Optimierung für Studierende der Informatik

Thomas Andreae

Wintersemester 2017/18

Blatt 6

A: Präsenzaufgaben am 27./28. November 2017

1. Konstruieren Sie das duale Problem:

a) Gegeben sei das folgende LP-Problem, das wir (P) nennen wollen:

$$\begin{array}{llrcl}
\text{maximiere} & x_1 + x_2 + x_3 & & & \\
\text{unter den Nebenbedingungen} & & & & \\
& 2x_1 - 4x_2 + x_3 & = & -1 \\
& x_1 + 5x_2 + x_3 & = & 16 \\
& x_1 \phantom{{}+5x_2} + x_3 & \geq & 5 \\
& 2x_1 + 4x_2 - x_3 & \leq & 8 \\
& x_1 - 3x_2 + x_3 & \leq & 0 \\
& -4x_1 + 3x_2 & \leq & 4 \\
& 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 & \leq & 10 \\
& x_1 + 2x_2 + x_3 & \leq & 9 \\
& x_2 & \geq & 0.
\end{array}$$

Konstruieren Sie das zu (P) duale Problem (D), indem Sie das *Dualisierungsrezept* verwenden.

a) Wir formen zunächst die dritte Nebenbedingung um; sie lautet dann

$$-x_1 - x_3 \leq -5.$$

Sodann bilden wir (D) mit Hilfe des Dualisierungsrezepts und erhalten:

minimiere

$-y_1 + 16y_2 - 5y_3 + 8y_4 \qquad + 4y_6 + 10y_7 + 9y_8$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcl}
2y_1 + y_2 - y_3 + 2y_4 + y_5 - 4y_6 + 4y_7 + y_8 & = & 1 \\
-4y_1 + 5y_2 \phantom{{}-y_3} + 4y_4 - 3y_5 + 3y_6 - 3y_7 + 2y_8 & \geqslant & 1 \\
y_1 + y_2 - y_3 - y_4 + y_5 \phantom{{}+y_6} + 5y_7 + y_8 & = & 1 \\
y_3, y_4, \ldots, y_8 & \geqslant & 0
\end{array} \qquad (D)$$

b) Nun sei mit (P) das folgende Problem bezeichnet:

$$\begin{array}{lrcrcrcrl}
\text{minimiere} & x_1 & - & x_2 & & & & & \\
\text{unter den Nebenbedingungen} & & & & & & & & \\
& 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & x_4 & \leq 0 \\
& 3x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & \geq 3 \\
& -x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = 1 \\
& & & & & & & x_2, x_3 & \geq 0.
\end{array}$$

Bilden Sie das zu (P) duale Problem, indem Sie das *Dualisierungsrezept* verwenden (diesmal allerdings „von rechts nach links").

b) Wir formen zunächst die 1. Nebenbedingung um, sie lautet dann

$$-2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 \geq 0$$

Danach wenden wir das Dualisierungsrezept an („von rechts nach links"):

$$\begin{array}{lrcl}
\text{maximiere} & 3y_2 + y_3 & & \\
\text{unter den Nebenbedingungen} & & & \\
& -2y_1 + 3y_2 - y_3 & = & 1 \\
& -3y_1 + y_2 - y_3 & \leq & -1 \\
& y_1 + 4y_2 + 2y_3 & \leq & 0 \\
& -y_1 - 2y_2 + y_3 & = & 0 \\
& y_1, y_2 & \geq & 0
\end{array} \qquad (D)$$

2. In Matrixnotation lautet ein LP-Problem in Standardform bekanntlich so:

$$\begin{aligned}&\text{maximiere } c^T x\\&\text{unter den Nebenbedingungen}\\&\qquad Ax \le b\\&\qquad\ \ x \ge 0.\end{aligned}$$

Das Duale hierzu lautet in Matrixnotation:

$$\begin{aligned}&\text{minimiere } b^T y\\&\text{unter den Nebenbedingungen}\\&\qquad A^T y \ge c\\&\qquad\ \ y \ge 0.\end{aligned}$$

Geben Sie das Duale der folgenden beiden Probleme in Matrixnotation an:

a)

$$\begin{aligned}&\text{maximiere } c^T x\\&\text{unter den Nebenbedingungen}\\&\qquad Ax \le b\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}&\text{maximiere } c^T x\\&\text{unter den Nebenbedingungen}\\&\qquad Ax = b\\&\qquad\ \ x \ge 0\end{aligned}$$

a) minimiere $b^T y$
unter den Nebenbedingungen

$$A^T y = c$$
$$y \geq 0$$

b) minimiere $b^T y$
unter den Nebenbedingungen

$$A^T y \geq c$$

B: Hausaufgaben zum 4./5. Dezember 2017

1. a) Gegeben sei das folgende LP-Problem, das wir (P) nennen wollen:

$$\begin{array}{l} \text{maximiere} \quad x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_5 - x_6 \\ \text{unter den Nebenbedingungen} \\ \qquad \begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 9x_3 + x_4 - x_5 + 2x_6 &\le -11 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 &\ge 4 \\ 7x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 + x_5 &= 2 \\ x_2, x_5, x_6 &\ge 0. \end{aligned} \end{array}$$

Bilden Sie das zu (P) duale Problem (D), indem Sie das *Dualisierungsrezept* verwenden.

---

a) Wir formulieren zunächst die zweite Nebenbedingung um; sie lautet nach Umformung

$$x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 \le -4$$

Anwendung des Dualisierungsrezepts ergibt

minimiere $-11y_1 - 4y_2 + 2y_3$
unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} 3y_1 + y_2 + 7y_3 &= 1 \\ -y_1 + y_2 + y_3 &\ge 2 \\ 9y_1 - 2y_2 + 4y_3 &= -3 \\ y_1 - y_2 - 2y_3 &= 0 \\ -y_1 + 2y_2 + y_3 &\ge 1 \\ 2y_1 &\ge -1 \\ y_1, y_2 &\ge 0 \end{aligned} \qquad \text{(D)}$$

b) Nun sei mit (P) das folgende Problem bezeichnet:

$$\begin{array}{l} \text{minimiere} \quad 5x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 \\ \text{unter den Nebenbedingungen} \\ \begin{array}{rcr} 7x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 & \le & 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 & = & 9 \\ x_1 + x_3 & \ge & 6 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 & \le & 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 & = & 8 \\ -4x_1 + 3x_2 & \ge & 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 7x_4 & \ge & -10 \\ x_1, x_3 & \ge & 0. \end{array} \end{array}$$

Bilden Sie wieder das zu (P) duale Problem (D), indem Sie das *Dualisierungsrezept* verwenden (diesmal „von rechts nach links“).

b) Wir multiplizieren die erste und vierte Nebenbedingung mit −1 und wenden das Dualisierungsrezept „von rechts nach links“ an. Das dadurch erhaltene LP-Problem (D) lautet wie folgt:

$$\begin{array}{l} \text{maximiere} \; -5y_1 + 9y_2 + 6y_3 - 4y_4 + 8y_5 + y_6 - 10y_7 \\ \text{unter den Nebenbedingungen} \\ \begin{array}{rcr} -7y_1 + y_2 + y_3 - y_4 + 2y_5 - 4y_6 + y_7 & \le & 5 \\ y_1 + y_2 + 3y_4 + y_5 + 3y_6 + 2y_7 & = & -2 \\ -y_1 + y_2 + y_3 - y_4 - y_5 + y_7 & \le & 1 \\ -2y_1 + y_5 + 7y_7 & = & 1 \\ y_1, y_3, y_4, y_6, y_7 & \ge & 0 \end{array} \end{array}$$

2. a) Wir greifen das *Kantinenleiterproblem* aus Aufgabe 2a) von Blatt 1 auf. Lösen Sie dieses Problem mithilfe des folgenden Tools:

`http://www.zweigmedia.com/RealWorld/simplex.html.`

b) Lösen Sie mit dem angegebenen Tool auch das *Salatproblem* aus Aufgabe 2b) von Blatt 1.

c) Lösen Sie mit dem angegebenen Tool auch das Problem des Eiscremeherstellers von Blatt 1.

d) Lösen Sie mit dem angegebenen Tool ebenfalls Pauls Diätproblem (Skript Seite 6).

Auf den Seiten 56 und 57 finden Sie die Lösungen.

Kommentare

a) Der Kantinenleiter kocht preiswert – aber wird es auch schmecken? Auf dem Speiseplan stehen Fisch mit Weißbrot, Schwarzbrot und Margarine. Zum Nachtisch gibt es reichlich Backpflaumen. Guten Appetit! Verbesserungsvorschlag: Eine Obergrenze für Backpflaumen könnte nicht schaden.

b) Der Salat besteht aus Kopfsalat, Spinat und Öl. Das hält nicht nur schlank, sondern ist auch schmackhaft. Allerdings könnte es etwas weniger Spinat sein (Obergrenze!). Möchte man auch Tomaten und Möhren dabei haben, so wären Untergrenzen hierfür einzuführen.

c) Optimale Lösung: 40 Einheiten von Sorte A werden in Überstunden veredelt – der Rest von A wird als einfache Eiscreme verkauft. Alle 400 Einheiten der Sorte B werden in regulärer Arbeitszeit veredelt. Von Sorte C werden 20 Einheiten in regulärer Arbeitszeit veredelt und der Rest in Überstunden.

Bei dieser Strategie streicht der Eiscremehersteller einen Gewinn von 6360€ + 4550€ = 10910€ ein.

d) Paul kann sehr zufrieden sein. Seine angestrebte preiswerte Mahlzeit besteht aus Haferflocken, Milch, Bohnen und Kirschkuchen. Das wird ihm sicher schmecken – und mit ca. 583 Cent kommt er gut weg.

a) Kantinenleiter

Minimize c = 100x1 + 100x2 + 110x3 + 59x4 + 119x5 + 90x6 + 98x7 + 65x8 subject to

27x1 + 40x2 + 4x3 + 6x4 + 25x5 + 10x6 + 9x7 >= 80

6x1 + 9x2 + 3x3 + 3x4 + 43x5 + 13x6 + 50x7 + 89x8 >= 90

37x3 + 58x4 + 63x6 + 4x7 >= 300

x4 + x6 <= 0.7

-2x4 + x6 >= 0

Optimal Solution:

c = 973.358; x1 = 0, x2 = 1.15356, x3 = 6.94775, x4 = 0.233333, x5 = 0, x6 = 0.466667, x7 = 0, x8 = 0.58436

---

b) Salatproblem

Minimize p = 29x1 + 346x2 + 14x3 + 400x4 + 999x5 subject to

5.46x1 + 80.70x2 + 2.36x3 + 74.69x4 >= 7

0.39x1 + 1.58x2 + 0.20x3 + 1.39x4 + 100x5 >= 4

0.39x1 + 1.58x2 + 0.20x3 + 1.39x4 + 100x5 <= 7

0.58x1 + 8.33x2 + 1.62x3 + 12.78x4 >= 25

7.00x1 + 508.20x2 + 8.00x3 + 7.00x4 <=90

-0.15x1 - 0.15x2 + 0.85x3 - 0.15x4 - 0.15x5 <= 0

x1- x2 >= 0

Optimal Solution:

p = 782.714; x1 = 0, x2 = 0, x3 = 0.339852, x4 = 1.9131, x5 = 0.0127282

c) Eiscremehersteller

Maximize p = 6x1+3x2+8x3+3x4+9x5+5x6 subject to

x1+x2 <= 480

x3+x4 <= 400

x5+x6 <= 230

x1+x3+x5 <= 420

x2+x4+x6 <= 250

Optimal Solution: p = 4550; x1 = 0, x2 = 40, x3 = 400, x4 = 0, x5 = 20, x6 = 210

---

d) Pauls Diätproblem

Minimize p = 25a + 130b + 85c + 70d + 95e + 98f subject to

a <= 4

b <= 3

c <= 2

d <= 8

e <= 2

f <= 2

110a + 205b + 160c + 160d + 420e + 260f >= 2000

4a + 32b + 13c + 8d + 4e + 14f >= 55

2a + 12b + 54c + 285d +22e + 80f >= 800

Optimal Solution: p = 583.027; a = 4, b = 0, c = 0, d = 2.23295, e = 2, f = 1.39511
