Differentialgleichungen

1 Begriffe und Einteilung

Definition: Eine Differentialgleichung (DGL) ist eine Gleichung, die neben der gesuchten Funktion, die von einer oder mehreren Variablen abhängen kann, auch deren Ableitungen enthält

Hängt die gesuchte Funktion nur von einer Variablen ab, so spricht man von **gewöhnlichen DGL**.
Hängt die gesuchte Funktion von mehreren Variablen ab, so spricht man von **partiellen DGL**.

Hängen die Koeffizienten der gesuchten Funktion bzw. ihrer Ableitungen nicht von der Variablen ab, nach der abgeleitet wird, so spricht man von **konstanten Koeffzienten**. (Gegenteil: variable Koeffizeienten)

Eine **DGL lösen** heißt, alle Funktionen y = f(x) bestimmen, die die gegebene Gleichung erfüllen. Das heißt, wenn man die Funktion und ihre Ableitungen in die DGL einsetzt, so erhält man eine wahre Aussage, ohne Rücksicht auf die Werte von x.

Definition: Die unendliche Menge der Lösungen einer Differenzialgleichung bezeichnet man als **allgemeines Integral** bzw. **allgemeine Lösung** $\mathbf{y_a}$.
Durch Einsetzen eines bestimmten Wertes für die Integrationskonstante c greift man aus der Kurvenschar eine Integralkurve heraus und erhält damit eine **spezielle Lösung**.

Störglied: Term, der weder die Funktion y noch deren Ableitungen enthält

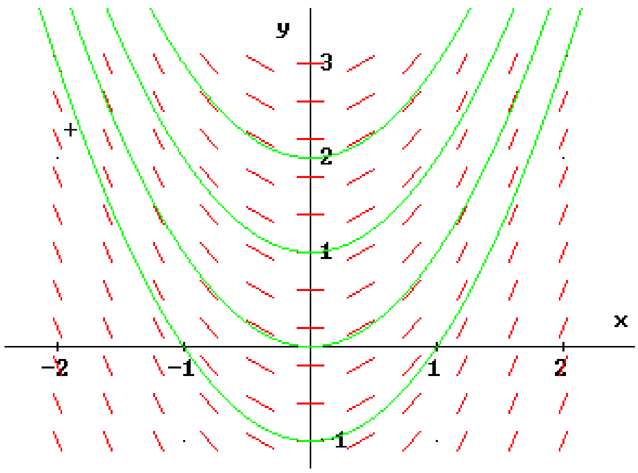
Homogene DGL: Störglied gleich Null, z.B: $y' - x\,y = 0$
Inhomogene DGL : Störglied ungleich Null, z.B: $y' - x\,y = 2 + \sin(x)$

Ordnung einer DGL: höchste vorkommende Ableitung der gesuchten Funktion

Grad einer DGL: höchste Potenz der gesuchten Funktion bzw. ihrer Ableitungen.
Eine DGL 1.Grades heißt **lineare Differenzialgleichung**.
Implizit: $F(x, y, y') = 0$
Explizit: $y'(x) = f(x, y)$

Richtungsfeld: Jede DGL 1.Ordnung ordnet einem Punkt der x, y-Ebene die Steigung der Tangente an den Graph der Lösungsfunktion zu. Das Tripel (x, y, y´) nennt man Linienelement. („Punkt mit Tangente“)

Beispiel:
Richtungsfeld der DGL $y' = 2x$



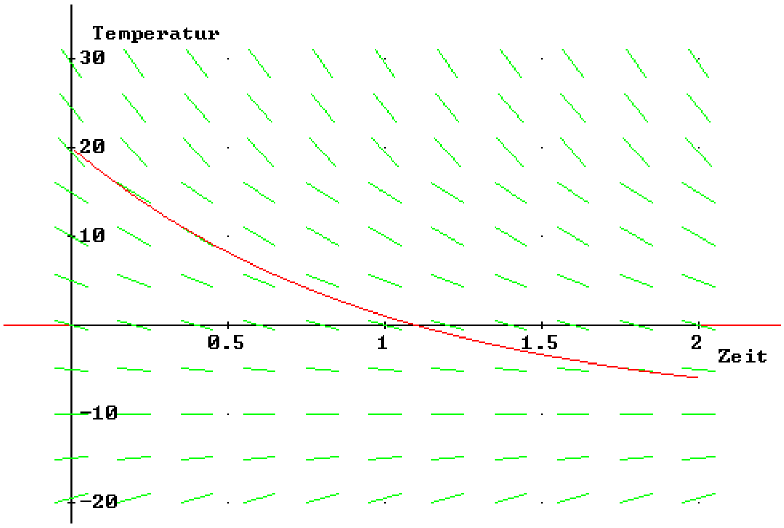
Die allgemeine Lösung dieser DGL erhält man durch Integrieren:

$$y = x^2 + c.$$

Die Integrationskonstante c wird durch zusätzliche Bedingungen (**Anfangsbedingungen**) festgelegt.

Beispiel 2: Abkühlungsgesetz: $\dfrac{dT}{dt} = k \cdot (T_u - T)$

Zahlenwerte zum Zeichnen: $T_u = -10°C$, $T_0 = 20°C$, $k=1$, t in Stunden



Beispiel 3: geg.: Kurvenschar konzentrischer Kreise mit Mittelpunkt im Koordinatenursprung
ges: Orthogonaltrajektorien

Definition:	Orthogonaltrajektorien = Kurven, die sämtliche geg. Kurven im rechten Winkel schneiden

Vgl. 1. bzw. 2.Jahrgang: Orthogonalitätsbedingung: $\boxed{k_2 = -1/k_1}$.

=> Gleichung der Orthogonaltrajektorien: $\boxed{y' = -\dfrac{1}{f'(x,y)}}$

2 Lösungsmethoden

2.1 Differentialgleichungen 1.Ordnung

Allgemeine Gleichung: $y' + p(x)\,y = s(x)$ s(x) ….. Störfunktion

Allgemeine Lösung: $y = y_h + y_p$

y_h …. Lösung der homogenen DGL, y_p …. Lösung der inhomogenen DGL

Trennung (Separation) der Variablen und Variation der Konstanten
Unbestimmter Ansatz – Exponentialansatz

2.2 Differentialgleichungen 2.Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Allgemeine Gleichung: $y'' + a\,y' + b\,y = s(x)$ s(x) ….. Störfunktion, $a, b \in R$

Allgemeine Lösung: $y = y_h + y_p$
Homogene Lösung erhält man durch Lösen der char. Gleichung, 3 Lösungsfälle möglich!!