

# Optimierung für Studierende der Informatik

Wintersemester 2019/20  
Blatt 1

## A: Präsenzaufgaben am 16./17. Oktober 2017

1. Bei welchen der folgenden LP-Probleme handelt es sich nicht um ein Problem in Standardform?

(i)

$$\begin{aligned} &\text{maximiere } 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 \\ &\text{unter den Nebenbedingungen} \\ &\quad 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 8 \\ &\quad 6x_1 + x_2 - 6x_3 = 5 \\ &\quad x_1 + 8x_2 + 8x_3 \leq 21 \\ &\quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} &\text{minimiere } 3x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 \\ &\text{unter den Nebenbedingungen} \\ &\quad 9x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 5x_4 \leq 7 \\ &\quad 8x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 3x_4 \leq 2 \\ &\quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} &\text{maximiere } 8x_1 - 3x_2 - 4x_3 \\ &\text{unter den Nebenbedingungen} \\ &\quad 3x_1 + x_2 + x_3 \leq 5 \\ &\quad 9x_1 + 5x_2 \leq -2 \\ &\quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

2. Für diejenigen LP-Probleme aus Aufgabe 1, die nicht in Standardform vorliegen: Überführen Sie diese Probleme in Standardform.
3. Handelt es sich bei den folgenden LP-Problemen um unlösbare Probleme? Ist eines der Probleme unbeschränkt?

(i)

$$\begin{aligned} &\text{maximiere } 3x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \\ &\text{unter den Nebenbedingungen} \\ &\quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 2 \\ &\quad -4x_1 - 4x_2 - 4x_3 - 4x_4 \leq -10 \\ &\quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} &\text{maximiere } -x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \\ &\text{unter den Nebenbedingungen} \\ &\quad x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 \leq -1 \\ &\quad -2x_1 - 2x_2 + 5x_3 - x_4 \leq -3 \\ &\quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

4. Lösen Sie das folgende LP-Problem mithilfe der grafischen Methode:

$$\begin{aligned}
 &\text{maximiere} && x_1 + x_2 \\
 &\text{unter den Nebenbedingungen} \\
 &&& 2x_1 - 5x_2 \leq 2 \\
 &&& -x_1 + 4x_2 \leq 8 \\
 &&& x_1 + 2x_2 \leq 10 \\
 &&& x_1, x_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

**B: Hausaufgaben zum 30. Oktober 2017**

1. a) Überführen Sie die folgenden Probleme in Standardform:

(i)

$$\begin{aligned}
 &\text{minimiere} && -12x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 \\
 &\text{unter den Nebenbedingungen} \\
 &&& -3x_1 - x_2 + x_3 \leq 11 \\
 &&& -5x_2 + x_3 + x_4 \geq 5 \\
 &&& -x_1 + 7x_2 - 2x_3 + x_4 = -6 \\
 &&& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
 \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
 &\text{maximiere} && -12x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \\
 &\text{unter den Nebenbedingungen} \\
 &&& 3x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 2 \\
 &&& -5x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 \leq 3 \\
 &&& x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 5 \\
 &&& x_4 \leq 7 \\
 &&& x_2, x_3, x_4 \geq 0
 \end{aligned}$$

b) Lösen Sie das folgende Problem mit der grafischen Methode:

$$\begin{aligned}
 &\text{maximiere} && x_1 + 3x_2 \\
 &\text{unter den Nebenbedingungen} \\
 &&& x_1 + x_2 \leq 7 \\
 &&& -2x_1 + 5x_2 \leq 9 \\
 &&& 2x_1 - 2x_2 \leq 5 \\
 &&& x_1, x_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

2. a) Die folgende Aufgabe stammt aus einem bekannten Lehrbuch mit dem Titel „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“.

Ein Kantinenleiter hat folgendes Problem: Ein Erwachsener soll täglich mindestens 90g Fett, 80g Protein und 300g Kohlenhydrate aufnehmen. Nehmen Sie an, dass diese Forderungen erfüllt werden sollen und die folgenden Informationen beachtet werden sollen. Welche Waren sollten gekauft werden und wie viel sollte von jedem Gut gekauft werden, wenn die billigste Möglichkeit realisiert werden soll? Die Anzahl Gramm an Proteinen, Fett und Kohlenhydraten in 100g einer Reihe von Nahrungsmitteln ist in folgender Tabelle gegeben:

	Protein	Fett	Kohlenhydrate
Hähnchen	27	6	0
Fisch	40	9	0
Backpflaumen	4	3	37
Weißbrot	6	3	58
Käse	25	43	0
Schwarzbrot	10	13	63
Nüsse	9	50	4
Margarine	0	89	0

Es soll eine Höchstgrenze von 70g Brot pro Tag und pro Person berücksichtigt werden und jede Person soll mindestens doppelt soviel Schwarz- wie Weißbrot verzehren.

Die Preise in Öre pro 100g werden für die verschiedenen Lebensmittel wie folgt angenommen:

H	F	B	W	K	S	N	M
100	100	110	59	119	90	98	65

Formulieren Sie die Aufgabe, vor der der Kantinenleiter steht, als LP-Problem.

- b) [Die Idee zu dieser Aufgabe stammt aus einem bekannten Lehrbuch mit dem Titel *Algorithms*.]

Ein *Salat* ist eine beliebige Kombination der folgenden Zutaten:

- (1) Tomaten,
- (2) Möhren,
- (3) Kopfsalat,
- (4) Spinat,
- (5) Öl.

Jeder Salat muss enthalten:

- (A) mindestens 7 Gramm Kohlenhydrate,
- (B) mindestens 4 und höchstens 7 Gramm Fett,
- (C) mindestens 25 Gramm Proteine,
- (D) höchstens 90 Milligramm Kochsalz.

Außerdem soll gelten:

- (E) Der Gewichtsanteil an Kopfsalat darf nicht höher als 15% sein.
- (F) Der Gewichtsanteil an Tomaten darf nicht kleiner sein als der Gewichtsanteil an Möhren.

Es liege die folgende Nährwerttabelle zugrunde (Angaben pro 100g):

	Energie (kcal)	Proteine (g)	Fett (g)	Kohlenhydrate (g)	Kochsalz (mg)
Tomaten	29	0.58	0.39	5.46	7.00
Möhren	346	8.33	1.58	80.70	508.20
Kopfsalat	14	1.62	0.20	2.36	8.00
Spinat	400	12.78	1.39	74.69	7.00
Öl	999	0.00	100.0	0.00	0.00

Die Aufgabe ist es, einen Salat zusammenzustellen, der die genannten Bedingungen erfüllt und so wenig Kalorien wie möglich enthält. Formulieren Sie dieses Problem als LP-Problem.

3. a) Überführen Sie Pauls Diätproblem und das im Skript aufgeführte Problem (1.2) in Standardform.
- b) Ein Eiscremehersteller produziert pro Tag 480 Einheiten von Eissorte *A*, 400 Einheiten von Sorte *B* und 230 Einheiten von Sorte *C*. Jede dieser Eissorten kann in einem arbeitsaufwändigen Prozess verfeinert werden, wodurch Luxusvarianten entstehen. Pro Tag können in der regulären Arbeitszeit bis zu 420 Einheiten veredelt werden; darüber hinaus ist es möglich, mithilfe von Überstunden weitere 250 Einheiten zu veredeln – allerdings zu erhöhten Kosten. Die Gewinne pro Einheit sind wie folgt:

	einfach	in regulärer Arbeitszeit veredelt	im Rahmen von Überstunden veredelt
Sorte <i>A</i>	8 €	14 €	11 €
Sorte <i>B</i>	4 €	12 €	7 €
Sorte <i>C</i>	4 €	13 €	9 €

Beispielsweise führt der folgende Produktionsplan zu einem Gewinn von 9965 €:

	einfach	in regulärer Arbeitszeit veredelt	im Rahmen von Überstunden veredelt
Sorte <i>A</i>	165	280	35
Sorte <i>B</i>	295	70	35
Sorte <i>C</i>	55	70	105

Das Ziel ist, einen Produktionsplan zu finden, der den Gewinn maximiert. Formulieren Sie dieses Problem als LP-Problem in Standardform, wobei Sie mit 6 Variablen  $x_1, \dots, x_6$  auskommen sollen.