Optimierung für Studierende der Informatik

Thomas Andreae

Wintersemester 2017/18
Blatt 4

A: Präsenzaufgaben am 13./14. November 2017

1. Im Beispiel „Energieflussproblem" in Abschnitt 6.2 wird erläutert, wie das Problem eines *Flusses maximaler Stärke* als LP-Problem formuliert werden kann. Beantworten Sie hierzu die folgenden Fragen:
   a) Wie viele Variablen gibt es in diesem LP-Problem?
   b) Wie lautet die Nebenbedingung, die zum Knoten V_6 gehört?
   c) Wie viele Nebenbedingungen gibt es insgesamt? (Die Nichtnegativitätsbedingungen sollen nicht mitgezählt werden.)
   d) Wie lautet die Zielfunktion?

a) Zu jeder Kante eine, also 17.

b) $x_{36}+x_{46}+x_{56}-x_{67}-x_{68}=0$

c) 7 Knotenbedingungen: Als <u>innere Knoten</u> des Netzwerks bezeichnet man die Knoten $V_1, V_2, \dots, V_7$; V_0 ist die <u>Quelle</u>, V_8 ist die <u>Senke</u>; zu jedem inneren Knoten gibt es eine Bedingung wie in b)[1].

17 Kantenbedingungen der Form $x_{ij} \leq k_{ij}$, wobei k_{ij} die Kapazität der Kante von V_i nach V_j bezeichnet.

Insgesamt also 24 Nebenbedingungen.

d) $x_{01}+x_{02}$ bzw. (was dasselbe ist) $x_{48}+x_{68}+x_{78}$.

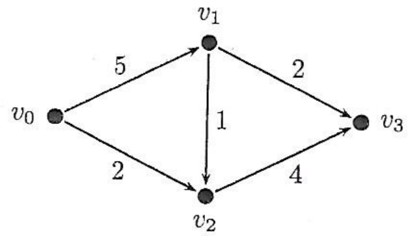
---

1) Man könnte als achte Nebenbedingung hinzunehmen:

$$x_{01}+x_{02}-x_{48}-x_{68}-x_{78}=0.$$

Das schadet nichts, ist aber überflüssig, da sich diese Nebenbedingung aus den übrigen 7 Knotenbedingungen ergibt (Summe dieser Bedingungen).

2. Anstelle des Netzwerks aus 1. betrachten wir nun das folgende Flussnetzwerk (v_0 bezeichnet die *Quelle*, v_3 die *Senke* und die Zahlen an den Kanten geben die *Kapazitäten* an):



Formulieren Sie für dieses Netzwerk die Aufgabe, einen Fluss maximaler Stärke zu finden, als ein lineares Programmierungsproblem.

maximiere $x_{01} + x_{02}$

unter den Nebenbedingungen

$$x_{01} - x_{12} - x_{13} = 0$$

$$x_{02} + x_{12} - x_{23} = 0$$

$$\left(x_{01} + x_{02} - x_{13} - x_{23} = 0\right)^{1)}$$

$$0 \leq x_{01} \leq 5$$

$$0 \leq x_{02} \leq 2$$

$$0 \leq x_{12} \leq 1$$

$$0 \leq x_{13} \leq 2$$

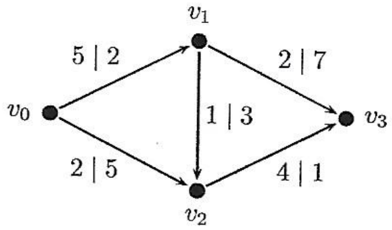
$$0 \leq x_{23} \leq 4^{2)}$$

---

1) Kann entfallen.

2) Es ist üblich, die Kapazitätsbedingungen und die Nichtnegativitätsbedingungen auf diese Art zusammenzufassen – dies muss aber nicht unbedingt so gemacht werden.

3. Für das Netzwerk aus 2. seien zusätzlich zu den Kapazitäten auch noch Kosten für jede Kante gegeben:



Gefragt ist nach einem *kostenminimalen Fluss* der Stärke 4. Formulieren Sie diese Aufgabenstellung als LP-Problem.

minimiere $2x_{01} + 5x_{02} + 3x_{12} + 7x_{13} + x_{23}$

unter den Nebenbedingungen

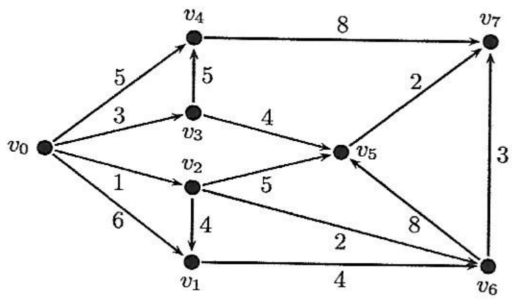
wie in Aufgabe 2 plus eine weitere Bedingung:

$x_{01} + x_{02} = 4$

(oder $x_{13} + x_{23} = 4$)

B: Hausaufgaben zum 20./21. November 2017

1. a) Im nachfolgenden Flussnetzwerk bezeichne v_0 die Quelle, v_7 die Senke und die Zahlen an den Kanten bezeichnen die Kapazitäten.



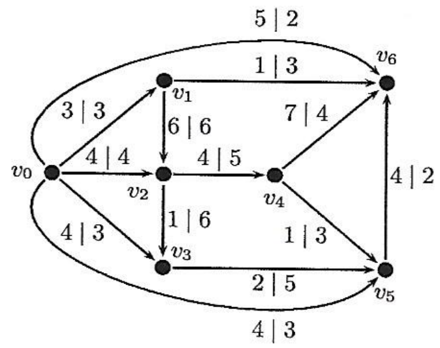
Formulieren Sie für dieses Netzwerk die Aufgabe, einen Fluss maximaler Stärke zu finden, als ein lineares Programmierungsproblem.

a) maximiere $x_{01}+x_{02}+x_{03}+x_{04}$
unter den Nebenbedingungen

$$x_{01}+x_{21}-x_{16} = 0$$
$$x_{02}-x_{21}-x_{25}-x_{26} = 0$$
$$x_{03}-x_{34}-x_{35} = 0$$
$$x_{04}+x_{34}-x_{47} = 0$$
$$x_{25}+x_{35}+x_{65}-x_{57} = 0$$
$$x_{16}+x_{26}-x_{65}-x_{67} = 0$$

$$0 \leq x_{01} \leq 6$$
$$0 \leq x_{02} \leq 1$$
$$0 \leq x_{03} \leq 3$$
$$0 \leq x_{04} \leq 5$$
$$0 \leq x_{16} \leq 4$$
$$0 \leq x_{21} \leq 4$$
$$0 \leq x_{25} \leq 5$$
$$0 \leq x_{26} \leq 2$$
$$0 \leq x_{34} \leq 5$$
$$0 \leq x_{35} \leq 4$$
$$0 \leq x_{47} \leq 8$$
$$0 \leq x_{57} \leq 2$$
$$0 \leq x_{65} \leq 8$$
$$0 \leq x_{67} \leq 3$$

b) Für das folgende Netzwerk mit Quelle v_0 und Senke v_6 seien neben den Kapazitäten auch noch Kosten gegeben; die linke Zahl bezeichne die Kapazität, die rechte die Kosten einer Kante:



Gefragt ist nach einem kostenminimalen Fluss der Stärke 6. Formulieren Sie diese Aufgabenstellung als LP-Problem.

minimiere

$$3x_{01}+4x_{02}+3x_{03}+3x_{05}+2x_{06}+6x_{12}+3x_{16}+6x_{23}+5x_{24}+5x_{35}+3x_{45}+4x_{46}+2x_{56}$$

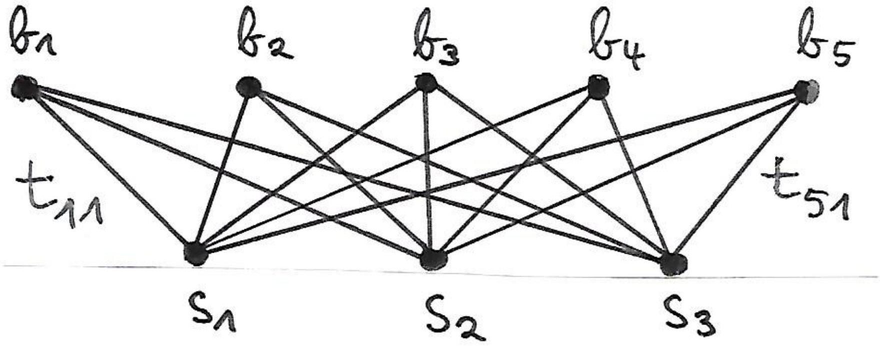
unter den Nebenbedingungen

$$x_{01}+x_{02}+x_{03}+x_{05}+x_{06}=6$$
$$x_{01}-x_{12}-x_{16}=0$$
$$x_{02}+x_{12}-x_{23}-x_{24}=0$$
$$x_{03}+x_{23}-x_{35}=0$$
$$x_{24}-x_{45}-x_{46}=0$$
$$x_{05}+x_{35}+x_{45}-x_{56}=0$$

$$0\le x_{01}\le 3$$
$$0\le x_{02}\le 4$$
$$0\le x_{03}\le 4$$
$$0\le x_{05}\le 4$$
$$0\le x_{06}\le 5$$
$$0\le x_{12}\le 6$$
$$0\le x_{16}\le 1$$
$$0\le x_{23}\le 1$$
$$0\le x_{24}\le 4$$
$$0\le x_{35}\le 2$$
$$0\le x_{45}\le 1$$
$$0\le x_{46}\le 7$$
$$0\le x_{56}\le 4$$

2. a) Ein Personalchef habe für 3 offene Stellen 5 Bewerber, wobei aufgrund eines Eignungstests bekannt sei, welche Einarbeitungszeit t_{ij} der Bewerber i für die Stelle j benötigt ($i = 1, \ldots, 5$ und $j = 1, 2, 3$). Es sollen alle drei Stellen besetzt werden – zwei Bewerber gehen leer aus. Die Einstellung soll so erfolgen, dass die Summe der Einarbeitungszeiten minimal ist. Formulieren Sie diese Aufgabe als ein binäres LP-Problem und veranschaulichen Sie die Fragestellung mithilfe eines bipartiten Graphen.

a) Zunächst wollen wir uns die Fragestellung mit Hilfe eines bipartiten Graphen veranschaulichen:



An jede Kante sei die entsprechende Einarbeitungszeit t_{ij} geschrieben; aus Platzgründen wurde dies oben nur für t_{11} und t_{51} ausgeführt. Zu jeder Kante führen wir eine reelle Variable x_{ij} ein, die als Werte nur 0 oder 1 annehmen kann ($x_{ij} \in \{0,1\}$)[1].

<u>Interpretation</u>: $x_{ij} = 0$ bedeutet, dass Bewerber b_i nicht für die Stelle s_j genommen wird; $x_{ij} = 1$ bedeutet, dass b_i die Stelle s_j bekommt.

Hier nun die Formulierung als 0,1-Problem:

1) Mit 0 und 1 sind natürlich die reellen Zahlen 0 und 1 gemeint, keine Binärzahlen. (Es geht um $\mathbb{R}$, <u>nicht</u> um $\mathbb{Z}_2$!)

minimiere $\sum_{i=1}^{5} \sum_{j=1}^{3} t_{ij} x_{ij}$

unter den Nebenbedingungen

$$\sum_{j=1}^{3} x_{ij} \leq 1 \quad (i=1,2,3,4,5)$$

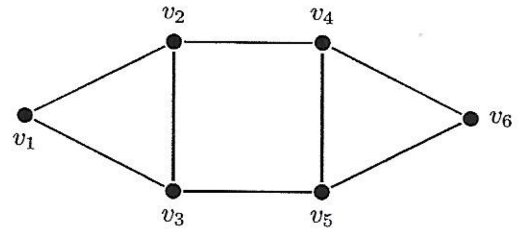
$$\sum_{i=1}^{5} x_{ij} = 1 \quad (j=1,2,3)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad (1 \leq i \leq 5 \;\; 1 \leq j \leq 3).$$

b) Es sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit Knotenmenge $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und Kantenmenge $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$. Eine Teilmenge U der Knotenmenge heißt *unabhängig*, falls keine zwei Knoten von U durch eine Kante verbunden sind. Ein bekanntes, in der Informatik häufig betrachtetes Optimierungsproblem:

Finde in G eine unabhängige Menge U, die möglichst viele Knoten enthält. $(\star)$

Formulieren Sie das Problem $(\star)$ für den unten abgebildeten Graphen G als ein binäres LP-Problem.



Hinweis: Für jeden Knoten v_i ist eine Variable x_i zu betrachten und für jede Kante ist eine Nebenbedingung zu formulieren.

b) maximiere $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$

unter den Nebenbedingungen

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 &\leq 1 \\
x_1 + x_3 &\leq 1 \\
x_2 + x_3 &\leq 1 \\
x_2 + x_4 &\leq 1 \\
x_3 + x_5 &\leq 1 \\
x_4 + x_5 &\leq 1 \\
x_4 + x_6 &\leq 1 \\
x_5 + x_6 &\leq 1
\end{aligned}
$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in \{0, 1\}$$

c) Formulieren Sie das binäre Problem aus b) in ein Ganzzahliges Lineares Programmierungsproblem (ILP-Problem) um. Wie lautet die LP-Relaxation dieses Problems?

<u>ILP-Problem</u>: wie b), aber statt $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in \{0,1\}$ wird die äquivalente Formulierung

$$0 \leq x_i \leq 1,\ x_i \in \mathbb{Z}\ (i = 1, \ldots, 6) \qquad (*)$$

gewählt.

<u>LP-Relaxation</u>: wie das ILP-Problem, aber die Bedingungen $x_i \in \mathbb{Z}$ werden weggelassen.