

Optimierung für Studierende der Informatik

Thomas Andreae

Wintersemester 2017/18
Blatt 8

A: Präsenzaufgaben am 11./12. Dezember 2017

1. Schauen Sie sich Figur 9.8 (Skript, Seite 127) an und denken Sie sich die Markierungen weg.
 - a) Erläutern Sie Schritt für Schritt den Markierungsprozess: In welcher Reihenfolge wurden die Markierungen (labels) hinzugefügt und was geben die Markierungen an?
Hinweis: Beachten Sie immer (5') (Skript, Seite 122)! Für die Zeilen (6)–(9) bzw. (10)–(13) gilt die übliche Regel: Gibt es mehrere Kandidaten für den nächsten zu markierenden Knoten, so ist die alphabetische Reihenfolge entscheidend.
 - b) Wie kommt in Figur 9.8 der flussvergrößernde Pfad (s, a, b, c, f, t) zustande?
 - c) Wie kommt der in Figur 9.9 angegebene verbesserte Fluss zustande?

a) Die Markierungen wurden in folgender Reihenfolge berechnet:

<u>Knoten</u>	<u>Markierung</u>
s	$(-, \infty)$
a	$(s, +, 21)$
b	$(a, +, 8)$
d	$(a, +, 6)$
c	$(b, +, 8)$
e	$(d, +, 1)$
f	$(c, +, 8)$
t	$(f, +, 8)$

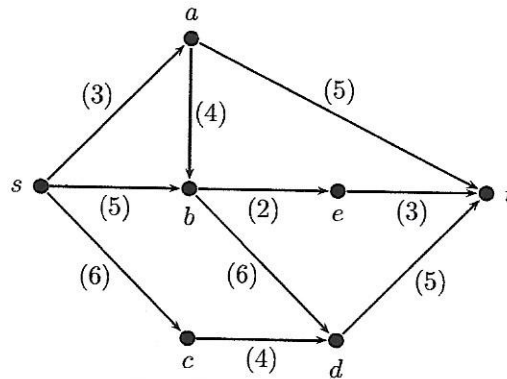
Die Markierung $(d, +, 1)$ am Knoten e bedeutet beispielsweise: e erhielt seine Markierung, als in (5') $v = d$ galt, d.h. als in den Zeilen (6)–(13) zunächst alle von d weggerichteten und dann alle zu d hinführenden Kanten untersucht wurden; + bedeutet, dass e von d auf einer

Vorwärtskante erreicht wurde; 1 bedeutet: Auf dem bislang konstruierten s, e -Pfad (s, a, d, e) ist die Größe des Bottleneck gleich 1. (Die Bottleneckkante ist hier die letzte Kante (d, e) .)

Zur Markierung $(-, \infty)$ bei s : Der Strich bedeutet, dass die ersten beiden Einträge entfallen; ∞ bedeutet, dass für den trivialen Pfad, der nur aus s besteht, das Bottleneck die Größe ∞ hat.

Zu b) und c): siehe (15) - (25) auf Seite 121 des Skripts.

2. Wenden Sie den Algorithmus von Edmonds und Karp auf das folgende Netzwerk an. Gehen Sie dabei Schritt für Schritt vor, ähnlich wie im Beispiel auf den Seiten 123-128. (Es gelte wie üblich die Regel aus Aufgabe 1a).)



"Ähnlich wie sich ausgehend von der Figur 9.1 auf Skript Seite 123 die Zeichnungen 9.2-9.11 ergeben, erhält man hier den folgenden Verlauf:

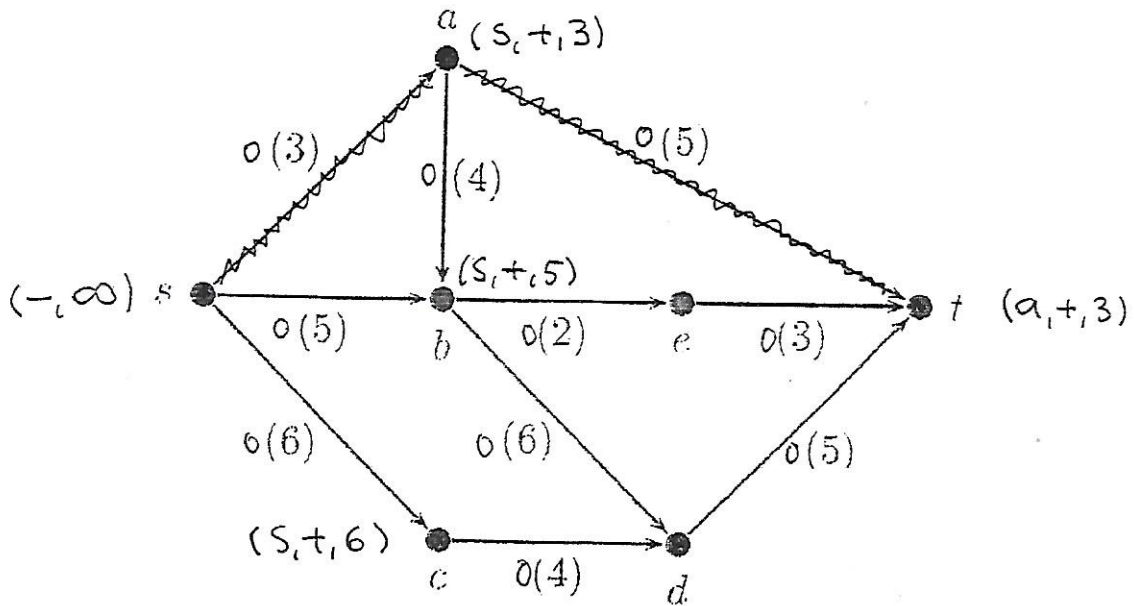


Abbildung 1: $w(f_0) = 0$

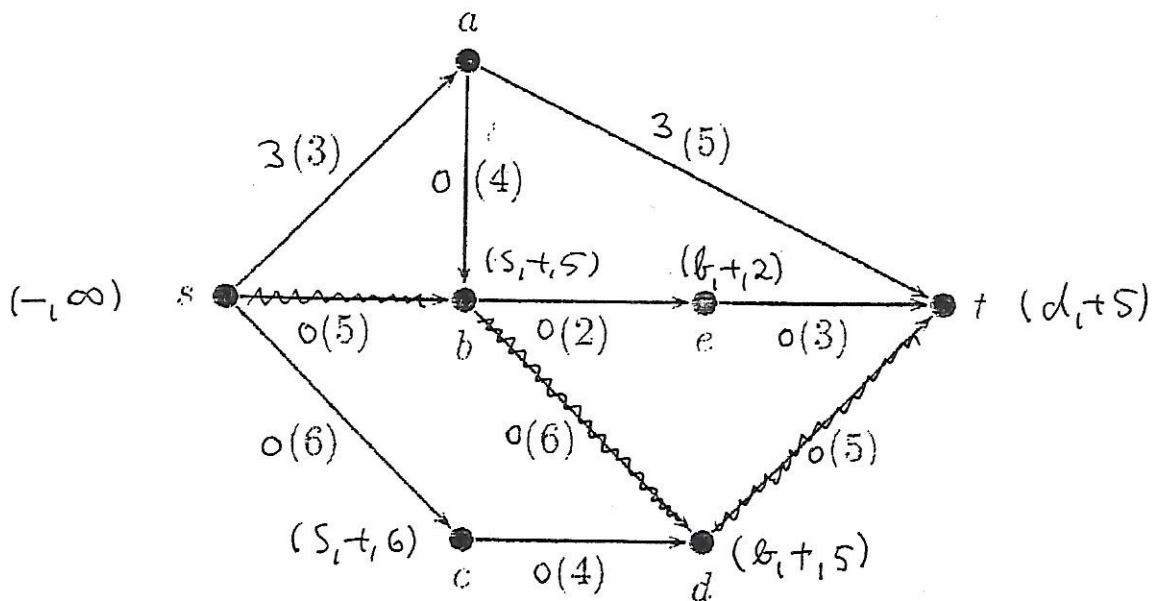


Abbildung 2: $w(f_1) = 3$

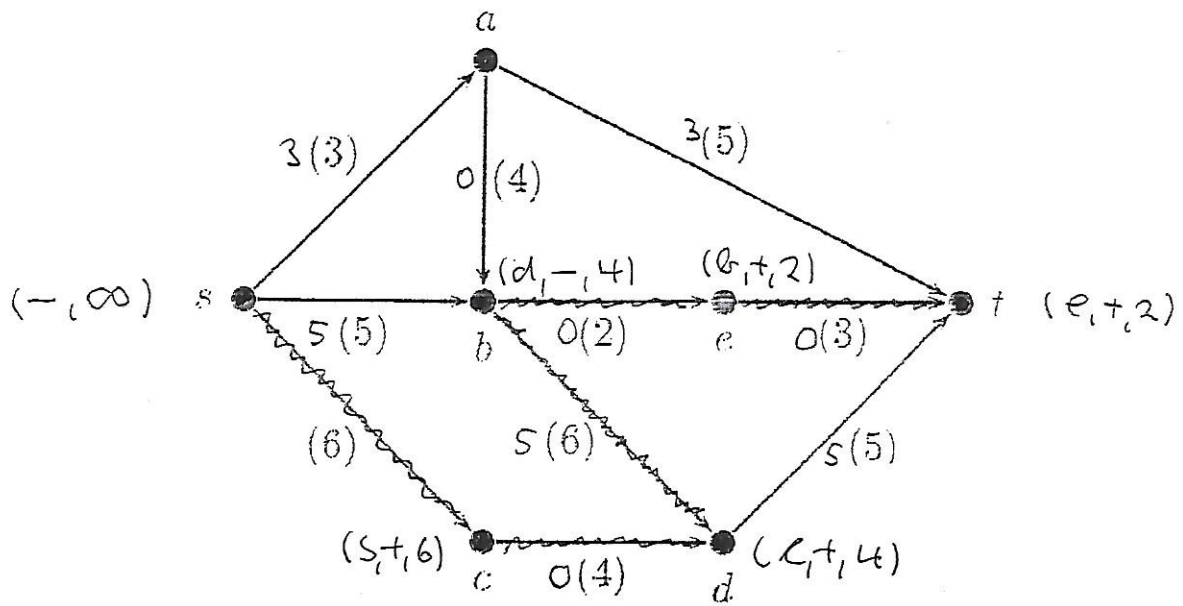


Abbildung 3: $w(f_2) = 8$.

Hier habe ich den Schnitt versehentlich falsch eingezeichnet: \rightarrow

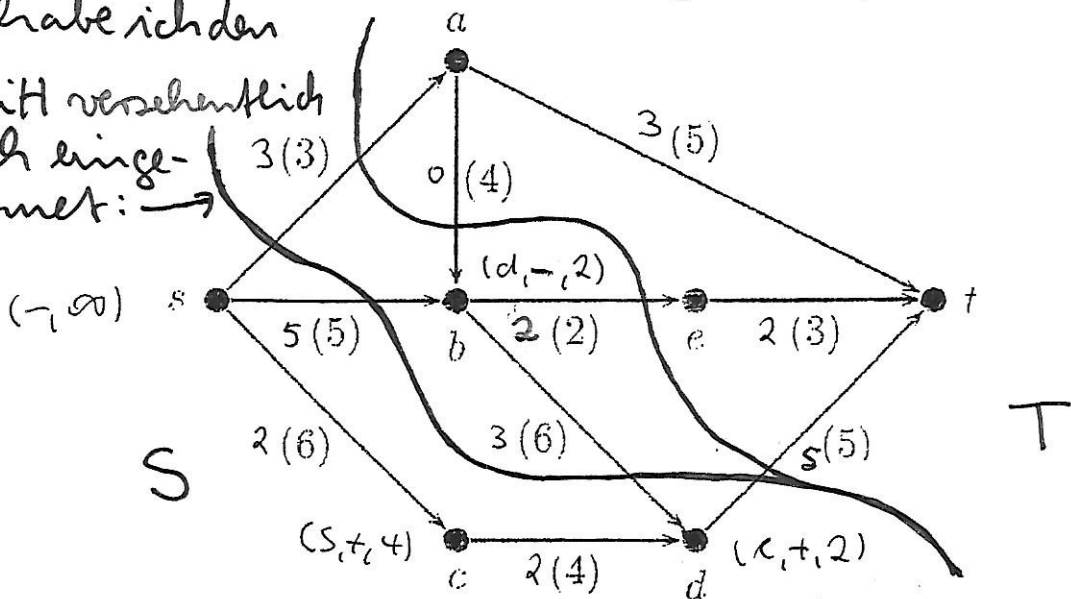


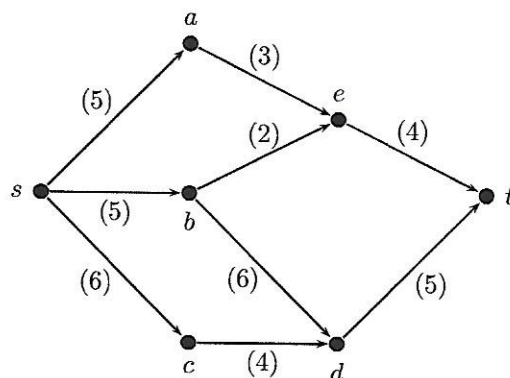
Abbildung 4: $w(f_3) = 10$.

Es folgt $S = \{s, c, d, b\}$, $T = \{a, e, t\}$ mit

$w(f_3) = c(S, T) = 10$; insbesondere: f_3 ist optimal.

B: Hausaufgaben zum 18./19. Dezember 2017

1. Wie Präsenzaufgabe 2 für das folgende Netzwerk:



Hinweis: Beachten Sie immer (5') (Skript, Seite 122)! Für die Zeilen (6)–(9) bzw. (10)–(13) gilt die übliche Regel: Gibt es mehrere Kandidaten für den nächsten zu markierenden Knoten, so ist die alphabetische Reihenfolge entscheidend.

Im Skript wurde auf Seite 123 von Abbildung 9.1 ausgegangen. Es ergaben sich anschließend die Abbildungen 9.2 – 9.11. Ganz entsprechend gehen wir hier von dem obigen Netzwerk aus; es ergeben sich die folgenden Figuren:

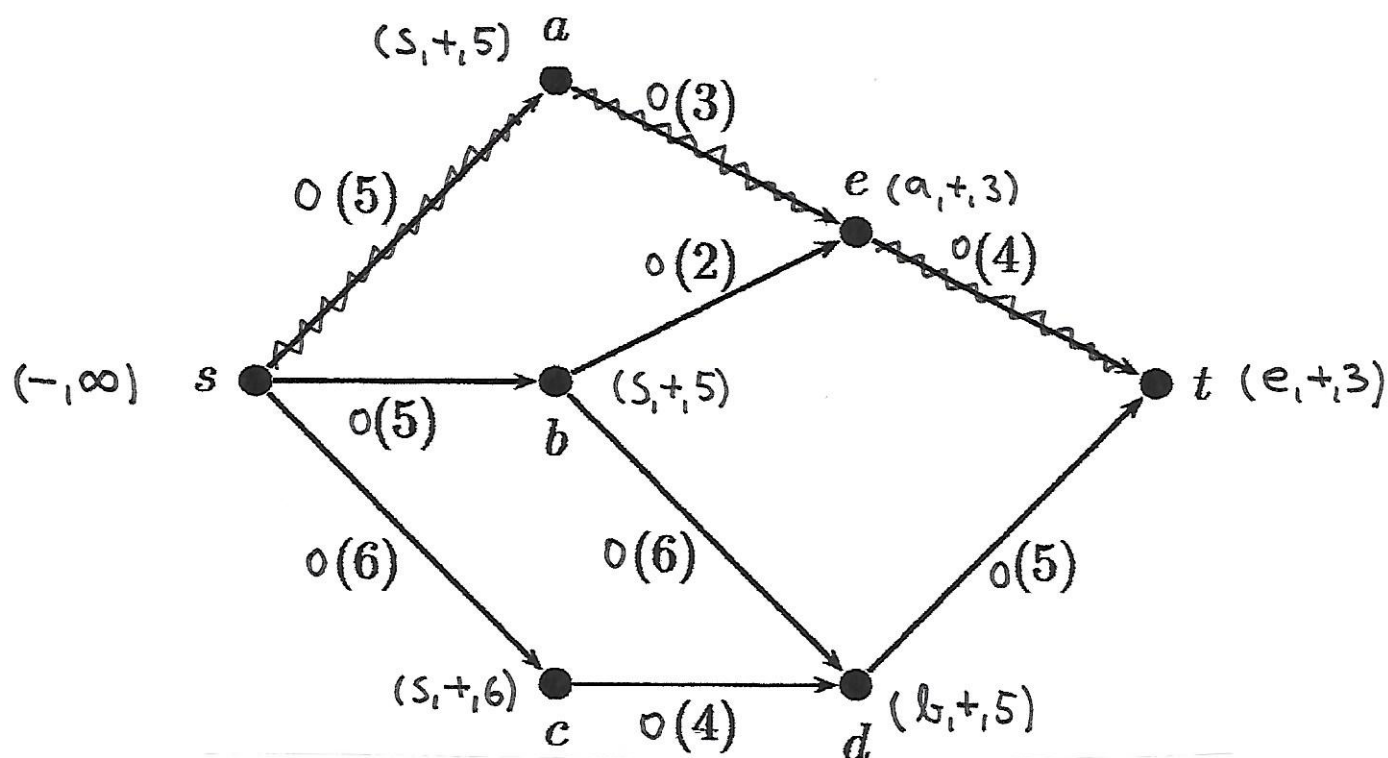


Abbildung 1: $w(f_0) = 0$

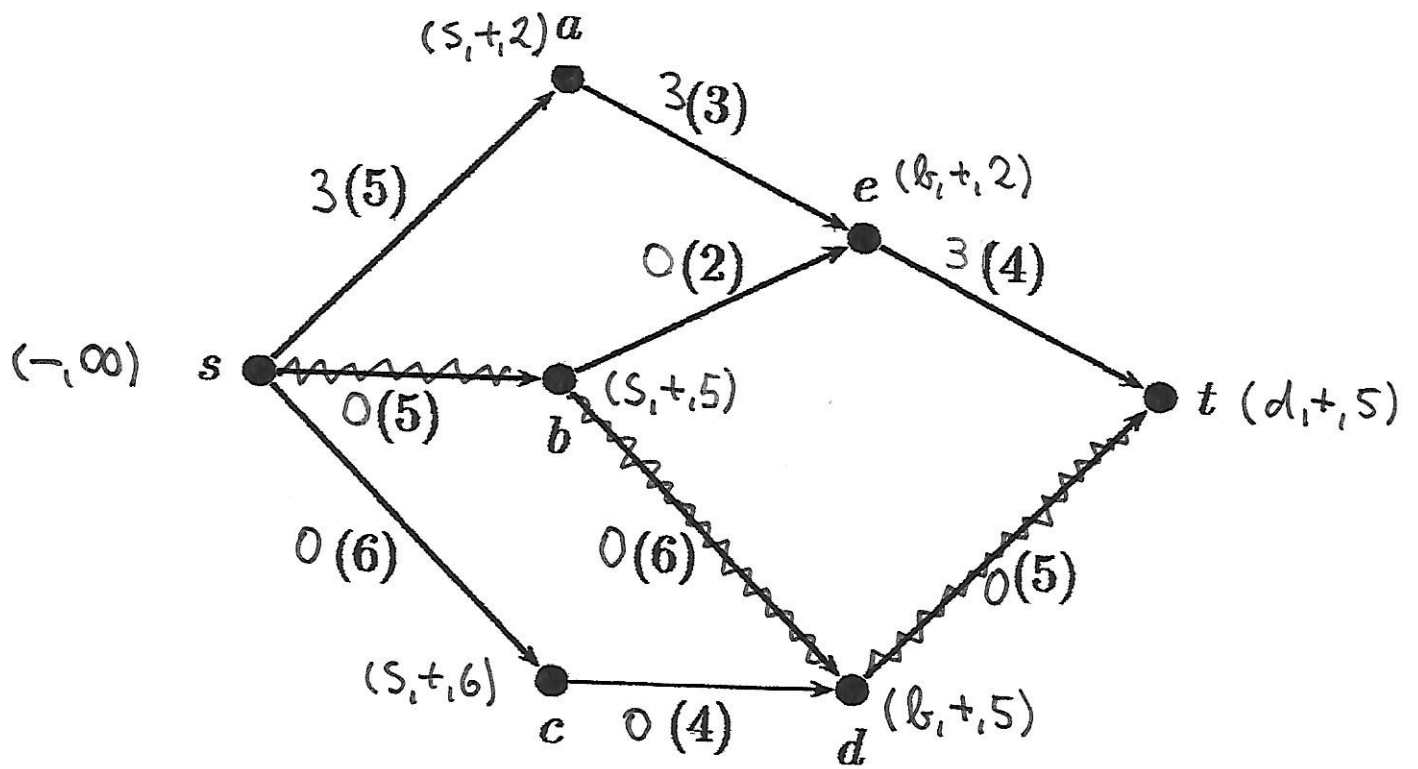


Abbildung 2: $w(f_1) = 3$

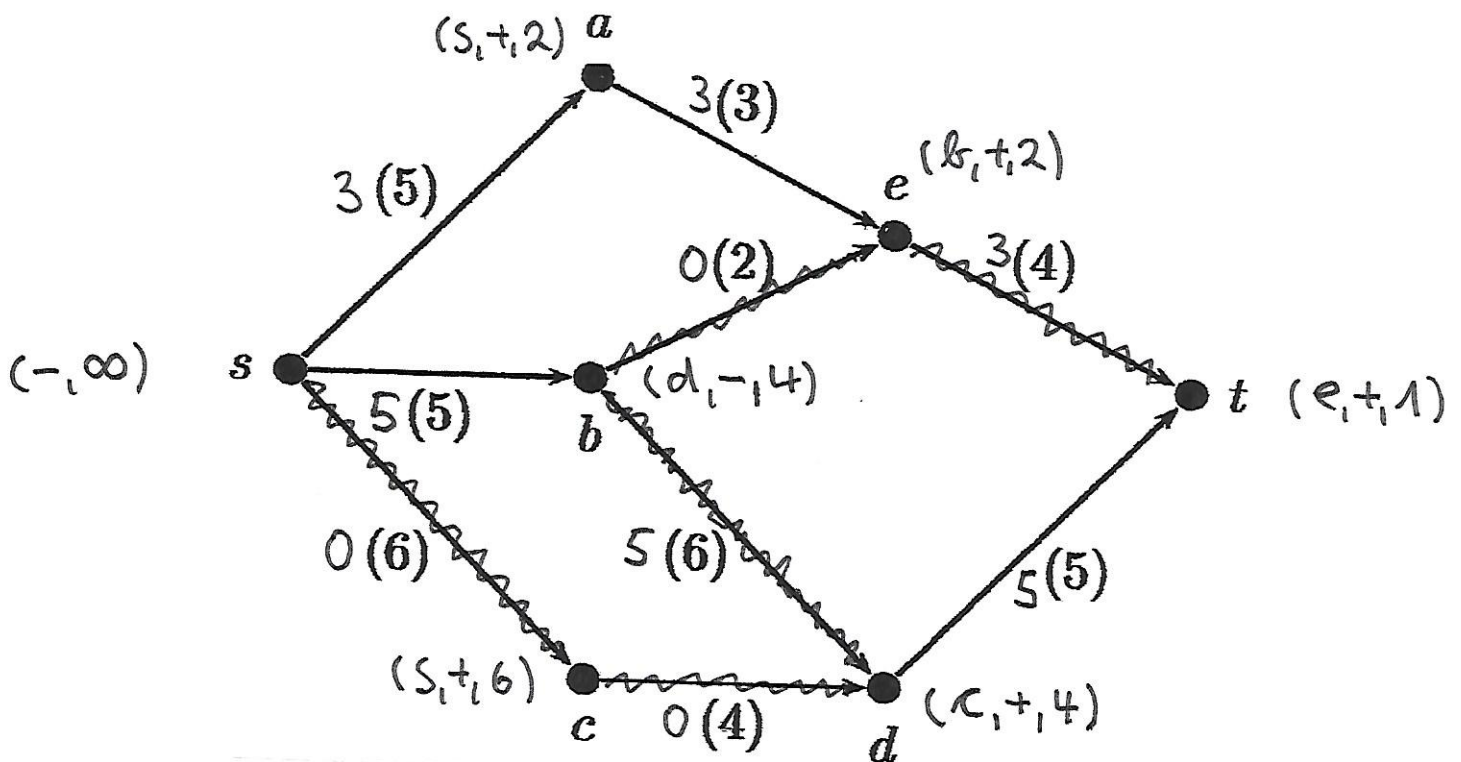


Abbildung 3: $w(f_2) = 8$

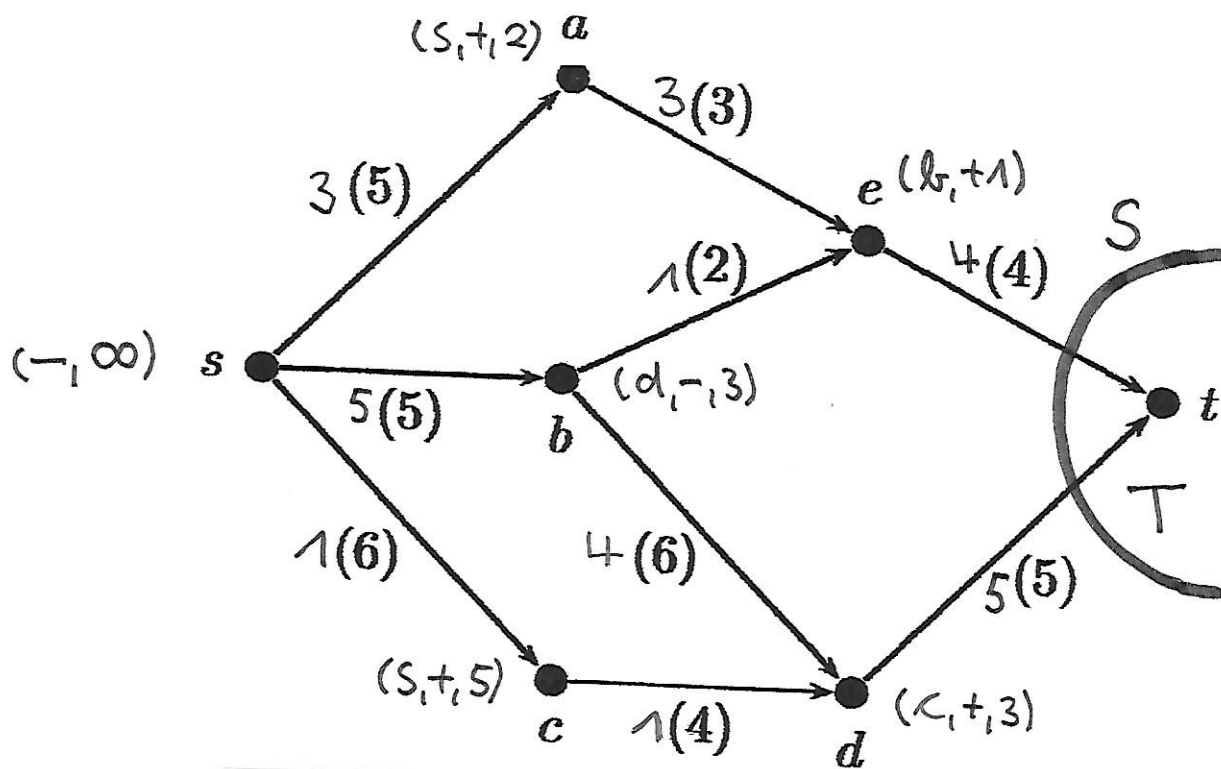
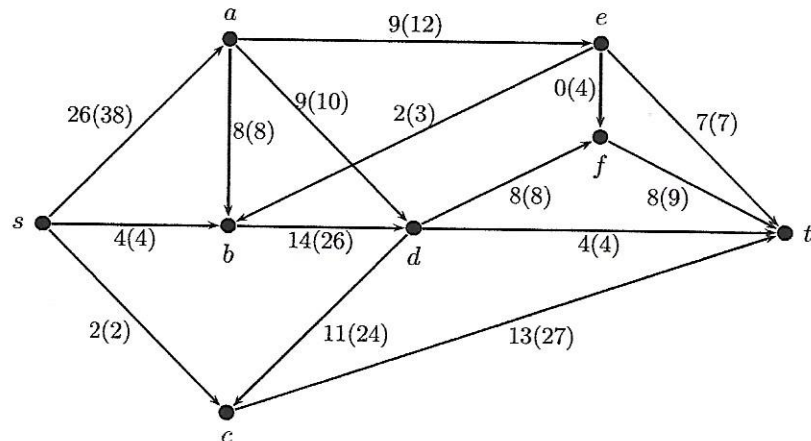


Abbildung 4: $w(f_3) = 9 = c(S, T)$ mit
 $S = \{s, a, b, c, d, e\}, T = \{t\}$.

2. Bearbeiten Sie die folgende Klausuraufgabe aus dem WS 2015/16:

- a) Wir betrachten das folgende Netzwerk N , in dem die Kapazitäten in Klammern angegeben sind; die Zahlen ohne Klammern bezeichnen den aktuellen Fluss, den wir f_1 nennen. Wie üblich seien s und t die Quelle bzw. die Senke des Netzwerks.



Es soll der Algorithmus von Edmonds und Karp angewendet werden, wobei nur die nächste Flussvergrößerung betrachtet wird. Um f_1 zu verbessern, werden auf die übliche Art Knotenmarkierungen vorgenommen, beispielsweise erhält s die Markierung $(-, \infty)$ und a erhält die Markierung $(s, +, 12)$.

- (i) In welcher Reihenfolge werden die Knoten markiert? (Regel: Ist diese Reihenfolge durch den Algorithmus von Edmonds und Karp nicht festgelegt, so ist die alphabetische Reihenfolge entscheidend.) Geben Sie für jeden Knoten die zugehörige Markierung an! Gibt es Knoten, die unmarkiert bleiben?
- (ii) Geben Sie den zunehmenden Pfad P an, der zur Flussvergrößerung führt und geben Sie auch den verbesserten Fluss f_2 an. (Es genügt, $f_2(e)$ für diejenigen Kanten anzugeben, für die $f_2(e) \neq f_1(e)$ gilt.)

a) (ii) Den Knoten wird in der folgenden Reihenfolge die angegebene Markierung zugeordnet:

s	$(-, \infty)$
a	$(s, +, 12)$
d	$(a, +, 1)$
e	$(a, +, 3)$
c	$(d, +, 1)$
b	$(d, -, 1)$
f	$(e, +, 4)$
t	$(c, +, 1)$

Knoten, die unmarkiert bleiben, gibt es nicht.

(ii) $P: s \rightarrow a \rightarrow d \rightarrow c \rightarrow t$

Neuer Fluss: $f_2(s, a) = 27, f_2(a, d) = 10,$
 $f_2(d, c) = 12, f_2(c, t) = 14.$

- b) Führt man den Ford-Fulkerson-Algorithmus zur Bestimmung eines Maximalflusses in einem Netzwerk aus, so erhält man im letzten Schritt einen minimalen Schnitt (S, T) . Woran erkennt man, welche Knoten zu S und welche zu T gehören? (Geben Sie eine kurze und präzise Antwort.)

S ist die Menge der Knoten, die am Schluss markiert sind; T ist die Menge der restlichen Knoten.