

Optimierung für Studierende der Informatik

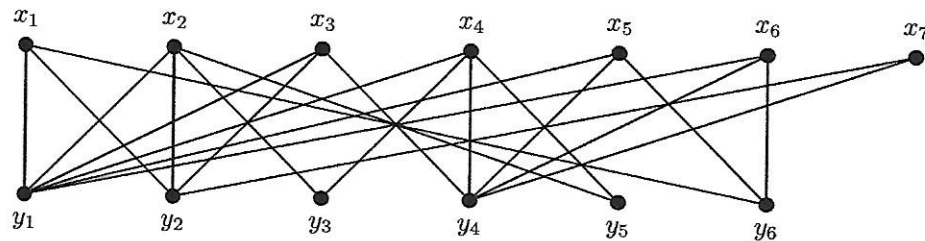
Thomas Andreae

Wintersemester 2017/18
Blatt 9

B: Hausaufgaben zum 8./9. Januar 2018

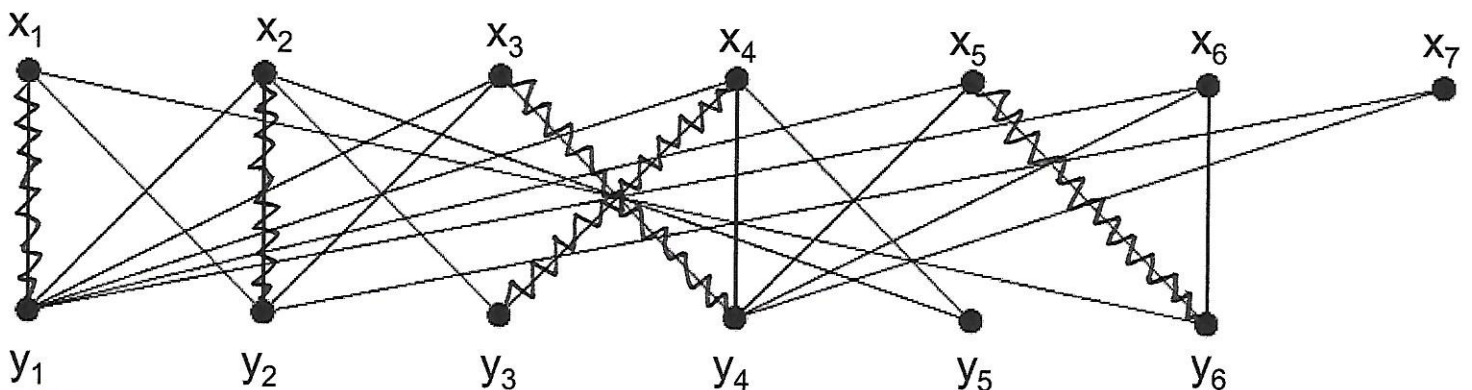
- Bestimmen Sie für den unten angegebenen Graph ein Matching mit maximaler Kantenanzahl sowie eine minimale Knotenüberdeckung. Verwenden Sie hierzu den Algorithmus von Edmonds und Karp, wobei die folgende Regel zu beachten ist: Gibt es mehrere Kandidaten für den nächsten zu markierenden Knoten, so sind Knoten mit kleinerem Index vorzuziehen.

Hinweis: Gehen Sie vor wie in Abschnitt 11.5.



Im 1. Durchlauf der repeat-Schleife wählt der Algorithmus die Kante $\{x_1, y_1\}$ als Matchingkante aus; im 2.-5. Durchlauf kommen dann – in der angegebenen Reihenfolge – die Kanten $\{x_2, y_2\}$, $\{x_3, y_4\}$, $\{x_4, y_3\}$ und $\{x_5, y_6\}$ hinzu. Nach dem 5. Durchlauf der repeat-Schleife gilt für das aktuelle Matching M demnach (siehe Zeichnung)

$$M = \{ \{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}, \{x_3, y_4\}, \{x_4, y_3\}, \{x_5, y_6\} \}.$$



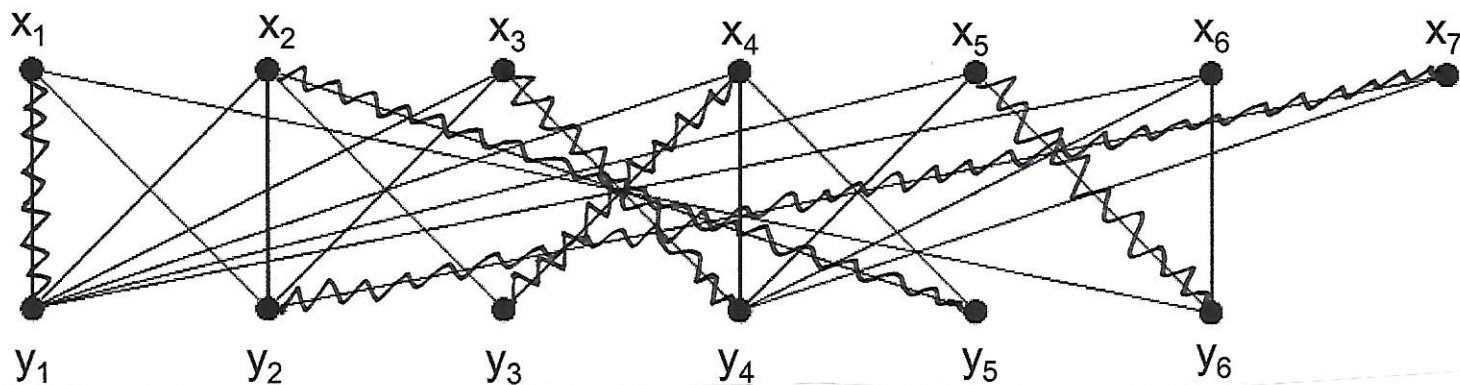
Im 6. Durchlauf der repeat-Schleife findet der Algorithmus den augmentierenden Pfad

$$(x_7, y_2, x_2, y_5)$$

und ändert das aktuelle Matching entsprechend:

$\{x_7, y_2\}$ und $\{x_2, y_5\}$ werden in M aufgenommen, $\{x_2, y_2\}$ verlässt M . Nach dem 6. Durchlauf der repeat-Schleife lautet das aktuelle Matching demnach (siehe Zeichnung)

$$M = \{ \{x_1, y_1\}, \{x_2, y_5\}, \{x_3, y_4\}, \{x_4, y_3\}, \{x_5, y_6\}, \{x_7, y_2\} \}$$

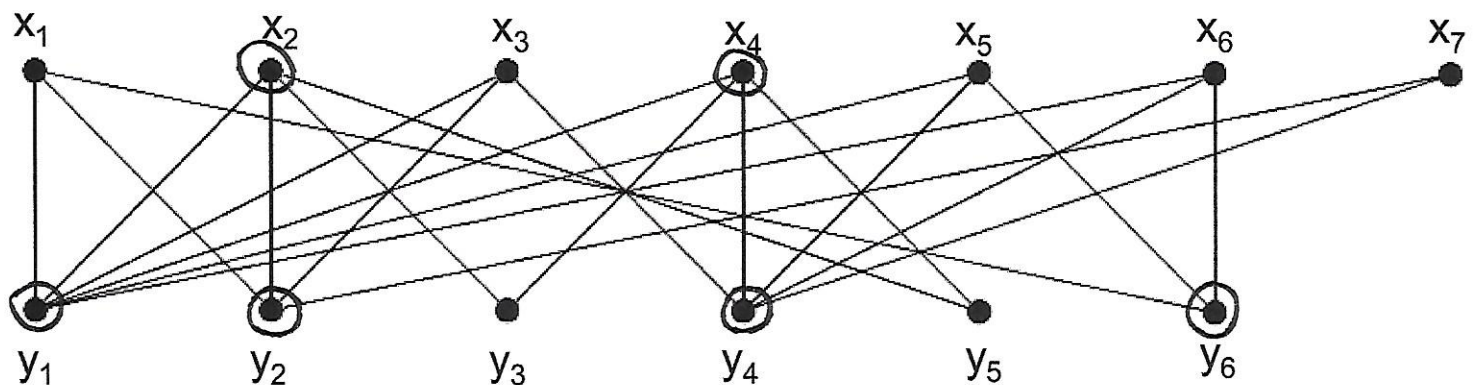


Im 7. Durchlauf der repeat-Schleife versucht der Algorithmus, einen augmentierenden Pfad zu finden, der in x_6 startet – was nicht gelingt. Dabei werden die folgenden Knoten (in der angegebenen Reihenfolge) mit alternierenden Pfaden erreicht und markiert $x_6, y_1, y_4, y_6, x_1, x_3, x_5, y_2, x_7$.

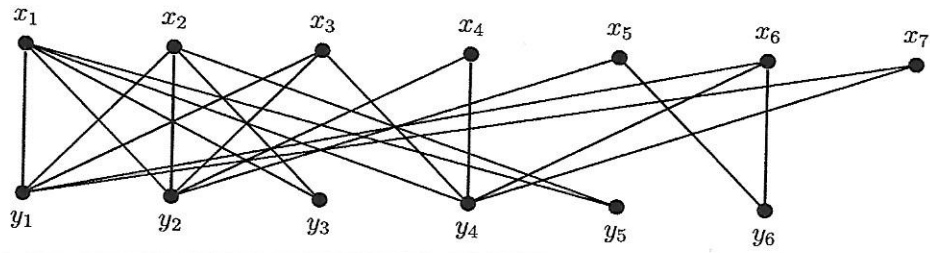
Ergebnis: Der Algorithmus liefert das obige Matching M mit 6 Kanten zusammen mit der minimalen Knotenüberdeckung

$$U = \{x_2, x_4, y_1, y_2, y_4, y_6\}.$$

(Auf welche Art sich U ergibt, ist in Abschnitt 11.4 beschrieben.) Darstellung von U :

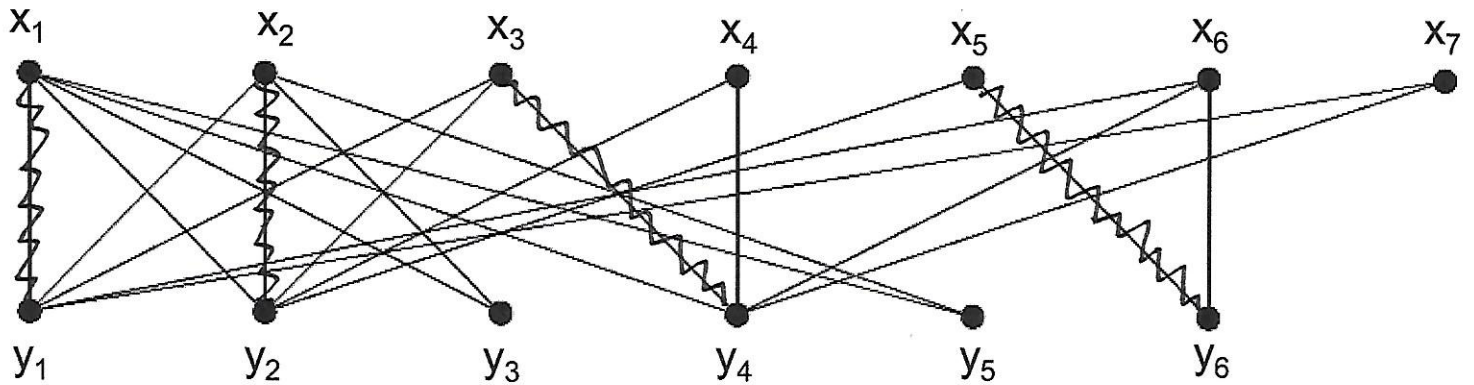


2. Wie Aufgabe 1 für den folgenden Graph:



Wie in Aufgabe 1 ist der Algorithmus von Edmonds und Karp anzuwenden unter Beachtung der in Aufgabe 1 angegebenen Regel. Dies führt nach 4 Durchläufen der repeat-Schleife zum folgenden Matching M (siehe Zeichnung):

$$M = \{ \{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}, \{x_3, y_4\}, \{x_5, y_6\} \}.$$



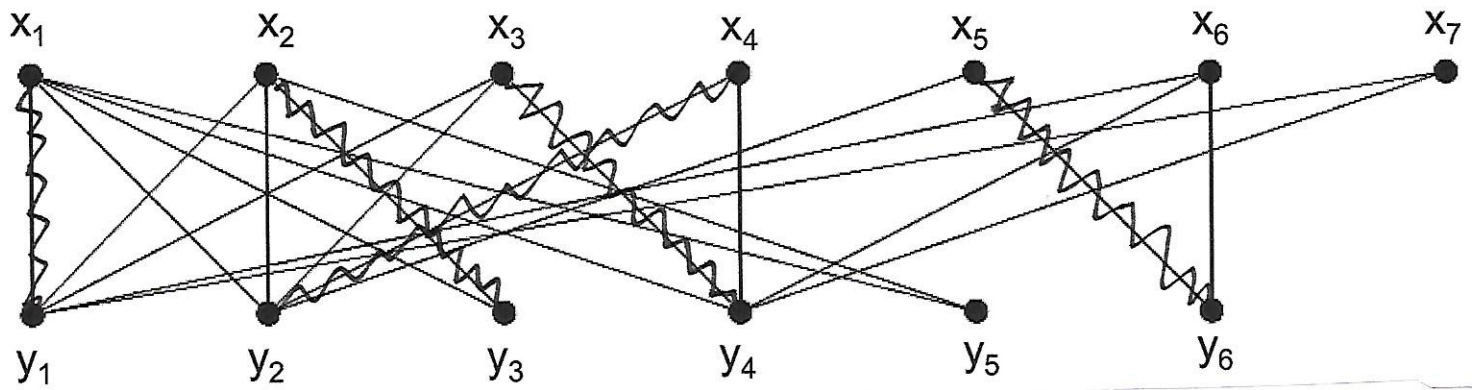
Im 5. Durchlauf der repeat-Schleife findet der Algorithmus den augmentierenden Pfad

$$(x_4, y_2, x_2, y_3).$$

Als neues aktuelles Matching ergibt sich

$$M = \{ \{x_1, y_1\}, \{x_2, y_3\}, \{x_3, y_4\}, \{x_4, y_2\}, \{x_5, y_6\} \}.$$

Dazugehörige Zeichnung:

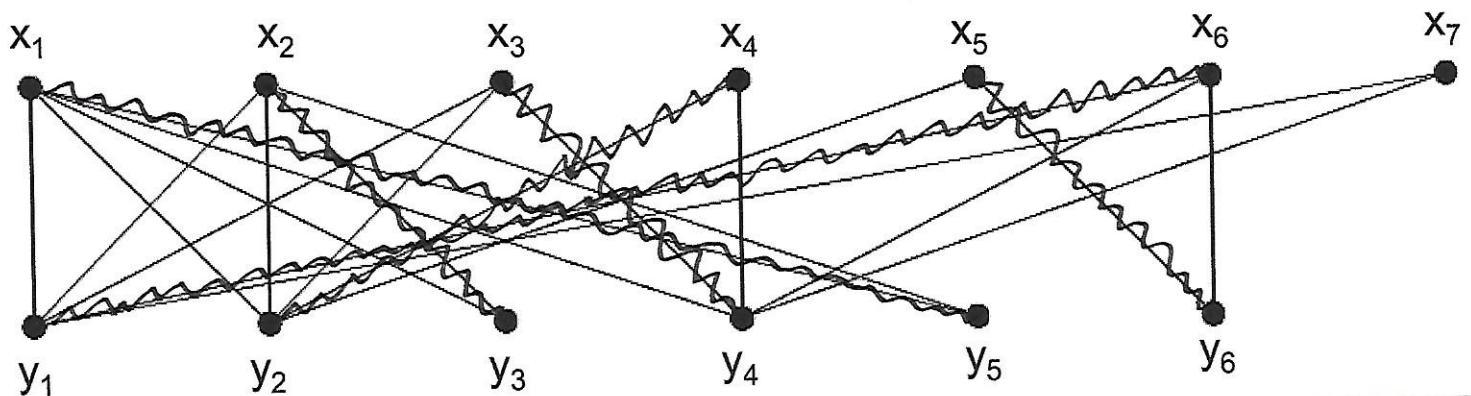


Im 6. Durchlauf der repeat-Schleife wird der folgende augmentierende Pfad gefunden:

$$(x_6, y_1, x_1, y_5).$$

Als neues aktuelles Matching M erhält man (siehe auch nachfolgende Zeichnung):

$$M = \{ \{x_1, y_5\}, \{x_2, y_3\}, \{x_3, y_4\}, \{x_4, y_2\}, \{x_5, y_6\}, \{x_6, y_1\} \}.$$



Im 7. Durchlauf werden mittels alternierender Pfade, die in x_7 starten, die folgenden Knoten erreicht (in der angegebenen Reihenfolge):

$x_7, y_1, y_4, x_6, x_3, y_6, y_2, x_5, x_4$.

Es folgt, dass der Algorithmus neben dem obigen Matching mit 6 Kanten die folgende minimale Knotenüberdeckung ermittelt (siehe Zeichnung):

$$U = \{x_1, x_2, y_1, y_2, y_4, y_6\}.$$

