Optimierung für Studierende der Informatik

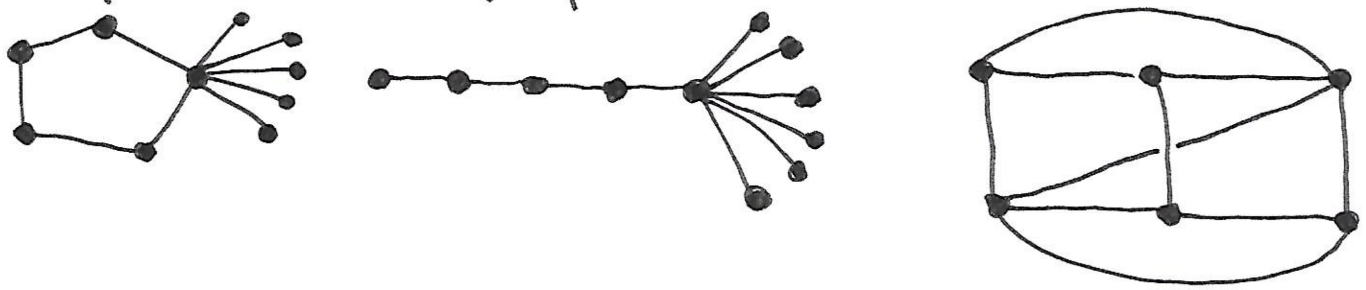
Thomas Andreae

Wintersemester 2017/18
Blatt 9

A: Präsenzaufgaben am 18./19. Dezember 2017

1. Geben Sie einen zusammenhängenden Graphen G mit 10 Kanten an, für den $m(G) = 3$ gilt.

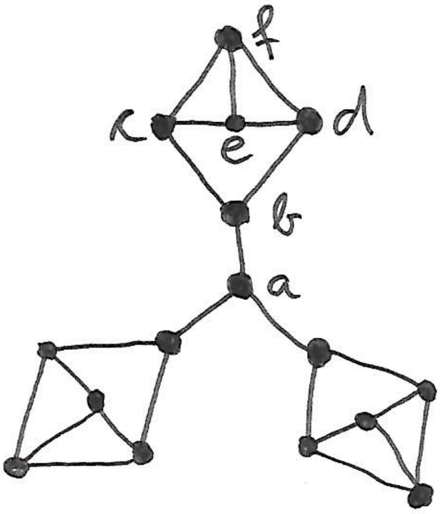
Beispiele solcher Graphen:



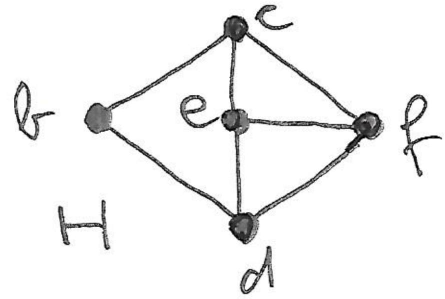
2. Für den Graphen auf Seite 143 des Skripts: Besitzt dieser Graph ein perfektes Matching? Falls ja, so gebe man ein solches an; falls nein, so begründe man, wieso kein perfektes Matching existiert.

G hat kein perfektes Matching.

Begründung: Angenommen G hätte ein perfektes Matching M. Da an a nur eine Matchingkante stößt, kann $\{a, b\} \notin M$ angenommen werden (Bezeichnungen wie in der Skizze).



Wir betrachten den Teilgraphen H von G, der von der Knotenmenge $B = \{b, c, d, e, f\}$ aufgespannt wird:



Wegen $\{a, b\} \notin M$ gilt: Jede Kante aus M, die einen Knoten von H trifft muss ganz in H liegen. Da $|B| = 5$ gilt, können aber höchstens zwei Kanten aus M ganz in H liegen. Es folgt, dass es einen Knoten aus H gibt, der von keiner Kante aus M getroffen wird. Dies widerspricht der Annahme, dass M ein perfektes Matching ist. □

3. a) Wie ist die Knotenüberdeckungszahl $c(G)$ eines Graphen G definiert?
b) Begründen Sie (kurz), weshalb $m(G) \leq c(G)$ für jeden Graphen G gilt.
c) Geben Sie einen Graphen G an, für den $m(G) < c(G)$ gilt.
d) Kann die Differenz $c(G) - m(G)$ beliebig groß werden?

a) b) c): siehe Skript S. 150

d) Es sei n eine gerade Zahl und G sei der vollständige Graph mit n Knoten, d.h., jeder Knoten von G ist mit jedem anderen Knoten benachbart. Dann gilt $c(G) = n-1$ und $m(G) = \frac{n}{2}$.

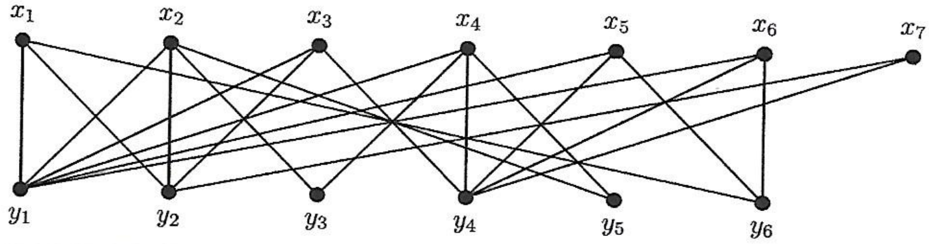
4. Wahr oder falsch: Jeder Baum ist ein bipartiter Graph.

Dies ist wahr. Für einen Baum $T=(V,E)$ erhält man eine entsprechende Knotenpartition X, Y, indem man einen Knoten s als Wurzel wählt. In X werden alle Knoten gepackt, die einen geraden Abstand von s haben, und in Y kommt der Rest, d.h. alle Knoten mit ungeradem Abstand von s.

B: Hausaufgaben zum 8./9. Januar 2018

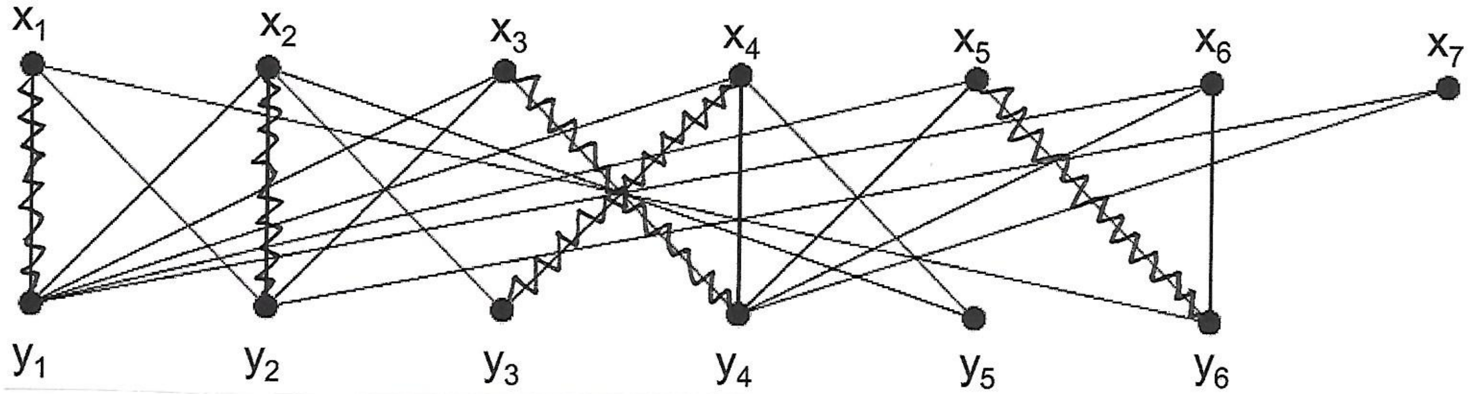
1. Bestimmen Sie für den unten angegebenen Graph ein Matching mit maximaler Kantenzahl sowie eine minimale Knotenüberdeckung. Verwenden Sie hierzu den Algorithmus von Edmonds und Karp, wobei die folgende Regel zu beachten ist: Gibt es mehrere Kandidaten für den nächsten zu markierenden Knoten, so sind Knoten mit kleinerem Index vorzuziehen.

   Hinweis: Gehen Sie vor wie in Abschnitt 11.5.



Im 1. Durchlauf der repeat-Schleife wählt der Algorithmus die Kante $\{x_1, y_1\}$ als Matchingkante aus, im 2.–5. Durchlauf kommen dann – in der angegebenen Reihenfolge – die Kanten $\{x_2, y_2\}$, $\{x_3, y_4\}$, $\{x_4, y_3\}$ und $\{x_5, y_6\}$ hinzu. Nach dem 5. Durchlauf der repeat-Schleife gilt für das aktuelle Matching M demnach (siehe Zeichnung)

$$M = \{\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}, \{x_3, y_4\}, \{x_4, y_3\}, \{x_5, y_6\}\}.$$



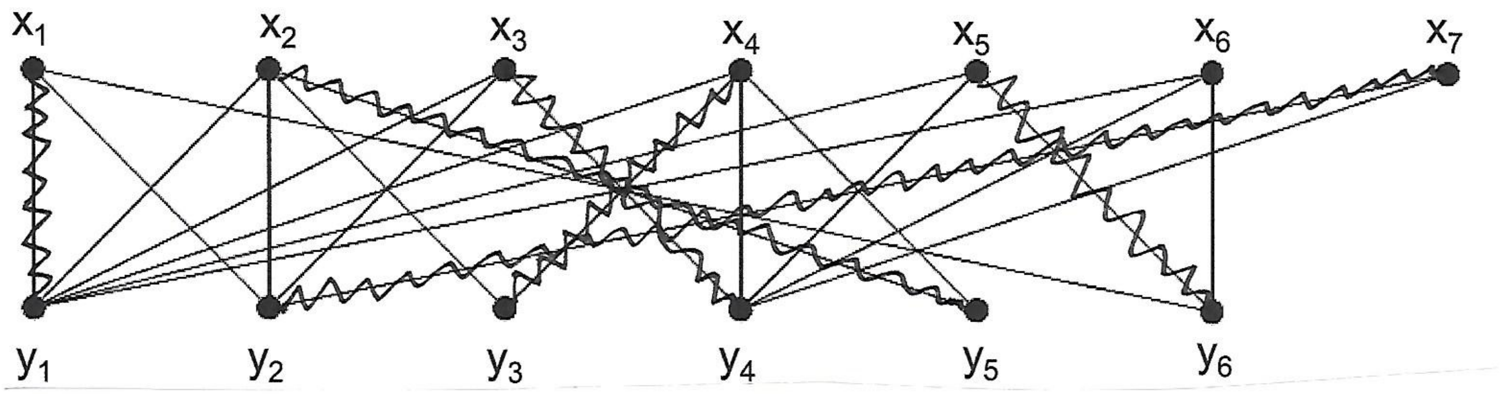
Im 6. Durchlauf der repeat-Schleife findet der Algorithmus den augmentierenden Pfad

$$(x_7, y_2, x_2, y_5)$$

und ändert das aktuelle Matching entsprechend:

$\{x_7, y_2\}$ und $\{x_2, y_5\}$ werden in M aufgenommen, $\{x_2, y_2\}$ verlässt M. Nach dem 6. Durchlauf der repeat-Schleife lautet das aktuelle Matching demnach (siehe Zeichnung)

$$M = \{\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_5\}, \{x_3, y_4\}, \{x_4, y_3\}, \{x_5, y_6\}, \{x_7, y_2\}\}$$

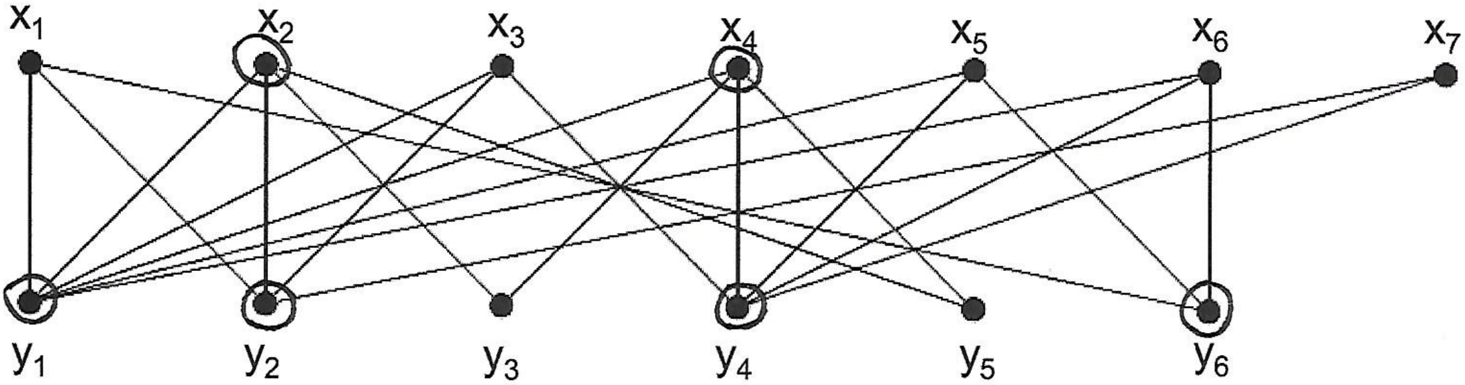


Im 7. Durchlauf der repeat-Schleife versucht der Algorithmus, einen augmentierenden Pfad zu finden, der in x_6 startet – was nicht gelingt. Dabei werden die folgenden Knoten (in der angegebenen Reihenfolge) mit alternierenden Pfaden erreicht und markiert $x_6, y_1, y_4, y_6, x_1, x_3, x_5, y_2, x_7$.

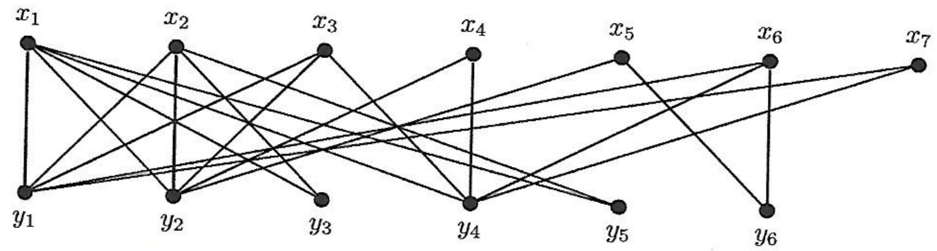
<u>Ergebnis</u>: Der Algorithmus liefert das obige Matching M mit 6 Kanten zusammen mit der minimalen Knotenüberdeckung

$$U = \{x_2, x_4, y_1, y_2, y_4, y_6\}.$$

(Auf welche Art sich U ergibt, ist in Abschnitt 11.4 beschrieben.) Darstellung von U:

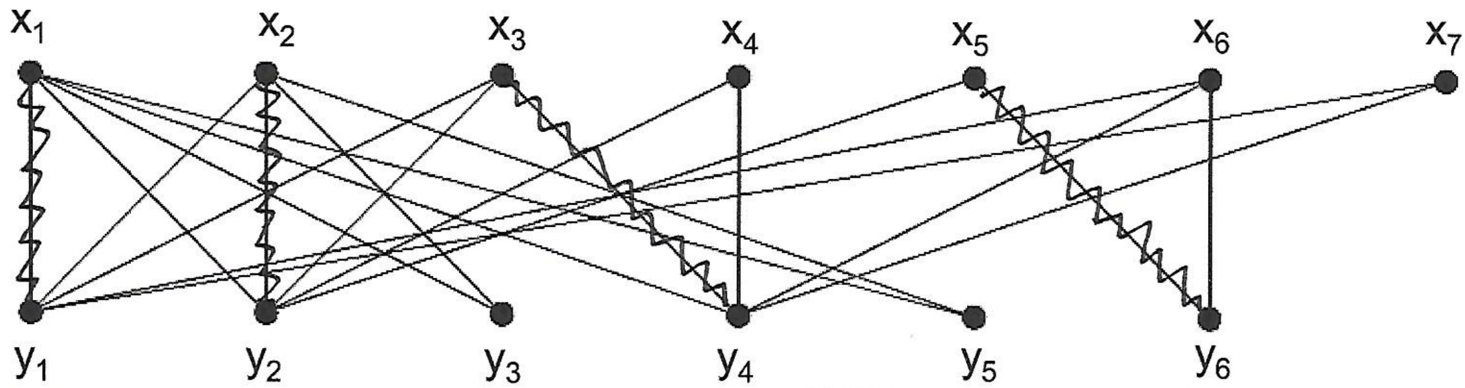

x_1
x_2
x_3
x_4
x_5
x_6
x_7
y_1
y_2
y_3
y_4
y_5
y_6

2. Wie Aufgabe 1 für den folgenden Graph:



Wie in Aufgabe 1 ist der Algorithmus von Edmonds und Karp anzuwenden unter Beachtung der in Aufgabe 1 angegebenen Regel. Dies führt nach 4 Durchläufen der repeat-Schleife zum folgenden Matching M (siehe Zeichnung):

$$M = \{\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}, \{x_3, y_4\}, \{x_5, y_6\}\}.$$



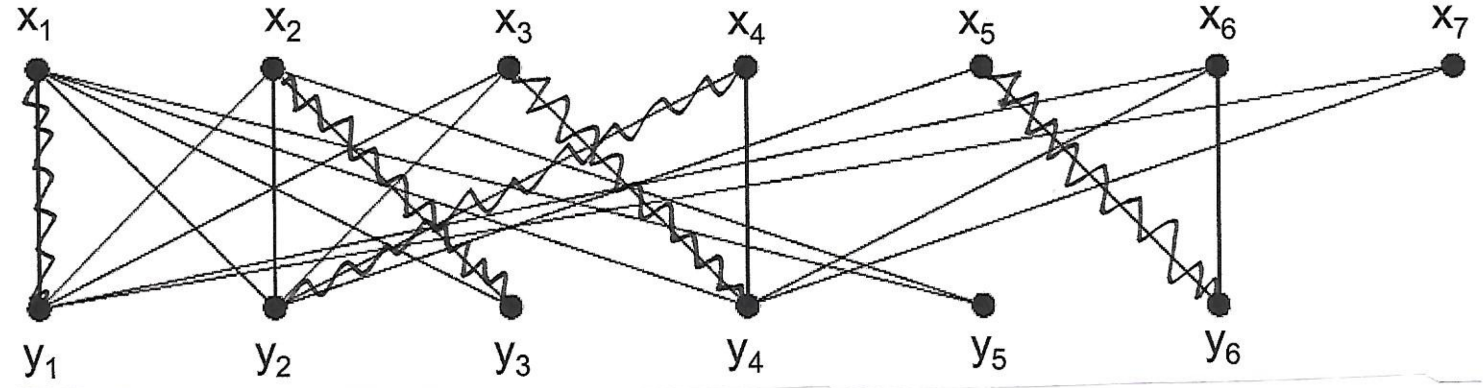
Im 5. Durchlauf der repeat-Schleife findet der Algorithmus den augmentierenden Pfad

$$(x_4, y_2, x_2, y_3).$$

Als neues aktuelles Matching ergibt sich

$$M = \{\{x_1 y_1\}, \{x_2, y_3\}, \{x_3, y_4\}, \{x_4, y_2\}, \{x_5, y_6\}\}.$$

Dazugehörige Zeichnung:

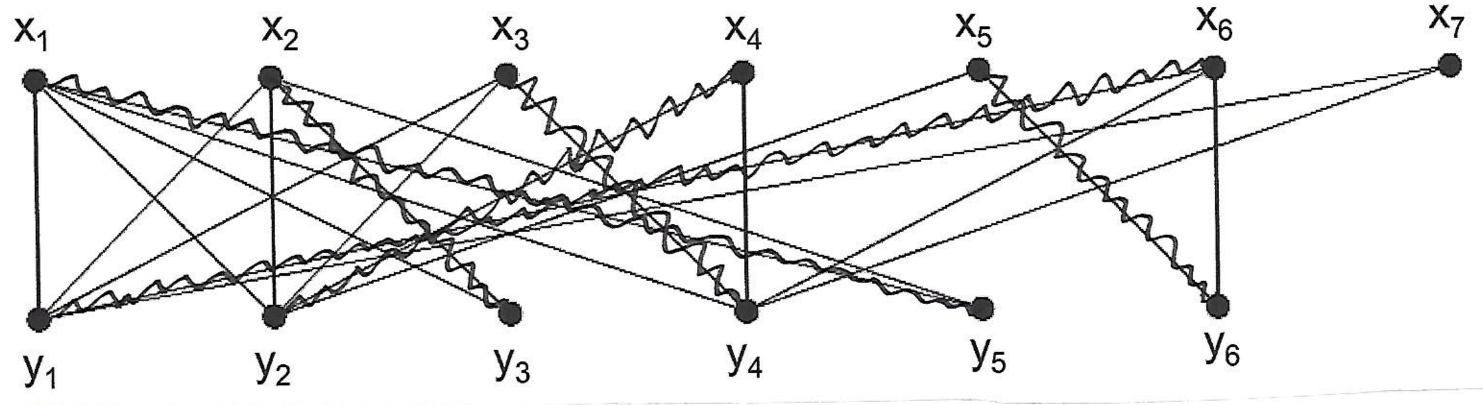


Im 6. Durchlauf der repeat-Schleife wird der folgende augmentierende Pfad gefunden:

$$(x_6, y_1, x_1, y_5).$$

Als neues aktuelles Matching M erhält man (siehe auch nachfolgende Zeichnung):

$$M = \{\{x_1, y_5\}, \{x_2, y_3\}, \{x_3, y_4\}, \{x_4, y_2\}, \{x_5, y_6\}, \{x_6, y_1\}\}.$$



Im 7. Durchlauf werden mittels alternierender Pfade, die in x_7 starten, die folgenden Knoten erreicht (in der angegebenen Reihenfolge):

$$x_7, y_1, y_4, x_6, x_3, y_6, y_2, x_5, x_4.$$

Es folgt, dass der Algorithmus neben dem obigen Matching mit 6 Kanten die folgende minimale Knotenüberdeckung ermittelt (siehe Zeichnung):

$$U = \{x_1, x_2, y_1, y_2, y_4, y_6\}.$$