L.1

Optimierung für Studierende der Informatik

Thomas Andreae

Wintersemester 2017/18
Blatt 1

B: Hausaufgaben zum 30. Oktober 2017

1. a) Überführen Sie die folgenden Probleme in Standardform:

(i)

$$\begin{aligned}
&\text{minimiere } -12x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4\\
&\text{unter den Nebenbedingungen}\\
&-3x_1 - x_2 + x_3 \leq 11\\
&-5x_2 + x_3 + x_4 \geq 5\\
&-x_1 + 7x_2 - 2x_3 + x_4 = -6\\
&x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
&\text{maximiere } -12x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4\\
&\text{unter den Nebenbedingungen}\\
&3x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 2\\
&-5x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 \leq 3\\
&x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 5\\
&x_4 \leq 7\\
&x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}$$

b) Lösen Sie das folgende Problem mit der grafischen Methode:

$$\begin{aligned}
&\text{maximiere } x_1 + 3x_2\\
&\text{unter den Nebenbedingungen}\\
&x_1 + x_2 \leq 7\\
&-2x_1 + 5x_2 \leq 9\\
&2x_1 - 2x_2 \leq 5\\
&x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}$$

a) (i) in Standardform:

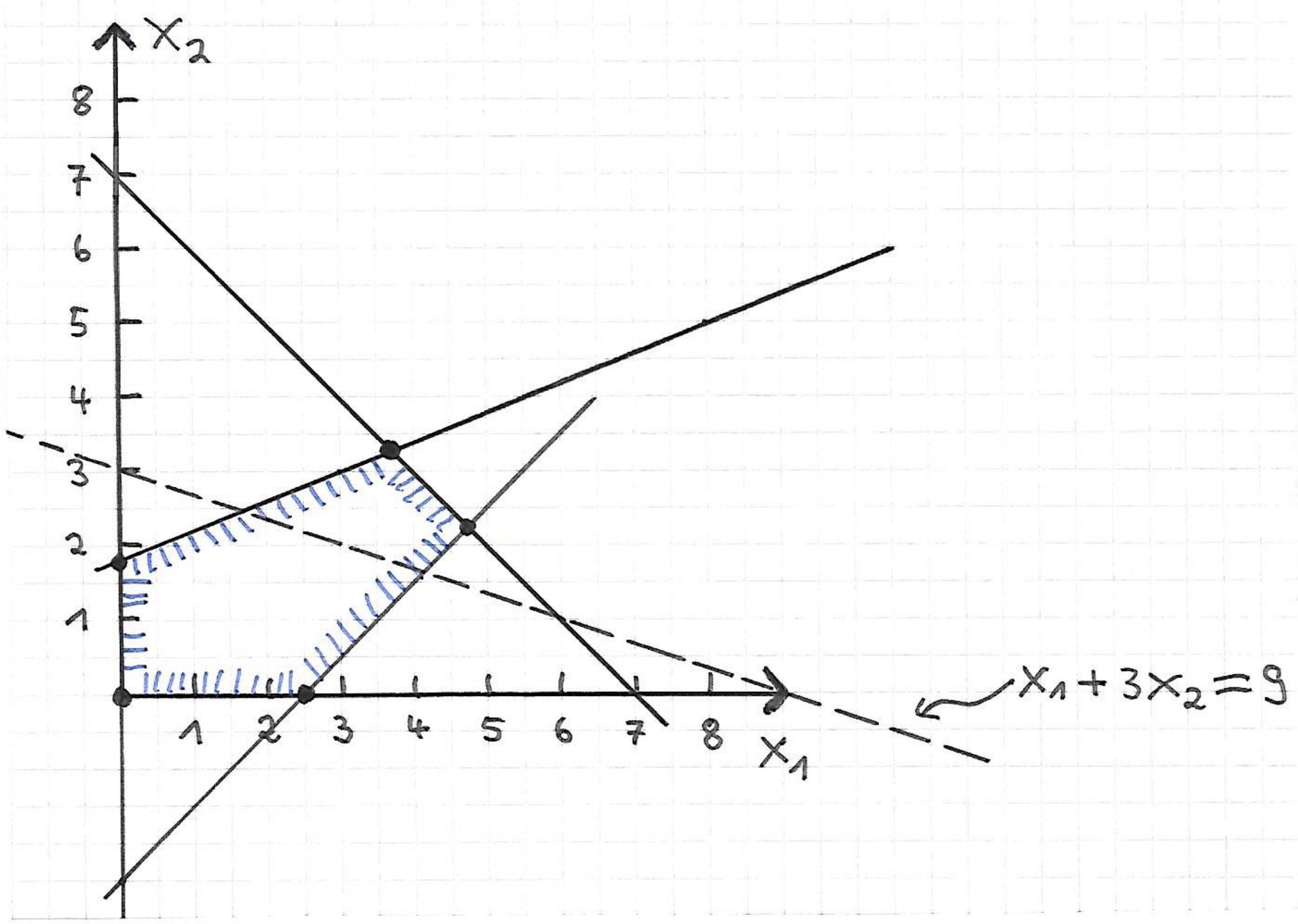
$$\begin{aligned}
&\text{maximiere } 12x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4\\
&\text{unter den Nebenbedingungen}\\
&-3x_1 - x_2 + x_3 \leq 11\\
&5x_2 - x_3 - x_4 \leq -5\\
&-x_1 + 7x_2 - 2x_3 + x_4 \leq -6\\
&x_1 - 7x_2 + 2x_3 - x_4 \leq 6\\
&x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}$$

(ii) in Standardform:

maximiere $-12x_1' + 12x_1'' - x_2 + 2x_3 - x_4$
unter den Nebenbedingungen

$$
\begin{aligned}
-3x_1' + 3x_1'' + x_2 - 4x_3 &\leq -2\\
-5x_1' + 5x_1'' + x_2 - 2x_3 + x_4 &\leq 3\\
x_2 + 2x_3 - 2x_4 &\leq 5\\
-x_2 - 2x_3 + 2x_4 &\leq -5\\
x_4 &\leq 7\\
x_1', x_1'', x_2, x_3, x_4 &\geq 0
\end{aligned}
$$

b)



Der Zeichnung entnimmt man, dass der maximale Zielfunktionswert im Schnittpunkt der beiden Geraden $x_1 + x_2 = 7$ und $-2x_1 + 5x_2 = 9$ angenommen wird, d.h. im Punkt $(x_1, x_2) = \left(\frac{26}{7}, \frac{23}{7}\right)$. Also: Die optimale Lösung ist $x_1 = \frac{26}{7}$, $x_2 = \frac{23}{7}$ mit Zielfunktionswert $z = \frac{95}{7}$.

L.3

2. a) Die folgende Aufgabe stammt aus einem bekannten Lehrbuch mit dem Titel „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler".

Ein Kantinenleiter hat folgendes Problem: Ein Erwachsener soll täglich mindestens 90g Fett, 80g Protein und 300g Kohlenhydrate aufnehmen. Nehmen Sie an, dass diese Forderungen erfüllt werden sollen und die folgenden Informationen beachtet werden sollen. Welche Waren sollten gekauft werden und wie viel sollte von jedem Gut gekauft werden, wenn die billigste Möglichkeit realisiert werden soll? Die Anzahl Gramm an Proteinen, Fett und Kohlenhydraten in 100g einer Reihe von Nahrungsmitteln ist in folgender Tabelle gegeben:

	Protein	Fett	Kohlenhydrate
Hähnchen	27	6	0
Fisch	40	9	0
Backpflaumen	4	3	37
Weißbrot	6	3	58
Käse	25	43	0
Schwarzbrot	10	13	63
Nüsse	9	50	4
Margarine	0	89	0

Es soll eine Höchstgrenze von 70g Brot pro Tag und pro Person berücksichtigt werden und jede Person soll mindestens doppelt soviel Schwarz- wie Weißbrot verzehren.

Die Preise in Öre pro 100g werden für die verschiedenen Lebensmittel wie folgt angenommen:

H	F	B	W	K	S	N	M
100	100	110	59	119	90	98	65

Formulieren Sie die Aufgabe, vor der der Kantinenleiter steht, als LP-Problem.

minimiere

$$100x_1 + 100x_2 + 110x_3 + 59x_4 + 119x_5 + 90x_6 + 98x_7 + 65x_8$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned}
27x_1 + 40x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 25x_5 + 10x_6 + 9x_7 &\geq 80 \\
6x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 43x_5 + 13x_6 + 50x_7 + 89x_8 &\geq 90 \\
37x_3 + 58x_4 + 63x_6 + 4x_7 &\geq 300 \\
x_4 + x_6 &\leq 0.7 \\
-2x_4 + x_6 &\geq 0
\end{aligned}$$

$$x_1, \ldots, x_8 \geq 0$$

b) [Die Idee zu dieser Aufgabe stammt aus einem bekannten Lehrbuch mit dem Titel *Algorithms*.]

Ein *Salat* ist eine beliebige Kombination der folgenden Zutaten:

(1) Tomaten,
(2) Möhren,
(3) Kopfsalat,
(4) Spinat,
(5) Öl.

Jeder Salat muss enthalten:

(A) mindestens 7 Gramm Kohlenhydrate,
(B) mindestens 4 und höchstens 7 Gramm Fett,
(C) mindestens 25 Gramm Proteine,
(D) höchstens 90 Milligramm Kochsalz.

Außerdem soll gelten:

(E) Der Gewichtsanteil an Kopfsalat darf nicht höher als 15% sein.
(F) Der Gewichtsanteil an Tomaten darf nicht kleiner sein als der Gewichtsanteil an Möhren.

Es liege die folgende Nährwerttabelle zugrunde (Angaben pro 100g):

	Energie (kcal)	Proteine (g)	Fett (g)	Kohlenhydrate (g)	Kochsalz (mg)
Tomaten	29	0.58	0.39	5.46	7.00
Möhren	346	8.33	1.58	80.70	508.20
Kopfsalat	14	1.62	0.20	2.36	8.00
Spinat	400	12.78	1.39	74.69	7.00
Öl	999	0.00	100.0	0.00	0.00

Die Aufgabe ist es, einen Salat zusammenzustellen, der die genannten Bedingungen erfüllt und so wenig Kalorien wie möglich enthält. Formulieren Sie dieses Problem als LP-Problem.

Die Gewichtseinheit für die fünf Zutaten sei 100g. Die Variable x_1 gebe an, wieviele Gewichtseinheiten Tomate der Salat enthält; x_2 gebe das Entsprechende für die Möhren an; analog: x_3 für Kopfsalat, x_4 für Spinat und x_5 für Öl.

Man erhält die folgende Formulierung als LP-Problem:

minimiere $29x_1 + 346x_2 + 14x_3 + 400x_4 + 999x_5$
unter den Nebenbedingungen

$$
\begin{array}{rl}
5.46x_1 + 80.70x_2 + 2.36x_3 + 74.69x_4 & \geq 7 \\
0.39x_1 + 1.58x_2 + 0.20x_3 + 1.39x_4 + 100x_5 & \geq 4 \\
0.39x_1 + 1.58x_2 + 0.20x_3 + 1.39x_4 + 100x_5 & \leq 7 \\
0.58x_1 + 8.33x_2 + 1.62x_3 + 12.78x_4 & \geq 25 \\
7.00x_1 + 508.20x_2 + 8.00x_3 + 7.00x_4 & \leq 90 \\
-0.15x_1 - 0.15x_2 + 0.85x_3 - 0.15x_4 - 0.15x_5 & \leq 0 \\
x_1 - x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Erläuterung zu (E): Formuliert man die Bedingung (E) als eine Ungleichung, so erhält man

$$x_3 \leq 0.15(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$$

Durch Umstellen dieser Ungleichung ergibt sich

$$-0.15x_1 - 0.15x_2 + 0.85x_3 - 0.15x_4 - 0.15x_5 \leq 0.$$

3. a) Überführen Sie Pauls Diätproblem und das im Skript aufgeführte Problem (1.2) in Standardform.

b) Ein Eiscremehersteller produziert pro Tag 480 Einheiten von Eissorte A, 400 Einheiten von Sorte B und 230 Einheiten von Sorte C. Jede dieser Eissorten kann in einem arbeitsaufwändigen Prozess verfeinert werden, wodurch Luxusvarianten entstehen. Pro Tag können in der regulären Arbeitszeit bis zu 420 Einheiten veredelt werden; darüber hinaus ist es möglich, mithilfe von Überstunden weitere 250 Einheiten zu veredeln – allerdings zu erhöhten Kosten. Die Gewinne pro Einheit sind wie folgt:

	einfach	in regulärer Arbeitszeit veredelt	im Rahmen von Überstunden veredelt
Sorte A	8 €	14 €	11 €
Sorte B	4 €	12 €	7 €
Sorte C	4 €	13 €	9 €

Beispielsweise führt der folgende Produktionsplan zu einem Gewinn von 9965 e:

	einfach	in regulärer Arbeitszeit veredelt	im Rahmen von Überstunden veredelt
Sorte A	165	280	35
Sorte B	295	70	35
Sorte C	55	70	105

Das Ziel ist, einen Produktionsplan zu finden, der den Gewinn maximiert. Formulieren Sie dieses Problem als LP-Problem in Standardform, wobei Sie mit 6 Variablen $x_1, \ldots, x_6$ auskommen sollen.

a) Pauls Diätproblem in Standardform:

maximiere $-25x_1 - 130x_2 - 85x_3 - 70x_4 - 95x_5 - 98x_6$

unter den Nebenbedingungen

$$-110x_1 - 205x_2 - 160x_3 - 160x_4 - 420x_5 - 260x_6 \leq -2000$$
$$-4x_1 - 32x_2 - 13x_3 - 8x_4 - 4x_5 - 14x_6 \leq -55$$
$$-2x_1 - 12x_2 - 54x_3 - 285x_4 - 22x_5 - 80x_6 \leq -800$$

$$0 \leq x_1 \leq 4$$
$$0 \leq x_2 \leq 3$$
$$0 \leq x_3 \leq 2$$
$$0 \leq x_4 \leq 8$$
$$0 \leq x_5 \leq 2$$
$$0 \leq x_6 \leq 2$$

(1.2) in Standardform:

maximiere $-3x_1' + 3x_1'' + x_2$

unter den Nebenbedingungen

$$
\begin{aligned}
x_1' - x_1'' - 6x_2 + x_3 - x_4' + x_4'' &\leq 3 \\
7x_2 + 2x_4' - 2x_4'' &\leq 5 \\
-7x_2 - 2x_4' + 2x_4'' &\leq -5 \\
x_1' - x_1'' + x_2 + x_3 &\leq 1 \\
-x_1' + x_1'' - x_2 - x_3 &\leq -1 \\
x_3 + x_4' - x_4'' &\leq 2 \\
x_1', x_1'', x_2, x_3, x_4', x_4'' &\geq 0
\end{aligned}
$$

b) Lösung: x_1 bezeichne die Menge von Sorte A, die in regulärer Arbeitszeit veredelt wird; x_2 sei die Menge von Sorte A, die in Überstunden veredelt wird.

Entsprechend: x_3, x_4 für Sorte B und x_5, x_6 für C.

Der Gewinn beträgt dann $14x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 7x_4 + 13x_5 + 9x_6 + 8(480 - x_1 - x_2) + 4(400 - x_3 - x_4) + 4(230 - x_5 - x_6) = 6360 + 6x_1 + 3x_2 + 8x_3 + 3x_4 + 9x_5 + 5x_6$ Euro.

Somit erhält man das folgende LP-Problem in Standardform:

maximiere $6x_1 + 3x_2 + 8x_3 + 3x_4 + 9x_5 + 5x_6$
unter den Nebenbedingungen

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl}
x_1 & + & x_2 & & & & & & & & & \leq & 480 \\
& & & & x_3 & + & x_4 & & & & & \leq & 400 \\
& & & & & & & & x_5 & + & x_6 & \leq & 230 \\
x_1 & & & + & x_3 & & & + & x_5 & & & \leq & 420 \\
& & x_2 & & & + & x_4 & & & + & x_6 & \leq & 250
\end{array}
$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_6 \geq 0$$