

2.3 Εφαρμογή Στοιβάς: Αντίστροφη Πολωνική Γραφή

Όπως είναι γνωστό, οι αριθμητικές εκφράσεις αποτελούνται από **τελεστές (operators)** και μεταβλητές ή **τελεστέους (operands)**. Οι τελεστές διακρίνονται σε **δυναδικούς (binary)** και **μοναδικούς (unary)**. Δυναδικοί ονομάζονται οι τελεστές που αφορούν δύο μεταβλητές ή τελεστέους, ενώ μοναδικοί ονομάζονται οι τελεστές που αφορούν έναν τελεστέο. Συνήθως, όταν παριστάνουμε αριθμητικές εκφράσεις, ο μοναδικός τελεστής τίθεται πριν από τον τελεστέο και ο δυναδικός τελεστής μεταξύ των δύο τελεστέων, δηλαδή χρησιμοποιείται ο **ένθετος** ή **ενδοθεματικός** τρόπος παράστασης (**infix notation**). Αυτή η μορφή χρησιμοποιείται και στις περισσότερες γλώσσες προγραμματισμού. Κατά την μεταγλώττιση (compilation), όμως, του πηγαίου κώδικα σε εντολές γλώσσας μηχανής, οι αριθμητικές εκφράσεις μετατρέπονται πρώτα από την ενδοθεματική στην **επιθεματική** ή **μεταθεματική** μορφή (**postfix notation**) και μετά υπολογίζονται. Στην μεταθεματική μορφή, οι τελεστές έπονται των τελεστέων. Για παράδειγμα, η παρακάτω αριθμητική έκφραση που είναι γραμμένη σε ενδοθεματική μορφή

$$A * B - \Gamma + \Delta$$

θα γραφεί

$$A B * \Gamma - \Delta +$$

σε μεταθεματική μορφή.

Αυτή η διαδικασία δύο βημάτων, δηλαδή α) μετατροπή από την ενδοθεματική μορφή στην μεταθεματική και β) υπολογισμός της έκφρασης, ακολουθείται επειδή η μετατροπή από την ενδοθεματική στην μεταθεματική μορφή γίνεται κατευθείαν και μηχανικά είναι πιο εύκολο να υπολογιστεί μια έκφραση σε μεταθεματική μορφή παρά σε ενδοθεματική.

Όταν χρησιμοποιείται η ενδοθεματική μορφή, χρειάζεται συχνά να χρησιμοποιηθούν παρενθέσεις για να καθορίσουν τη σειρά με την οποία θα εκτελεστούν οι πράξεις. Για παράδειγμα, η έκφραση

$$A * (B - \Gamma)$$

δείχνει ότι πρώτα πρέπει να γίνει η αφαίρεση και μετά ο πολλαπλασιασμός. Στην περίπτωση που οι παρενθέσεις απουσιάζουν, προκύπτει η έκφραση

$$A * B - \Gamma$$

στην οποία εκτελείται πρώτα ο πολλαπλασιασμός και έπειτα η αφαίρεση, σύμφωνα με τους κανόνες προτεραιότητας στις πράξεις.

Στις αρχές της δεκαετίας του 1950, ο Πολωνός μαθηματικός Jan Lukasiewicz παρατήρησε ότι οι παρενθέσεις δεν είναι απαραίτητες στην μεταθεματική γραφή, η οποία ονομάζεται επίσης **Αντίστροφη Πολωνική Γραφή (Reverse Polish Notation, RPN)**. Για παράδειγμα, η ενδοθεματική έκφραση

$$A * (B - \Gamma)$$

μπορεί να γραφτεί σε Αντίστροφη Πολωνική Γραφή ως εξής:

$$A B \Gamma - *$$

Για να γίνει κατανοητός ο τρόπος υπολογισμού των RPN εκφράσεων, ας πάρουμε για παράδειγμα την έκφραση

$$4 3 - 9 2 5 + - *$$

που αντιστοιχεί στην ενδοθεματική έκφραση

$$(4 - 3) * (9 - (2 + 5))$$

Διατρέχουμε την RPN έκφραση από τα αριστερά προς τα δεξιά μέχρι να συναντήσουμε έναν τελεστή. Οι δύο τελευταίοι τελεστές πριν τον τελεστή συνδυάζονται με τον τελεστή αυτό.

Στο παράδειγμά μας, ο πρώτος τελεστής που συναντάται είναι ο "-" και οι τελεστές που αντιστοιχούν σ' αυτόν είναι οι 4 και 3, όπως φαίνεται με την επισήμανση παρακάτω:

$$\underline{4\ 3} - 9\ 2\ 5 + - *$$

Το αποτέλεσμα της πράξης αυτής είναι 1, οπότε προκύπτει η ακόλουθη RPN έκφραση

$$1\ 9\ 2\ 5 + - *$$

Συνεχίζοντας την αναζήτηση από αριστερά προς δεξιά, συναντάμε τον τελεστή "+" στον οποίο αντιστοιχούν οι τελεστές 2 και 5, όπως φαίνεται και παρακάτω:

$$1\ 9\ \underline{2\ 5} + - *$$

Εκτελώντας την πράξη, παίρνουμε αποτέλεσμα 7 και η αρχική μας έκφραση γράφεται τώρα:

1 9 7 - *

Στην συνέχεια, συναντάμε τον τελεστή "-" με τελεστέους τους 9 και 7, δηλαδή

1 9 7 - *

και μετά από την πράξη της αφαίρεσης, έχουμε

1 2 *

Ο τελευταίος τελεστής είναι ο "*" και σ' αυτόν αντιστοιχούν οι τελεστέοι 1 και 2. Το αποτέλεσμα της πράξης είναι 2 και αυτή είναι και η τιμή της έκφρασης που εξετάζουμε.

Αυτή η μέθοδος υπολογισμού μιας RPN έκφρασης απαιτεί την αποθήκευση των τελεστών μέχρι να συναντήσουμε έναν τελεστή στην από αριστερά προς δεξιά αναζήτηση. Μόλις συναντήσουμε τελεστή, χρειάζεται να ανακτήσουμε τους δυο τελευταίους τελεστέους και να τους συνδυάσουμε με τον τελεστή αυτόν. Κάτι τέτοιο υποθέτει την χρήση μιας τελευταίος μέσα - πρώτος έξω δομής, δηλαδή μιας στοίβας, για την αποθήκευση των τελεστών. Κάθε φορά που συναντάμε έναν τελεστέο, αυτός εισάγεται μέσα στην στοίβα και, μόλις συναντήσουμε τελεστή, οι δυο κορυφαίες τιμές διαγράφονται από τη στοίβα, εφαρμόζεται η πράξη και το αποτέλεσμα εισάγεται στη στοίβα. Η διαδικασία αυτή φαίνεται στον παρακάτω αλγόριθμο.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ RPN ΕΚΦΡΑΣΕΩΝ

/*Δέχεται:	Μία RPN έκφραση.
Λειτουργία:	Υπολογίζει την έκφραση.
Έξοδος:	Η τιμή της RPN έκφρασης.
Σημείωση:	Χρήση στοίβας για την αποθήκευση των τελεστών.*/*

1. Αρχικοποίησε μια κενή στοίβα

2. Επανάλαβε

α. Πάρε τον επόμενο χαρακτήρα /*σταθερά, μεταβλητή, αριθμητικό τελεστή*/ από την RPN έκφραση

β. **Αν** ο χαρακτήρας είναι τελεστέος **τότε**

εισήγαγε τον χαρακτήρα στη στοίβα

Αλλιώς_ αν ο χαρακτήρας είναι τελεστής **τότε**

i. Διάγραψε τις 2 κορυφαίες τιμές της στοίβας

/*Αν η στοίβα έχει λιγότερα από 2 στοιχεία, τότε υπάρχει σφάλμα που οφείλεται σε λανθασμένη μορφή της RPN έκφρασης και ο υπολογισμός τερματίζεται*/

- ii. Εφάρμοσε την πράξη που δηλώνει ο τελεστής, δηλαδή ο τελευταίος χαρακτήρας της PRN έκφρασης, σ' αυτές τις 2 τιμές
- iii. Εισήγαγε το αποτέλεσμα της πράξης στη στοίβα

Τέλος_αν

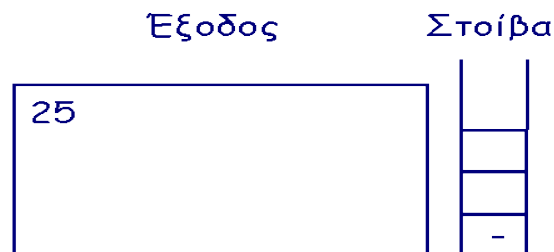
Μέχρις_ότου να φτάσεις στο τέλος της έκφρασης

- 3. Όταν φτάσεις στο τέλος της PRN έκφρασης, η τιμή της βρίσκεται στην κορυφή της στοίβας /*και μάλιστα, πρέπει να είναι η μοναδική τιμή στη στοίβα*/

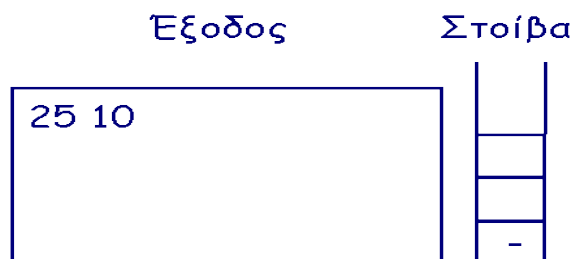
Μια στοίβα μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί και για την μετατροπή μιας έκφρασης από την ενδοθεματική γραφή στην Αντίστροφη Πολωνική Γραφή (RPN). Έστω για παράδειγμα η έκφραση

$$25 - 10 * 2 + 4$$

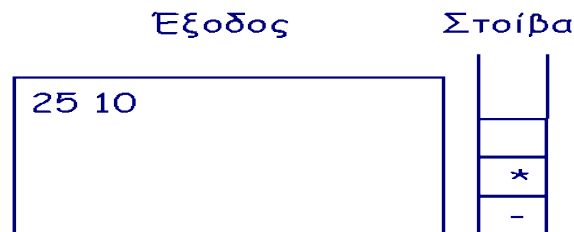
Διατρέχοντας την έκφραση από αριστερά προς δεξιά, συναντάμε πρώτα τον αριθμό 25, ο οποίος μπορεί να εμφανιστεί απευθείας στην έξοδο. Εν συνεχεία συναντάμε τον τελεστή "-". Καθώς όμως δεν έχει εμφανιστεί ακόμα ο δεξιός τελεστέος του (ο αριστερός είναι προφανώς ο αριθμός 25), δεν μπορούμε ακόμα να τον εμφανίσουμε και γι' αυτό χρειάζεται να τον αποθηκεύσουμε, εισάγοντάς τον σε μια στοίβα τελεστών. Παρακάτω φαίνεται ο αριθμός 25 στην έξοδο και ο τελεστής "-" στη στοίβα:



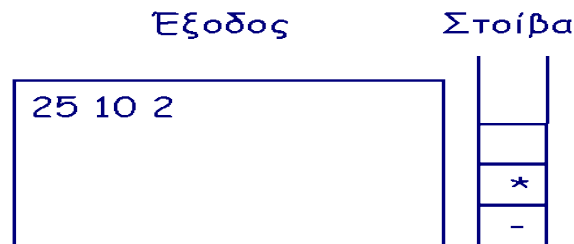
Μετά από το "-" βρίσκεται ο αριθμός 10, ο οποίος μπορεί να εμφανιστεί αμέσως στην έξοδο.



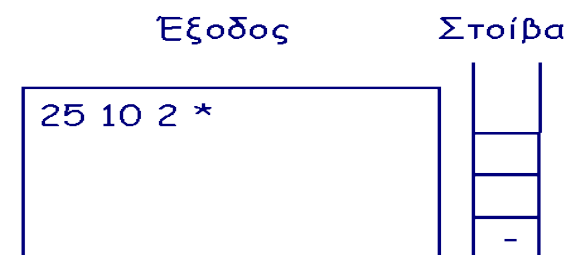
Στο σημείο αυτό, πρέπει να καθοριστεί αν το 10 είναι ο δεξιός τελεστέος του "-", που αποθηκεύσαμε πριν λίγο, ή αν είναι ο αριστερός τελεστέος του επόμενου τελεστή. Συγκρίνοντας τον τελεστή "-", που βρίσκεται στην κορυφή της στοίβας, με τον τελεστή "*", που ακολουθεί, βλέπουμε ότι ο δεύτερος έχει μεγαλύτερη προτεραιότητα από τον πρώτο κι επομένως ο αριθμός 10 είναι ο αριστερός τελεστέος του "*". Άρα ο τελεστής "*" αποθηκεύεται στη στοίβα και συνεχίζουμε για να βρούμε τον δεξιό τελεστέο του.



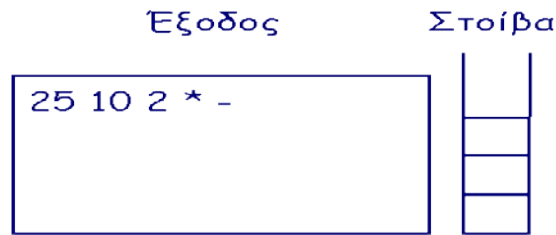
Ακολουθεί ο αριθμός 2, τον οποίο εμφανίζουμε στην έξοδο.



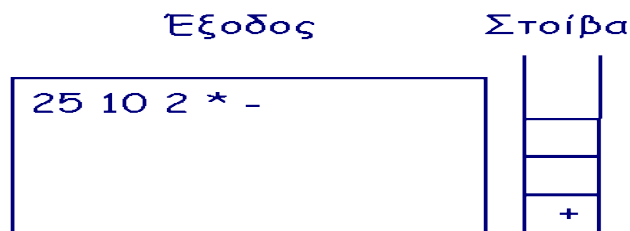
Τώρα πάλι πρέπει να ελέγξουμε αν ο αριθμός 2 είναι ο δεξιός τελεστέος του τελεστή "*" ή ο αριστερός τελεστέος του επόμενου τελεστή. Ο τελεστής που ακολουθεί είναι ο "+" και έχει μικρότερη προτεραιότητα από τον "*", επομένως συμπεραίνουμε ότι ο 2 είναι ο δεξιός τελεστέος του "*". Αφού λοιπόν έχουν εμφανιστεί και ο αριστερός και ο δεξιός τελεστέος του "*", μπορεί να βγει από τη στοίβα και να εμφανιστεί στην έξοδο και ο ίδιος ο τελεστής.



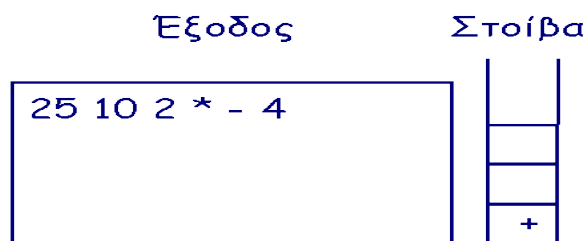
Η παράσταση "10 2 *" αποτελεί τον δεξιό τελεστέο του "-" που αποθηκεύτηκε αρχικά, επομένως βγαίνει και αυτός από τη στοίβα και εμφανίζεται στην έξοδο.



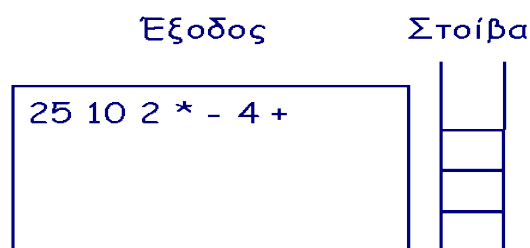
Ο τελεστής "+" πρέπει να αποθηκευτεί στη στοίβα μέχρι να εμφανιστεί ο δεξιός τελεστής του, όπως φαίνεται παρακάτω:



Μετά από τον "+" ακολουθεί ο αριθμός 4, ο οποίος εμφανίζεται απευθείας στην έξοδο.



Φτάσαμε πλέον στο τέλος της αριθμητικής έκφρασης, πράγμα που σημαίνει ότι ο αριθμός 4 είναι ο δεξιός τελεστής του "+" και ότι ο τελεστής "+" βγαίνει από τη στοίβα και εμφανίζεται στην έξοδο.



Έτσι, η στοίβα είναι τώρα κενή και στην έξοδο εμφανίζεται η αριθμητική έκφραση σε μορφή RPN.

Οι παρενθέσεις στις ενδοθεματικές εκφράσεις δεν παρουσιάζουν δυσκολίες. Μια αριστερή παρένθεση υποδηλώνει την αρχή μιας υποέκφρασης και, όταν συναντάται, εισάγεται στη στοίβα των τελεστών. Όταν συναντάται μια δεξιά παρένθεση, διαγράφονται από τη στοίβα οι

τελεστές μέχρις ότου να βρίσκεται στην κορυφή της στοίβας η αντίστοιχη αριστερή παρένθεση. Έτσι, η υποέκφραση, που αρχικά ήταν κλεισμένη μέσα σε παρενθέσεις, έχει μετατραπεί σε RPN μορφή, οπότε οι παρενθέσεις διαγράφονται εντελώς και συνεχίζεται η διαδικασία της μετατροπής. Η μετατροπή μιας αριθμητικής έκφρασης από την ενδοθεματική μορφή στην RPN περιγράφεται στον ακόλουθο αλγόριθμο.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΜΕΤΑΤΡΟΠΗΣ ΜΙΑΣ ΕΝΔΟΘΕΜΑΤΙΚΗΣ ΕΚΦΡΑΣΗΣ ΣΕ RPN

/*Δέχεται:	Μία ενδοθεματική έκφραση.
Λειτουργία:	Μετατρέπει την ενδοθεματική έκφραση σε RPN.
Έξοδος:	Η RPN έκφραση.
Σημείωση:	Χρήση στοίβας για την αποθήκευση των τελεστών.*/*

1. Αρχικοποίησε μια κενή στοίβα τελεστών
2. **Όσο** δεν έχει εμφανιστεί λάθος **και** δεν έχεις φτάσει στο τέλος της έκφρασης **επανάλαβε**
 - α. Πάρε τον επόμενο χαρακτήρα /*σταθερά, μεταβλητή, αριθμητικό τελεστή, αριστερή παρένθεση, δεξιά παρένθεση*/ στην ενδοθεματική έκφραση
 - β. **Επίλεξε** χαρακτήρα
 - Περίπτωση** αριστερή παρένθεση
Εισήγαγε την στη στοίβα
 - Περίπτωση** δεξιά παρένθεση
Διάγραψε και εμφάνισε τα στοιχεία της στοίβας μέχρι να διαγραφεί μια αριστερή παρένθεση, χωρίς όμως να την εμφανίσεις
/*Θα είναι λάθος αν η στοίβα μείνει κενή χωρίς να βρεθεί αριστερή παρένθεση*/
 - Περίπτωση** τελεστής
Αν η στοίβα είναι κενή ή ο χαρακτήρας έχει μεγαλύτερη προτεραιότητα από το κορυφαίο στοιχείο της στοίβας **τότε**
Εισήγαγε τον χαρακτήρα στη στοίβα
 - Αλλιώς**
Διάγραψε και εμφάνισε το κορυφαίο στοιχείο της στοίβας
 - Τέλος_αν**
Επανάλαβε την σύγκριση του χαρακτήρα με το νέο κορυφαίο στοιχείο
/*Σημείωση: Μια αριστερή παρένθεση στη στοίβα θεωρείται ότι

έχει μικρότερη προτεραιότητα από τους τελεστές*/

Περίπτωση τελεστέος

Εμφάνισέ τον

Τέλος_ Επιλογών

Τέλος_ επανάληψης

3. Όταν φτάσεις στο τέλος της αριθμητικής έκφρασης, διάγραψε και εμφάνισε τα στοιχεία της στοίβας μέχρι να αδειάσει η στοίβα

Το πρόγραμμα-πελάτης EvalRPN.c υπολογίζει την τιμή μιας RPN έκφρασης υλοποιώντας τον αντίστοιχο αλγόριθμο που περιγράφηκε προηγουμένως. Για τον ΑΤΔ Στοίβα, χρησιμοποιεί τη διασύνδεση StChADT.h και την υλοποίηση της StChADT.c, που είναι ίδιο με το StackADT.c, με τη διαφορά ότι τα στοιχεία της στοίβας είναι τύπου char.

Η μετατροπή μιας ενδοθεματικής έκφρασης σε RPN μορφή υλοποιείται με το πρόγραμμα-πελάτη InfToRPN.c που χρησιμοποιεί το τη διασύνδεση StChADT.h και την υλοποίηση της StChADT.c.