Optimierung für Studierende der Informatik

Wintersemester 2019/20
Blatt 6

A: Präsenzaufgaben am 27./28. November 2017

1. Konstruieren Sie das duale Problem:

a) Gegeben sei das folgende LP-Problem, das wir (P) nennen wollen:

$$\begin{array}{rrrrl}
\text{maximiere} & x_1 + & x_2 + & x_3 & \\
\multicolumn{5}{l}{\text{unter den Nebenbedingungen}} \\
& 2x_1 - & 4x_2 + & x_3 & = -1 \\
& x_1 + & 5x_2 + & x_3 & = 16 \\
& x_1 & + & x_3 & \geq 5 \\
& 2x_1 + & 4x_2 - & x_3 & \leq 8 \\
& x_1 - & 3x_2 + & x_3 & \leq 0 \\
& -4x_1 + & 3x_2 & & \leq 4 \\
& 4x_1 - & 3x_2 + & 5x_3 & \leq 10 \\
& x_1 + & 2x_2 + & x_3 & \leq 9 \\
& & & x_2 & \geq 0.
\end{array}$$

Konstruieren Sie das zu (P) duale Problem (D), indem Sie das *Dualisierungsrezept* verwenden.

b) Nun sei mit (P) das folgende Problem bezeichnet:

$$\begin{array}{rrrrrl}
\text{minimiere} & x_1 - & x_2 & & & \\
\multicolumn{6}{l}{\text{unter den Nebenbedingungen}} \\
& 2x_1 + & 3x_2 - & x_3 + & x_4 & \leq 0 \\
& 3x_1 + & x_2 + & 4x_3 - & 2x_4 & \geq 3 \\
& -x_1 - & x_2 + & 2x_3 + & x_4 & = 1 \\
& & & & x_2, x_3 & \geq 0.
\end{array}$$

Bilden Sie das zu (P) duale Problem, indem Sie das *Dualisierungsrezept* verwenden (diesmal allerdings „von rechts nach links“).

2. In Matrixnotation lautet ein LP-Problem in Standardform bekanntlich so:

$$\begin{array}{rl}
\multicolumn{2}{l}{\text{maximiere } c^T x} \\
\multicolumn{2}{l}{\text{unter den Nebenbedingungen}} \\
Ax & \leq b \\
x & \geq 0.
\end{array}$$

Das Duale hierzu lautet in Matrixnotation:

$$\begin{array}{rl}
\multicolumn{2}{l}{\text{minimiere } b^T y} \\
\multicolumn{2}{l}{\text{unter den Nebenbedingungen}} \\
A^T y & \geq c \\
y & \geq 0.
\end{array}$$

Geben Sie das Duale der folgenden beiden Probleme in Matrixnotation an:

a)

$$\begin{array}{ll} \text{maximiere } c^T x & \\ \text{unter den Nebenbedingungen} & \\ \qquad Ax & \le b \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{ll} \text{maximiere } c^T x & \\ \text{unter den Nebenbedingungen} & \\ \qquad Ax & = b \\ \qquad x & \ge 0 \end{array}$$

B: Hausaufgaben zum 4./5. Dezember 2017

1. a) Gegeben sei das folgende LP-Problem, das wir (P) nennen wollen:

$$\begin{array}{lrcl} \text{maximiere} & x_1 + 2x_2 - 3x_3 \qquad + x_5 - x_6 & & \\ \text{unter den Nebenbedingungen} & & & \\ & 3x_1 - x_2 + 9x_3 + x_4 - x_5 + 2x_6 & \le & -11 \\ & -x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 & \ge & 4 \\ & 7x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 + x_5 & = & 2 \\ & x_2, x_5, x_6 & \ge & 0. \end{array}$$

Bilden Sie das zu (P) duale Problem (D), indem Sie das *Dualisierungsrezept* verwenden.

b) Nun sei mit (P) das folgende Problem bezeichnet:

$$\begin{array}{lrcl} \text{minimiere} & 5x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 & & \\ \text{unter den Nebenbedingungen} & & & \\ & 7x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 & \le & 5 \\ & x_1 + x_2 + x_3 & = & 9 \\ & x_1 + x_3 & \ge & 6 \\ & x_1 - 3x_2 + x_3 & \le & 4 \\ & 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 & = & 8 \\ & -4x_1 + 3x_2 & \ge & 1 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 + 7x_4 & \ge & -10 \\ & x_1, x_3 & \ge & 0. \end{array}$$

Bilden Sie wieder das zu (P) duale Problem (D), indem Sie das *Dualisierungsrezept* verwenden (diesmal „von rechts nach links“).

2. a) Wir greifen das *Kantinenleiterproblem* aus Aufgabe 2a) von Blatt 1 auf. Lösen Sie dieses Problem mithilfe des folgenden Tools:

`http://www.zweigmedia.com/RealWorld/simplex.html`.

b) Lösen Sie mit dem angegebenen Tool auch das *Salatproblem* aus Aufgabe 2b) von Blatt 1.

c) Lösen Sie mit dem angegebenen Tool auch das Problem des Eiscremeherstellers von Blatt 1.

d) Lösen Sie mit dem angegebenen Tool ebenfalls Pauls Diätproblem (Skript Seite 6).