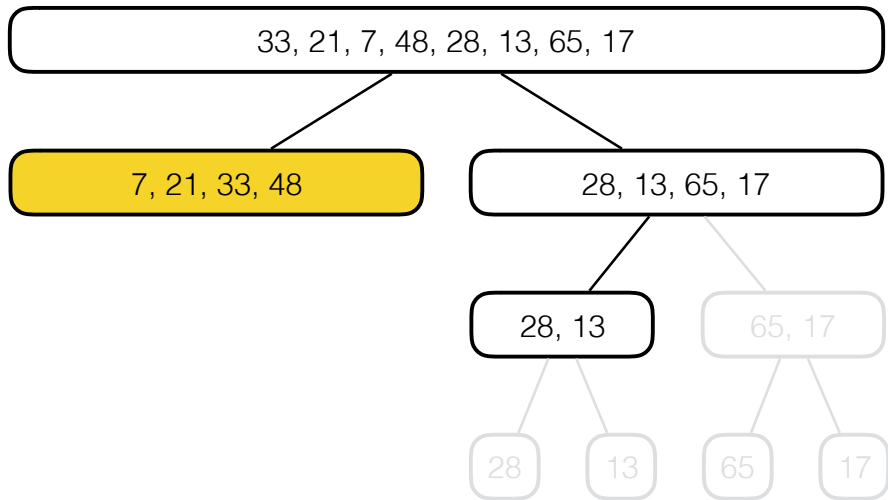


## MergeSort(): Esecuzione

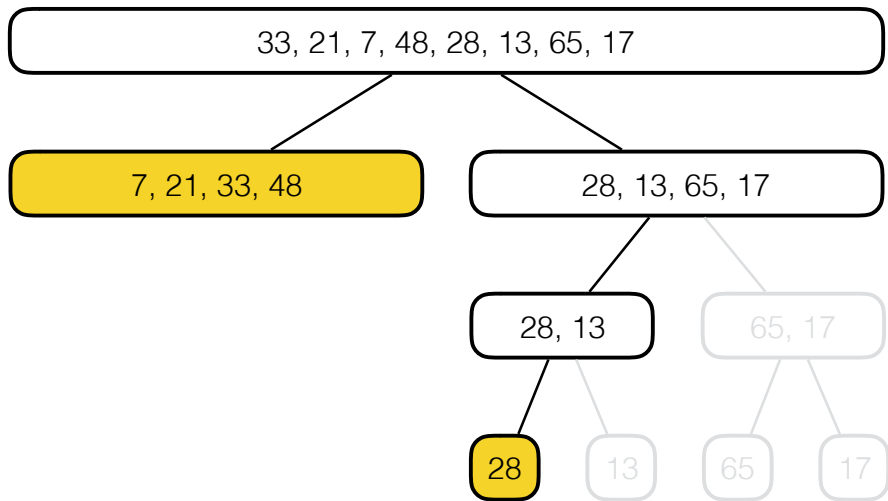




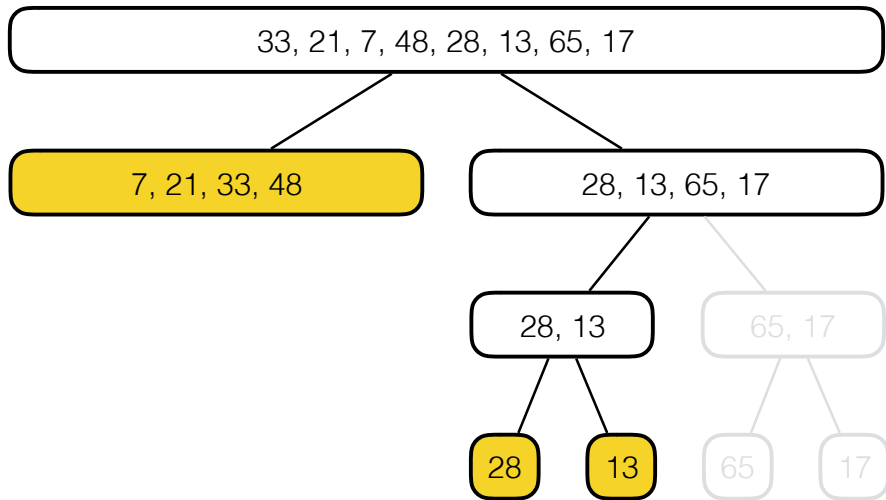
## MergeSort(): Esecuzione



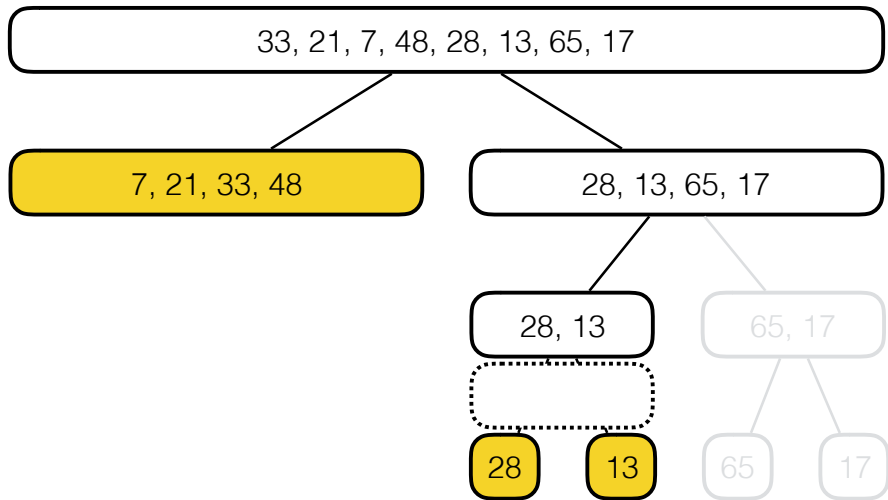
# MergeSort(): Esecuzione



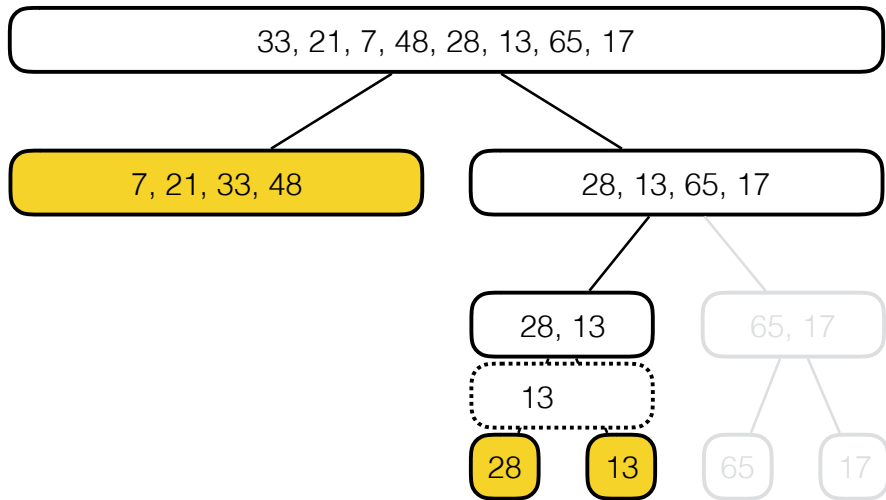
## MergeSort(): Esecuzione



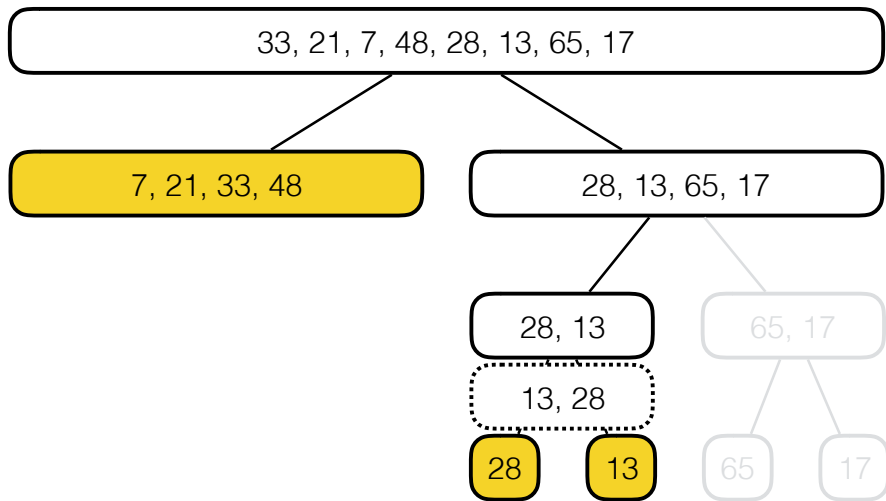
## MergeSort(): Esecuzione



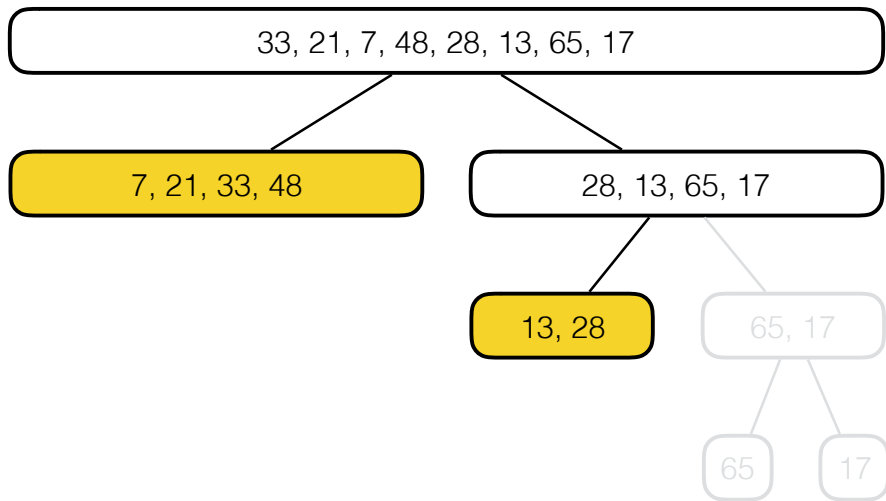
# MergeSort(): Esecuzione



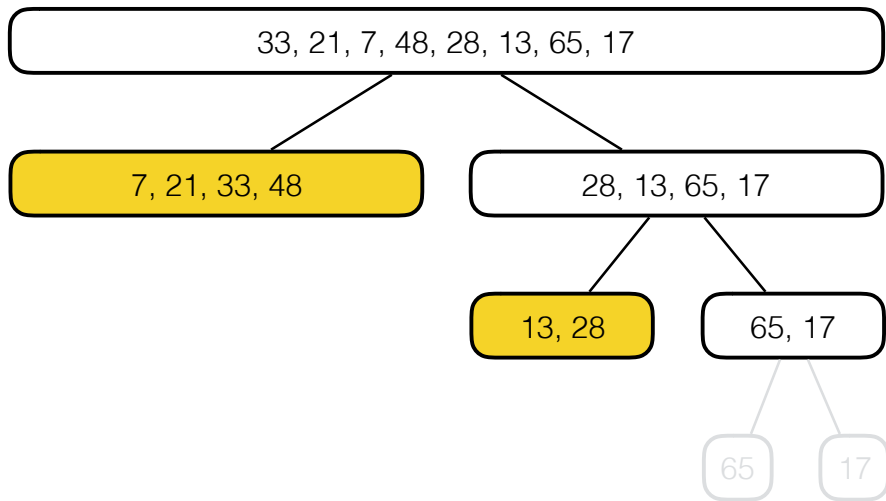
# MergeSort(): Esecuzione



# MergeSort(): Esecuzione

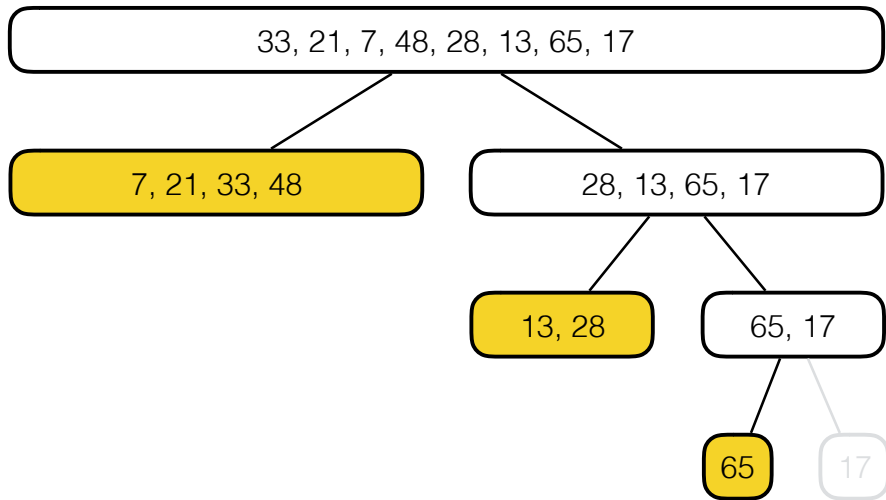


# MergeSort(): Esecuzione

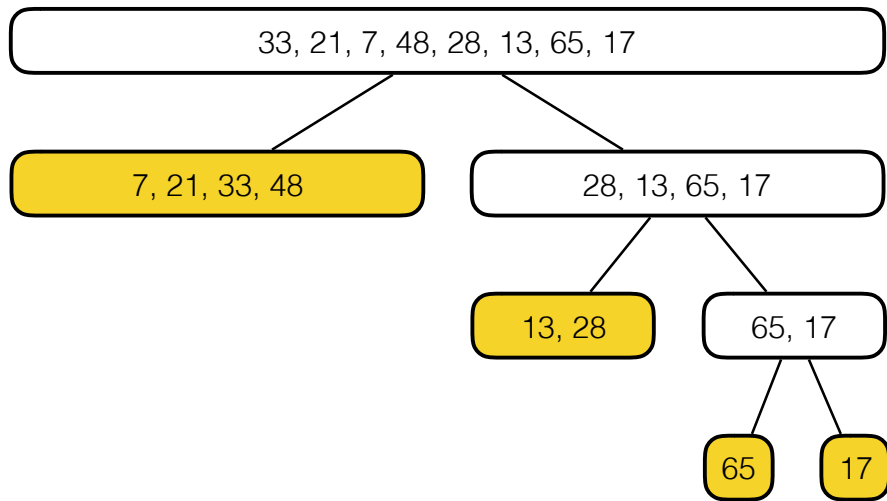




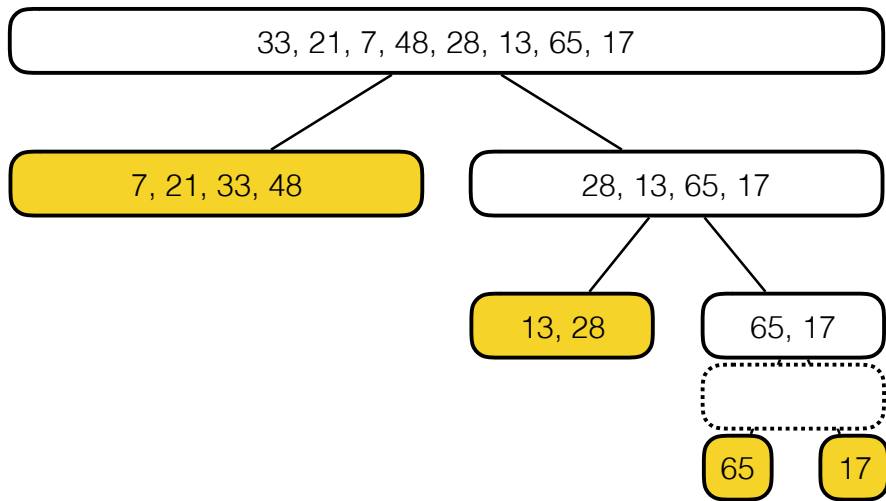
## MergeSort(): Esecuzione



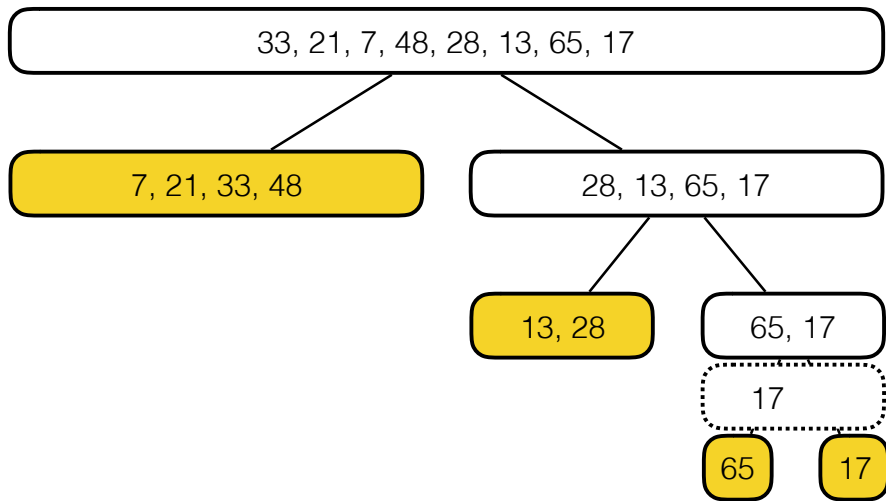
## MergeSort(): Esecuzione



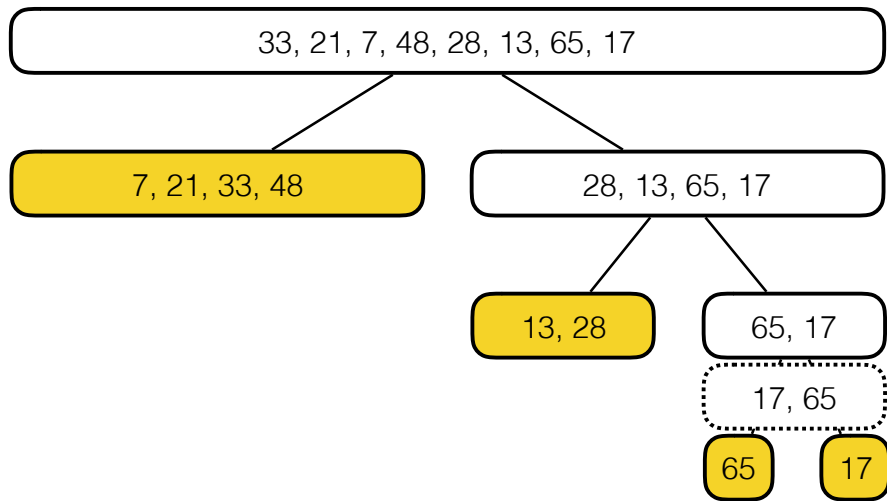
# MergeSort(): Esecuzione



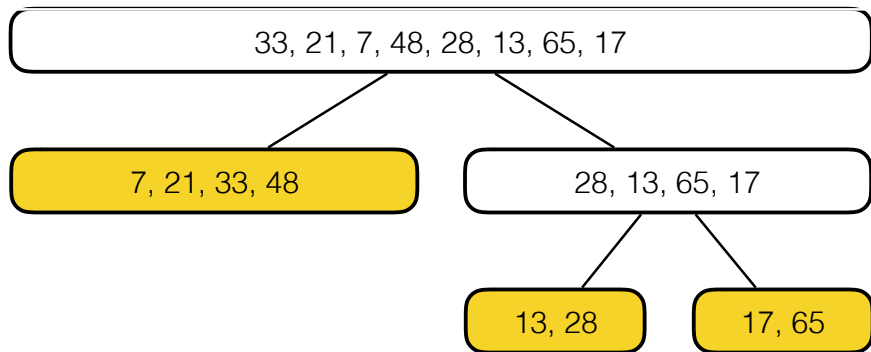
# MergeSort(): Esecuzione



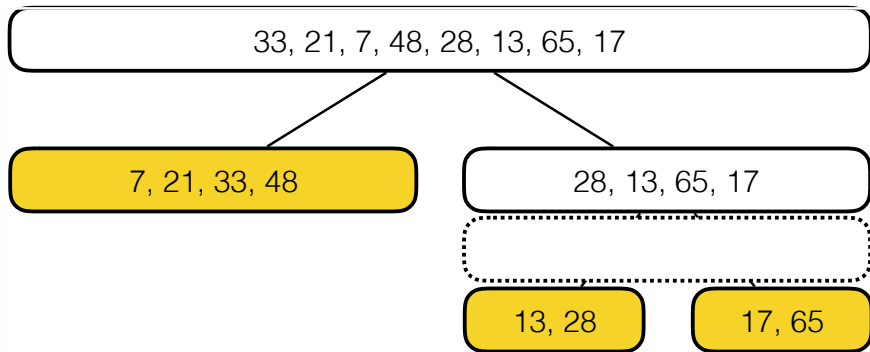
# MergeSort(): Esecuzione



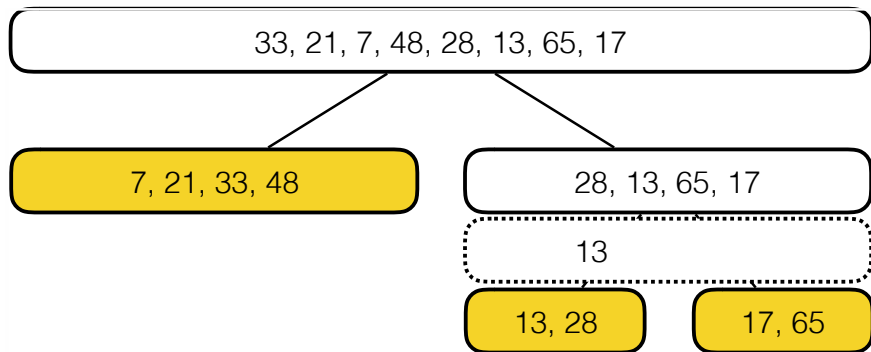
## MergeSort(): Esecuzione



## MergeSort(): Esecuzione

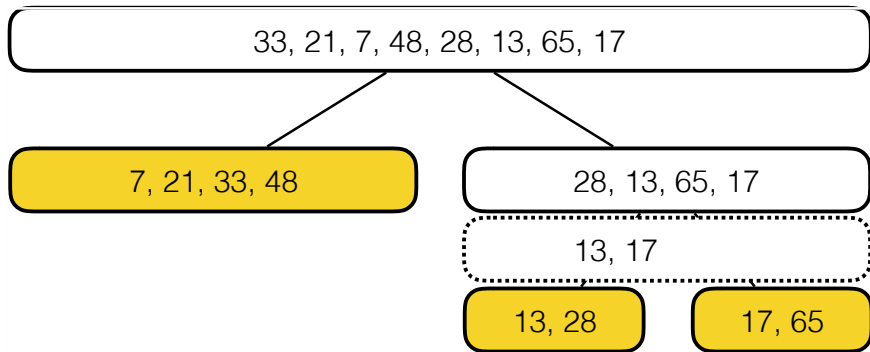


# MergeSort(): Esecuzione

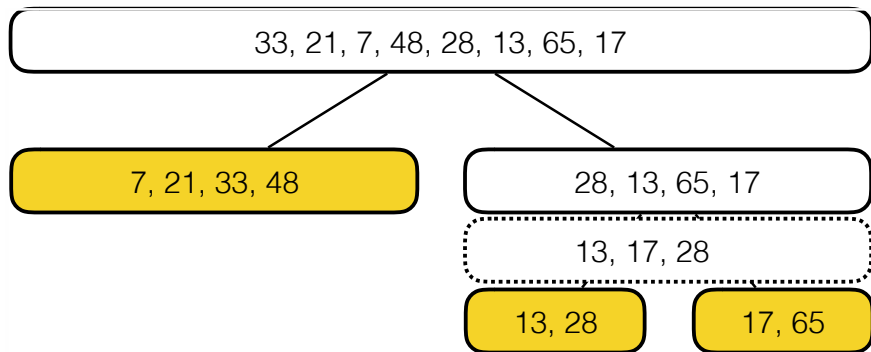




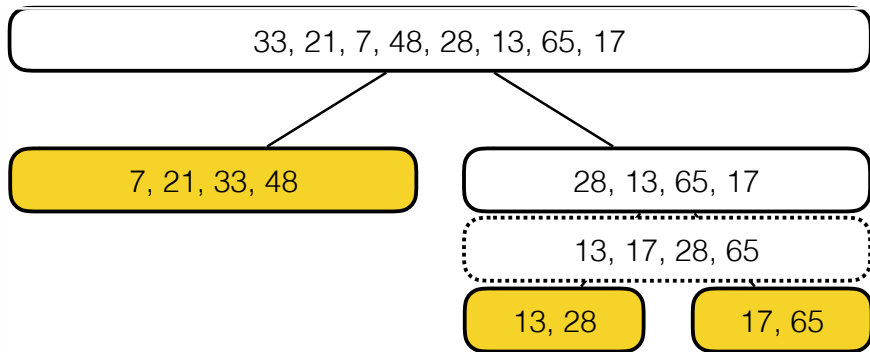
## MergeSort(): Esecuzione



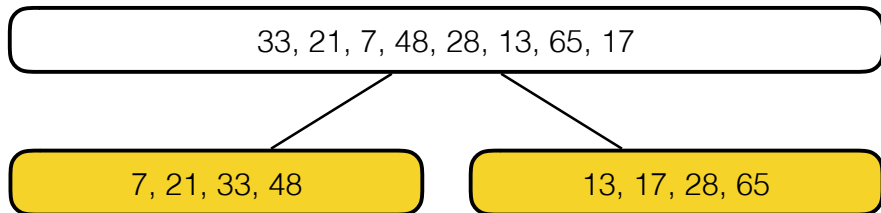
# MergeSort(): Esecuzione



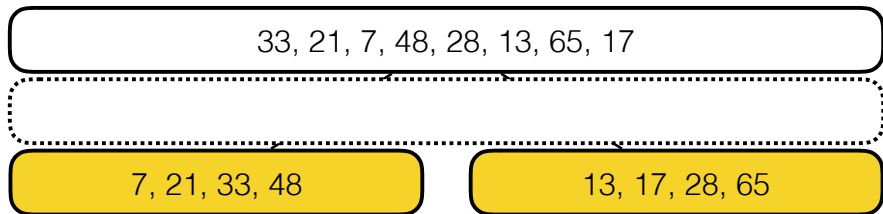
## MergeSort(): Esecuzione



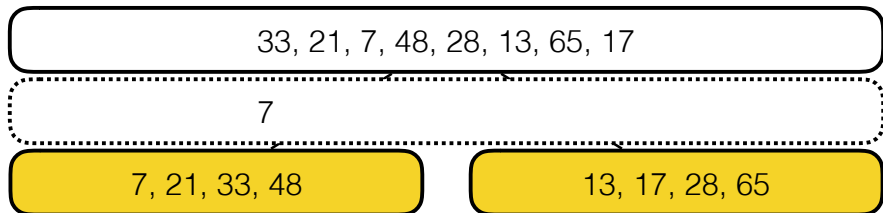
## MergeSort(): Esecuzione



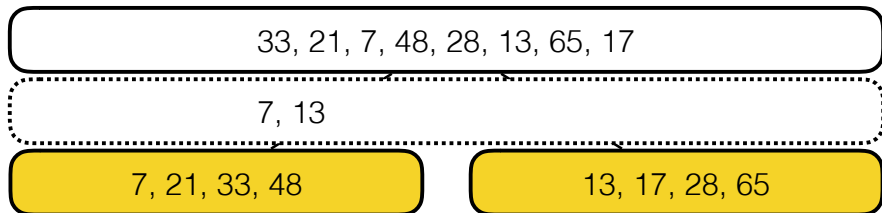
## MergeSort(): Esecuzione



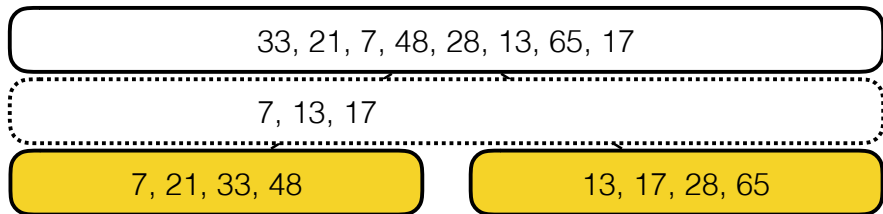
## MergeSort(): Esecuzione



## MergeSort(): Esecuzione

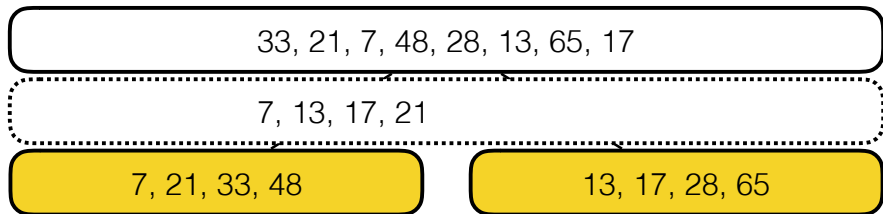


## MergeSort(): Esecuzione





## MergeSort(): Esecuzione



## MergeSort(): Esecuzione

33, 21, 7, 48, 28, 13, 65, 17

The diagram illustrates the execution of Merge Sort. At the top, a solid black rounded rectangle contains the initial array: 33, 21, 7, 48, 28, 13, 65, 17. Below it, a dashed black rounded rectangle contains the array after the first split: 7, 13, 17, 21, 28. At the bottom, two solid yellow rounded rectangles show the two sub-arrays after the second split: 7, 21, 33, 48 on the left and 13, 17, 28, 65 on the right. Arrows indicate the flow of data from the initial array to the first split, and then from the first split to the two sub-arrays.

7, 13, 17, 21, 28

7, 21, 33, 48

13, 17, 28, 65

## MergeSort(): Esecuzione

33, 21, 7, 48, 28, 13, 65, 17

The diagram illustrates the execution of Merge Sort. At the top, a solid black rounded rectangle contains the initial array: 33, 21, 7, 48, 28, 13, 65, 17. Below it, a dashed black rounded rectangle contains the array after the first split: 7, 13, 17, 21, 28, 33. At the bottom, two solid yellow rounded rectangles show the two sub-arrays after the second split: 7, 21, 33, 48 on the left and 13, 17, 28, 65 on the right. Arrows indicate the flow of data from the initial array to the first split, and then from the first split to the two sub-arrays.

7, 13, 17, 21, 28, 33

7, 21, 33, 48

13, 17, 28, 65

## MergeSort(): Esecuzione

33, 21, 7, 48, 28, 13, 65, 17

The diagram illustrates the execution of Merge Sort. It shows three levels of data structures: an initial array, a merged array, and two sorted sub-arrays. The initial array is in a solid black box. A dashed box below it contains the merged array. Two solid yellow boxes at the bottom represent the sorted sub-arrays. Arrows indicate the flow of data from the initial array to the merged array, and from the merged array to the two sorted sub-arrays.

7, 13, 17, 21, 28, 33, 48

7, 21, 33, 48

13, 17, 28, 65

## MergeSort(): Esecuzione

33, 21, 7, 48, 28, 13, 65, 17

The diagram illustrates the execution of Merge Sort. It shows three levels of data structures: an initial array, a merged array, and two sorted sub-arrays. The initial array is in a solid black box. Below it, a dashed black box contains the merged array. At the bottom, two solid yellow boxes represent the sorted sub-arrays. Arrows indicate the flow of data from the initial array to the merged array, and from the merged array to the two sorted sub-arrays.

7, 13, 17, 21, 28, 33, 48, 65

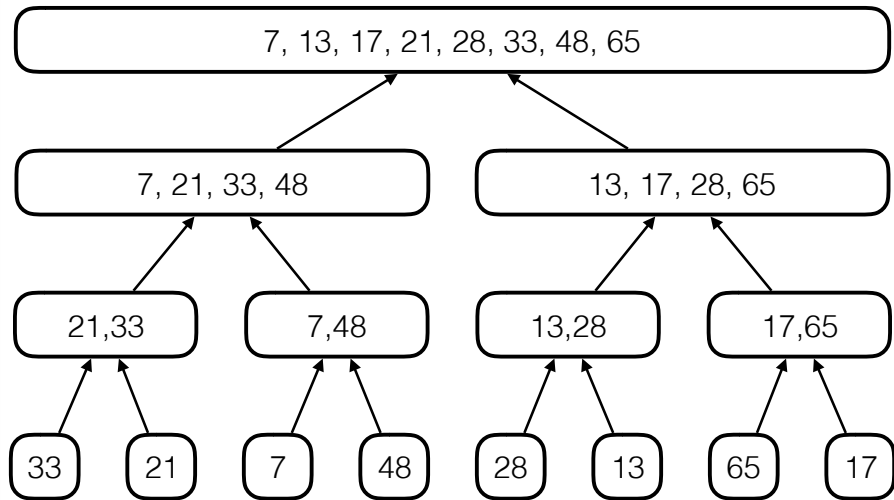
7, 21, 33, 48

13, 17, 28, 65

## MergeSort(): Esecuzione

7, 13, 17, 21, 28, 33, 48, 65

## MergeSort(): Esecuzione



# Analisi di MergeSort()

Un'assunzione semplificativa:

- $n = 2^k$ , ovvero l'altezza dell'albero di suddivisioni è esattamente  $k = \log n$ ;
- Tutti i sottovettori hanno dimensioni che sono potenze esatte di 2

## Costo computazionale

$$T(n) = \begin{cases} c & n = 1 \\ 2T(n/2) + dn & n > 1 \end{cases}$$



# Costo computazionale di Merge Sort

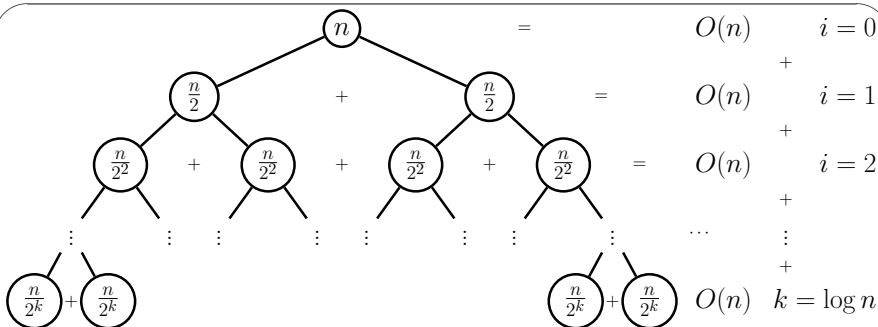
## Domanda

Qual è il costo computazionale di MergeSort()?

# Costo computazionale di Merge Sort

## Domanda

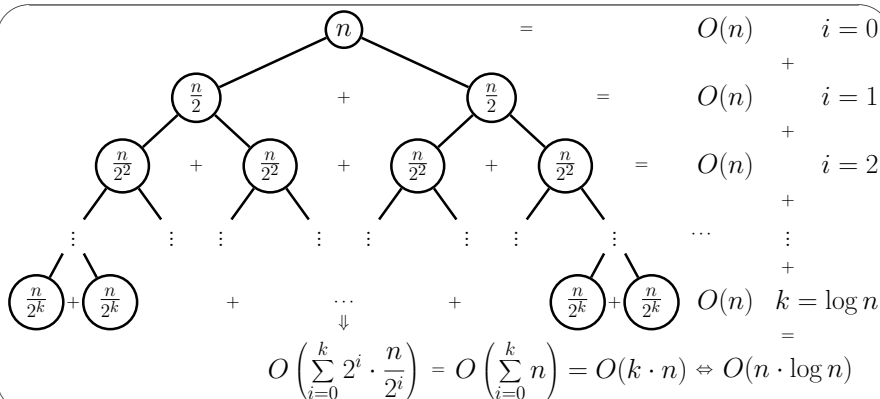
Qual è il costo computazionale di MergeSort()?



# Costo computazionale di Merge Sort

## Domanda

Qual è il costo computazionale di MergeSort()?



## Un po' di storia

- Il censimento americano del 1880 aveva richiesto otto anni per essere completato
- Quello del 1890 richiese sei settimane, grazie alla Hollerith Machine
- Fra il 1896 e il 1924, la Hollerith & Co ha cambiato diversi nomi. L'ultimo?

### International Business Machines

- Le Collating Machines (1936) prendevano due stack di schede perforate ordinate e le ordinavano in un unico stack
- Nel 1945-48, John von Neumann descrisse per la prima volta il MergeSort partendo dall'idea delle Collating Machines.



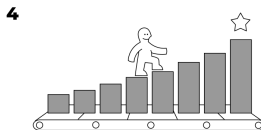
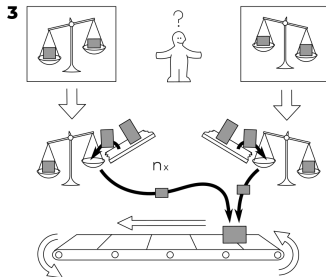
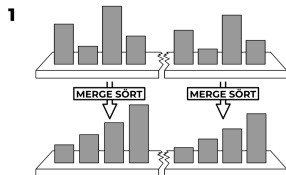
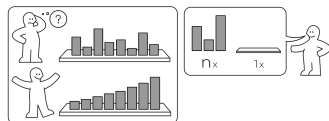
Hollerith Machine

# MergeSort, in pillole

## MERGE SÖRT

[idea-instructions.com/merge-sort/](https://idea-instructions.com/merge-sort/)  
v1.1, CC by-nc-sa 4.0

**IDEA**



# Ricorsione

Recursion is the root of computation because it trades description for time.

---

*Alan Perlis, Epigrams on Programming*

The image is a screenshot of a Google search interface. At the top, there is a navigation bar with links: +Vishal, Web, Images, Maps, News, Orkut, Gmail, and More. Below this is the Google logo and a search bar containing the text 'recursion'. The search results show 'About 1,570,000 results (0.20 seconds)'. On the left side, there is a sidebar with links: Everything, Images, Maps, Videos, News, and More. The main content area displays a suggestion: 'Did you mean: [recursion](#)'. Below this, there are two search results. The first result is 'Recursion - Wikipedia, the free encyclopedia' with a link to 'en.wikipedia.org/wiki/Recursion'. The second result is 'Recursion (computer science) - Wikipedia, the free encyclopedia' with a link to 'en.wikipedia.org/wiki/Recursion\_(computer\_science)'. The text 'Recursion' in both results is highlighted in green. At the bottom of the sidebar, there is a link to 'Pune, Maharashtra' and a note 'Change location'.

+Vishal **Web** Images Maps News Orkut Gmail More ▾

Google recursion

Search About 1,570,000 results (0.20 seconds)

Everything  
Images  
Maps  
Videos  
News  
More

Did you mean: [recursion](#)

[Recursion - Wikipedia, the free encyclopedia](#)  
[en.wikipedia.org/wiki/Recursion](http://en.wikipedia.org/wiki/Recursion)  
Recursion is the process of repeating items in a self-similar way the surfaces of two mirrors are exactly parallel with each other th  
Formal definitions of recursion - Recursion in language - Recursi

[Recursion \(computer science\) - Wikipedia, the free encyclopedia](#)  
[en.wikipedia.org/wiki/Recursion\\_\(computer\\_science\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Recursion_(computer_science))  
Recursion in computer science is a method where the solution t  
Recursive data types - Recursive algorithms - Structural versus g

Pune, Maharashtra  
Change location