L.25

Optimierung für Studierende der Informatik

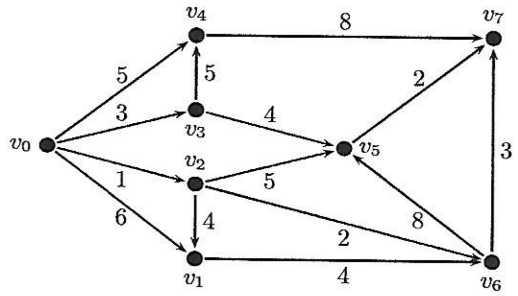
Thomas Andreae

Wintersemester 2017/18

Blatt 4

B: Hausaufgaben zum 20./21. November 2017

1. a) Im nachfolgenden Flussnetzwerk bezeichne v_0 die Quelle, v_7 die Senke und die Zahlen an den Kanten bezeichnen die Kapazitäten.



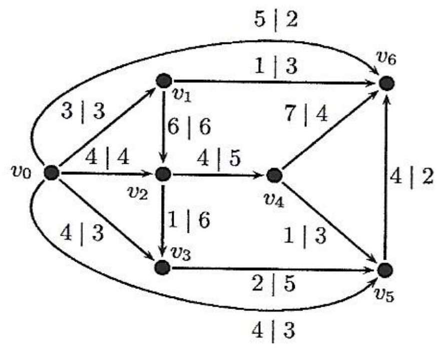
Formulieren Sie für dieses Netzwerk die Aufgabe, einen Fluss maximaler Stärke zu finden, als ein lineares Programmierungsproblem.

maximiere $x_{01}+x_{02}+x_{03}+x_{04}$
unter den Nebenbedingungen

$$x_{01}+x_{21}-x_{16}=0$$
$$x_{02}-x_{21}-x_{25}-x_{26}=0$$
$$x_{03}-x_{34}-x_{35}=0$$
$$x_{04}+x_{34}-x_{47}=0$$
$$x_{25}+x_{35}+x_{65}-x_{57}=0$$
$$x_{16}+x_{26}-x_{65}-x_{67}=0$$
$$0\leq x_{01}\leq 6$$
$$0\leq x_{02}\leq 1$$
$$0\leq x_{03}\leq 3$$
$$0\leq x_{04}\leq 5$$
$$0\leq x_{16}\leq 4$$
$$0\leq x_{21}\leq 4$$
$$0\leq x_{25}\leq 5$$
$$0\leq x_{26}\leq 2$$
$$0\leq x_{34}\leq 5$$
$$0\leq x_{35}\leq 4$$
$$0\leq x_{47}\leq 8$$
$$0\leq x_{57}\leq 2$$
$$0\leq x_{65}\leq 8$$
$$0\leq x_{67}\leq 3$$

L.27

b) Für das folgende Netzwerk mit Quelle v_0 und Senke v_6 seien neben den Kapazitäten auch noch Kosten gegeben; die linke Zahl bezeichne die Kapazität, die rechte die Kosten einer Kante:



Gefragt ist nach einem kostenminimalen Fluss der Stärke 6. Formulieren Sie diese Aufgabenstellung als LP-Problem.

minimiere

$$3x_{01}+4x_{02}+3x_{03}+3x_{05}+2x_{06}+6x_{12}+3x_{16}+6x_{23}+5x_{24}+5x_{35}+3x_{45}+4x_{46}+2x_{56}$$

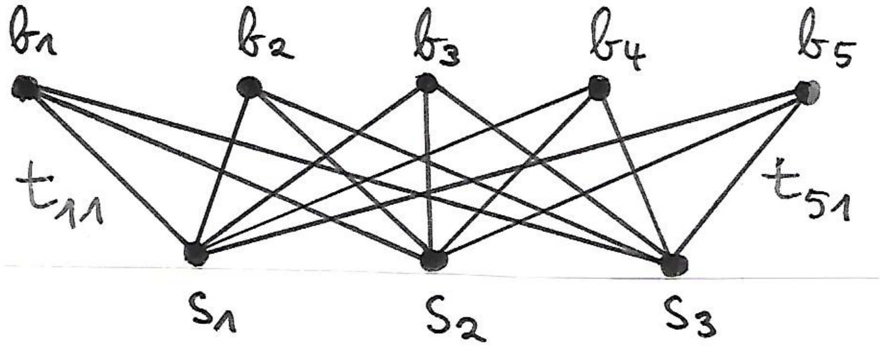
unter den Nebenbedingungen

$$x_{01}+x_{02}+x_{03}+x_{05}+x_{06} = 6$$
$$x_{01}-x_{12}-x_{16} = 0$$
$$x_{02}+x_{12}-x_{23}-x_{24} = 0$$
$$x_{03}+x_{23}-x_{35} = 0$$
$$x_{24}-x_{45}-x_{46} = 0$$
$$x_{05}+x_{35}+x_{45}-x_{56} = 0$$

$$0 \leq x_{01} \leq 3$$
$$0 \leq x_{02} \leq 4$$
$$0 \leq x_{03} \leq 4$$
$$0 \leq x_{05} \leq 4$$
$$0 \leq x_{06} \leq 5$$
$$0 \leq x_{12} \leq 6$$
$$0 \leq x_{16} \leq 1$$
$$0 \leq x_{23} \leq 1$$
$$0 \leq x_{24} \leq 4$$
$$0 \leq x_{35} \leq 2$$
$$0 \leq x_{45} \leq 1$$
$$0 \leq x_{46} \leq 7$$
$$0 \leq x_{56} \leq 4$$

2. a) Ein Personalchef habe für 3 offene Stellen 5 Bewerber, wobei aufgrund eines Eignungstests bekannt sei, welche Einarbeitungszeit t_{ij} der Bewerber i für die Stelle j benötigt ($i = 1, \ldots, 5$ und $j = 1, 2, 3$). Es sollen alle drei Stellen besetzt werden – zwei Bewerber gehen leer aus. Die Einstellung soll so erfolgen, dass die Summe der Einarbeitungszeiten minimal ist. Formulieren Sie diese Aufgabe als ein binäres LP-Problem und veranschaulichen Sie die Fragestellung mithilfe eines bipartiten Graphen.

a) Zunächst wollen wir uns die Fragestellung mit Hilfe eines bipartiten Graphen veranschaulichen:



An jede Kante sei die entsprechende Einarbeitungszeit t_{ij} geschrieben; aus Platzgründen wurde dies oben nur für t_{11} und t_{51} ausgeführt. Zu jeder Kante führen wir eine reelle Variable x_{ij} ein, die als Werte nur 0 oder 1 annehmen kann ($x_{ij} \in \{0,1\}$)[1].

Interpretation: $x_{ij} = 0$ bedeutet, dass Bewerber b_i nicht für die Stelle s_j genommen wird; $x_{ij} = 1$ bedeutet, dass b_i die Stelle s_j bekommt.

Hier nun die Formulierung als 0,1-Problem:

1) Mit 0 und 1 sind natürlich die reellen Zahlen 0 und 1 gemeint, keine Binärzahlen. (Es geht um $\mathbb{R}$, nicht um $\mathbb{Z}_2$!)

minimiere $\sum_{i=1}^{5} \sum_{j=1}^{3} t_{ij} x_{ij}$

unter den Nebenbedingungen

$$\sum_{j=1}^{3} x_{ij} \leq 1 \quad (i=1,2,3,4,5)$$

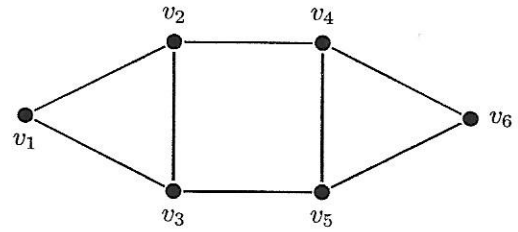
$$\sum_{i=1}^{5} x_{ij} = 1 \quad (j=1,2,3)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad (1 \leq i \leq 5 \quad 1 \leq j \leq 3).$$

b) Es sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit Knotenmenge $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und Kantenmenge $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$. Eine Teilmenge U der Knotenmenge heißt *unabhängig*, falls keine zwei Knoten von U durch eine Kante verbunden sind. Ein bekanntes, in der Informatik häufig betrachtetes Optimierungsproblem:

Finde in G eine unabhängige Menge U, die möglichst viele Knoten enthält. $(\star)$

Formulieren Sie das Problem $(\star)$ für den unten abgebildeten Graphen G als ein binäres LP-Problem.



Hinweis: Für jeden Knoten v_i ist eine Variable x_i zu betrachten und für jede Kante ist eine Nebenbedingung zu formulieren.

b) maximiere $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$
unter den Nebenbedingungen

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 &\leq 1 \\
x_1 + x_3 &\leq 1 \\
x_2 + x_3 &\leq 1 \\
x_2 + x_4 &\leq 1 \\
x_3 + x_5 &\leq 1 \\
x_4 + x_5 &\leq 1 \\
x_4 + x_6 &\leq 1 \\
x_5 + x_6 &\leq 1
\end{aligned}
$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in \{0, 1\}$$

c) Formulieren Sie das binäre Problem aus b) in ein Ganzzahliges Lineares Programmierungsproblem (ILP-Problem) um. Wie lautet die LP-Relaxation dieses Problems?

<u>ILP-Problem</u>: wie b), aber statt $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in \{0,1\}$ wird die äquivalente Formulierung

$$0 \leq x_i \leq 1, \; x_i \in \mathbb{Z} \; (i = 1, \ldots, 6) \qquad (*)$$

gewählt.

<u>LP-Relaxation</u>: wie das ILP-Problem, aber die Bedingungen $x_i \in \mathbb{Z}$ werden weggelassen.