Optimierung für Studierende der Informatik

Thomas Andreae

Wintersemester 2017/18
Blatt 3

A: Präsenzaufgaben am 6./7. November 2017

1. Bestimmen Sie für das LP-Problem ein zulässiges Starttableau bzw. stellen Sie fest, dass das Problem unlösbar ist. Erreichen Sie dies, indem Sie die 1. Phase des Zweiphasen-Simplexverfahrens durchführen.

$$\begin{array}{rrcl}
\text{maximiere} & 6x_1 + 11x_2 & & \\
\text{unter den Nebenbedingungen} & & & \\
& 4x_1 - x_2 & \leq & 2 \\
& -x_1 + x_2 & \leq & 8 \\
& -x_1 - x_2 & \leq & -3 \\
& x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

Das dazugehörige Hilfsproblem lautet, wenn man es als Maximierungsproblem schreibt:

maximiere $-x_0$
unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned}
4x_1 - x_2 - x_0 &\leq 2 \\
-x_1 + x_2 - x_0 &\leq 8 \\
-x_1 - x_2 - x_0 &\leq -3 \\
x_0, x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

Einführung von Schlupfvariablen führt zu folgendem <u>nicht zulässigen</u> Tableau:

$$\begin{array}{rcl}
x_3 &=& 2 - 4x_1 + x_2 + x_0 \\
x_4 &=& 8 + x_1 - x_2 + x_0 \\
x_5 &=& -3 + x_1 + x_2 + x_0 \\
\hline
w &=& \qquad\qquad\qquad -x_0
\end{array}$$

<u>Pivotierung, um ein zulässiges Tableau zu erhalten</u>:

Eingangsvariable: x_0
Ausgangsvariable: x_5
Es folgt

$$x_0 = 3 - x_1 - x_2 + x_5$$
$$x_3 = 2 - 4x_1 + x_2 + 3 - x_1 - x_2 + x_5$$
$$= 5 - 5x_1 + x_5$$
$$x_4 = 8 + x_1 - x_2 + 3 - x_1 - x_2 + x_5$$
$$= 11 - 2x_2 + x_5$$
$$w = -3 + x_1 + x_2 - x_5$$

Man erhält das folgende zulässige Tableau („Starttableau für das Hilfsproblem"):

$$\begin{array}{l}
x_0 = 3 - x_1 - x_2 + x_5 \\
x_3 = 5 - 5x_1 + x_5 \\
x_4 = 11 - 2x_2 + x_5 \\
\hline
w = -3 + x_1 + x_2 - x_5
\end{array}$$

<u>1. Iteration</u>

Eingangsvariable: x_2
Ausgangsvariable: x_0

[<u>Hinweis</u>: Eingangsvariable x_1, Ausgangsvariable x_3 wäre ebenfalls korrekt gewesen. Falsch: Eingangsvariable x_1, Ausgangsvariable x_0.]

Es folgt

$$x_2 = 3 - x_1 + x_5 - x_0$$
$$x_4 = 11 - 2(3 - x_1 + x_5 - x_0) + x_5 = 5 + 2x_1 - x_5 + 2x_0$$
$$w = -3 + x_1 + 3 - x_1 + x_5 - x_0 - x_5 = -x_0$$

Neues Tableau:

$$\begin{aligned} x_2 &= 3 - x_1 + x_5 - x_0 \\ x_3 &= 5 - 5x_1 + x_5 \\ x_4 &= 5 + 2x_1 - x_5 + 2x_0 \\ \hline w &= - x_0 \end{aligned}$$

Dieses Tableau ist ein optimales Tableau für das Hilfsproblem und es gilt $w = 0$ (und folglich auch $x_0 = 0$).

Die ersten drei Zeilen des gewünschten Starttableaus für unser ursprüngliches Problem lauten

$$\begin{aligned} x_2 &= 3 - x_1 + x_5 \\ x_3 &= 5 - 5x_1 + x_5 \\ x_4 &= 5 + 2x_1 - x_5 \end{aligned}$$

Berechnung der noch fehlenden z-Zeile:

$$z = 6x_1 + 11x_2 = 6x_1 + 11(3 - x_1 + x_5) = 33 - 5x_1 + 11x_5.$$

Insgesamt haben wir erhalten („Starttableau für das ursprüngliche Problem"):

$$\begin{aligned} x_2 &= 3 - x_1 + x_5 \\ x_3 &= 5 - 5x_1 + x_5 \\ x_4 &= 5 + 2x_1 - x_5 \\ \hline z &= 33 - 5x_1 + 11x_5 \end{aligned}$$

B: Hausaufgaben zum 13./14. November 2017

1. Bestimmen Sie für das LP-Problem ein zulässiges Starttableau bzw. stellen Sie fest, dass das Problem unlösbar ist. Erreichen Sie dies, indem Sie die 1. Phase des Zweiphasen-Simplexverfahrens durchführen.

   a)

$$\begin{aligned}
&\text{maximiere } -7x_1 + 10x_2\\
&\text{unter den Nebenbedingungen}\\
&\quad -x_1 - 2x_2 \le -12\\
&\quad x_1 - 4x_2 \le 7\\
&\quad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}$$

   b)

$$\begin{aligned}
&\text{maximiere } -13x_1 + 5x_2\\
&\text{unter den Nebenbedingungen}\\
&\quad x_1 - x_2 \le -1\\
&\quad 2x_1 + x_2 \le 2\\
&\quad -x_1 - x_2 \le -4\\
&\quad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}$$

a) <u>Hilfsproblem</u>:

maximiere $-x_0$

unter den Nebenbedingungen

$-x_1 - 2x_2 - x_0 \le -12$

$x_1 - 4x_2 - x_0 \le 7$

$x_0, x_1, x_2 \ge 0$

<u>Lösung des Hilfsproblems</u>:

$$\begin{array}{l}
x_3 = -12 + x_1 + 2x_2 + x_0\\
x_4 = 7 - x_1 + 4x_2 + x_0\\
\hline
w = \qquad\qquad\qquad -x_0
\end{array}$$

Eingangsvariable: x_0

Ausgangsvariable: x_3

Es folgt

$x_0 = 12 - x_1 - 2x_2 + x_3$

$x_4 = 7 - x_1 + 4x_2 + 12 - x_1 - 2x_2 + x_3$

$\quad = 19 - 2x_1 + 2x_2 + x_3$

Neues Tableau:

$$\begin{array}{l} x_0 = 12 - x_1 - 2x_2 + x_3 \\ x_4 = 19 - 2x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \hline w = -12 + x_1 + 2x_2 - x_3 \end{array}$$

<u>Nächste Iteration</u>

Eingangsvariable: x_2
Ausgangsvariable: x_0

Es folgt

$x_2 = 6 - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_0$

$x_4 = 19 - 2x_1 + 2(6 - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_0) + x_3$

$\quad = 31 - 3x_1 + 2x_3 - x_0$

Neues Tableau:

$$\begin{array}{l} x_2 = 6 - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_0 \\ x_4 = 31 - 3x_1 + 2x_3 - x_0 \\ \hline w = \qquad\qquad\qquad\qquad - x_0 \end{array}$$

Als Starttableau für das ursprüngliche Problem erhält man

$$\begin{array}{l} x_2 = 6 - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 \\ x_4 = 31 - 3x_1 + 2x_3 \\ \hline z = 60 - 12x_1 + 5x_3 \end{array}$$

Die z-Zeile hat sich wie folgt ergeben: $z = -7x_1 + 10x_2$
$= -7x_1 + 10(6 - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3) = 60 - 12x_1 + 5x_3$.

b) Das dazugehörige Hilfsproblem lautet, wenn man es als Maximierungsproblem schreibt:

maximiere $-x_0$
unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_0 &\leq -1 \\ 2x_1 + x_2 - x_0 &\leq 2 \\ -x_1 - x_2 - x_0 &\leq -4 \\ x_0, x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Einführung von Schlupfvariablen führt zu folgendem nicht zulässigen Tableau:

$$\begin{aligned} x_3 &= -1 - x_1 + x_2 + x_0 \\ x_4 &= 2 - 2x_1 - x_2 + x_0 \\ x_5 &= -4 + x_1 + x_2 + x_0 \\ \hline w &= -x_0 \end{aligned}$$

Pivotierung, um ein zulässiges Tableau zu erhalten:

Eingangvariable: x_0
Ausgangvariable: x_5
es folgt

$$x_0 = 4 - x_1 - x_2 + x_5$$

$$x_3 = -1 - x_1 + x_2 + 4 - x_1 - x_2 + x_5 = 3 - 2x_1 + x_5$$

$$x_4 = 2 - 2x_1 - x_2 + 4 - x_1 - x_2 + x_5 = 6 - 3x_1 - 2x_2 + x_5$$

$$w = -4 + x_1 + x_2 - x_5$$

Neues Tableau („Starttableau für das Hilfsproblem"):

$$x_0 = 4 - x_1 - x_2 + x_5$$
$$x_3 = 3 - 2x_1 \qquad + x_5$$
$$x_4 = 6 - 3x_1 - 2x_2 + x_5$$

$$w = -4 + x_1 + x_2 - x_5$$

1. Iteration

Eingangsvariable: x_2

Ausgangsvariable: x_4

Hinweis: Eingangsvariable x_1 und Ausgangsvariable x_3 wäre ebenfalls möglich gewesen.

es folgt

$$x_2 = 3 - \frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_5 - \frac{1}{2}x_4$$
$$x_0 = 4 - x_1 - \left(3 - \frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_5 - \frac{1}{2}x_4\right) + x_5$$
$$= 1 + \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_5 + \frac{1}{2}x_4$$
$$w = -1 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_5 - \frac{1}{2}x_4$$

Neues Tableau

$$x_2 = 3 - \frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_5 - \frac{1}{2}x_4$$
$$x_0 = 1 + \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_5 + \frac{1}{2}x_4$$
$$x_3 = 3 - 2x_1 + x_5$$

$$w = -1 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_5 - \frac{1}{2}x_4$$

Dieses Tableau ist optimal mit $w = -1$.

Da wir eine optimale Lösung des Hilfsproblems mit $w < 0$ erhalten haben, ist das Problem aus 1b) unlösbar.

2. a) Schreiben Sie das Klee-Minty Problem für $n = 2$ auf.

b) Stellen Sie die Menge der zulässigen Lösungen dieses Problems durch eine Skizze dar, wobei Sie den Maßstab wie folgt wählen:

$$1 \text{ Einheit auf der } x_1\text{-Achse} \mathrel{\widehat{=}} 1\text{cm}$$
$$10 \text{ Einheiten auf der } x_2\text{-Achse} \mathrel{\widehat{=}} 1\text{cm}.$$

c) Lösen Sie das Problem mit dem Simplexverfahren auf zwei verschiedene Arten und stellen Sie für beide Arten fest, wie viele Iterationen benötigt werden.

(i) Benutzen Sie die Regel vom größten Koeffizienten.

(ii) Wählen Sie in der 1. Iteration x_2 als Eingangsvariable.

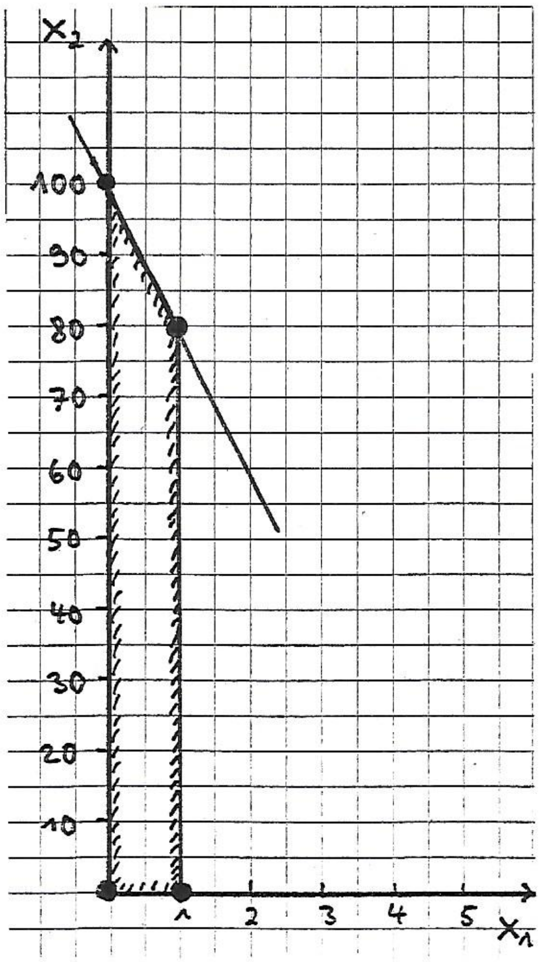
a)

maximiere $10x_1 + x_2$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 1 \\ 20x_1 + x_2 &\leq 100 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

b)



Der zulässige Bereich ist also ein extrem deformiertes Quadrat.

Mitteilung (ohne Nachweis oder weitere Erläuterung):

Im Fall $n=3$ ist der zulässige Bereich ein extrem deformierter Würfel.

c) <u>Starttableau</u>

$$x_3 = 1 - x_1$$
$$x_4 = 100 - 20x_1 - x_2$$
$$\overline{\quad z = 10x_1 + x_2 \quad}$$

(i) <u>1. Iteration</u>

Eingangsvariable: x_1

Ausgangsvariable: x_3

Es folgt $x_1 = 1 - x_3$

$$x_4 = 100 - 20(1 - x_3) - x_2 = 80 - x_2 + 20x_3$$

$$z = 10(1 - x_3) + x_2 = 10 + x_2 - 10x_3$$

Neues Tableau

$$x_1 = 1 - x_3$$
$$x_4 = 80 - x_2 + 20x_3$$
$$\overline{\quad z = 10 + x_2 - 10x_3 \quad}$$

<u>2. Iteration</u>

Eingangsvariable: x_2

Ausgangsvariable: x_4

Es folgt

$$x_2 = 80 + 20x_3 - x_4$$

$$z = 10 + 80 + 20x_3 - x_4 - 10x_3$$

$$= 90 + 10x_3 - x_4$$

Neues Tableau:

$$x_2 = 80 + 20x_3 - x_4$$
$$x_1 = 1 \quad - x_3$$
$$\overline{z = 90 + 10x_3 - x_4}$$

3. Iteration

Eingangsvariable: x_3
Ausgangsvariable: x_1
Es folgt
$$x_3 = 1 - x_1$$
$$x_2 = 80 + 20(1-x_1) - x_4$$
$$= 100 - x_4 - 20x_1$$
$$z = 90 + 10(1-x_1) - x_4$$
$$= 100 - x_4 - 10x_1$$

Neues Tableau:

$$x_3 = 1 \quad - x_1$$
$$x_2 = 100 - x_4 - 20x_1$$
$$\overline{z = 100 - x_4 - 10x_1}$$

Dieses Tableau ist optimal; optimale Lösung ist $x_1 = 0$, $x_2 = 100$ mit $z = 100$.

(ii) <u>1. Iteration</u>

Eingangsvariable: x_2

Ausgangsvariable: x_4

Es folgt

$$x_2 = 100 - 20x_1 - x_4$$

$$z = 10x_1 + 100 - 20x_1 - x_4$$

$$= 100 - 10x_1 - x_4$$

Neues Tableau:

$$\begin{array}{l}
x_2 = 100 - 20x_1 - x_4 \\
x_3 = 1 - x_1 \\
\hline
z = 100 - 10x_1 - x_4
\end{array}$$

Diesmal sind wir also schon mit einem Schritt beim optimalen Tableau.