Optimierung für Studierende der Informatik

Thomas Andreae

Wintersemester 2017/18
Blatt 10

A: Präsenzaufgaben am 8./9. Januar 2018

1. Beim Entwurf von Approximationsalgorithmen spielen neben LP-basierten Methoden auch *Greedy-Verfahren* eine wichtige Rolle. Im Folgenden wird ein Beispiel betrachtet, das dies illustriert.

Ein Schiff mit n Containern $1, 2, \dots, n$ erreicht den Hafen. Die Abmessungen der Container spielen keine Rolle, es geht ums Gewicht: Container i habe das Gewicht $w_i > 0$ $(i = 1, \dots, n)$. Zum Weitertransport stehen Lastwagen bereit, von denen jeder einen oder mehrere Container aufnehmen kann. *Einzige Restriktion*: Es gibt eine Gewichtsschranke K, die für jeden Laster gilt, d.h., kein Lastwagen darf Container von einem Gesamtgewicht größer K aufnehmen. Die Schranke K und auch die Gewichte w_i sollen als ganzzahlig angenommen werden. Es gelte $K \geq w_i$ für $i = 1, \dots, n$. Zu minimieren ist die Anzahl der Lastwagen, die zum Weitertransport aller Container benötigt werden. (Anmerkung: Das beschriebene Problem ist ein NP-schweres Optimierungsproblem.)

Ein Greedy-Algorithmus: Die Container werden in der Reihenfolge $1, 2, \dots, n$ verladen, wobei immer nur ein Lastwagen zur Zeit beladen wird. Immer, wenn der nächste Container nicht mehr aufgeladen werden kann (wegen Überschreitung von K), wird ein Lastwagen für „voll“ erklärt und auf die Reise geschickt.

Mit $m^\star$ sei das optimale Ergebnis bezeichnet, d.h., $m^\star$ ist die minimale Anzahl der benötigten Lastwagen. Das Ergebnis, das der Greedy-Algorithmus liefert, werde mit m bezeichnet.

a) Belegen Sie anhand eines Beispiels, dass der Greedy-Algorithmus nicht immer das bestmögliche Ergebnis liefert. Mit anderen Worten: $m > m^\star$ ist möglich.

b) **Behauptung**: Es gilt immer $m < 2m^\star$. (Dies bedeutet, dass unser Greedy-Algorithmus gar nicht so schlecht ist: Es handelt sich um einen *2-Approximationsalgorithmus.*)

Zeigen Sie die Richtigkeit dieser Behauptung für den Fall, dass m ungerade ist.

Hinweis: L_i sei das Gewicht, das der Greedy-Algorithmus auf den i-ten Lastwagen packt $(i = 1, \dots, m)$. Welche naheliegende Feststellung lässt sich für die Summe $L_1 + L_2$ und die Schranke K treffen?

---

a) $w_1 = 1,\ w_2 = 2,\ w_3 = 1,\ K = 2 \Rightarrow m^* = 2,\ m = 3$

b) m sei ungerade. Zu zeigen ist $m < 2m^*$. Für $m=1$ gilt dies wegen $m^* \geq 1$. Wir dürfen also $m \geq 3$ annehmen. Aus der Vorgehensweise unseres Greedy-Algorithmus ergibt sich

$$L_1 + L_2 > K, \ldots, L_{m-2} + L_{m-1} > K.$$

Es folgt $\sum_{i=1}^{m-1} L_i > \frac{m-1}{2} K$.

Die Gesamtlast ist also größer als $\frac{m-1}{2} K$, d.h., dass $\frac{m-1}{2}$ Lastwagen niemals ausreichend sein können.

Also: $m^* > \frac{m-1}{2}$.

Da m^* und $\frac{m-1}{2}$ ganze Zahlen sind, folgt

$$m^* \geq \frac{m-1}{2} + 1 = \frac{m+1}{2}.$$

Es folgt $2m^* \geq m+1$ und somit $m < 2m^*$. □

2. Im Skript wurde auf Seite 166 ein 2-Approximationsalgorithmus für das Knotenüberdeckungsproblem vorgestellt.

a) Beschreiben Sie kurz in eigenen Worten, worum es beim Knotenüberdeckungsproblem geht.

b) Beschreiben Sie kurz (ebenfalls in eigenen Worten), wie der erwähnte 2-Approximationsalgorithmus funktioniert.

c) Begründen Sie kurz, weshalb für die vom Algorithmus gelieferte Knotenüberdeckung U gilt: $|U| \leq 2c(G)$.

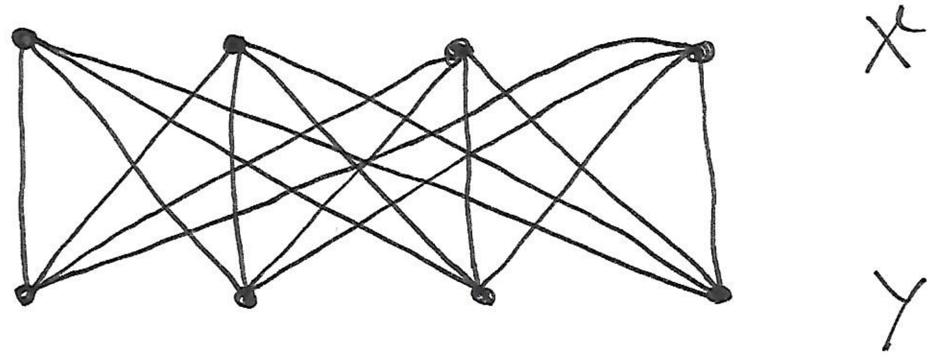
d) Was versteht man unter dem vollständig bipartiten Graphen $K_{n,n}$?

<u>Zu a) – c):</u> siehe Skript, Seite 166.

<u>Zu d):</u> Die Knotenmenge des vollständig bipartiten Graphen $K_{n,n}$ besteht aus zwei disjunkten Mengen X und Y mit $|X| = |Y| = n$; die Kantenmenge besteht aus sämtlichen n^2 Kanten $e = \{x, y\}$ mit $x \in X$ und $y \in Y$.

<u>Beispiel:</u>

$K_{4,4}$



B: Hausaufgaben zum 15./16. Januar 2018

1. Wir betrachten das Lastwagenproblem aus Präsenzaufgabe 1 und verwenden die dort eingeführten Bezeichnungen.

a) Zeigen Sie die Richtigkeit der Behauptung aus Präsenzaufgabe 1b) für den Fall, dass m gerade ist.

b) Es sei $k \geq 2$ eine ganze Zahl. Zeigen Sie, dass es für jedes derartige k ein Beispiel gibt, für das $m^* = k$ und $m = 2k - 1$ gilt.
Hinweis: Lösen Sie zunächst die Fälle $k = 2, 3, 4$ und orientieren Sie sich an diesen Fällen.

c) Begründen Sie kurz, weshalb aus b) folgt, dass unser Algorithmus *kein* γ-Approximationsalgorithmus für $\gamma < 2$ ist.

---

a) Wir setzen voraus, dass <u>m gerade</u> ist. Aus der Vorgehensweise des Greedy-Algorithmus ergibt sich:

$$L_1 + L_2 > K,\ L_3 + L_4 > K, \ldots, L_{m-1} + L_m > K.$$

Durch Aufsummieren folgt

$$\sum_{i=1}^{m} L_i > \frac{m}{2} K.$$

Die Gesamtlast ist also größer als $\frac{m}{2}K$, d.h., dass $\frac{m}{2}$ Lastwagen niemals ausreichen – auch dann nicht, wenn man eine Methode verwendet, die besser als unser Greedy-Algorithmus ist.

Also: $m^* > \frac{m}{2}$ und somit $m < 2m^*$.

b) Es gebe $2k-1$ Container. Die Gewichte seien wie folgt: $w_1 = 1$, $w_2 = k$, $w_3 = 1$, $w_4 = k, \ldots, w_{2k-2} = k$, $w_{2k-1} = 1$. Die Schranke K sei gleich k.

Dann gilt $m = 2k-1$ und $m^* = k$.

c) Für die Beispielserie aus b) gilt

$$\frac{m}{m^*} = \frac{2k-1}{k} \longrightarrow 2 \text{ für } k \to \infty.$$

Zu jedem $\gamma < 2$ gibt es demnach ein k, so dass $\gamma < \frac{2k-1}{k} = \frac{m}{m^*}$ gilt. Es folgt $m > \gamma m^*$, weshalb unser Algorithmus kein γ-Approximationsalgorithmus ist.

2. a) Auf Seite 166 des Skripts wurde im Zusammenhang mit dem Knotenüberdeckungsproblem die folgende Frage gestellt: *Ist es möglich, den gefundenen Faktor 2 zu verbessern, indem man den Algorithmus unverändert lässt, aber eine raffiniertere Analyse des Algorithmus vornimmt?* Zeigen Sie mithilfe des vollständig bipartiten Graphen $K_{n,n}$, dass dies nicht möglich ist.

a) $G = (V, E)$ sei der vollständige bipartite Graph $K_{n,n}$. Die Knotenmenge V sei die disjunkte Vereinigung von X und Y mit $|X| = |Y| = n$. Es gelte $E = \{\{x, y\} : x \in X, y \in Y\}$. Es folgt:

(1) $c(G) = n$.

<u>Beweis.</u> X (oder auch Y) ist eine Knotenüberdeckung mit n Knoten. Eine Menge $A \subseteq V$ mit $|A| < n$ kann niemals eine Knotenüberdeckung von G sein, da es wegen $|A| < n$ ein $x_0 \in X$ und ein $y_0 \in Y$ gibt mit $x_0 \notin A$ und $y_0 \notin A$. Es folgt, dass die Kante $\{x_0, y_0\}$ nicht von A getroffen wird. Also gilt (1).

(2) Jedes nicht erweiterbare Matching von G besteht aus n Kanten.

<u>Beweis</u>: Ist M ein Matching von G mit $|M| < n$, so gibt es ein $x_0 \in X$ und ein $y_0 \in Y$, so dass weder x_0 noch y_0 auf einer Kante von M liegt. Also lässt sich M durch Hinzunahme von $\{x_0, y_0\}$ erweitern. Folglich gilt (2).

Aus (2) folgt: Das vom Algorithmus gelieferte U besteht aus sämtlichen Knoten von G, d.h. $|U| = 2n$. Also gilt wegen (1):

Lässt man den Algorithmus unverändert, so lässt sich der Gütegarantiefaktor 2 nicht verbessern.

b) Es sei $k \geq 2$ eine fest gewählte ganze Zahl. Gegeben sei eine Menge S und eine Kollektion $T_1, \ldots, T_m$ von k-elementigen Teilmengen von S. Es gelte also

$$T_i \subseteq S \text{ und } |T_i| = k \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Eine Teilmenge $H \subseteq S$ wird ein *Hitting Set* genannt, falls alle Mengen T_i von H getroffen werden, d.h., falls $H \cap T_i \neq \emptyset$ für alle $i = 1, \ldots, m$ gilt. Gesucht ist ein Hitting Set mit einer minimalen Anzahl von Elementen. (Mitteilung: Dies ist ein NP-schweres Optimierungsproblem.) Wir nennen das beschriebene Problem k-HITTING SET. Das Problem lässt sich also wie folgt beschreiben:

k-HITTING SET

Eingabe: eine Menge S sowie eine Kollektion von k-elementigen Teilmengen von S.

Gesucht: ein Hitting Set mit einer minimalen Anzahl von Elementen.

Man beachte: k ist *nicht* Teil der Eingabe, sondern eine *Konstante*.

(i) Beschreiben Sie einen k-Approximationsalgorithmus für k-HITTING SET.

(ii) Weisen Sie nach, dass der von Ihnen unter (i) vorgeschlagene Algorithmus tatsächlich ein k-Approximationsalgorithmus ist.

Hinweis zu (i) und (ii): Denken Sie zunächst an den Spezialfall $k = 2$. Sie kennen bereits einen 2-Approximationsalgorithmus für diesen Spezialfall: siehe Abschnitt 11.7.1 im Skript.

Im Folgenden wird

(i) ein Algorithmus für k-HITTING SET beschrieben,

(ii) der Nachweis erbracht, dass es sich bei dem beschriebenen Algorithmus um einen k-Approximationsalgorithmus handelt.

(i) Wir konstruieren eine Menge $M \subseteq \{T_1, \dots, T_m\}$ wie folgt: Man startet mit $M = \emptyset$. Solange es ein $T_j \notin M$ gibt, das zu allen Elementen von M disjunkt ist, wähle man ein solches T_j beliebig aus und füge es zu M hinzu.

Auf diese Art erhält man am Ende eine Menge M von disjunkten T_i, die <u>nicht erweiterbar</u> ist. Das bedeutet: Zu jedem $T_j \notin M$ gibt es ein $T_i \in M$, so dass $T_j \cap T_i \neq \emptyset$ gilt. Mit M bezeichnen wir ab jetzt eine wie beschrieben konstruierte nichterweiterbare Teilmenge von $\{T_1, \dots, T_m\}$.

Es sei H die Menge der Elemente von S, die in den T_i aus M vorkommen. Wir wählen H als Output unseres Approximationsalgorithmus, d.h., H soll das gewünschte Hitting Set sein.

Der Nachweis, dass H tatsächlich ein Hitting Set ist und dass es sich beim beschriebenen Algorithmus um einen k-Approximationsalgorithmus handelt, wird in (ii) erbracht.

(ii) Es gelte $|\mathcal{M}| = t$. Dann folgt $|H| = kt$.
Da $\mathcal{M}$ nicht erweiterbar ist, wird jedes T_j von H getroffen, d.h., H ist ein Hitting Set.

Es sei nun H^* ein Hitting Set mit einer minimalen Anzahl von Elementen. Wir haben zu zeigen:

$$|H| \leq k|H^*|. \qquad (*)$$

Dies folgt so: Da die Mengen aus $\mathcal{M}$ disjunkt sind, gilt

$$|\mathcal{M}| \leq |H^*|.$$

Es folgt wegen $|\mathcal{M}| = t$ und $|H| = kt$:

$$|H| = kt = k|\mathcal{M}| \leq k|H^*|.$$

Dies zeigt (*), womit nachgewiesen ist, dass es sich bei unserem Algorithmus um einen k-Approximationsalgorithmus handelt. $\square$