Optimierung für Studierende der Informatik

Thomas Andreae

Wintersemester 2017/18
Blatt 2

A: Präsenzaufgaben am 30. Oktober 2017

1. Schauen Sie sich das **Handout zum Simplexverfahren** an und beantworten Sie die folgenden Fragen:

(i) Wie kommt das Starttableau zustande?

(ii) Weshalb wurde in der 1. Iteration x_1 als Eingangsvariable gewählt? Wie kommt die Wahl von x_4 als Ausgangsvariable zustande?

(iii) Als Ergebnis der 1. Iteration erhält man ein neues Tableau. Wie kommt die 1. Zeile in diesem Tableau zustande? Wie ergeben sich die übrigen Zeilen (einschließlich der z-Zeile)?

(iv) Woran erkennt man, dass das Tableau am Ende der 2. Iteration optimal ist? Wie ergibt sich am Schluss die optimale Lösung?

(v) Können Sie anhand der z-Zeile im letzten Tableau begründen, weshalb die gefundene Lösung tatsächlich optimal ist?

Die Antworten ergeben sich aus Kapitel 2 des Skripts bzw. aus 5) auf Seite 1 des Handouts.

2. Wir betrachten das folgende LP-Problem, das mit dem Simplexverfahren gelöst werden soll; dabei ist genau wie im **Handout** vorzugehen. Insbesondere ist am Ende jeder Iteration das neue Tableau noch einmal übersichtlich hinzuschreiben (wie im Handout).

$$\begin{array}{lrcrcrcl}
\text{maximiere} & 4x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & & \\
\multicolumn{8}{l}{\text{unter den Nebenbedingungen}} \\
 & -2x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & \leq & 2 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & & & \leq & 5 \\
 & x_1 & - & x_2 & - & 5x_3 & \leq & 4 \\
 & & & \multicolumn{3}{r}{x_1, x_2, x_3} & \geq & 0
\end{array}$$

Starttableau

$$
\begin{aligned}
x_4 &= 2 + 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 \\
x_5 &= 5 - 2x_1 - x_2 \\
x_6 &= 4 - x_1 + x_2 + 5x_3 \\
\hline
z &= 4x_1 + x_2 - 3x_3
\end{aligned}
$$

1. Iteration

Eingangsvariable: x_1

Ausgangsvariable: x_5

Es folgt

$$x_1 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_5$$

$$x_4 = 2 + 2\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_5\right) + 2x_2 - 3x_3 = 7 + x_2 - 3x_3 - x_5$$

$$x_6 = 4 - \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_5\right) + x_2 + 5x_3 = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}x_2 + 5x_3 + \frac{1}{2}x_5$$

$$z = 4\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_5\right) + x_2 - 3x_3 = 10 - x_2 - 3x_3 - 2x_5$$

Neues Tableau:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_5 \\
x_4 &= 7 + x_2 - 3x_3 - x_5 \\
x_6 &= \frac{3}{2} + \frac{3}{2}x_2 + 5x_3 + \frac{1}{2}x_5 \\
\hline
z &= 10 - x_2 - 3x_3 - 2x_5
\end{aligned}
$$

Dieses Tableau ist optimal. Die optimale Lösung lautet $x_1 = \frac{5}{2}$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ mit $z = 10$.

B: Hausaufgaben zum 6./7. November 2017

Hinweis: Es ist in allen Aufgaben genau wie im **Handout** vorzugehen. Insbesondere ist am Ende jeder Iteration das neue Tableau noch einmal übersichtlich hinzuschreiben (wie im Handout).

1. Lösen Sie die folgenden LP-Probleme mit dem Simplexverfahren:

a)

$$\begin{aligned}
&\text{maximiere } -2x_1 + 3x_2 + \frac{1}{2}x_3\\
&\text{unter den Nebenbedingungen}\\
&\quad -2x_1 + 3x_2 - x_3 \le 2\\
&\quad x_1 + 2x_3 \le 5\\
&\quad -x_1 + x_2 \le 2\\
&\quad x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
&\text{maximiere } 3x_1 + x_2 - 11x_3 - 9x_4\\
&\text{unter den Nebenbedingungen}\\
&\quad x_1 - x_2 - 7x_3 - 3x_4 \le 1\\
&\quad x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \le 3\\
&\quad x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0.
\end{aligned}$$

---

a) <u>Starttableau</u>

$$\begin{aligned}
x_4 &= 2 + 2x_1 - 3x_2 + x_3\\
x_5 &= 5 - x_1 - 2x_3\\
x_6 &= 2 + x_1 - x_2\\
\hline
z &= -2x_1 + 3x_2 + \frac{1}{2}x_3
\end{aligned}$$

<u>1. Iteration</u>

Eingangsvariable: x_2

Ausgangsvariable: x_4

Es folgt

$$x_2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4$$

$$\begin{aligned}
x_6 &= 2 + x_1 - \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4\right)\\
&= \frac{4}{3} + \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z &= -2x_1 + 3\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4\right) + \frac{1}{2}x_3\\
&= 2 + \frac{3}{2}x_3 - x_4
\end{aligned}$$

Neues Tableau:

$$x_2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4$$
$$x_5 = 5 - x_1 - 2x_3$$
$$x_6 = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4$$
$$\overline{z = 2 \qquad + \frac{3}{2}x_3 - x_4}$$

<u>2. Iteration</u>

Eingangsvariable: x_3
Ausgangsvariable: x_5
Es folgt

$$x_3 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_5$$
$$x_2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_5\right) - \frac{1}{3}x_4$$
$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{6}x_5 - \frac{1}{3}x_4$$
$$x_6 = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_5\right) + \frac{1}{3}x_4$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{6}x_5 + \frac{1}{3}x_4$$
$$z = 2 + \frac{3}{2}\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_5\right) - x_4$$
$$= \frac{23}{4} - \frac{3}{4}x_1 - \frac{3}{4}x_5 - x_4$$

Neues Tableau:

$$x_3 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_5$$
$$x_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{6}x_5 - \frac{1}{3}x_4$$
$$x_6 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{6}x_5 + \frac{1}{3}x_4$$
$$\overline{z = \frac{23}{4} - \frac{3}{4}x_1 - \frac{3}{4}x_5 - x_4}$$

Optimale Lösung: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{3}{2}$, $x_3 = \frac{5}{2}$ mit $z = \frac{23}{4}$.

b) Starttableau

$$x_5 = 1 - x_1 + x_2 + 7x_3 + 3x_4$$
$$x_6 = 3 - x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4$$
$$z = 3x_1 + x_2 - 11x_3 - 9x_4$$

1. Iteration

Eingangsvariable: x_1
Ausgangsvariable: x_5
Es folgt

$$x_1 = 1 + x_2 + 7x_3 + 3x_4 - x_5$$
$$x_6 = 3 - (1 + x_2 + 7x_3 + 3x_4 - x_5) - x_2 - 3x_3 - x_4$$
$$= 2 - 2x_2 - 10x_3 - 4x_4 + x_5$$
$$z = 3(1 + x_2 + 7x_3 + 3x_4 - x_5) + x_2 - 11x_3 - 9x_4$$
$$= 3 + 4x_2 + 10x_3 - 3x_5$$

Neues Tableau:

$$x_1 = 1 + x_2 + 7x_3 + 3x_4 - x_5$$
$$x_6 = 2 - 2x_2 - 10x_3 - 4x_4 + x_5$$
$$z = 3 + 4x_2 + 10x_3 - 3x_5$$

2. Iteration

Eingangsvariable: x_3
Ausgangsvariable: x_6
Es folgt:

$$x_3 = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}x_2 - \frac{2}{5}x_4 + \frac{1}{10}x_5 - \frac{1}{10}x_6$$

$$x_1 = 1 + x_2 + 7\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5}x_2 - \frac{2}{5}x_4 + \frac{1}{10}x_5 - \frac{1}{10}x_6\right) + 3x_4 - x_5$$
$$= \frac{12}{5} - \frac{2}{5}x_2 + \frac{1}{5}x_4 - \frac{3}{10}x_5 - \frac{7}{10}x_6$$
$$z = 3 + 4x_2 + 10\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5}x_2 - \frac{2}{5}x_4 + \frac{1}{10}x_5 - \frac{1}{10}x_6\right) - 3x_5$$
$$= 5 + 2x_2 - 4x_4 - 2x_5 - x_6$$

Neues Tableau:

$$x_3 = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}x_2 - \frac{2}{5}x_4 + \frac{1}{10}x_5 - \frac{1}{10}x_6$$
$$x_1 = \frac{12}{5} - \frac{2}{5}x_2 + \frac{1}{5}x_4 - \frac{3}{10}x_5 - \frac{7}{10}x_6$$
$$\overline{z = 5 + 2x_2 - 4x_4 - 2x_5 - x_6}$$

3. Iteration

Eingangsvariable: x_2
Ausgangsvariable: x_3
Es folgt

$$x_2 = 1 - 2x_4 + \frac{1}{2}x_5 - \frac{1}{2}x_6 - 5x_3$$
$$x_1 = \frac{12}{5} - \frac{2}{5}\left(1 - 2x_4 + \frac{1}{2}x_5 - \frac{1}{2}x_6 - 5x_3\right) + \frac{1}{5}x_4 - \frac{3}{10}x_5 - \frac{7}{10}x_6$$
$$= 2 + x_4 - \frac{1}{2}x_5 - \frac{1}{2}x_6 + 2x_3$$
$$z = 5 + 2\left(1 - 2x_4 + \frac{1}{2}x_5 - \frac{1}{2}x_6 - 5x_3\right) - 4x_4 - 2x_5 - x_6$$
$$= 7 - 8x_4 - x_5 - 2x_6 - 10x_3$$

Neues Tableau:

$$x_2 = 1 - 2x_4 + \frac{1}{2}x_5 - \frac{1}{2}x_6 - 5x_3$$
$$x_1 = 2 + x_4 - \frac{1}{2}x_5 - \frac{1}{2}x_6 + 2x_3$$
$$\overline{z = 7 - 8x_4 - x_5 - 2x_6 - 10x_3}$$

Optimale Lösung: $x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0$ mit $z = 7$.

2. a) Lösen Sie die folgende Aufgabe mit dem Simplexverfahren:

$$\begin{aligned}&\text{maximiere } -x_1 + 3x_2 + x_3\\&\text{unter den Nebenbedingungen}\\&\quad -x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 8\\&\quad x_1 - 2x_2 + 3x_3 \le 8\\&\quad x_1 - 3x_2 + x_3 \le 8\\&\quad x_1, x_2, x_3 \ge 0.\end{aligned}$$

b) Falls das Verfahren mit dem Ergebnis **unbeschränkt** terminiert, so gebe man zulässige Lösungen an, für die der Zielfunktionswert z die folgenden Werte annimmt: $z = 20$, $z = 1000$ sowie $z = 1000000$.

a) Starttableau

$$x_4 = 8 + x_1 - 2x_2 - 2x_3$$
$$x_5 = 8 - x_1 + 2x_2 - 3x_3$$
$$x_6 = 8 - x_1 + 3x_2 - x_3$$
$$\overline{z = \quad - x_1 + 3x_2 + x_3}$$

1. Iteration

Eingangsvariable: x_2

Ausgangsvariable: x_4

Es folgt

$x_2 = 4 + \frac{1}{2}x_1 - x_3 - \frac{1}{2}x_4$

$x_5 = 8 - x_1 + 2(4 + \frac{1}{2}x_1 - x_3 - \frac{1}{2}x_4) - 3x_3$

$= 16 - 5x_3 - x_4$

$x_6 = 8 - x_1 + 3(4 + \frac{1}{2}x_1 - x_3 - \frac{1}{2}x_4) - x_3$

$= 20 + \frac{1}{2}x_1 - 4x_3 - \frac{3}{2}x_4$

$z = -x_1 + 3(4 + \frac{1}{2}x_1 - x_3 - \frac{1}{2}x_4) + x_3$

$= 12 + \frac{1}{2}x_1 - 2x_3 - \frac{3}{2}x_4$

Neues Tableau:

$$
\begin{array}{l}
x_2 = 4 + \frac{1}{2}x_1 - x_3 - \frac{1}{2}x_4 \\
x_5 = 16 \qquad\quad - 5x_3 - x_4 \\
x_6 = 20 + \frac{1}{2}x_1 - 4x_3 - \frac{3}{2}x_4 \\
\hline
z = 12 + \frac{1}{2}x_1 - 2x_3 - \frac{3}{2}x_4
\end{array}
$$

2. Iteration

Eingangsvariable: x_1

Ausgangsvariable: –

Das Verfahren terminiert mit dem Ergebnis „unbeschränkt".

b) Wir betrachten das letzte Tableau und setzen $x_3=0$, $x_4=0$ und $x_1=t$, wobei t eine reelle Zahl ist, für die $t \geq 0$ gilt. Es folgt

$$x_2=4+\frac{1}{2}t,\ x_5=16,\ x_6=20+\frac{1}{2}t \text{ und } z=12+\frac{1}{2}t.$$

Zu jedem $t \geq 0$ haben wir somit eine zulässige Lösung erhalten, die wie folgt lautet:

$$x_1=t,\ x_2=4+\frac{1}{2}t,\ x_3=0 \text{ mit } z=12+\frac{1}{2}t.$$

Es folgt $t = 2z-24$. Setzt man in diese Gleichung nacheinander $z=20$, $z=1000$ und $z=10^6$ ein, so erhält man die gewünschten zulässigen Lösungen:

(I) Für $z=20$ erhält man $t=16$ und somit
$x_1=16, x_2=12, x_3=0.$

(II) Für $z=1000$ erhält man $t=1976$ sowie

$x_1=1976, x_2=992, x_3=0.$

(III) Für $z=10^6$ erhält man $t=1999976$ und somit
$x_1=1999976, x_2=999992, x_3=0.$