L.31

Optimierung für Studierende der Informatik

Thomas Andreae

Wintersemester 2017/18

Blatt 5

B: Hausaufgaben zum 27./28. November 2017

1. a) Wir greifen das Beispiel aus Hausaufgabe 1a) von Blatt 2 auf und nennen es (P).
   (i) Stellen Sie das zugehörige duale Problem (D) auf.
   (ii) Eine optimale Lösung (x_1^*, x_2^*, x_3^*) für (P) haben wir bereits mit dem Simplexverfahren bestimmt. Lesen Sie zusätzlich eine optimale Lösung (y_1^*, y_2^*, y_3^*) für (D) am letzten Tableau ab.
   (iii) Überprüfen Sie, ob die von Ihnen abgelesene Lösung (y_1^*, y_2^*, y_3^*) tatsächlich eine *zulässige* Lösung von (D) ist.
   (iv) Überprüfen Sie mithilfe des Dualitätssatzes, ob (y_1^*, y_2^*, y_3^*) tatsächlich eine *optimale* Lösung von (D) ist.
   (v) Bestätigen Sie noch einmal, dass es sich bei (x_1^*, x_2^*, x_3^*) und (y_1^*, y_2^*, y_3^*) um optimale Lösungen von (P) bzw. (D) handelt, indem Sie zeigen, dass die komplementären Schlupfbedingungen (Satz 3, Skript Seite 76) erfüllt sind.

   b) Wie a) für Hausaufgabe 1b) von Blatt 2.

---

a) Hier noch einmal das Beispiel aus Hausaufgabe 1a) von Blatt 2:

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{maximiere} & -2x_1 + 3x_2 + \frac{1}{2}x_3 & & \\
\text{unter den Nebenbedingungen} & & & \\
& -2x_1 + 3x_2 - x_3 & \leq & 2 \\
& x_1 + 2x_3 & \leq & 5 \\
& -x_1 + x_2 & \leq & 2 \\
& x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}
\qquad (P)
$$

(i)

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{minimiere} & 2y_1 + 5y_2 + 2y_3 & & \\
\text{unter den Nebenbedingungen} & & & \\
& -2y_1 + y_2 - y_3 & \geq & -2 \\
& 3y_1 + y_3 & \geq & 3 \\
& -y_1 + 2y_2 & \geq & \frac{1}{2} \\
& y_1, y_2, y_3 & \geq & 0
\end{array}
\qquad (D)
$$

(ii) $y_1^* = 1,\ y_2^* = \frac{3}{4},\ y_3^* = 0.$

(iii) Einsetzen von y_1^*, y_2^*, y_3^* in (D) ergibt die gültigen Ungleichungen $-2 + \frac{3}{4} \geq -2$, $3 \geq 3$ und $-1 + 2 \cdot \frac{3}{4} \geq \frac{1}{2}$. [Wir halten außerdem fest: Im Fall der zweiten und dritten Ungleichung, gilt sogar „=". Im Fall der 1. Ungleichung gilt „>".]

(iv) Es gilt $2y_1^* + 5y_2^* + 2y_3^* = 2 + 5 \cdot \frac{3}{4} = \frac{23}{4}$. Der optimale Zielfunktionswert von (P) lautet ebenfalls $\frac{23}{4}$. Also ist y_1^*, y_2^*, y_3^* eine optimale Lösung von (D).

(v) Lösung von (P): $x_1^* = 0$, $x_2^* = \frac{3}{2}$, $x_3^* = \frac{5}{2}$.
Lösung von (D): siehe (iii).
Bereits unter (iii) hatten wir festgestellt, dass y_1^*, y_2^*, y_3^* die 2. und 3. Ungleichung von (D) mit Gleichheit erfüllen. Außerdem gilt $x_1^* = 0$.

Ferner gilt $y_3^* = 0$. Setzt man x_1^*, x_2^*, x_3^* in die 1. und 2. Ungleichung von (P) ein, so erhält man

$$\frac{9}{2} - \frac{5}{2} = 2 \quad \text{und} \quad 2 \cdot \frac{5}{2} = 5.$$

Die 1. und 2. Ungleichung von (P) sind also mit Gleichheit erfüllt („tight").

Zusammenfassend können wir feststellen, dass die komplementären Schlupfbedingungen erfüllt sind, d.h., es liegen optimale Lösungen von (P) bzw. (D) vor.

b) Hier noch einmal das Beispiel aus Hausaufgabe 1b) (Blatt 2):

maximiere $3x_1 + x_2 - 11x_3 - 9x_4$
unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - 7x_3 - 3x_4 &\leq 1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 &\leq 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0. \end{aligned} \qquad (P)$$

(i) minimiere $y_1 + 3y_2$
unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 &\geq 3 \\ -y_1 + y_2 &\geq 1 \\ -7y_1 + 3y_2 &\geq -11 \\ -3y_1 + y_2 &\geq -9 \\ y_1, y_2 &\geq 0 \end{aligned} \qquad (D)$$

(ii) $y_1^* = 1,\ y_2^* = 2.$

(iii) Einsetzen von y_1^*, y_2^* in (D) führt zu folgenden korrekten Ungleichungen:

$1 + 2 \geq 3$ („mit Gleichheit erfüllt")
$-1 + 2 \geq 1$ („mit Gleichheit erfüllt")
$-7 + 6 \geq -11$
$-3 + 2 \geq -9.$

Somit haben wir bestätigt, dass es sich bei $y_1^* = 1, y_2^* = 2$ um eine zulässige Lösung von (D) handelt.

(iv) Es gilt $y_1^* + 3y_2^* = 1+6 = 7$. Der optimale Zielfunktionswert von (P) lautet ebenfalls 7. Also ist $y_1^* = 1, y_2^* = 2$ eine optimale Lösung von (D).

(V) Lösung von (P): $x_1^* = 2, x_2^* = 1, x_3^* = 0, x_4^* = 0$.
Lösung von (D): siehe (ii).

Es gilt $x_3^* = x_4^* = 0$ und unter (iii) hatten wir bereits gesehen, dass die 1. und 2. Ungleichung von (D) mit Gleichheit erfüllt ist.

Da weder $y_1^* = 0$ noch $y_2^* = 0$ gilt, haben wir also $x_1^*, \dots, x_4^*$ in beide Ungleichungungen von (P) einzusetzen und zu prüfen, ob „=" gilt. Dies ist in der Tat der Fall:

$$x_1^* - x_2^* - 7x_3^* - 3x_4^* = 2 - 1 = 1$$
$$x_1^* + x_2^* + 3x_3^* + x_4^* = 2 + 1 = 3.$$

Es sind also die komplementären Schlupfbedingungen erfüllt, d.h., wir haben bestätigt, dass optimale Lösungen von (P) und (D) vorliegen.

2. a) Schauen Sie sich die in Abschnitt 7.4 im Anschluss an Satz 3' aufgeführten Beispiele 1 und 2 an (Skript Seite 78 f.) und bearbeiten Sie die auf Seite 79 gestellte Aufgabe.

b) Gegeben sei das folgende LP-Problem (P) zusammen mit einer vorgeschlagenen Lösung:

$$\begin{array}{l} \text{maximiere } 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ \text{unter den Nebenbedingungen} \\ \qquad \begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &\le 4 \\ 2x_1 \phantom{{}+x_2} + 3x_3 &\le 5 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &\le 7 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0. \end{aligned} \end{array}$$

Vorgeschlagene Lösung:

$$x_1^* = \frac{5}{2}, \quad x_2^* = \frac{3}{2}, \quad x_3^* = 0.$$

Prüfen Sie mithilfe von Satz 3' (Skript Seite 78), ob dies eine optimale Lösung von (P) ist.

a) Wir setzen $x_1^* = \frac{33}{4}$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = \frac{3}{2}$ in (P) ein, um festzustellen, welche Ungleichungen von (P) nicht mit Gleichheit erfüllt sind:

$$x_1^* + x_2^* + 3x_3^* = \frac{33}{4} + \frac{9}{2} = \frac{51}{4} < 30$$
$$2x_1^* + 2x_2^* + 5x_3^* = \frac{33}{2} + \frac{15}{2} = 24$$
$$4x_1^* + x_2^* + 2x_3^* = 33 + 3 = 36.$$

Sollen die komplementären Schlupfbedingungen für (x_1^*, x_2^*, x_3^*) und (y_1^*, y_2^*, y_3^*) erfüllt sein, so muss also $y_1^* = 0$ gelten. Wegen $x_1^* > 0$, $x_3^* > 0$ muss (y_1^*, y_2^*, y_3^*) die erste und die dritte Ungleichung von (D) mit Gleichheit erfüllen. Es folgt

$$\begin{aligned} 2y_2^* + 4y_3^* &= 3 \\ 5y_2^* + 2y_3^* &= 2. \end{aligned} \qquad (*)$$

Lösung von (*) mit dem Gauß-Algorithmus ergibt $y_2^* = \frac{1}{8}$, $y_3^* = \frac{11}{16}$.

Insgesamt hat man

$$y_1^* = 0, \; y_2^* = \frac{1}{8}, \; y_3^* = \frac{11}{16}.$$

Dies ist keine zulässige Lösung von (D), da die mittlere Ungleichung nicht erfüllt wird.

Es folgt aus Satz 3', dass die vorgeschlagene Lösung $x_1^* = \frac{33}{4}, x_2^* = 0, x_3^* = \frac{3}{2}$ nicht optimal ist.

---

b) Das zu (P) duale Problem lautet wie folgt:

minimiere $4y_1 + 5y_2 + 7y_3$
unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} y_1 + 2y_2 + 2y_3 &\geq 3 \\ y_1 \phantom{{}+ 2y_2} + y_3 &\geq 2 \\ 2y_1 + 3y_2 + 3y_3 &\geq 4 \\ y_1, y_2, y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Es ist zu entscheiden, ob es Zahlen y_1^*, y_2^*, y_3^* gibt, für die die folgenden Bedingungen (1) und (2) gelten:

(1) (x_1^*, x_2^*, x_3^*) und (y_1^*, y_2^*, y_3^*) erfüllen die komplementären Schlupfbedingungen;

(2) (y_1^*, y_2^*, y_3^*) ist eine zulässige Lösung von (D).

(x_1^*, x_2^*, x_3^*) erfüllt die 3. Ungleichung von (P) nicht mit Gleichheit. Soll (1) gelten, so muss demnach $y_3^* = 0$ sein.

Wegen $x_1^* > 0$ und $x_2^* > 0$ muss gelten:

$$\begin{aligned} y_1^* + 2y_2^* &= 3 \\ y_1^* \qquad &= 2 \end{aligned} \qquad (*)$$

Lösung des Gleichungssystems (*): $y_1^* = 2$, $y_2^* = \frac{1}{2}$.

Die Zahlen $y_1^* = 2$, $y_2^* = \frac{1}{2}$, $y_3^* = 0$ erfüllen (D), d.h., es handelt sich um eine zulässige Lösung von (D).

(1) und (2) sind demnach erfüllt, weshalb die vorgeschlagene Lösung optimal ist.