

Optimierung für Studierende der Informatik  
Thomas Andreae

Wintersemester 2017/18  
Blatt 6

B: Hausaufgaben zum 4./5. Dezember 2017

1. a) Gegeben sei das folgende LP-Problem, das wir (P) nennen wollen:

$$\begin{aligned} \text{maximiere} \quad & x_1 + 2x_2 - 3x_3 \quad + \quad x_5 - x_6 \\ \text{unter den Nebenbedingungen} \quad & \\ & 3x_1 - x_2 + 9x_3 + x_4 - x_5 + 2x_6 \leq -11 \\ & -x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 \geq 4 \\ & 7x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 + x_5 = 2 \\ & x_2, x_5, x_6 \geq 0. \end{aligned}$$

Bilden Sie das zu (P) duale Problem (D), indem Sie das *Dualisierungsrezept* verwenden.

a) Wir formulieren zunächst die zweite Nebenbedingung um; sie lautet nach Umformung

$$x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 \leq -4$$

Anwendung des Dualisierungsrezepts ergibt

$$\begin{aligned} \text{minimiere} \quad & -11y_1 - 4y_2 + 2y_3 \\ \text{unter den Nebenbedingungen} \quad & \end{aligned}$$

$$3y_1 + y_2 + 7y_3 = 1 \quad (D)$$

$$-y_1 + y_2 + y_3 \geq 2$$

$$9y_1 - 2y_2 + 4y_3 = -3$$

$$y_1 - y_2 - 2y_3 = 0$$

$$-y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 1$$

$$2y_1 \geq -1$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

b) Nun sei mit (P) das folgende Problem bezeichnet:

$$\begin{aligned}
 &\text{minimiere } 5x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 \\
 &\text{unter den Nebenbedingungen} \\
 &7x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 5 \\
 &x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\
 &x_1 + x_3 \geq 6 \\
 &x_1 - 3x_2 + x_3 \leq 4 \\
 &2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 8 \\
 &-4x_1 + 3x_2 \geq 1 \\
 &x_1 + 2x_2 + x_3 + 7x_4 \geq -10 \\
 &x_1, x_3 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Bilden Sie wieder das zu (P) duale Problem (D), indem Sie das *Dualisierungsrezept* verwenden (diesmal „von rechts nach links“).

b) Wir multiplizieren die erste und vierte Nebenbedingung mit  $-1$  und wenden das Dualisierungsrezept „von rechts nach links“ an. Das dadurch erhaltene LP-Problem (D) lautet wie folgt:

$$\text{maximiere } -5y_1 + 9y_2 + 6y_3 - 4y_4 + 8y_5 + y_6 - 10y_7$$

unter den Nebenbedingungen

$$-7y_1 + y_2 + y_3 - y_4 + 2y_5 - 4y_6 + y_7 \leq 5$$

$$y_1 + y_2 + 3y_4 + y_5 + 3y_6 + 2y_7 = -2$$

$$-y_1 + y_2 + y_3 - y_4 - y_5 + y_7 \leq 1$$

$$-2y_1 + y_5 + 7y_7 = 1$$

$$y_1, y_3, y_4, y_6, y_7 \geq 0$$

2. a) Wir greifen das *Kantinenleiterproblem* aus Aufgabe 2a) von Blatt 1 auf. Lösen Sie dieses Problem mithilfe des folgenden Tools:

<http://www.zweigmedia.com/RealWorld/simplex.html>.

- b) Lösen Sie mit dem angegebenen Tool auch das *Salatproblem* aus Aufgabe 2b) von Blatt 1.  
 c) Lösen Sie mit dem angegebenen Tool auch das Problem des Eiscremeherstellers von Blatt 1.  
 d) Lösen Sie mit dem angegebenen Tool ebenfalls Pauls Diätproblem (Skript Seite 6).

Auf den Seiten 43 und 44 finden Sie die Lösungen.

### Kommentare

- a) Der Kantinenleiter kocht preiswert – aber wird es auch schmecken? Auf dem Speiseplan stehen Fisch mit Weißbrot, Schwarzbrot und Margarine. Zum Nachtrisch gibt es reichlich Backpflaumen. Guten Appetit! Verbesserungsvorschlag: Eine Obergrenze für Backpflaumen könnte nicht schaden.
- b) Der Salat besteht aus Kopfsalat, Spinat und Öl. Das hält nicht nur schlank, sondern ist auch schmackhaft. Allerdings könnte es etwas weniger Spinat sein (Obergrenze!). Möchte man auch Tomaten und Möhren dabei haben, so wären Untergrenzen hierfür einzuführen.
- c) Optimale Lösung: 40 Einheiten von Sorte A werden in Überstunden veredelt – der Rest von A wird als einfache Eiscreme verkauft. Alle 400 Einheiten der Sorte B werden in regulärer Arbeitszeit veredelt. Von Sorte C werden 20 Einheiten in regulärer Arbeitszeit veredelt und der Rest in Überstunden.

Bei dieser Strategie streicht der Eiscremehersteller einen Gewinn von  $6360\text{€} + 4550\text{€} = 10910\text{€}$  ein.



- d) Paul kann sehr zufrieden sein. Seine angestrebte preiswerte Mahlzeit besteht aus Haferflocken, Milch, Bohnen und Kirschkuchen. Das wird ihm sicher schmecken – und mit ca. 583 Cent kommt er gut weg.

a) Kantinenleiter

Minimize  $c = 100x_1 + 100x_2 + 110x_3 + 59x_4 + 119x_5 + 90x_6 + 98x_7 + 65x_8$  subject to

$$27x_1 + 40x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 25x_5 + 10x_6 + 9x_7 \geq 80$$

$$6x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 43x_5 + 13x_6 + 50x_7 + 89x_8 \geq 90$$

$$37x_3 + 58x_4 + 63x_6 + 4x_7 \geq 300$$

$$x_4 + x_6 \leq 0.7$$

$$-2x_4 + x_6 \geq 0$$

Optimal Solution:

$$c = 973.358; x_1 = 0, x_2 = 1.15356, x_3 = 6.94775, x_4 = 0.233333, x_5 = 0, x_6 = 0.466667, x_7 = 0, x_8 = 0.58436$$


---

b) Salatproblem

Minimize  $p = 29x_1 + 346x_2 + 14x_3 + 400x_4 + 999x_5$  subject to

$$5.46x_1 + 80.70x_2 + 2.36x_3 + 74.69x_4 \geq 7$$

$$0.39x_1 + 1.58x_2 + 0.20x_3 + 1.39x_4 + 100x_5 \geq 4$$

$$0.39x_1 + 1.58x_2 + 0.20x_3 + 1.39x_4 + 100x_5 \leq 7$$

$$0.58x_1 + 8.33x_2 + 1.62x_3 + 12.78x_4 \geq 25$$

$$7.00x_1 + 508.20x_2 + 8.00x_3 + 7.00x_4 \leq 90$$

$$-0.15x_1 - 0.15x_2 + 0.85x_3 - 0.15x_4 - 0.15x_5 \leq 0$$

$$x_1 - x_2 \geq 0$$

Optimal Solution:

$$p = 782.714; x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0.339852, x_4 = 1.9131, x_5 = 0.0127282$$


---

c) Eiscremehersteller

Maximize  $p = 6x_1 + 3x_2 + 8x_3 + 3x_4 + 9x_5 + 5x_6$  subject to

$$x_1 + x_2 \leq 480$$

$$x_3 + x_4 \leq 400$$

$$x_5 + x_6 \leq 230$$

$$x_1 + x_3 + x_5 \leq 420$$

$$x_2 + x_4 + x_6 \leq 250$$

Optimal Solution:  $p = 4550$ ;  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 40$ ,  $x_3 = 400$ ,  $x_4 = 0$ ,  $x_5 = 20$ ,  $x_6 = 210$

---

d) Pauls Diätproblem

Minimize  $p = 25a + 130b + 85c + 70d + 95e + 98f$  subject to

$$a \leq 4$$

$$b \leq 3$$

$$c \leq 2$$

$$d \leq 8$$

$$e \leq 2$$

$$f \leq 2$$

$$110a + 205b + 160c + 160d + 420e + 260f \geq 2000$$

$$4a + 32b + 13c + 8d + 4e + 14f \geq 55$$

$$2a + 12b + 54c + 285d + 22e + 80f \geq 800$$

Optimal Solution:  $p = 583.027$ ;  $a = 4$ ,  $b = 0$ ,  $c = 0$ ,  $d = 2.23295$ ,  $e = 2$ ,  $f = 1.39511$

---