Optimierung für Studierende der Informatik

Thomas Andreae

Wintersemester 2017/18
Blatt 1

A: Präsenzaufgaben am 16./17. Oktober 2017

1. Bei welchen der folgenden LP-Probleme handelt es sich nicht um ein Problem in Standardform?

(i)

$$\begin{aligned} &\text{maximiere } 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 \\ &\text{unter den Nebenbedingungen} \\ &\qquad 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 8 \\ &\qquad 6x_1 + x_2 - 6x_3 = 5 \\ &\qquad x_1 + 8x_2 + 8x_3 \leq 21 \\ &\qquad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} &\text{minimiere } 3x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 \\ &\text{unter den Nebenbedingungen} \\ &\qquad 9x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 5x_4 \leq 7 \\ &\qquad 8x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 3x_4 \leq 2 \\ &\qquad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} &\text{maximiere } 8x_1 - 3x_2 - 4x_3 \\ &\text{unter den Nebenbedingungen} \\ &\qquad 3x_1 + x_2 + x_3 \leq 5 \\ &\qquad 9x_1 + 5x_2 \leq -2 \\ &\qquad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

2. Für diejenigen LP-Probleme aus Aufgabe 1, die nicht in Standardform vorliegen: Überführen Sie diese Probleme in Standardform.

<u>(i) in Standardform:</u>

$$\begin{aligned} &\text{maximiere } 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 \\ &\text{unter den Nebenbedingungen} \\ &\qquad -4x_1 - 3x_2 - 5x_3 \leq -8 \\ &\qquad 6x_1 + x_2 - 6x_3 \leq 5 \\ &\qquad -6x_1 - x_2 + 6x_3 \leq -5 \\ &\qquad x_1 + 8x_2 + 8x_3 \leq 21 \\ &\qquad x_1, x_2 x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

<u>(ii) in Standardform:</u>

$$\begin{aligned} &\text{maximiere } -3x_1 - x_2 - 4x_3 - x_4' + x_4'' \\ &\text{unter den Nebenbedingungen} \end{aligned}$$

$$9x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 5x_4' - 5x_4'' \leq 7$$
$$8x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 3x_4' - 3x_4'' \leq 2$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4', x_4'' \geq 0$$

(iii) ist bereits in Standardform.

3. Handelt es sich bei den folgenden LP-Problemen um unlösbare Probleme? Ist eines der Probleme unbeschränkt?

(i)

$$\begin{array}{ll} \text{maximiere} & 3x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \\ \text{unter den Nebenbedingungen} & \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 2 \\ & -4x_1 - 4x_2 - 4x_3 - 4x_4 \leq -10 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

(ii)

$$\begin{array}{ll} \text{maximiere} & -x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \\ \text{unter den Nebenbedingungen} & \\ & x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 \leq -1 \\ & -2x_1 - 2x_2 + 5x_3 - x_4 \leq -3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

(i) ist <u>unlösbar</u> (engl. <u>infeasible</u>; auf Deutsch sagt man auch „unzulässig"): Nimmt man die 2. Ungleichung mit $-\frac{1}{4}$ mal, so erhält man $x_1+x_2+x_3+x_4 \geq 2.5$, was der 1. Ungleichung widerspricht. Es gibt also keine zulässigen Lösungen.

(ii) ist <u>unbeschränkt</u> (engl. <u>unbounded</u>): Wählt man $x_1=x_2=x_3=0$ und $x_4=t \geq 3$, so erhält man eine zulässige Lösung mit Zielfunktionswert $z=t$. Da t beliebig groß gewählt werden kann, folgt die Behauptung.

4. Lösen Sie das folgende LP-Problem mithilfe der grafischen Methode:

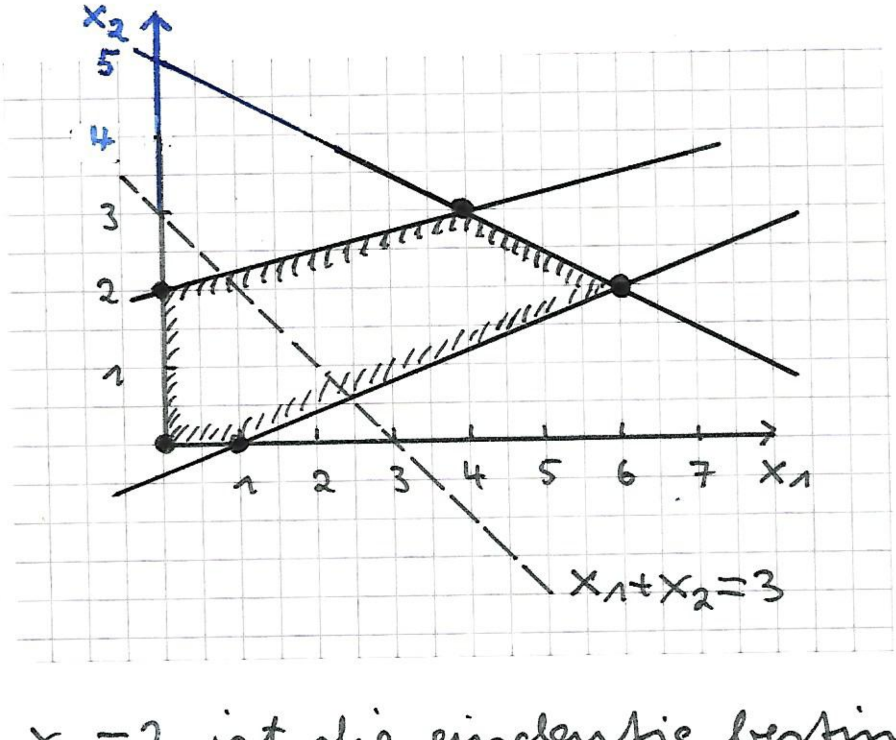
maximiere $x_1 + x_2$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} 2x_1 - 5x_2 &\le 2 \\ -x_1 + 4x_2 &\le 8 \\ x_1 + 2x_2 &\le 10 \\ x_1, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

Um die dazugehörige Zeichnung anzufertigen, kann es hilfreich sein, einige der Ungleichungen (oder möglicherweise sogar alle), so umzuformen, dass auf der linken Seite nur x_2 steht.[1] Man erhält

$$\begin{aligned} 2x_1 - 5x_2 \le 2 &\iff x_2 \ge \tfrac{2}{5}x_1 - \tfrac{2}{5} \\ -x_1 + 4x_2 \le 8 &\iff x_2 \le \tfrac{1}{4}x_1 + 2 \\ x_1 + 2x_2 \le 10 &\iff x_2 \le -\tfrac{1}{2}x_1 + 5. \end{aligned}$$



$x_1 = 6$, $x_2 = 2$ ist die eindeutig bestimmte optimale Lösung (mit Zielfunktionswert $z = 8$).

---

1) Das muss man nicht unbedingt so machen; da Teilnehmer gelegentlich die Frage „Wie soll ich an die Sache rangehen?" stellen, könnte dies jedoch ein nützlicher Hinweis sein.