L.9

Optimierung für Studierende der Informatik

Thomas Andreae

Wintersemester 2017/18
Blatt 2

B: Hausaufgaben zum 6./7. November 2017

Hinweis: Es ist in allen Aufgaben genau wie im **Handout** vorzugehen. Insbesondere ist am Ende jeder Iteration das neue Tableau noch einmal übersichtlich hinzuschreiben (wie im Handout).

1. Lösen Sie die folgenden LP-Probleme mit dem Simplexverfahren:

a)

$$\begin{aligned}
&\text{maximiere } -2x_1 + 3x_2 + \frac{1}{2}x_3\\
&\text{unter den Nebenbedingungen}\\
&\quad -2x_1 + 3x_2 - x_3 \le 2\\
&\quad x_1 + 2x_3 \le 5\\
&\quad -x_1 + x_2 \le 2\\
&\quad x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}$$

Starttableau

$$\begin{aligned}
x_4 &= 2 + 2x_1 - 3x_2 + x_3\\
x_5 &= 5 - x_1 - 2x_3\\
x_6 &= 2 + x_1 - x_2\\
\hline
z &= -2x_1 + 3x_2 + \frac{1}{2}x_3
\end{aligned}$$

1. Iteration

Eingangsvariable: x_2
Ausgangsvariable: x_4

Es folgt

$$x_2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4$$

$$x_6 = 2 + x_1 - \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4\right)$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4$$

$$z = -2x_1 + 3\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4\right) + \frac{1}{2}x_3$$

$$= 2 + \frac{3}{2}x_3 - x_4$$

Neues Tableau:

$$x_2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4$$
$$x_5 = 5 - x_1 - 2x_3$$
$$x_6 = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4$$
$$z = 2 \qquad + \frac{3}{2}x_3 - x_4$$

2. Iteration

Eingangsvariable: x_3

Ausgangsvariable: x_5

Es folgt

$$x_3 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_5$$
$$x_2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_5\right) - \frac{1}{3}x_4$$
$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{6}x_5 - \frac{1}{3}x_4$$
$$x_6 = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_5\right) + \frac{1}{3}x_4$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{6}x_5 + \frac{1}{3}x_4$$
$$z = 2 + \frac{3}{2}\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_5\right) - x_4$$
$$= \frac{23}{4} - \frac{3}{4}x_1 - \frac{3}{4}x_5 - x_4$$

Neues Tableau:

$$x_3 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_1 \qquad - \frac{1}{2}x_5$$
$$x_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{6}x_5$$
$$x_6 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_4 + \frac{1}{6}x_5$$
$$z = \frac{23}{4} - \frac{3}{4}x_1 - x_4 - \frac{3}{4}x_5$$

Optimale Lösung: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{3}{2}$, $x_3 = \frac{5}{2}$ mit $z = \frac{23}{4}$.

b)

maximiere $3x_1 + x_2 - 11x_3 - 9x_4$
unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - 7x_3 - 3x_4 &\leq 1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 &\leq 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0. \end{aligned}$$

Starttableau

$$x_5 = 1 - x_1 + x_2 + 7x_3 + 3x_4$$
$$x_6 = 3 - x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4$$
$$z = 3x_1 + x_2 - 11x_3 - 9x_4$$

1. Iteration

Eingangsvariable: x_1
Ausgangsvariable: x_5
Es folgt

$$x_1 = 1 + x_2 + 7x_3 + 3x_4 - x_5$$
$$x_6 = 3 - (1 + x_2 + 7x_3 + 3x_4 - x_5) - x_2 - 3x_3 - x_4$$
$$= 2 - 2x_2 - 10x_3 - 4x_4 + x_5$$
$$z = 3(1 + x_2 + 7x_3 + 3x_4 - x_5) + x_2 - 11x_3 - 9x_4$$
$$= 3 + 4x_2 + 10x_3 - 3x_5$$

Neues Tableau:

$$\begin{array}{l} x_1 = 1 + x_2 + 7x_3 + 3x_4 - x_5 \\ x_6 = 2 - 2x_2 - 10x_3 - 4x_4 + x_5 \\ \hline z = 3 + 4x_2 + 10x_3 \qquad - 3x_5 \end{array}$$

2. Iteration

Eingangsvariable: x_3

Ausgangsvariable: x_6

Es folgt:

$$x_3 = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}x_2 - \frac{2}{5}x_4 + \frac{1}{10}x_5 - \frac{1}{10}x_6$$

$$x_1 = 1 + x_2 + 7\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5}x_2 - \frac{2}{5}x_4 + \frac{1}{10}x_5 - \frac{1}{10}x_6\right) + 3x_4 - x_5$$

$$= \frac{12}{5} - \frac{2}{5}x_2 + \frac{1}{5}x_4 - \frac{3}{10}x_5 - \frac{7}{10}x_6$$

$$z = 3 + 4x_2 + 10\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5}x_2 - \frac{2}{5}x_4 + \frac{1}{10}x_5 - \frac{1}{10}x_6\right) - 3x_5$$

$$= 5 + 2x_2 - 4x_4 - 2x_5 - x_6$$

Neues Tableau:

$$\begin{array}{l} x_3 = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}x_2 - \frac{2}{5}x_4 + \frac{1}{10}x_5 - \frac{1}{10}x_6 \\ x_1 = \frac{12}{5} - \frac{2}{5}x_2 + \frac{1}{5}x_4 - \frac{3}{10}x_5 - \frac{7}{10}x_6 \\ \hline z = 5 + 2x_2 - 4x_4 - 2x_5 - x_6 \end{array}$$

3. Iteration

Eingangsvariable: x_2
Ausgangsvariable: x_3
Es folgt

$$x_2 = 1 - 2x_4 + \frac{1}{2}x_5 - \frac{1}{2}x_6 - 5x_3$$

$$x_1 = \frac{12}{5} - \frac{2}{5}\left(1 - 2x_4 + \frac{1}{2}x_5 - \frac{1}{2}x_6 - 5x_3\right) + \frac{1}{5}x_4 - \frac{3}{10}x_5 - \frac{7}{10}x_6$$

$$= 2 + x_4 - \frac{1}{2}x_5 - \frac{1}{2}x_6 + 2x_3$$

$$z = 5 + 2\left(1 - 2x_4 + \frac{1}{2}x_5 - \frac{1}{2}x_6 - 5x_3\right) - 4x_4 - 2x_5 - x_6$$

$$= 7 - 8x_4 - x_5 - 2x_6 - 10x_3$$

Neues Tableau:

L.14

$$x_2 = 1 - 2x_4 + \frac{1}{2}x_5 - \frac{1}{2}x_6 - 5x_3$$
$$x_1 = 2 + x_4 - \frac{1}{2}x_5 - \frac{1}{2}x_6 + 2x_3$$
$$\overline{z = 7 - 8x_4 - x_5 - 2x_6 - 10x_3}$$

Optimale Lösung: $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ mit $z = 7$.

2. a) Lösen Sie die folgende Aufgabe mit dem Simplexverfahren:

$$\begin{aligned}
&\text{maximiere } -x_1 + 3x_2 + x_3\\
&\text{unter den Nebenbedingungen}\\
&\qquad -x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 8\\
&\qquad x_1 - 2x_2 + 3x_3 \le 8\\
&\qquad x_1 - 3x_2 + x_3 \le 8\\
&\qquad x_1, x_2, x_3 \ge 0.
\end{aligned}$$

b) Falls das Verfahren mit dem Ergebnis **unbeschränkt** terminiert, so gebe man zulässige Lösungen an, für die der Zielfunktionswert z die folgenden Werte annimmt: $z = 20$, $z = 1000$ sowie $z = 1000000$.

---

a) Starttableau

$$x_4 = 8 + x_1 - 2x_2 - 2x_3$$
$$x_5 = 8 - x_1 + 2x_2 - 3x_3$$
$$x_6 = 8 - x_1 + 3x_2 - x_3$$
$$\overline{z = -x_1 + 3x_2 + x_3}$$

1. Iteration

Eingangsvariable: x_2

Ausgangsvariable: x_4

Es folgt

$$x_2 = 4 + \frac{1}{2}x_1 - x_3 - \frac{1}{2}x_4$$

$$x_5 = 8 - x_1 + 2\left(4 + \frac{1}{2}x_1 - x_3 - \frac{1}{2}x_4\right) - 3x_3$$

$$= 16 - 5x_3 - x_4$$

$$x_6 = 8 - x_1 + 3\left(4 + \frac{1}{2}x_1 - x_3 - \frac{1}{2}x_4\right) - x_3$$

$$= 20 + \frac{1}{2}x_1 - 4x_3 - \frac{3}{2}x_4$$

$$z = -x_1 + 3\left(4 + \frac{1}{2}x_1 - x_3 - \frac{1}{2}x_4\right) + x_3$$

$$= 12 + \frac{1}{2}x_1 - 2x_3 - \frac{3}{2}x_4$$

<u>Neues Tableau:</u>

$$\begin{array}{l}
x_2 = 4 + \frac{1}{2}x_1 - x_3 - \frac{1}{2}x_4 \\
x_5 = 16 \qquad\quad - 5x_3 - x_4 \\
x_6 = 20 + \frac{1}{2}x_1 - 4x_3 - \frac{3}{2}x_4 \\
\hline
z = 12 + \frac{1}{2}x_1 - 2x_3 - \frac{3}{2}x_4
\end{array}$$

<u>2. Iteration</u>

Eingangsvariable: x_1

Ausgangsvariable: –

Das Verfahren terminiert mit dem Ergebnis „<u>unbeschränkt</u>".

b) Wir betrachten das letzte Tableau und setzen $x_3=0$, $x_4=0$ und $x_1=t$, wobei t eine reelle Zahl ist, für die $t \geq 0$ gilt. Es folgt

$$x_2=4+\frac{1}{2}t,\ x_5=16,\ x_6=20+\frac{1}{2}t \text{ und } z=12+\frac{1}{2}t.$$

Zu jedem $t \geq 0$ haben wir somit eine zulässige Lösung erhalten, die wie folgt lautet:

$$x_1=t,\ x_2=4+\frac{1}{2}t,\ x_3=0 \text{ mit } z=12+\frac{1}{2}t.$$

Es folgt $t=2z-24$. Setzt man in diese Gleichung nacheinander $z=20$, $z=1000$ und $z=10^6$ ein, so erhält man die gewünschten zulässigen Lösungen:

(I) Für $z=20$ erhält man $t=16$ und somit

$x_1=16$, $x_2=12$, $x_3=0$.

(II) Für $z=1000$ erhält man $t=1976$ sowie

$x_1=1976$, $x_2=992$, $x_3=0$.

(III) Für $z=10^6$ erhält man $t=1999976$ und somit

$x_1=1999976$, $x_2=999992$, $x_3=0$.