L.45

Optimierung für Studierende der Informatik

Thomas Andreae

Wintersemester 2017/18

Blatt 7

B: Hausaufgaben zum 11./12. Dezember 2017

1. Lösen Sie das folgende LP-Problem mit dem revidierten Simplexverfahren:

$$\begin{array}{l} \text{maximiere } 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ \text{unter den Nebenbedingungen} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & \leq & 8 \\ x_2 + 2x_3 & \leq & 12 \\ x_2 + x_3 & \leq & 7 \\ x_1, x_2, x_3 & \geq & 0. \end{array}$$

<u>Eingangsdaten:</u>

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$c^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Initialisierung:

$$x_B^* = \begin{pmatrix} x_4^* \\ x_5^* \\ x_6^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_4 & x_5 & x_6 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

1. Iteration

1. Schritt:

Die Lösung des Gleichungssystems $y^T B = c_B^T$ lautet $y^T = (0\ 0\ 0)$.

2. Schritt: Es gilt $A_N = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$, $y^T A_N = (0\,0\,0)$ und $c_N^T = (2\ 3\ 2)$. Wir wählen als Eingangsspalte

$$a = \begin{array}{c} x_2 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array};$$

Eingangsvariable ist demnach x_2.

3. Schritt: Die Lösung des Gleichungssystems $Bd = a$ lautet $d = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. Schritt: Die Ungleichung $x_B^* - td \geq 0$ lautet

$\begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Das größte t, das dies erfüllt ist $t = 7$. Für $t = 7$ gilt $\begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$;

Ausgangsvariable ist demnach x_6.

5. Schritt (Update):

$$x_B^* = \begin{pmatrix} x_4^* \\ x_5^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_4 & x_5 & x_2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

2. Iteration

1. Schritt:

Das Gleichungssystem $y^T B = c_B^T$ lautet

$$\begin{aligned} y_1 \quad\quad\quad &= 0 \\ y_2 \quad\quad &= 0 \\ y_1 + y_2 + y_3 &= 3. \end{aligned}$$

Lösung: $y^T = (0 \;\; 0 \;\; 3)$.

2. Schritt:

Es gilt $A_N = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_3 & x_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$, $y^T A_N = (0\ \ 3\ \ 3)$ und $c_N^T = (2\ \ 2\ \ 0)$. Man erhält die Eingangsspalte $a = \begin{array}{c} x_1 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$; Eingangsvariable ist x_1.

3. Schritt:

Das Gleichungssystem $Bd = a$ lautet

$$\begin{aligned} d_1 \qquad + d_3 &= 1 \\ d_2 + d_3 &= 0 \\ d_3 &= 0 \end{aligned}$$

Lösung: $d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

4. Schritt:

Die Ungleichung $x_B^* - td \geq 0$ lautet

$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Das größte t, das dies erfüllt ist $t = 1$. Für $t = 1$ gilt $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$.
Ausgangsvariable ist x_4.

5. Schritt (Update):

$$x_B^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_5^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_5 & x_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

3. Iteration

1. Schritt:

Das Gleichungssystem $y^T B = c_B^T$ lautet

$$\begin{aligned} y_1 \qquad\qquad &= 2 \\ y_2 \qquad &= 0 \\ y_1 + y_2 + y_3 &= 3 \end{aligned}$$

Lösung: $y^T = (2\ 0\ 1)$

2. Schritt:

Es gilt $A_N = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_3 & x_4 & x_6 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$, $y^T A_N = (1\ 2\ 1)$ und

$c_N^T = (2\ 0\ 0)$. Man erhält die Eingangsspalte $a = \begin{array}{c} x_3 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$

und die Eingangsvariable x_3.

3. Schritt:

Das Gleichungssystem $Bd = a$ lautet

$$\begin{aligned} d_1 + \qquad\quad d_3 &= 0 \\ d_2 + d_3 &= 2 \\ d_3 &= 1. \end{aligned}$$

Lösung: $d = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. Schritt:

Die Ungleichung $x_B^* - td \geq 0$ lautet

$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Das größte t, das dies erfüllt ist $t=5$. Für $t=5$ gilt $\begin{pmatrix}1\\5\\7\end{pmatrix}-t\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\0\\2\end{pmatrix}$.

Ausgangsvariable ist x_5.

<u>5. Schritt (Update):</u>

$$x_B^*=\begin{pmatrix}x_1^*\\x_3^*\\x_2^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\5\\2\end{pmatrix} \text{ und } B=\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}x_1 & x_3 & x_2\end{array}\\ \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 2 & 1\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}\end{array}$$

4. Iteration

<u>1. Schritt:</u>

Das Gleichungssystem $y^TB=c_B^T$ lautet

$$\begin{aligned} y_1 \qquad\qquad &= 2\\ 2y_2+y_3 &= 2\\ y_1+y_2+y_3 &= 3. \end{aligned}$$

Lösung: $y^T=(2\ 1\ 0)$.

<u>2. Schritt:</u>

Es gilt $A_N=\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}x_4 & x_5 & x_6\end{array}\\ \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\end{array}$, $y^TA_N=(2\ 1\ 0)$

und $c_N^T=(0\ \ 0\ \ 0)$. Es folgt, dass die aktuelle Lösung optimal ist.

Die optimale Lösung lautet

$x_1^*=6$, $x_2^*=2$, $x_3^*=5$ mit $z^*=2x_1^*+3x_2^*+2x_3^*=$

$2\cdot 6+3\cdot 2+2\cdot 5=28$.

L.51

2. Lösen Sie das folgende LP-Problem mit dem revidierten Simplexverfahren:

$$\begin{aligned}&\text{maximiere } 6x_1 - 9x_2 + x_3 - 11x_4\\ &\text{unter den Nebenbedingungen}\\ &\qquad 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 7x_4 \le 1\\ &\qquad 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \le 3\\ &\qquad x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0.\end{aligned}$$

Eingangsdaten:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 & -7 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$c^T = (6 \ -9 \ 1 \ -11 \ 0 \ 0).$$

Initialisierung:

$$x_B^* = \begin{pmatrix} x_5^* \\ x_6^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

1. Iteration

1. Schritt:

Die Lösung des Gleichungssystems $y^T B = c_B^T$ lautet $y^T = (0 \ 0)$.

2. Schritt:

Es gilt $A_N = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 & -7 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$, $y^T A_N = (0000)$ und $c_N^T = (6 \ -9 \ 1 \ -11)$. Wir wählen als Eingangsspalte

$$a = \begin{array}{c} x_1 \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Eingangsvariable ist also x_1. (Man beachte: Es gilt $c_N^T - y^T A_N = (6 \ -9 \ 1 \ -11)$. Als Eingangsvariable kommen demnach x_1 und x_3 infrage. Aufgrund der Regel vom größten Koeffizienten fiel die Wahl auf x_1.)

3. Schritt:

Das Gleichungssystem $Bd=a$ lautet

$$\begin{aligned} d_1 \quad &= 2 \\ d_2 &= 2. \end{aligned}$$

Lösung: $d=\binom{2}{2}$.

4. Schritt:

Die Ungleichung $x_B^* - td \geq 0$ lautet

$\binom{1}{3} - t\binom{2}{2} \geq \binom{0}{0}$. Das größte t, das dies erfüllt, ist $t=\frac{1}{2}$. Für $t=\frac{1}{2}$ gilt $\binom{1}{3} - t\binom{2}{2} = \binom{0}{2}$.

Ausgangsvariable ist x_5.

5. Schritt (Update):

$$x_B^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_6^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{array}{cc} x_1 & x_6 \\ \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Iteration

1. Schritt: Das Gleichungssystem $y^T B = c_B^T$ lautet

$$\begin{aligned} 2y_1 + 2y_2 &= 6 \\ y_2 &= 0. \end{aligned}$$

Lösung: $y^T = (3 \quad 0)$.

2. Schritt: Es gilt $A_N = \begin{array}{cccc} x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \begin{pmatrix} -3 & -1 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$,

$y^T A_N = (-9 \quad -3 \quad -21 \quad 3)$ und $c_N^T = (-9 \quad 1 \quad -11 \quad 0)$.

Als Eingangsspalte wählen wir $a = \begin{array}{c} x_4 \\ \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix} \end{array}$;

x_4 ist also die Eingangsvariable.

(Man beachte: Es gilt $c_N^T - y^T A_N = (0\ 4\ 10\ -3)$. Aufgrund der Regel vom größten Koeffizienten fiel die Wahl auf x_4.)

<u>3. Schritt</u>: Das Gleichungssystem $Bd = a$ lautet

$$\begin{aligned} 2d_1 \quad &= -7 \\ 2d_1 + d_2 &= 3. \end{aligned}$$

Lösung: $d = \begin{pmatrix} -7/2 \\ 10 \end{pmatrix}$.

<u>4. Schritt</u>:

Die Ungleichung $x_B^* - td \geq 0$ lautet

$\begin{pmatrix} 1/2 \\ 2 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} -7/2 \\ 10 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Das größte t, das dies erfüllt, ist $t = \frac{1}{5}$. Für $t = \frac{1}{5}$ gilt

$$\begin{pmatrix} 1/2 \\ 2 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} -7/2 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6/5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ausgangsvariable ist x_6.

<u>5. Schritt</u> (Update):

$$x_B^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_4^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6/5 \\ 1/5 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{array}{cc} \quad x_1 & x_4 \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}} \end{array}.$$

3. Iteration

1. Schritt: Das Gleichungssystem $y^T B = c_B^T$ lautet

$$2y_1 + 2y_2 = 6$$
$$-7y_1 + 3y_2 = -11$$

Lösung: $y^T = (2\ 1)$.

2. Schritt:

Es gilt $A_N = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_2 & x_3 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$,

$y^T A_N = (-5\ \ -1\ \ 2\ \ 1)$ und $c_N^T = (-9\ 1\ 0\ 0)$.

Es folgt:

Eingangsspalte ist $a = \begin{array}{c} x_3 \\ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$ und x_3 ist die Eingangsvariable.

3. Schritt:

Das Gleichungssystem $Bd = a$ lautet

$$2d_1 - 7d_2 = -1$$
$$2d_1 + 3d_2 = 1.$$

Lösung: $d = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}$.

4. Schritt: Die Ungleichung $x_B^* - td \geq 0$ lautet

$\begin{pmatrix} 6/5 \\ 1/5 \end{pmatrix} - t\begin{pmatrix} 1/5 \\ 1/5 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Das größte t, das dies erfüllt ist $t = 1$. Für $t = 1$ gilt $\begin{pmatrix} 6/5 \\ 1/5 \end{pmatrix} - t\begin{pmatrix} 1/5 \\ 1/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Also: x_4 ist die Ausgangsvariable.

5. Schritt (Update):

$$x_B^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{array}{cc} x_1 & x_3 \\ \end{array}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Iteration

1. Schritt:

Das Gleichungssystem $y^T B = c_B^T$ lautet

$$2y_1 + 2y_2 = 6$$
$$-y_1 + y_2 = 1.$$

Lösung: $y^T = (1 \;\; 2)$.

2. Schritt:

Es gilt $A_N = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_2 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -3 & -7 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$, $y^T A_N = (-1 \; -1 \; 1 \; 2)$

und $c_N^T = (-9 \; -11 \; 0 \; 0)$.

Kein Eintrag von c_N^T ist größer als der entsprechende Eintrag von $y^T A_N$. Das bedeutet: Die aktuelle Lösung ist optimal.

Die optimale Lösung lautet

$$x_1^* = 1,\, x_2^* = 0,\, x_3^* = 1,\, x_4^* = 0 \text{ mit } z^* = 7.$$