

Ayrton Veleda Farias

**Um estudo da modelagem epidemiológica SIR
usando conceitos de derivadas de ordem inteira
e fracionária**

Brasil

2017

Ayrton Veleda Farias

Um estudo da modelagem epidemiológica SIR usando conceitos de derivadas de ordem inteira e fracionária

Dissertação apresentado à Universidade Federal do Rio Grande, como parte do trabalho de conclusão do curso, para obtenção do grau de bacharel em Matemática Aplicada.
Orientador: Prof. Fabiana Travessini De Cezaro.
Co-orientador: Prof. Adriano De Cezaro.

Universidade Federal do Rio Grande do Sul - FURG

Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF

Bacharelado em Matemática Aplicada

Brasil

2017



Universidade Federal do Rio Grande – FURG

Instituto de Matemática, Estatística e Física
Curso de Bacharelado em Matemática Aplicada

Av. Itália km 8 Bairro Carreiros
Rio Grande-RS CEP: 96.201-900 Fone (51)3233.5411
e-mail: imef@furg.br Site: www.imef.furg.br



Ata de Defesa de Monografia

Aos sete dias do mês de dezembro de 2017, às 15h30min, na sala 4110, no Campus Carreiros, foi realizada a apresentação pública da defesa do Trabalho de Conclusão de Curso pelo acadêmico **Ayrton Veleda Farias**, sob a orientação da Prof.^a Dr.^a Fabiana Travessini de Cezaro, deste instituto, e intitulada **Um estudo da modelagem epidemiológica SIR usando conceitos de derivadas de ordem inteira e fracionária**. Para participar da banca avaliadora, junto à orientadora, foram convidados o Prof. Dr. Adriano de Cezaro, o Prof. Dr. Matheus Jatkoske Lazo e o Prof. Dr. Luverci do Nascimento Ferreira, ambos docentes do IMEF/FURG. Concluídos os trabalhos de apresentação e arguição, o candidato foi: (X) aprovado por unanimidade; () aprovado somente após satisfazer as exigências que constam na folha de modificações, no prazo fixado pela banca; () reprovado. Na forma regulamentar, foi lavrada a presente ata, que é abaixo assinada pelos membros da banca, na ordem acima relacionada.

Prof.^a Dr.^a Fabiana Travessini de Cezaro
Orientadora

Prof. Dr. Adriano de Cezaro
Membro

Prof. Dr. Matheus Jatkoske Lazo
Membro

Prof. Dr. Luverci do Nascimento Ferreira
Membro

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pela oportunidade de cursar Matemática Aplicada e por nunca ter desistido do que gosto e assim é com grande satisfação que concluo mais uma etapa da minha vida.

A minha família, pais e irmãos que sempre acreditaram em mim.

A minha orientadora e co-orientador, pela a liberdade que me ofereceram ao longo desse trabalho, e por todas as orientações e pela paciência.

Aos professores membros da banca por terem aceitado o convite.

A todos os meus professores do curso, que de alguma forma sempre me motivaram a seguir em frente independente das dificuldades que encontramos.

Aos meus amigos do curso, que sempre estiveram presentes e me motivaram.

Por ultimo a todos meus professores de matemática do ensino básico que enxergaram meu potencial e me incentivaram de alguma forma a fazer o curso de Matemática.

Resumo

Neste trabalho apresentamos um estudo do modelo epidemiológico SIR (Suscetíveis - Infectados - Recuperados), proposto por McKendrick e Kernack em 1927, o qual prevê a propagação de uma doença contagiosa e a interação dos indivíduos envolvidos. Apresentamos a boa colocação do modelo e comparamos as dinâmicas do modelo SIR usando conceitos de cálculo fracionário e inteiro. Mostramos que a introdução de derivadas de ordem não inteira na modelagem da dinâmica SIR apresenta propriedades de memória, a qual está presente em qualquer fenômeno infeccioso e, portanto, sendo uma proposta mais fidedigna a realidade.

Palavras-chaves: Epidemiologia Matemática, Equações Diferenciais Fracionárias, Doenças infecciosas, Modelo SIR.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Esquema compartimental do modelo SIR simples, onde δ e μ são as taxas infecção e recuperação, respectivamente.	23
Figura 2 – Esquema compartimental do modelo SIR simples com dinâmica vital, onde m , δ e μ são as taxas de natalidade (mortalidade), infecção e recuperação, respectivamente.	25
Figura 3 – Esquema compartimental do modelo SIR simples, onde δ , μ e m são as taxas infecções, recuperação e natalidade (mortalidade), respectivamente, e v representa a taxa de vacinação.	25
Figura 4 – Gráficos das soluções para $R_0 = 0,9401$ utilizando a condição inicial (a)	64
Figura 5 – Gráficos das soluções para $R_0 = 0,9401$ utilizando a condição inicial (b)	65
Figura 6 – Gráficos das soluções para $R_0 = 6,25$ sem campanha de vacinação para a condição inicial (a)	67
Figura 7 – Gráficos das soluções para $R_0 = 6,25$ sem campanha de vacinação para a condição inicial (b)	68
Figura 8 – Gráficos das soluções para $R_0 = 6,25$ com campanha de vacinação para a condição inicial (a)	69
Figura 9 – Gráficos das soluções para $R_0 = 6,25$ com campanha de vacinação para a condição inicial (b)	70
Figura 10 – Gráficos das soluções para $R_0 = 6,25$ com campanha de vacinação de 50% para a condição inicial (a)	72
Figura 11 – Gráficos das soluções para $R_0 = 6,25$ com campanha de vacinação de 50% para a condição inicial (b)	73

Lista de tabelas

Tabela 1 – Valores dos parâmetros do sistema (5.1)	63
Tabela 2 – Valores dos parâmetros do sistema (5.1)	66

Sumário

1	CONCEITOS BÁSICOS DE EPIDEMIOLOGIA MATEMÁTICA . . .	11
1.1	Definições básicas de doenças infecciosas	12
1.2	Origem da Epidemiologia Matemática	13
1.3	A vacinação como um meio de controle epidêmico	14
1.4	Conceitos da Modelagem Matemática	15
1.5	Conceitos sobre Dinâmica Populacional de Doenças Infecciosas . . .	16
1.5.1	Incidência ou Força de Infecção	16
1.5.2	Reprodutibilidade Basal	18
2	MODELAGEM EPIDEMIOLÓGICA SIR	20
2.1	Modelo SIR Simples	21
2.2	Modelo SIR com dinâmica vital	22
2.3	Modelo SIR com dinâmica vital e vacinação constante	25
2.4	Modelo SIR completo na forma inteira ou fracionária	26
2.5	Estabilidade local dos pontos de equilíbrio	27
2.5.1	Pontos de equilíbrio	27
2.5.2	Estabilidade dos pontos de equilíbrio	29
3	CONCEITOS DE CÁLCULO FRACIONÁRIO	32
3.1	Conceitos preliminares ou funções especiais	32
3.1.1	Função Gamma e Função Beta	33
3.1.2	Função Mittag-Leffler	34
3.2	Integral Fracionária	35
3.2.1	Transformada de Laplace da Integral Fracionária de Riemann-Liouville . . .	38
3.3	Derivada de ordem Fracionária	38
3.3.1	Transformada de Laplace para Derivada Fracionária	42
4	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS INTEIRA E FRACIONÁRIA	45
4.1	Existência e Unicidade de Solução	45
4.1.1	Existência e Unicidade de EDO's de ordem inteira	46
4.1.2	Existência e unicidade de soluções de EDO's fracionárias	49
4.1.3	Teorema de existência	52
4.1.4	Teorema de Unicidade	57
4.2	Existência e Unicidade do Modelo Epidemiológico	59
4.2.1	Modelo epidemiológico de ordem inteira	59
4.2.2	Modelo epidemiológico de ordem não inteira	60

5	RESULTADOS NUMÉRICOS	62
5.1	Simulações para o ponto de equilíbrio livre da doença E_0	63
5.2	Simulações para o ponto de Equilíbrio Endêmico E_1	66
	Conclusão	74
	REFERÊNCIAS	75

Introdução

Em busca pela sobrevivência nossa história como sociedade humana é marcada por diversas adversidades e desafios. O clima, as guerras, os predadores sempre foram uma preocupação da humanidade, nenhum outro fator traz tanto temor à sociedade quanto as epidemias. Estudos revelam que o número de mortes provocado pelas maiores epidemias é impreciso, mas que quando comparado o número de mortes provocado por todas as guerras é muito maior ([ANDERSON; MAY; ANDERSON, 1992](#)). Um exemplo que melhor sintetize o efeito devastador de doenças infecciosas é a peste negra que levou a morte de um quarto da população Europeia durante os anos de 1347 a 1350 ([ALONSO; MEDICO; SOLÉ, 2003](#)). Outra epidemia que causou milhões de mortes, foi a epidemia mundial da gripe, em que morreram cerca de 20 milhões de pessoas.

A raça humana vem incansavelmente estudando soluções que possam minimizar esses efeitos ([COX; TAMBLYN; TAM, 2003](#)). A Epidemiologia é a ciência que se propõem em estudar quantitativamente a distribuição de fenômenos, que diz respeito a doenças epidêmicas e as suas consequências na população humana. Ela tem como fatores importantes os métodos científicos e o fornecimento de subsídios para criar ações voltadas a prevenção e controle de doenças. Seu desenvolvimento como ciência estabelece um papel importantíssimo para a melhoria das condições de saúde da população humana ([WALDMAN; ROSA, 1998](#)).

O fator mais importante no estudo de doenças infecciosas está relacionado com a melhoria do controle epidêmico de forma a erradicá-las o mais rápido possível. Com isto surgem os modelos matemáticos, ferramentas poderosas nesta abordagem, que nos permitem otimizar o uso de recursos ou simplesmente direcionar para medidas de controle mais eficientes. Na literatura, podemos encontrar diferentes tipos de medidas de controle que funcionam de modo a reduzir a quantidade média da transmissão entre indivíduos infectados e suscetíveis. As estratégias de controle são utilizadas de diferentes modos, dependendo sempre de qual tipo de doença enfrentada, quem é o hospedeiro e qual o grau de dimensão tal epidemia se encontra ([KEELING; ROHANI, 2008](#)).

A imensa necessidade de compreender a proliferação de doenças infecciosas do ponto de vista dinâmico fez surgir uma nova área da ciência denominada de Epidemiologia Matemática. Ela propõe modelos que possam ajudar a traçar políticas de controle dessas doenças. Um dos modelos mais estudados é o modelo compartimental denominado SIR (Suscetível - Infectado - Recuperado) ([KERMACK; MCKENDRICK, 1927](#)). Este modelo SIR nos permite analisar determinadas características dessas doenças infecciosas, tais como, a fase epidêmica, o patamar endêmico em que a doença se encontra e a existência

de limiares nas taxas de propagação para possibilitar a erradicação de doenças infecciosas pelo mecanismo de extinção dos pontos fixos não-nulos ([HETHCOTE, 2000](#)).

Este trabalho tem como dos objetivos principal apresentar um estudo de boa colocação para do modelo epidemiológico SIR (Suscetíveis-Infectados-Recuperados) desenvolvido por McKendrick e Kernack em 1927, para ordem inteira e fracionária. Vamos apresentar a proporção mínima de vacinação para o controle de uma epidemia e fazer uma comparação entre a dinâmica inteira e fracionária usando simulações numéricas. Neste modelo usamos como hipótese que após o individuo adquirir a recuperação, automaticamente adquira também imunidade, ou seja sem risco a uma nova infecção da mesma doença. Algumas das principais doenças que podem ser estudadas por este tipo de modelo são a Rubéola, o Sarampo e a Varíola.

Estruturamos o trabalho da seguinte forma: No capítulo 1 introduzimos os conceitos da Epidemiologia Matemática e os conceitos biológicos que serão utilizados, exemplificando cada um deles. Apresentamos uma breve introdução as origens do estudo nesta área, vacinação como um meio de controle epidêmico e para concluir iremos analisar um conceito importante sobre Dinâmica Populacional, a Força de Infecção e Reprodutibilidade Basal/(Reprodução básica). No capítulo 2 apresentamos a Modelagem Epidemiológica SIR (Suscetíveis-Infectados-Recuperados) com três tipos de modelos SIR diferentes, a saber: o modelo SIR simples, o modelo SIR com Dinâmica Vital sem vacinação e o modelo SIR com vacinação, após o modelo SIR com vacinação em representação de ordem fracionária. Para ultimo, faremos um estudo de estabilidade. No capítulo 3 estudaremos conceitos de calculo fracionário. Apresentamos conceitos preliminares sobre as funções especiais, integral fracionária de Riemann-Liouville, definição de derivada fracionária de Riemann-Liouville e Caputo e transformada de Laplace para integral e derivada fracionaria.

Além disso, mostramos os resultados de existência e unicidade de solução para o modelo o ordem inteira e não inteira. Após ter estabelecido resultados importantes sobre os modelos apresentados, no capítulo 5 apresentaremos alguns resultados numéricos, para o modelo de ordem inteira e para o de ordem fracionária. De posse das soluções apresentadas faremos comparações e interpretações entre estes dois modelos.

1 Conceitos Básicos de Epidemiologia Matemática

A palavra Epidemiologia vem do grego, *epi* que significa sobre, *demos* que significa população e *logos* que significa estudo. Sendo assim, podemos entender a Epidemiologia como o estudo das doenças infecciosas que acometem a população humana ou doenças infecciosas que acometem seres vivos.

Caracterizamos uma doença infecciosa através da presença de um agente microbiano patogênico. Esses agentes microbianos causadores de doenças infecciosas podem ser vírus, bactérias, fungos, parasitas e outros.

Dentre todos os tipos de doenças infecciosas, as doenças contagiosas são aquelas doenças que são transmitidas de indivíduo para indivíduo de forma indireta ou diretamente. A transmissão de doenças infecciosas podem ocorrer por diversas vias. Para um melhor entendimento do processo de transmissão, vamos classificá-los da seguinte maneira:

- a) **Horizontal:** Quando a transmissão se dá de um indivíduo para outro e pode ser:
- **Contato direto:** Como o próprio nome sugere, são transmitidas por contatos diretos, como toque ou relações sexuais.
 - **Contato indireto:** São transmitidas através de objetos, sangue ou qualquer outro líquido corporal. Por exemplo uma doença que se encaixa nesta modalidade é a influenza;
 - **Vias aéreas:** São transmitidas pela inalação de gotículas contaminadas presentes no ar. Podemos citar, como exemplo, a varíola, sarampo, catapora e caxumba;
 - **Por vetores:** São transmitidas por vetores. Os mais comuns são os artrópodes, como mosquitos e carrapatos. Por exemplo, malária e a dengue;
 - **Água e alimentos contaminados:** São transmitidas pela ingestão de alimentos e água contaminados. Aqui temos a cólera que é transmitida por água contaminada pela bactéria *Vibrio Cholerae*.
- b) **Vertical:** Acontece quando a transmissão da doença se dá através da mãe para o filho, pode ocorrer pela placenta, no nascimento, ou através do leite materno.

Caracterizados cada processo de transmissão de doenças infecciosas, vamos definir também alguns outros conceitos básicos de epidemiologia.

1.1 Definições básicas de doenças infecciosas

Antes de partirmos para o modelo epidemiológico matemático, é importante definirmos alguns conceitos básicos que são de extrema importância e que desempenham um grande papel na construção dessa modelagem matemática.

- **Indivíduos suscetíveis:** Caracterizados pelos indivíduos saudáveis, que passa a ser vulneráveis a contrair a doença fazendo algum tipo de contato potencialmente infeccioso. Indivíduos caracterizados suscetíveis podem ou não desenvolver a doença, isto é, não são indivíduos infectados. Geralmente, nos modelos matemáticos propostos, assumimos que todo indivíduo suscetível é capaz de, eventualmente, desenvolver a doença.
- **Indivíduos infectados:** Caracterizado pelos indivíduos que contraíram o agente patogênico. Quando o indivíduo está infectado, automaticamente, começamos a chamá-lo de infeccioso, e este indivíduo passa a ser o principal meio de propagação da doença.
- **Indivíduos recuperados:** Caracterizados pelos indivíduos que passam do quadro de infectados para recuperados, ou seja, quando o indivíduo é totalmente curado da doença.
- **Período latente:** Caracterizado pelo período de evolução clínica da doença, no qual o vírus se replica no interior das células parasitadas do indivíduo. É o momento em que o indivíduo adquire a doença, mas ainda não apresenta sintomas.
- **Período de incubação:** É o período entre a exposição de um agente infeccioso e o aparecimento dos sintomas da doença. Para doenças infecciosas, o período de incubação é o tempo necessário para o agente infeccioso se multiplicar até o limiar do aparecimento de sintomas.
- **Incidência:** Podemos caracterizar a incidência em valores percentuais como a proporção entre o número de indivíduos que adoecem durante um intervalo de tempo pelo total da população. Na maioria das vezes, a incidência é determinada pelo número de casos já confirmados de infecção, os quais subestimam a verdadeira incidência, pois são ignorados os casos suspeitos.
- **Prevalência:** Caracterizado pelo números de pessoas que possuem a doença por um determinado tempo específico. Em valores percentuais, a prevalência é a proporção entre o número de pessoas que têm a doença por um tempo especificado pelo tamanho total da população.
- **Proporção de casos fatais:** Caracterizado pela taxa de pessoas que morrem da doença em relação aos que contraíram.

- **Mortalidade induzida pela doença:** é a proporção do número de pessoas que morreram da doença em uma unidade de tempo pelo total da população.
- **Taxa de contato:** Medida de frequência de encontro entre indivíduos suscetíveis e infectados.
- **Transmissão:** Caracterizado pelo processo no qual um vírus passa de uma fonte de infecção para um novo hospedeiro.
- **Vacinação:** Caracterizado pela preparação de uma droga, que contém microrganismos vivos, mortos ou frações deles, aplicada nos indivíduos suscetíveis com o objetivo de imunizá-los contra a doença.

1.2 Origem da Epidemiologia Matemática

A história da epidemiologia é longa, iniciada com a obra Epidemia de Hipócrates (458-377 a.C.). Nesta mesma época, surgiram também as obras de Aristóteles (384-322 a.C.) evidenciando os primeiros registros sobre a ideia da existência de seres invisíveis como causadores de doenças.

O primeiro trabalho que utilizou ferramenta matemática para entender as dinâmicas das doenças infecciosas, foi a obra “*Essai d’une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite verole, et des avantages de l’inoculation pour la prévenir*” de Daniel Bernoulli (1700 - 1782), publicado em 1760, que tinha objetivo principal influenciar a política de saúde pública na época.

Em 1798, o economista Thomas Robert Malthus (1766-1834) publicou o livro “*Um ensaio sobre o princípio da população na medida em que afeta o melhoramento futuro da sociedade, com notas sobre as especulações de Mr. Godwin, M. Condorcet e outros escritores*”, onde utilizava de modelos matemáticos como princípio fundamental para a hipótese de que as populações humanas crescem em progressão geométrica. Nele estudou possibilidades de restringir esse crescimento, uma vez que os meios necessários para a sobrevivência humana poderiam não acompanhar o crescimento exponencial. Surgiu assim o modelo malthusiano (SABETI, 2011). Após a descoberta de Malthus, outros trabalhos mais abrangentes começaram a surgir, mas somente depois de 110 anos que conseguiram formular teorias específicas sobre transmissão de doenças infecciosas. Os modelos de W. H. Hamer, em 1906, e do médico britânico Sir Ronald Ross, em 1908, apresentavam teorias específicas sobre a transmissão de doenças infecciosas com uma expressão matemática simples. Hamer postulou que o desenvolvimento de uma epidemia depende de fatores como o número de indivíduos suscetíveis, o número de infectados e a taxa de contato entre suscetíveis e infectados. Isto resultou em um dos conceitos mais importantes na

epidemiologia matemática denominado de o princípio da ação das massas ([ALMEIDA et al., 2014](#)).

No estudo sobre a dinâmica de transmissão da malária, Ronald Ross sugeriu que devia existir um valor limiar de densidade de mosquitos, abaixo do qual ocorreria a extinção da malária. Este pode ter sido o prenúncio do Teorema do Limiar, proposto por Kermack e McKendrick em 1927, em que há uma densidade crítica de indivíduos suscetíveis e abaixo dela a introdução de indivíduos infectados não provoca uma epidemia. A densidade limiar depende de fatores como infectividade, recuperação da doença e taxa de mortalidade relativa à epidemia ([YANG, 2001](#)).

Os primeiros sistemas de equações diferenciais surgiram nos três artigos de Kermack e McKendrick publicados em 1927, 1932 e 1933, onde introduziram matematicamente os conceitos de imunidade e vacinação, demonstraram que não é preciso uma vacinação total da população para que a doença seja totalmente erradicada. Esta teoria tomou força após a erradicação da varíola em 1970, pois com 80% de toda a população mundial vacinada, a doença foi totalmente erradicada e controlada ([KRETZSCHMAR; WALLINGA, 2009](#)).

Num trabalho mais recente, em 1955, Whiter estendeu a teoria do valor limiar, considerando modelos determinísticos mais complexos, ([SABETI, 2011](#)). Anderson e May, em 1986, mostraram a importância da heterogeneidade na transmissão das infecções, marcando significativos avanços na Epidemiologia Matemática ([ALMEIDA et al., 2014](#)).

1.3 A vacinação como um meio de controle epidêmico

Alguns dos principais estudos na área de doenças contagiosas, são os métodos de controle para erradicar doenças o mais rápido possível. Nestes métodos são estudada estratégias que podem ser utilizadas de forma a reduzir a quantidade ou a velocidade de propagação de uma certa epidemia. Os métodos são ferramentas poderosas nesta abordagem, pois nos permitem otimizar o uso de recursos limitados ou, simplesmente, direcionar medidas de controle mais eficientes ([KEELING; ROHANI, 2008](#)).

O principal método utilizado para erradicação de uma doença é a vacina. Uma vacina é produzida a partir de substâncias infectantes, ou seja, partes de vírus e bactérias atenuados ou mortos, de forma a atuarem no organismo humano fornecendo a cura ou a imunidade total sobre a doença. A vacina é geralmente aplicada a uma proporção da população, com o objetivo de reduzir consideravelmente o número de indivíduos suscetíveis. As campanhas de vacinação profiláticas conseguem reduzir a incidência de muitas infecções na infância em todo o mundo. Podemos citar o trabalho da OMS em 1988 que resolveu usar estratégias de campanha semelhantes à da varíola para erradicar a poliomielite em todo o mundo até 2005. Este trabalho pode ser considerado um dos grandes

projetos ainda em andamento.

1.4 Conceitos da Modelagem Matemática

No campo das ciências aplicadas, um modelo matemático é um tipo de modelo científico que emprega um formalismo matemático para expressar relações, previsões, variáveis, parâmetros, entidades e relações entre variáveis e/ou entidades ou operações. Estes modelos são usados para analisar o comportamento de sistemas complexos, difíceis de serem observados em situações da vida real. Neste trabalho, iremos nos concentrar na modelagem de doenças infecciosas e seu espalhamento em populações, mas a princípio, modelagem matemática pode ser aplicada para qualquer sistema biológico ou físico.

Um modelo matemático deve apenas possuir informações que são relevantes para o objetivo específico ou para a questão biológica estudada. Uma vez que o modelo é formulado, partimos para as seguintes investigações utilizando métodos matemáticos:

- a) Como se comportam globalmente as soluções do nosso modelo.
- b) Os dados disponíveis podem ser ajustados ou podem ser mudados para novos dados.
- c) O estudo da estimação de parâmetros do modelo.
- d) Através de interpretações numéricas ou gráficas, conhecer a importância de cada parâmetros.
- e) Conhecer convergência e pontos de estabilidades do modelo.

Feito a análise do nosso modelo, devemos então através dos resultados interpretar e entender o sentido biológico. Apresentar questões que respondam quais explicações este modelo pode nos dar sobre o mundo real e concluir se este modelo está apropriado ou não para o problema real.

Modelos matemáticos usualmente consistem de parâmetros e variáveis que estão relacionados. As variáveis são as ideias abstratas das propriedades do sistema que são quantificadas ou mensuradas. Os modelos matemáticos podem ser classificados das seguintes maneiras:

- a) Linear/não linear: um modelo será linear se conter independência linear entre as variáveis. Caso contrário, será não-linear;
- b) Estáticos/Dinâmicos: um modelo dinâmico é responsável por mudanças no estado do sistema ao longo do tempo. Os modelos estáticos resultam em quantidades assumindo que não se alteram ao longo do tempo. Geralmente, modelos dinâmicos empregam equações diferenciais;

- c) Contínuo/discreto: um modelo discreto trata o tempo ou o estado do sistema como discreto. Já os modelos contínuos incorporam o tempo ou o estado do sistema como dinâmicos;
- d) Estocásticos/determinísticos: um modelo determinístico é aquele na qual um conjunto de estados da variável é unicamente determinado pelos parâmetros do modelo e do estado inicial das variáveis. Já o estocástico é caracterizado por aleatoriedade e os estados das variáveis são descritos por distribuições de probabilidade.

A ferramenta utilizada como principal modelo matemático são as equações diferenciais. Estes modelos suprem um papel muito importante em diversas áreas, como por exemplo em ciências naturais, incluindo ecologia, genética e epidemiologia. Eles são de altíssima utilidade para um melhor entendimento e organização para os dados biológicos disponíveis, obtém a resposta para o comportamento, buscam otimização e estratégias de intervenção, e fazem previsões sobre o sistema (SOTOMAYOR, 1979).

Os modelos estudados ao longo desse trabalho serão modelos não lineares, dinâmicos, contínuos e determinísticos.

1.5 Conceitos sobre Dinâmica Populacional de Doenças Infecciosas

Um modelo matemático é feito através de hipóteses de quantificações e de ideias baseadas nos conhecimentos biológicos do fenômeno da interação hospedeiro-parasita. Sabemos que neste aspecto não há como existir modelos matemáticos que retrate definitivamente um problema sobre hospedeiro-parasita; ao contrário existe uma constante interação entre os avanços dos conhecimentos biológicos a respeito do vírus e dos indivíduos e os modelos propostos. Assim, os modelos matemáticos estão sempre em constante aprimoramento.

Para estudarmos a dinâmica por trás dos modelos aplicados neste trabalho e entender o comportamento das doenças infecciosas são necessários conhecimentos sobre os parâmetros fundamentais, sendo eles, a força da infecção de uma doença e a razão de reprodução básica (Reprodutibilidade basal).

1.5.1 Incidência ou Força de Infecção

Já vimos que as doenças infecciosas causadas por vírus ou bactérias se dão através de contatos físicos diretos ou indiretos. Descrevemos assim μ o tempo que o indivíduo leva para se recuperar da infecção, tornando-se assim imune. Assim, chamamos o parâmetro μ de taxa de recuperação. Descrevemos β_1 como o número de vezes que um indivíduo infectado entra em contato com outros indivíduos em uma unidade de tempo, chamando-a de taxa de contato. Esta taxa de contato representa dois pontos importantes:

- 1) a maneira de como os indivíduos de uma determinada comunidade estão interagindo entre si;
- 2) e a capacidade de infectividade do vírus.

Sabemos que a taxa de contato pode ser influenciada por diversos fatores, entre eles, o convívio entre os indivíduos, a diversidade genética do vírus e do hospedeiro e as distribuições demográfica dos indivíduos. Para o problema se tornar mais simples, consideramos uma população homogênea.

Suponhamos que a probabilidade de infecção para cada contato seja p . Assim, temos que o termo $p\beta_1$ representa a capacidade de um indivíduo infectado acabar infectando outros indivíduos. Então, este indivíduo pode apenas infectar outros indivíduos não infectados, ou seja, pode apenas infectar os indivíduos suscetíveis, podemos escrever o termo da capacidade de infecção como:

$$p\beta_1 \frac{S}{T}, \quad (1.1)$$

onde temos $T = S + I + R$ que representa a população total ou a soma dos indivíduos suscetíveis, infectados e recuperados. Para o termo (1.1) chamamos de razão de infecção.

Portanto o número de novos infectados é dada por:

$$p\beta_1 \frac{S}{T} I, \quad (1.2)$$

sendo também conhecido como incidência da doença, representando a transferência dos indivíduos da classe suscetível para a classe de infectados.

Quando temos a taxa de contato proporcional ao número total de indivíduos, ou seja, $\beta_1 = c_1 T$ com $c_1 \in \mathbb{R}$, obtemos a seguinte taxa de incidência

$$\delta SI, \quad (1.3)$$

onde $\delta = pc_1$ e é chamado de coeficiente de transição e δI a força de incidência. Deste modo, este modelo se torna mais realístico que o anterior, pois se a população aumentar, o número de contatos entre os indivíduos será maior e, sendo assim, temos que a taxa de contato aumentará. Ao contrario disso, se a população total se reduzir, o contato entre os indivíduos também será reduzida tornando uma taxa de contato menor.

Agora, se considerarmos a taxa de contato sempre constante, isto é $\beta_1 = c_2$ com $c_2 \in \mathbb{R}$, então obtemos como incidência

$$\frac{\beta SI}{T}, \quad (1.4)$$

onde $\beta = pc_2$ é chamada incidência padrão, ou também força de infecção.

Há outras formas diferentes de definir incidência. Podemos usar o modelo mais realístico e pela Lei da Ação da Massas, temos que $\lambda(t) = \delta I$ representa a força de infecção e $\lambda(t)S$ o número de indivíduos que são infectados por unidade de tempo. Neste trabalho usamos esse tipo de incidência. (VIEIRA et al., 2017)

É importante ressaltarmos também que nestas expressões pressupomos que a população está distribuída homogeneamente, isto é, todos os indivíduos suscetíveis tem a mesma probabilidade de serem infectados. Portanto para facilitar o processo de entendimento e simplificar o problema, este trabalho irá utilizar a equação (1.3) para descrever o número de novos indivíduos infectados.

1.5.2 Reprodutibilidade Basal

A força de infecção como mostrado anteriormente nos indica o grau de contaminação no grupo de indivíduos suscetíveis pelos agentes infecciosos transmitidos por todos os indivíduos infectados. Já a razão de reprodução básica, também conhecida como R_0 , pode ser interpretada como o número de casos secundários que um indivíduo infeccioso pode gerar em uma população que está totalmente suscetível. Este parâmetro esta diretamente relacionado com o Teorema do Valor Limiar (DIEKMANN; HEESTERBEEK; METZ, 1990), que determina a existência de uma densidade mínima de pessoas na população em estudo que são suscetíveis a uma doença e acima da qual é favorável o surgimento de uma epidemia transmitida diretamente. Para cada doença epidemiológica é possível estabelecer o parâmetro R_0 pelo qual podemos verificar o desenvolvimento dos infectados. Além disso, como a razão de reprodução básica é uma grandeza matemática, ela poderá ser derivada da força de Infecção. Sendo assim, o parâmetro R_0 poderá assumir os seguintes valores:

- a) $R_0 = 1$, temos uma condição de equilíbrio epidêmico;
- b) $R_0 > 1$, temos descontrole da doença, ou seja, ela se espalha na população de forma a aumentar o número de indivíduos infectados;
- c) $R_0 < 1$, temos controle da doença, ou seja, a doença tende a desaparecer na população, pois o número de infectados diminui.

Portanto, para determinar a reprodução básica devemos levar em conta a forma assumida pela taxa de contato, consideremos ela como $\delta = pc_1$. Outros fatores importantes para a expressão da reprodução básica são a taxa de mortalidade m e a taxa de recuperação μ . Se a taxa de reprodução for alta, temos que a tendência é que este período de infecção seja longo. Por outro lado, caso a taxa de mortalidade for alta, então os indivíduos não permaneceram muito tempo dentro do período de infecção. Deste modo, definimos o

período médio de infecção como:

$$PMI = \frac{1}{m + \mu}, \quad (1.5)$$

onde PMI representa o período médio de infecção. Como sabemos, que a reprodutibilidade basal é diretamente proporcional ao período médio de infecção (2.5) e à taxa de infecção δ , então

$$R_0 = \frac{\delta}{m + \mu}. \quad (1.6)$$

A equação (1.6) nos dá a fórmula da Reprodutibilidade Basal com a hipótese da população estar uniformemente distribuída.

2 Modelagem Epidemiológica SIR

Neste capítulo vamos apresentar o modelo mais simples SIR, na sequência mostraremos o modelo SIR com Dinâmica Vital e sobre esse ultimo adicionamos a campanha de vacinação constante, tornando um modelo SIR com Dinâmica Vital e vacinação constante. Apresentamos também o modelo SIR completo tanto na forma inteira quanto fracionária.

Os primeiros modelos matemáticos a serem introduzidos em epidemiologia tiveram início com Kermack e McKendrick em 1927 ([KERMACK; MCKENDRICK, 1927](#)) e foram recentemente aprimorado por Isea. Lonngren ([ISEA; LONNGREN, 2013](#)), sendo eles os modelos conhecidos como SIR (Suscetíveis-Infectados-Recuperados).

Em 1927, Kermack e McKendrick, em seus estudos sobre as doenças que se espalham na população, propuseram uma divisão em classes disjuntas, denotadas por:

- a) Suscetíveis, $S(t)$, que representam a classe dos indivíduos saudáveis, ou seja, aqueles indivíduos que estão expostos a uma eventual infecção.
- b) Infectados, $I(t)$, que representam a classe dos indivíduos que estão infectados e que são possíveis causadores de novas infecções, ou seja, indivíduos infecciosos.
- c) Recuperados, $R(t)$, que representam os indivíduos recuperados da doenças, passando assim a se tornarem imune a uma nova infecção.

Ainda Devemos considerar também as seguintes hipóteses sobre o modelo:

- todos os indivíduos nascem suscetíveis;
- infectados que se recuperam, ganham imunidade total;
- as interações entre os componentes se dão de forma homogênea;
- o tamanho da população permanece constante em relação ao tempo;
- não consideramos emigração ou imigração.

Levamos em conta também que o número de indivíduos em cada uma das três classes mudam em relação ao tempo, então, $S(t)$, $I(t)$ e $R(t)$ são funções dependentes do tempo t . Portanto, o total da população é a soma do número de indivíduos que estão em cada uma das classes.

$$T(t) = S(t) + I(t) + R(t) \tag{2.1}$$

É importante ressaltarmos que estas hipóteses serão usadas nos modelos apresentados ao longo deste trabalho, tendo como principal objetivo tornar o sistema menos complexo e, assim, simplificar os cálculos.

2.1 Modelo SIR Simples

Para começarmos, vamos apresentar um dos modelos SIR mais simples que envolve a dinâmica dos indivíduos suscetíveis, infectados e recuperados.

Quando um indivíduo suscetível entra em contato com um indivíduo infectado, este indivíduo pode ser infectado há uma certa probabilidade, como vimos no Capítulo anterior e é transferido da classe de suscetível para a classe dos infectados. Observamos que o número de indivíduos suscetíveis decresce em uma unidade de tempo, pois dos novos indivíduos se tornam infectados durante este determinado tempo. O contrário acontece com os indivíduos infectados, ou seja, na medida que o tempo passa o número de indivíduos infectados aumenta por causa dos novos infectados que agora fazem parte desta classe. Como já vimos, o crescimento do número de indivíduos que se tornam infectados é chamado de incidência. Então, a taxa de mudança da classe de suscetíveis para infectados é denotada por:

$$S'(t) = -\text{incidência} \quad (2.2)$$

Para deixarmos nosso modelo o mais simples possível, vamos considerar a taxa de incidência sendo δI . Assim δSI , é o número de indivíduos que tornam-se infectados por unidade de tempo. Lembramos que $\delta = pc_1$.

Definimos $\lambda(t) = \delta I$, então temos o número de indivíduos que são infectados por unidade de tempo é igual a $\lambda(t)S$. A função $\lambda(t)$ é chamada de força de infecção. Observamos que o número de indivíduos infectados na população $I(t)$ é chamado de prevalência da doença.

Ressaltamos que existem diferentes outros tipos de incidência, ou seja, tudo depende de como são feitas as pressuposições sobre a força de infecção. Uma delas é a Lei de Ação das Massas que nos fornece a seguinte equação diferencial ordinária para os indivíduos suscetíveis:

$$S'(t) = -\lambda(t)S = -\delta IS \quad (2.3)$$

A lei de Ação das Massas nos diz que o termo de transmissão $\beta_1 = c_1 T$ é uma taxa de contato entre os indivíduos suscetíveis e infectados, no qual, os indivíduos suscetíveis passam a se tornar parte da classe de infectados $I(t)$.

Concluimos que há duas possibilidades para os indivíduos infectados, ou morrer ou recuperar-se, deixando a classe de infectados por uma taxa constante per capita por unidade de tempo μ . Portanto, μI representa o número de indivíduos infectados que foram

recuperados. Assim,

$$I'(t) = \lambda(t)S - \mu I = \delta IS - \mu I \quad (2.4)$$

Quando os indivíduos se recuperaram passam a deixar a classe de infectados para a classe de recuperados R . Sendo assim,

$$R'(t) = \mu I \quad (2.5)$$

Desta forma, encontramos todas as equações diferenciais que compõem nosso sistema dado por:

$$\begin{cases} S'(t) = -\lambda(t)S \\ I'(t) = \lambda(t)S - \mu I \\ R'(t) = \mu I \end{cases} \quad (2.6)$$

onde $\lambda(t) = \delta I$ representa a Força de Infecção.

Lembramos que para que o modelo em (2.6) ainda é necessário fornecermos a condição inicial $S(0)$, $I(0)$ e $R(0)$ para que uma única solução. Para a maioria dos modelos em Epidemiologia são quantidades físicas, onde as soluções começam a partir de uma solução inicial positiva (não negativa) e permanecem sempre positivas (não negativas) por todo o tempo.

Denotaremos por T o total da população no tempo zero, $T = S(0) + I(0) + R(0)$, e somando as três equações de (2.6) obtemos que

$$T'(t) = S'(t) + I'(t) + R'(t) = -\lambda(t)S(t) + \lambda(t)S(t) - \mu I(t) + \mu I(t) = 0 \quad (2.7)$$

portanto, $T'(t)$ é constante e igual ao seu valor inicial. O modelo (2.6) é chamado de SIR, pois cada letra representa um compartimento no qual o indivíduo reside.

Na Figura 1, esquematizada por um diagrama, geralmente chamado por fluxograma, cada compartimento é um fluxograma representado por uma caixa com a respectiva letra. As setas indicam a direção do movimento de indivíduos entre as classes. As setas de movimento são tipicamente rotuladas pelas taxas de transição.

2.2 Modelo SIR com dinâmica vital

Neste modelo iremos definir, além dos parâmetros não negativos δ e μ que são, respectivamente, a taxa de infecção e a taxa de recuperação, o parâmetro m que representa a taxa de natalidade.

Assumimos que a população cresça de forma que aos novos nascidos são suscetíveis. Representaremos como mT o número total de nascimentos. Consideramos também que

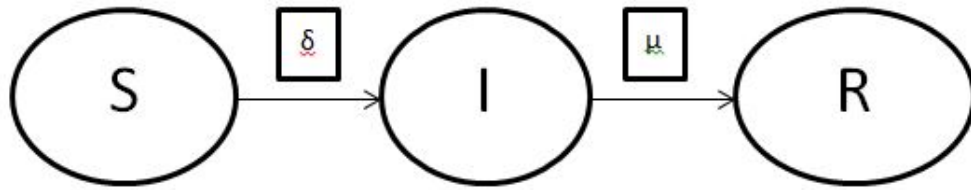


Figura 1 – Esquema compartimental do modelo SIR simples, onde δ e μ são as taxas infecção e recuperação, respectivamente.

indivíduos de cada classe morrerá a uma taxa de mortalidade m , ou seja, levaremos em conta a morte da população com ou sem estar ligado à epidemia. Consideramos mS , mI e mR a taxa de pessoas que morrem na classe de suscetíveis, infectados e recuperados, respectivamente.

Para tornarmos o modelo mais realístico, continuaremos usando como taxa de incidência a expressão representada por δSI , onde $\delta = pc_1$. Então, a nossa primeira equação diferencial, é dada por

$$S'(t) = mT - \delta SI - mS, \quad (2.8)$$

onde mT é a taxa de natalidade (mortalidade), δSI representa a taxa de incidência e mS a taxa de mortalidade da classe dos suscetíveis.

Agora para nossa segunda equação $I(t)$, precisamos apenas adicionar a expressão $-mI$ que representa a taxa de mortalidade dos indivíduos infectados. Então,

$$I'(t) = \delta SI - \mu I - mI. \quad (2.9)$$

E, por fim, para a última equação $R(t)$ adicionamos a expressão $-mR$ que representa a taxa de mortalidade dos indivíduos recuperados. Obtemos assim:

$$R'(t) = \mu I - mR \quad (2.10)$$

Portanto, nosso modelo completo da Epidemiologia SIR com Dinâmica Vital, é

representados pelo sistema de equações diferenciais (2.8), (2.9) e (2.10).

$$\begin{cases} S'(t) = mT - \delta SI - mS \\ I'(t) = \delta SI - \mu I - mI \\ R'(t) = \mu I - mR \end{cases} \quad (2.11)$$

onde a força de infecção é dada por: $\lambda(t) = \delta I$

Para estudarmos como se comporta o total da população, iremos somar as três equações em (2.11), Então,

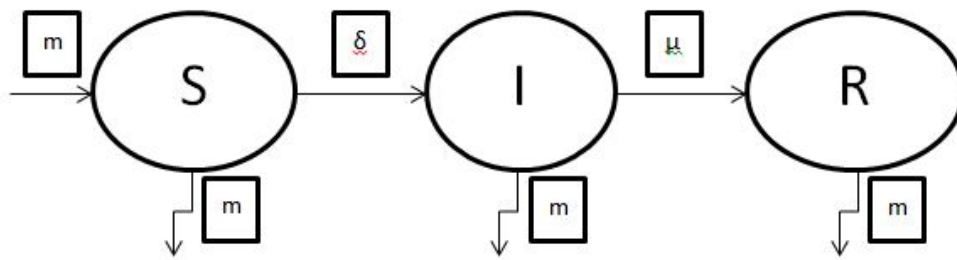
$$T'(t) = mT - m(S + I + R) \quad (2.12)$$

Sabemos que o total da população é dada pela expressão $T = S + I + R$ e é constante. Então, daí concluímos que $T'(t) = 0$. Por razão de simplificação vamos considerar o tamanho da população normalizada sendo $T = 1$. Obtemos assim o seguinte modelo:

$$\begin{cases} S'(t) = m - \delta SI - mS \\ I'(t) = \delta SI - \mu I - mI \\ R'(t) = \mu I - mR \end{cases} \quad (2.13)$$

Portanto, $S(t)$, $I(t)$ e $R(t)$ representam a proporção de indivíduos em cada compartimento no instante de tempo t .

Na Figura 2, esquematizada por um fluxograma, cada compartimento é um fluxograma representado por uma caixa com a respectiva letra. As setas indicam a direção do movimento de indivíduos entre as classes. As setas de movimento são tipicamente rotuladas pelas taxas de transição e natalidade (mortalidade).



I

Figura 2 – Esquema compartimental do modelo SIR simples com dinâmica vital, onde m , δ e μ são as taxas de natalidade (mortalidade), infecção e recuperação, respectivamente.

2.3 Modelo SIR com dinâmica vital e vacinação constante

Nesta secção apresentaremos o modelo SIR com vacinação constante a partir do modelo SIR com dinâmica vital apresentado na secção anterior.

Com intuito de prevenir uma determinada doença, a vacinação aparece como importante meio de combate e prevenção de vacinação constante, que tem como objetivo vacinar uma porcentagem de todos os recém nascidos e evitar que novos recém nascidos se tornem suscetíveis a tal doença. Para este modelo consideramos v como a proporção de sucesso da campanha de vacinação constante, sendo $0 < v < 1$. Podemos representar este modelo através do seguinte fluxograma:

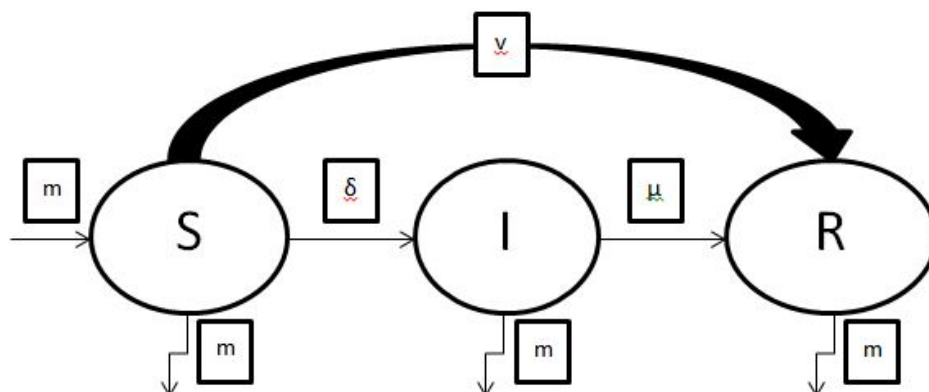


Figura 3 – Esquema compartimental do modelo SIR simples, onde δ , μ e m são as taxas infecções, recuperação e natalidade (mortalidade), respectivamente, e v representa a taxa de vacinação.

De modo análogo aos modelos anteriores, consideramos o tamanho da população

normalizado para uma unidade, ou seja, $T(t) = S + I + R = 1$. Com a campanha de vacinação constante, podemos considerá-la a partir de dois modos, sendo eles:

- 1º) o número de indivíduos suscetíveis vacinados que ganham imunidade a doença é representado por vS , ou;
- 2º) a proporção de indivíduos recém nascidos que são vacinados diminui para $(1 - v)m$.

Usaremos a ideia do segundo item. Portanto, nosso novo modelo SIR com Dinâmica Vital e vacinação constante pode ser escrito como:

$$\begin{cases} S'(t) = (1 - v)m - \delta SI - mS \\ I'(t) = \delta SI - \mu I - mI \\ R'(t) = vm + \mu I - mR \end{cases} \quad (2.14)$$

onde a força de infecção é representado por: $\lambda(t) = \delta I$

No modelo (3.14), v , m , μ e δ são as constantes definidas e $0 \leq S(t), I(t), R(t) \leq 1$ são proporções de indivíduos suscetíveis, infectados e recuperados, respectivamente.

Ressaltamos que para ser usado uma campanha de vacinação só faz sentido se tivermos uma reprodutividade basal maior do que 1, ou seja, $R_0 > 1$, pois se o sistema for o caso $R_0 < 1$ ele irá convergir para o ponto livre de infecção, isto é, não haverá epidemia.

2.4 Modelo SIR completo na forma inteira ou fracionária

Neste modelo atribuímos a ideia de derivada fracionária, ou seja, temos agora um certo sistema de equações diferenciais de ordem n com $0 < n \leq 1$. O sistema que representa é dado por:

$$\begin{cases} S^n(t) = (1 - v)m - \delta SI - mS \\ I^n(t) = \delta SI - \mu I - mI \\ R^n(t) = vm + \mu I - mR \end{cases} \quad (2.15)$$

onde $\lambda(t) = \delta I$ é a força de infecção e $0 < n \leq 1$ é a ordem das derivadas.

Para esta representação temos duas possibilidades:

- Se $n = 1$ então temos o modelo de ordem inteira (2.14).
- Se $0 < n < 1$ então temos o modelo de ordem fracionária (2.15).

A partir daqui usaremos o modelo (2.15) e estudaremos propriedades de sua solução como a unicidade, existência e simulações numéricas de ordem inteira e não inteira.

2.5 Estabilidade local dos pontos de equilíbrio

Nesta seção mostraremos os pontos de equilíbrio e estabilidade para o modelo (2.15).

Observamos que como estamos trabalhando com uma população uniformemente distribuída, temos

$$S(t) + I(t) + R(t) = T = 1 \quad (2.16)$$

De (2.16) obtemos que $R(t) = 1 - S(t) - I(t)$ e, assim, podemos considerar o modelo (2.15) sendo equivalente a

$$\begin{cases} S^n(t) = (1 - v)m - \delta SI - mS \\ I^n(t) = \delta SI - \mu I - mI \end{cases} \quad (2.17)$$

Os pontos de equilíbrio do sistema são aqueles onde a taxa de crescimentos das populações de suscetíveis e infectados permanece constante. Na linguagem matemática, os pontos de equilíbrio do sistema são aqueles onde a derivada se anula, ou seja, são os pontos em que

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = 0 \\ \frac{dI}{dt} = 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

2.5.1 Pontos de equilíbrio

Proposição 2.5.1 *O modelo com campanha de vacinação constante admite dois pontos de equilíbrio: $E_0 = (1 - v, 0)$, chamado de equilíbrio livre de infecção, $E_1 = \left(\frac{1}{R_0}, \frac{m}{\mu + m} \left[1 - v - \frac{1}{R_0}\right]\right)$, chamado de equilíbrio endêmico.*

Demonstração: De (2.17) e (2.18), obtemos que

$$\begin{cases} (1 - v)m - \delta SI - mS = 0 \\ \delta SI - \mu I - mI = 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

Então, da segunda equação do sistema (2.19), temos

$$I(\delta S - \mu - m) = 0$$

logo, $I = 0$ ou $\delta S - \mu - m = 0$.

1) Se $I = 0$, substituimos na primeira equação e temos que

$$(1 - v)m - mS = 0 \Rightarrow S = 1 - v$$

logo, temos $E_0 = (1 - v, 0)$. É o primeiro ponto de equilíbrio, chamado equilíbrio livre de infecção.

2) Se $S = \frac{\mu+m}{\delta}$, substituimos na primeira equação temos que

$$(1 - v)m - \delta \left(\frac{\mu + m}{\delta} \right) I - m \left(\frac{\mu + m}{\delta} \right) = 0 \quad (2.20)$$

De (2.20) obtemos que

$$I = \frac{m}{\mu + m} \left[1 - v - \left(\frac{\mu + m}{\delta} \right) \right]$$

como $R_0 = \frac{\delta}{\mu+m}$ então $\frac{\mu+m}{\delta} = \frac{1}{R_0}$, e

$$I = \frac{m}{\mu + m} \left[1 - v - \frac{1}{R_0} \right]$$

Logo $E_1 = \left(\frac{1}{R_0}, \frac{m}{\mu+m} \left[1 - v - \frac{1}{R_0} \right] \right)$ é o segundo ponto de equilíbrio, chamado equilíbrio endêmico.

□

Definição 2.5.1 A matriz Jacobiana associada a duas funções deriváveis $f, g : I \subset \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$J(S, I) = \frac{\partial(f, g)}{\partial(S, I)}(S, I) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial S} & \frac{\partial f}{\partial I} \\ \frac{\partial g}{\partial S} & \frac{\partial g}{\partial I} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Teorema 2.5.1 (Método Traço-Determinante) Considere o polinômio característico $p(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(J)\lambda + \det(J)$, sendo $\text{tr}(J)$ o traço de J e $\det(J)$ o determinante da matriz Jacobiana calculada em (S, I) por (2.21).

- (i) Se $\det(J) < 0$ então (S, I) é instável.
- (ii) Se $\det(J) \geq 0$ e $\text{tr}(J) > 0$, então (S, I) é instável.
- (iii) Se $\det(J) \geq 0$ e $\text{tr}(J) < 0$, então (S, I) é estável.

A demonstração desse teorema pode ser encontrado em (ALMEIDA et al., 2014). Vamos usar esse teorema para mostrar estabilidade dos pontos de equilíbrio a seguir.

2.5.2 Estabilidade dos pontos de equilíbrio

Proposição 2.5.2 *A análise de estabilidade dos pontos de equilíbrio do modelo SIR com vacinação constante revela que há uma proporção mínima de vacinação denotada por v_c e dada por $v_c = 1 - \frac{1}{R_0}$, que governa a dinâmica do sistema da seguinte forma:*

- (i) *Se $v > v_c$, ou seja, a taxa de vacinação for maior que a taxa mínima de vacinação, então o ponto de equilíbrio livre de doença E_0 é estável e o ponto E_1 é biologicamente irrelevante;*
- (ii) *Se $v < v_c$, ou seja a taxa de vacinação forma menor que a taxa mínima de vacinação, então o ponto de equilíbrio epidêmico E_1 é estável e o ponto E_0 é instável.*

Demonstração: *Seja a matriz Jacobiana associada ao sistema (2.19)*

$$J(S, I) = \begin{bmatrix} -\delta I - m & -\delta S \\ \delta I & \delta S - \mu - m \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Caso 1) Estudo da estabilidade do ponto de equilíbrio livre de infecção E_0 .

Como $E_0 = (1 - v, 0)$, temos que

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -m & -\delta(1 - v) \\ 0 & \delta(1 - v) - (\mu + m) \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

e

$$\text{tr}(J(E_0)) = \delta(1 - v) - 2m - u$$

e

$$\det(J(E_0)) = m[(\mu + m) - \delta(1 - v)]$$

Notemos que $\det(J(E_0)) < 0$ se e somente se

$$u + m < \delta(1 - v)$$

$$\frac{\mu + m}{\delta} < 1 - v$$

como $\frac{\delta}{m + \mu} = R_0$ e $0 < m < 1$, temos que

$$v < 1 - \frac{1}{R_0} = v_c$$

logo se $v < v_c$, E_0 é instável pelo teorema (2.5.1).

Por outro lado, se $v > v_c = 1 - \frac{1}{R_0}$ teremos $\det(J(E_0)) > 0$ e

$$v > 1 - \frac{(\mu + m)}{\delta}$$

ou seja,

$$\delta(v - 1) > -\mu - m$$

$$(1 - v)\delta - \mu - m < 0$$

com $0 < m < 1$, temos

$$\text{tr}(J(E_0)) = (1 - v)\delta - 2m - \mu < (1 - v)\delta - m - \mu < 0$$

e dessa forma temos que

$$\text{tr}(J(E_0)) < 0$$

Se $v > v_c$, então $\det(J(E_0)) > 0$ e $\text{tr}(J(E_0)) < 0$. e pelo teorema (2.5.1), E_0 é um ponto de equilíbrio estável.

Além disso, observe que a população de indivíduos infectados tem sentido biológico apenas quando é não negativa. Deste modo, caso $v > v_c$, no ponto de equilíbrio epidêmico E_1 , obtemos $I(t) < 0$. Portanto, E_1 não faz sentido biológico quando $v > v_c$.

Caso 2) Estudo da estabilidade do ponto de equilíbrio epidêmico E_1

Para existir o ponto de equilíbrio epidêmico é necessário que, com o passar do tempo, o número de indivíduos infectados seja maior que zero, $I(t) > 0$, pois caso contrário não fará sentido estudá-lo, pois o sistema evoluiria para o equilíbrio de infecção. Deste modo,

$$I(t) > 0 \Rightarrow \frac{m}{m + \mu} \left[1 - v - \frac{1}{R_0} \right] > 0$$

Assim, como $0 < m < 1$ e $0 < \mu < 1$, temos

$$1 - v - \frac{1}{R_0} > 0 \Rightarrow v < 1 - \frac{1}{R_0} = v_c$$

Agora, a matriz Jacobiana de E_1

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} -\frac{(1-v)\delta}{m+\mu}m & -(m+\mu) \\ \frac{(1-v)\delta}{m+\mu} - m & 0 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Obtemos que

$$\det(J(E_1)) = (1 - v)\delta m$$

e

$$\text{tr}(J(E_1)) = -\frac{(1 - v)\delta}{\mu + m}m$$

Notemos que $\delta m > 0$, $1 - v > 0$ e $\mu + m > 0$, pois $0 < \mu, m, v < 1$ e $\delta > 0$, então

$$\text{tr}(J(E_1)) < 0$$

como $v < v_c$, obtemos que

$$v < 1 - \frac{1}{R_0} \Rightarrow v < 1 - \frac{m + \mu}{\delta}$$

Assim,

$$(v - 1)\delta < -m - \mu$$

Multiplicando por (-1) e por m , temos que

$$m(1 - v)\delta - m(m + \mu) > 0$$

ou seja

$$\det(J(E_1)) > 0$$

Portanto, como $\det(J(E_1)) > 0$ e $\text{tr}(J(E_1)) < 0$, então pelo o teorema (2.5.1) temos que E_1 é um ponto de equilíbrio estável para $v < v_c$.

□

3 Conceitos de Cálculo Fracionário

O estudo em Cálculo fracionário surgiu a partir de uma questão proposta em 1695 pelo Marquês de L'Hospital. Através de uma carta Leibniz questionou ele sobre a derivada de ordem $1/2$ de uma função. A partir daí, muitos matemáticos propuseram várias definições para a integral e para derivada de ordem não inteira.

Só em 1969, Caputo em seu livro "Elasticit'a e Dissipazione" (CAPUTO, 1969), propôs uma definição formal para a derivada de ordem fracionária, com a qual resolveu problemas de viscoelasticidade. Alguns anos depois, surgiram as primeiras interpretações físicas e geométricas para a derivada e a integral fracionária, dentre elas destacamos Lorenzo e Hartley (HARTLEY; LORENZO, 1998).

O cálculo fracionário até então era visto apenas como uma teoria matemática sem muitos fundamentos no que diz respeito a aplicações. No começo do século XX houve uma expansão do uso dessa teoria na modelagem de problemas reais em vários ramos da ciência, como controle de sistemas, finanças e economia. Na epidemiologia matemática encontramos inúmeras aplicações, podemos citar Diethelm (DIETHELM, 2013), que propôs um modelo de ordem fracionária para a dengue e o trabalho de Gozáles-Parra, (GONZÁLEZ-PARRA; ARENAS; CHEN-CHARPENTIER, 2014), onde o autor escreveu um modelo fracionário para a dinâmica da Influenza (H1N1) e por meio de simulação numérica, mostra que o modelo de ordem fracionária se ajusta melhor a um conjunto de dados reais se comparado ao modelo de equações diferenciais inteira.

Uma equação diferencial fracionária tem, em diversos casos, a solução dada em termos da função de Mittag-Leffler (CAMARGO; OLIVEIRA; CHIACCHIO, 2006). Ao entendermos a forma que a função de Mittag-Leffler, estamos, de certa forma, compreendendo o porque de, em alguns casos, uma equação de ordem fracionária fornece uma descrição mais refinada de um dado fenômeno do que a respectiva equação de ordem inteira.

Neste Capítulo vamos ver alguns dos conceitos válidos e existentes para o cálculo fracionário que serão de extrema importância para o próximo capítulo.

3.1 Conceitos preliminares ou funções especiais

Nesta seção vamos apresentar as funções, inerentes ao Cálculo Fracionário, ainda vamos introduzir teoremas, propriedade e a definição de transformada de Laplace. As funções especiais como Função Gamma, Beta são de suma importância para a definição de integral e derivada fracionária.

Definição 3.1.1 Seja $f(t) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. A transformada de Laplace de $f(t)$, denotada por $F(s)$ ou $\mathcal{L}\{f(t)\}$, é representada pela seguinte integral imprópria

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

3.1.1 Função Gamma e Função Beta

Para iniciarmos o estudo do cálculo fracionário, começaremos introduzindo as definições de Função Gamma e Função Beta.

Definição 3.1.2 A Função Gamma é a integral imprópria definida para $q \in \mathbb{R}^+$ dada por

$$\Gamma(q) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{q-1} dx.$$

A Função Gamma possui algumas propriedades que são úteis para o cálculo fracionário.

Propriedade 3.1.1 São válidas as seguintes afirmações: seja $q \in \mathbb{R}^+$

- a) $\Gamma(q+1) = q\Gamma(q)$.
- b) $\Gamma(1) = 1!$.
- c) $\Gamma(n+1) = n!$, para $n \in \mathbb{N}$.

A Função Gamma é utilizada para definir integrais e derivadas de ordem não inteira.

Definição 3.1.3 A Função Beta é definida como:

$$B(q, p) = \int_0^1 x^{q-1} (1-x)^{p-1} dx$$

para $p, q \in \mathbb{R}^+$

O teorema seguinte relaciona as duas funções.

Teorema 3.1.1 As funções Beta e Gamma se relacionam por meio da identidade

$$B(q, p) = \frac{\Gamma(q)\Gamma(p)}{\Gamma(q+p)}$$

para $q, p \in \mathbb{R}^+$.

Demonstração: Considere o seguinte produto

$$\Gamma(q)\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-t} t^{q-1} dt \int_0^\infty e^{-u} u^{p-1} du \quad (3.1)$$

Seja $t = x^2$ então $dt = 2xdx$. Se $u = y^2$ então $du = 2ydy$. Substituímos em (3.1), segue que

$$\begin{aligned} \Gamma(q)\Gamma(p) &= \left(2 \int_0^\infty e^{-x^2} x^{2q-1} dx\right) \left(2 \int_0^\infty e^{-y^2} y^{2p-1} dy\right) \\ &= 4 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} x^{2q-1} y^{2p-1} dx dy. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Fazemos a mudança de variável $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$ em (3.2)

$$\begin{aligned} \Gamma(q)\Gamma(p) &= 4 \int \int e^{r^2} (r\cos\theta)^{2q-1} (r\sin\theta)^{2p-1} r dr d\theta \\ &= \left(2 \int_0^\infty e^{r^2} r^{2((q+p)-1)} r dr\right) \left(2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta^{2q-1} \sin\theta^{2p-1} d\theta\right) \\ &= \Gamma(q+p) \left(2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{2q-1} (\sin\theta)^{2p-1} d\theta\right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Chamamos $\cos^2\theta = t$ então $dt = -2\cos\theta\sin\theta$ e usando a definição de função Beta, então temos que

$$\begin{aligned} \Gamma(q)\Gamma(p) &= \Gamma(q+p) \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (\cos\theta)^{2q-2} (\sin\theta)^{2p-2} (-2\cos\theta\sin\theta) d\theta \\ &= \Gamma(q+p) \int_0^1 t^{q-1} (1-t)^{p-1} dt \\ &= \Gamma(q+p) B(q, p). \end{aligned}$$

□

3.1.2 Função Mittag-Leffler

Funções de Mittag-Leffler têm um papel fundamental no cálculo fracionário, além de que essas funções generalizam a função exponencial. Nesse caso, as variáveis podem ser complexas, se considerado $z \in \mathbb{C}$ e real quando considerado $x \in \mathbb{R}$. Vamos definir aqui as funções com um e dois parâmetros de Mittag-Leffler.

Definição 3.1.4 A função de Mittag-Leffler de um parâmetro é dada por

$$E_q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(qk+1)}$$

para $z \in \mathbb{C}$ e $\text{Re}(z) > 0$.

Observamos que para caso $q = 1$ e $x \in \mathbb{R}$, temos que

$$E_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

Definição 3.1.5 A função de Mittag-Leffler com dois parâmetros é dada por

$$E_{q,p}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(qk+p)}$$

para $z \in \mathbb{C}$ e $\text{Re}(z) > 0$.

A seguir algumas das propriedades da função de Mittag-Leffler com dois parâmetros

Propriedade 3.1.2 São validas as seguintes relações:

$$a) \ E_{2,1}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh(z).$$

$$b) \ E_{2,2}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k+1)!} = \frac{\sinh(z)}{z}.$$

onde $\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$ e $\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$

3.2 Integral Fracionária

No cálculo fracionário, para definirmos uma derivada fracionária primeiro é necessário definirmos a integral fracionária, pois tanto a ideia de derivada fracionária de Riemann-Liouville e de Caputo dependem da definição de integral fracionária. Então nesta Secção será feita a formalização da integral fracionária

Definição 3.2.1 Seja $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua por partes e integrável em todo subintervalo de $[0, \infty)$. Denotamos o operador integral $Jf(t)$ da seguinte maneira

$$Jf(t) = \int_0^t f(s)ds$$

desse modo, temos que $J^0 f(t) = f(t)$ e $J^k f(t) = (JJ...J)f(t)$.

Utilizando o teorema de Fubini ([BOUCHARA; ZANETIC; HELLMEISTER, 1996](#)), temos

$$\begin{aligned} J^2 &= (JJ)f(t) = \int_0^t Jf(s)ds = \int_0^t \int_0^s f(\lambda)d\lambda ds \\ &= \int_0^t \int_{\lambda}^t f(\lambda)dsd\lambda = \int_0^t f(\lambda) \int_{\lambda}^t dsd\lambda \\ &= \int_0^t f(\lambda)[s]_{\lambda}^t d\lambda = \int_0^t f(\lambda)(t - \lambda)d\lambda \end{aligned}$$

Agora, fazemos o mesmo para $J^3 f(t)$,

$$\begin{aligned}
 J^3 &= J J^2 f(t) = \int_0^t J^2 f(s) ds = \int_0^t \int_0^s f(\lambda)(s - \lambda) d\lambda ds \\
 &= \int_0^t \int_\lambda^t f(\lambda)(s - \lambda) ds d\lambda = \int_0^t f(\lambda) \int_\lambda^t (s - \lambda) ds d\lambda \\
 &= \int_0^t f(\lambda) \int_\lambda^t (s - \lambda) ds d\lambda = \int_0^t f(\lambda) \left[\frac{(s - \lambda)^2}{2} \right]_\lambda^t d\lambda \\
 &= \int_0^t f(\lambda) \frac{(t - \lambda)^2}{2} d\lambda.
 \end{aligned}$$

Repetimos esse processo várias vezes, obtemos que

$$J^n f(t) = \int_0^t \frac{(t - s)^{n-1}}{(n - 1)!} f(s) ds$$

como $\Gamma(n) = (n - 1)!$ para $n \in \mathbb{Z}^+$ e $n \geq 1$, então

$$J^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^t (t - s)^{n-1} f(s) ds \quad (3.4)$$

Observamos que para $n > 1$ a equação (3.7) está bem definida. Com isso temos a seguinte definição:

Definição 3.2.2 Sejam $q \in \mathbb{C}$ com $\text{Re}(q) > 0$ e f uma função contínua por partes em $[0, \infty)$ e integrável em qualquer subintervalo de $[0, \infty)$. Então para $t > 0$ a integral fracionária de Riemann-Liouville de ordem q é dada por

$$J^q f(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t - s)^{q-1} f(s) ds \quad (3.5)$$

com $\Gamma(q)$ definida pra $q \in \mathbb{Z}^+$ e $q \geq 1$.

Definição 3.2.3 A função de Gel'fand-Shilov é definida por

$$\phi_\lambda(x) = \begin{cases} \frac{x^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}, & \text{se } x > 0; \\ 0, & \text{se } x \leq 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

para $\lambda \in \mathbb{N} - \{0\}$. Podemos escrever, ainda que

$$J^q f(t) = (\phi_q * f)(t) \quad (3.7)$$

Observamos que, a partir dessa definição de Gel'fand-Shilov e da definição de produto de convolução, podemos escrever

$$(\phi_q * f)(t) = \int_0^t \frac{(t - x)^{q-1}}{\Gamma(q)} f(x) dx = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t - x)^{q-1} f(x) dx = J^q f(t)$$

Teorema 3.2.1 (Lei do expoente) Sejam $q, p \geq 0$ e $p, q \in \mathbb{R}$ temos que $J^p J^q = J^{q+p}$.

Demonstração: Vamos mostrar que $\phi_q * \phi_p = \phi_{q+p}$ e utilizar (3.7).

A partir da definição de convolução podemos escrever

$$\begin{aligned} (\phi_q * \phi_p)(t) &= \int_0^t \frac{x^{q-1}}{\Gamma(q)} \frac{(t-x)^{p-1}}{\Gamma(p)} dx \\ &= \frac{t^{p-1}}{\Gamma(q)\Gamma(p)} \int_0^t x^{q-1} \left(1 - \frac{x}{t}\right)^{p-1} dx \end{aligned} \quad (3.8)$$

Fazemos a mudança de variável $u = \frac{x}{t}$ em (3.7), obtemos que

$$\begin{aligned} (\phi_q * \phi_p)(t) &= \frac{t^{p-1}}{\Gamma(q)\Gamma(p)} \int_0^t (ut)^{q-1} (1-u)^{p-1} du \\ &= \frac{t^{p+q-1}}{\Gamma(q)\Gamma(p)} \int_0^1 u^{q-1} (1-u)^{p-1} du \\ &= \frac{t^{p+q-1}}{\Gamma(q)\Gamma(p)} B(q, p) = \frac{t^{p+q-1}}{\Gamma(q)\Gamma(p)} \frac{\Gamma(q)\Gamma(p)}{\Gamma(q+p)} \\ &= \frac{t^{p+q-1}}{\Gamma(q+p)} \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde $B(q, p)$ e $\Gamma(q+p)$ são as funções Beta e Gamma, respectivamente, definida para $q, p \in \mathbb{R}^+$. Logo, daí temos que, por (3.7),

$$\phi_q * \phi_p = \frac{t^{p+q-1}}{\Gamma(q+p)} = \phi_{q+p}.$$

□

Observamos que com estas equações, concluímos que

$$J^q J^p f(t) = \phi_q * J^p f(t) = \phi_q * \phi_p * f(t) = \phi_{q+p} * f(t) = J^{q+p} f(t)$$

onde f é tal que $J^q f(t)$ faça sentido $\forall q > 0$.

Exemplo 3.2.1 Calcular a integral fracionária de ordem $q \in \mathbb{R}$ da função constante $f(t) = k$, onde $n-1 < q \leq n$, $n \in \mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{R}^*$.

$$J_t^q = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-x)^{q-1} k dx = \frac{k}{\Gamma(q)} \int_0^t \left[t \left(1 - \frac{x}{t}\right)\right]^{q-1} dx \quad (3.10)$$

Então fazemos $u = \frac{x}{t}$ em (3.10)

$$\begin{aligned} J_t^q &= \frac{k}{\Gamma(q)} \int_0^t t^{q-1} (1-u)^{q-1} t du = \frac{t^q k}{\Gamma(q)} \int_0^1 (1-u)^{q-1} du \\ &= \frac{t^q k}{\Gamma(q)} B(1, q) = \frac{t^q k}{\Gamma(q)} \frac{\Gamma(1)\Gamma(q)}{\Gamma(q+1)} = \frac{t^q k}{\Gamma(q+1)} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Portanto,

$$J_t^q = \frac{t^q k}{\Gamma(q+1)}.$$

□

3.2.1 Transformada de Laplace da Integral Fracionária de Riemann-Liouville

A transformada de Laplace da integral fracionária de Riemann-Liouville de ordem q de uma função f é

$$\mathcal{L}\{J^q f(t)\} = \mathcal{L}\{\phi_q(t) * f(t)\} = \mathcal{L}\{\phi_q(t)\} \mathcal{L}\{f(t)\}$$

Usando a definição de transformada de Laplace dada em (3.1.1), da função Gel'fand-Shilov de ordem q não inteira dada em (3.6), e fazendo a mudança de variável $u=st$, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{J^q f(t)\} &= \mathcal{L}\{f(t)\} \int_0^\infty e^{-st} \frac{t^{q-1}}{\Gamma(q)} dt = \frac{\mathcal{L}\{f(t)\}}{\Gamma(q)} \int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{u}{s}\right)^{q-1} \frac{du}{s} \\ &= \frac{\mathcal{L}\{f(t)\}}{\Gamma(q)} \int_0^\infty \frac{u^{q-1}}{s^q} e^{-u} du = \frac{\mathcal{L}\{f(t)\} s^{-q}}{\Gamma(q)} \int_0^\infty e^{-u} u^{q-1} du \\ &= \frac{\mathcal{L}\{f(t)\} s^{-q}}{\Gamma(q)} \Gamma(q) = \mathcal{L}\{f(t)\} s^{-q} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Portanto, a transformada de Laplace da integral fracionária de Riemann-Liouville de ordem $q > 0$ de uma função f é

$$\mathcal{L}\{J^q f(t)\} = \frac{\mathcal{L}\{f(t)\}}{s^q}$$

Consequentemente, temos a transformada inversa é dada por

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\mathcal{L}\{f(t)\}}{s^q} \right\} = J^q f(t).$$

3.3 Derivada de ordem Fracionária

Denotando $D = d/dx$ o operador derivada e seja $n \in \mathbb{N}$, o significado de $D^n f(t)$ a derivada de ordem n da função f . Nesta Seção apresentamos as definições de derivada fracionária de Riemann-Liouville e Caputo.

A escolha mais precisa para o operador fracionário depende do problema em que estamos abordando, por exemplo, podemos mostrar que a definição de Caputo é mais conveniente quando estamos estudando equações diferenciais com condições iniciais.

A definição de derivada Fracionária de Riemann-Liouville é consequência direta do Teorema Fundamental do Cálculo.

Teorema 3.3.1 *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $F[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por*

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

Então, F é diferenciável e $F' = f$.

Usando assim a notação de integral fracionária como $(Jf)(t) = \int_0^t f(s)ds$ e a notação de derivada fracionária como $(Df)(t) = f'(t)$. Então pelo Teorema Fundamental do Cálculo (3.3.1) temos que

$$(DJf)(t) = f(t).$$

De modo mais geral mostramos por indução finita que para todo $q \in \mathbb{N}$

$$(D^q J^q f)(t) = f(t), \quad (3.13)$$

e também é verdade que $D^q f = (DD \dots D)f$ é a composição q vezes do operador D .

Consideramos que (3.13) é válida para $q = m$, então vamos mostrar que vale $q = m + 1$ em um intervalo $I = [0, a]$, temos

$$(D^{m+1} J^{m+1} f)(t) = (D^m DJ J^m f)(t) = (D^m J^m f)(t) = f(t). \quad (3.14)$$

Assim, como na integral, o operador derivada satisfaz também a lei dos expoentes, isto é $D^q D^p f = D^{q+p} f$ para todo $f \in C^k[a, b]$ com $k \in \mathbb{N}$ e $a < b$.

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e m o menor inteiro maior que n e f uma função contínua definida no domínio $[0, a]$, onde f admite derivada até ordem q , $q \in \mathbb{R}^+$

$$D^{m-n} J^{m-n} f(t) = f(t).$$

Por outro lado, aplicando o operador D^n em ambos os lados da equação acima

$$D^m J^{m-n} f(t) = D^n f(t)$$

como a integral fracionária pode ser definida para números não inteiros $q > 0$, obtemos que

$$D^q f(t) = D^m J^{m-q} f(t).$$

Com isso chegamos a primeira definição formal de integral fracionária de Riemann-Liouville.

Definição 3.3.1 *Sejam $q > 0$ e p o menor inteiro maior que q , assim definimos a derivada fracionária de Riemann-Liouville de ordem q da seguinte maneira*

$${}_R D^q f(t) = \begin{cases} \frac{d^p}{dt^p} \left[\frac{1}{\Gamma(p-q)} \int_0^t (t-s)^{p-q-1} f(s) ds \right], & \text{se } p-1 < q < p; \\ \frac{d^p}{dt^p} f(t), & \text{se } q = p. \end{cases} \quad (3.15)$$

A definição de Riemann-Liouville foi a primeira na literatura, mas somente com a definição de Caputo aplicações práticas foram possíveis. Vejamos agora a derivada fracionária de Caputo.

Definição 3.3.2 Seja $q > 0$, e p o menor inteiro maior que q . Desse modo, a derivada fracionária segundo Caputo é definida por

$${}^C D^q f(t) = J^{p-q}[D^p f(t)].$$

Observamos que o índice superior da integral da definição de Caputo tem o mesmo significado que na derivada fracionária segundo Riemann-Liouville, com exceção do índice inferior.

$${}^C D^q f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(p-q)} \int_0^t (t-s)^{p-q-1} \left(\frac{d^p}{dt^p} f(s) \right) ds, & \text{se } p-1 < q < p; \\ \frac{d^p}{dt^p} f(t), & \text{se } q = p. \end{cases} \quad (3.16)$$

Observação 3.3.1 Notemos que a integral segundo Caputo requer a integrabilidade da derivada de ordem p da função, por isso se torna uma derivada mais restritiva do que a derivada de Riemann-Liouville.

Daqui em diante usaremos como definição de derivada fracionária segundo Caputo.

Lema 3.3.1 A seguinte relação vale: seja $f \in C^k[a, b]$ para algum $k \in \mathbb{N}$, então

$$J^q D^q f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{q-1} D^k f(0) \frac{t^k}{k!}$$

Demonstração: Para mostrarmos o lema, vamos usar o Princípio da Indução Infinita

$$\begin{aligned} J D f(t) &= \int_0^t D f(s) ds \\ &= f(t) - f(0) \\ &= f(t) - \sum_{k=0}^0 D^k f(0) \frac{t^k}{k!} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Supomos que vale para $q=m$, vamos mostrar que vale para $q=m+1$. Então,

$$\begin{aligned}
 J^{m+1}D^{m+1}f(t) &= J[J^m D^m]f(t) = J\left[D(f) - \sum_{k=0}^{m-1} D^k Df(0) \frac{t^k}{k!}\right] \\
 &= J\left[D(f) - \sum_{k=0}^{m-1} D^{k+1}f(0) \frac{t^k}{k!}\right] \\
 &= f(t) - f(0) - \sum_{k=0}^{m-1} D^{k+1}f(0) \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} \\
 &= f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} D^k f(0) \frac{t^k}{k!}.
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Portanto, pelo Principio de Indução Finita, temos o resultado.

□

Teorema 3.3.2 Sejam a derivada fracionária de Riemann-Liouville e Caputo, ambas de ordem q e p menor inteiro maior que q . Então, a seguinte igualdade é válida.

$${}^R D^q f(t) = {}^C D^q f(t) + \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^{k-q}}{\Gamma(k-q+1)} D^k f(0)$$

Demonstração: Aplicando o operador integral na definição de derivada segundo Caputo, usando o teorema da lei dos expoentes e o Lema (3.3.1), temos que

$$\begin{aligned}
 (J^q)({}^C D^q)f(t) &= J^q J^p - q[D^p f(t)] = J^{q+p-q}[D^n f(t)] \\
 &= J^n[D^n f(t)] = f(t) - \sum_{k=0}^{p-1} D^k f(0) \frac{t^k}{k!}
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Agora aplicando o operador derivada segundo Riemann-Liouville, temos

$$\begin{aligned}
 ({}^R D^q)(J^q)({}^C D^q)f(t) &= {}^R D^q[f(t) - \sum_{k=0}^{p-1} D^k f(0) \frac{t^k}{k!}] \\
 &= {}^R D^q f(t) - \sum_{k=0}^{p-1} \frac{D^k f(0)}{k!} ({}^R D^q)t^k.
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Observamos que podemos mostrar que $({}^R D^q)t^k$ é a integral fracionária quando $f(t) = t^k$ e

$${}^R D^q f(t) = {}^R D^q t^k = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-1+1)} t^{k-q}$$

Esse resultado pode ser encontrado em (VIEIRA et al., 2017). Então

$$\begin{aligned}
 {}^C D^q f(t) &= {}^R D^q f(t) - \sum_{k=0}^{p-1} \frac{D^k f(0)}{k!} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-1+1)} t^{k-q} \\
 &= {}^R D^q f(t) - \sum_{k=0}^{p-1} \frac{D^k f(0)}{k!} \frac{k!}{\Gamma(k-1+1)} t^{k-q} \\
 &= {}^R D^q f(t) - \sum_{k=0}^{p-1} \frac{D^k f(0)}{\Gamma(k-1+1)} t^{k-q}
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Assim segue o resultado.

□

O seguinte teorema nos fornece a condição para que a derivada de Caputo da função f seja igual a derivada segundo Caputo da função g .

Teorema 3.3.3 A igualdade ${}^C D^q f(t) = {}^C D^q g(t)$ é válida, se e somente se,

$$f(t) = g(t) + \sum_{k=0}^{p-1} \frac{D^k(f(0) - g(0))}{k!} t^k$$

Com $t > 0$ e $p - 1 < q < p$

Demonstração: Suponhamos que ${}^C D^q f(t) = {}^C D^q g(t)$ então,

$$J^{p-q} D^q f(t) = J^{p-q} D^q g(t)$$

Aplicando o operador integral de ordem q em ambos os lados da identidade acima e usando o Lema 4.3.1 temos que

$$\begin{aligned} J^p D^p f(t) &= J^p D^q g(t) \\ f(t) - \sum_{k=0}^{p-1} D^k f(0) \frac{t^k}{k!} &= g(t) - \sum_{k=0}^{p-1} D^k g(0) \frac{t^k}{k!} \\ f(t) &= g(t) + \sum_{k=0}^{p-1} D^k(f(0) - g(0)) \frac{t^k}{k!} \end{aligned}$$

Agora, suponhamos que $f(t) = g(t) + \sum_{k=0}^{p-1} D^k(f(0) - g(0)) \frac{t^k}{k!}$. Então, aplicando o operador derivada segundo Caputo de ordem q , temos que

$$\begin{aligned} {}^C D^q f(t) &= {}^C D^q g(t) + \sum_{k=0}^{p-1} \frac{D^k(f(0) - g(0))}{k!} ({}^C D^q) t^k \\ &= {}^C D^q g(t) + \sum_{k=0}^{p-1} \frac{D^k(f(0) - g(0))}{k!} J^{p-q} [D^q t^k] \end{aligned} \quad (3.22)$$

Mas como se $D^q t^k = 0$, segue que ${}^C D^q f(t) = {}^C D^q g(t)$ em (3.22).

□

3.3.1 Transformada de Laplace para Derivada Fracionária

Vamos mostrar uma breve introdução sobre transformada de Laplace para derivada fracionária segundo Riemann e segundo Caputo.

Propriedade 3.3.1 É válida a seguinte relação

$$\mathcal{L}\{D^q f(t)\} = s^q \mathcal{L}\{f(t)\} - \sum_{k=0}^{q-1} D^{(k)} f(0) s^{q-1-k}$$

para $q \in \mathbb{R}$.

A demonstração dessa propriedade pode ser encontrada em (CAMARGO; OLIVEIRA; CHIACCHIO, 2006).

Teorema 3.3.4 A transformada de Laplace da Derivada segundo Riemann-Liouville de ordem q é dada por

$$\mathcal{L}\{^R D^q f(t)\} = s^q F(s) - \sum_{k=0}^{p-1} D^{(k)} J^{p-q} f(0) s^{p-k-1} \quad (3.23)$$

em que $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$.

Demonstração: Pela a propriedade 3.3.1 e a equação (3.12). Aplicando a transformada de Laplace temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{^R D^q f(t)\} &= \mathcal{L}\{D^p(J^{q-p})f(t)\} \\ &= s^p [s^{q-p} \mathcal{L}\{f(t)\}] - \sum_{k=0}^{p-1} D^{(k)} J^{p-q} f(0) s^{p-k-1} \\ &= s^q F(s) - \sum_{k=0}^{p-1} D^{(k)} J^{p-q} f(0) s^{p-k-1}. \end{aligned}$$

Segue o resultado em (3.23).

□

Teorema 3.3.5 A transformada de Laplace da Derivada segundo Caputo de ordem q é dada por

$$\mathcal{L}\{^C D^q f(t)\} = s^q F(s) - \sum_{k=0}^{p-1} D^{(k)} f(0) s^{p-k-1} \quad (3.24)$$

em que $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$.

Demonstração: Pela definição de derivada de Caputo e usando a propriedade 3.3.1, temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{ {}^C D^q f(t) \} &= \mathcal{L}\{ J^{p-q}(D^p f(t)) \} = s^{q-p} \mathcal{L}\{ D^p f(t) \} \\
&= s^{q-p} \left[s^p \mathcal{L}\{ f(t) \} - \sum_{k=0}^{p-1} D^k f(0) s^{p-k-1} \right] \\
&= s^q \mathcal{L}\{ f(t) \} - \sum_{k=0}^{p-1} D^k f(0) s^{q-k-1} \\
&= s^q F(s) - \sum_{k=0}^{p-1} D^k f(0) s^{q-k-1}.
\end{aligned}$$

Portanto, segue o resultado de (3.24).

□

4 Equações Diferenciais Inteira e Fracionária

Neste Capítulo apresentamos os estudos de existência e unicidade de soluções para um sistema de equações tanto para ordem inteira quanto para ordem fracionária, dada uma condição inicial (PVI). Esses resultados podem ser encontrados em (ZHOU; JIAO; LI, 2009) e (DUARTE, 2015).

4.1 Existência e Unicidade de Solução

Começamos considerando o seguinte problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} {}^C D^q x(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (4.1)$$

onde $q \in (0, 1]$, ${}^C D^q$ está definida em (3.16) e $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. A função f é chamada de campo vetorial com dimensão $n \geq 1$. Lembramos que quando $q \in (0, 1)$ então usamos a definição de derivada de Caputo, dada por

$${}^C D^q x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-q)} \int_{t_0}^t (t-s)^{-q} f(s, x(s)) ds$$

O Lema a seguir é de extrema importância para os resultados.

Lema 4.1.1 Suponhamos que $f(t, x(t))$ é uma função contínua. Então, o problema de valor inicial (4.1) é equivalente a equação integral não linear de Volterra de segundo tipo

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} f(s, x(s)) ds \quad (4.2)$$

Isto nos diz que, toda solução da equação de Volterra é também uma solução do PVI original (4.1).

Demonstração: Usando a definição 3.3.2 de Caputo, temos

$${}^C D^q f(t) = J^{1-q} Df(t),$$

com $q \in (0, 1)$. Aplicamos o operador J^q , com J^q definido em (3.5) na identidade acima e obtemos que

$$J D x(t) = J^q f(t, x(t)),$$

o que implica

$$x(t) - x_0 = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} f(s, x(s)) ds,$$

e, portanto,

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} f(s, x(s)) ds.$$

□

Observamos que se $q = 1$ então temos

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s)) ds.$$

que é a definição da solução para uma equação diferencial de ordem inteira.

4.1.1 Existência e Unicidade de EDO's de ordem inteira

Vamos antes apresentar algumas das definições, lemas e teoremas que serão importantes para a demonstração do teorema de existência e unicidade de uma equação diferencial de ordem inteira. Algumas das demonstrações desses resultados podem ser encontradas em livros de Análise ([LIMA, 2004](#)), Espaços Métricos ([LIMA, 1977](#)) e Topologia ([LIMA, 1970](#)).

Definição 4.1.1 Um espaço métrico é um conjunto $X \neq \emptyset$ munido de uma função $\|\cdot\| : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$, chamado de métrica sobre X , com as seguintes propriedades.

- (i) Para quaisquer $a, b \in X$, $\|a - b\| = 0$ se e somente se $a = b$;
- (ii) Para qualquer $(a, b) \in X \times X$, $\|a - b\| = \|b - a\|$;
- (iii) Para quaisquer a, b e $c \in X$, $\|a - b\| \leq \|a - c\| + \|b - c\|$.

Definição 4.1.2 Dizemos que um espaço métrico M é completo quando toda sequência de Cauchy em M é convergente.

Definição 4.1.3 Chamamos de espaço de Banach um espaço vetorial normado completo.

Definição 4.1.4 Uma função $f : M \rightarrow N$ é dita Lipschitz se existir uma constante real $L > 0$ tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|$$

$\forall x, y \in M$.

Lema 4.1.2 Sejam M, N espaços vetoriais. Se $f : M \rightarrow N$ é uma aplicação Lipschitziana então f é contínua.

Demonstração: Sendo f uma aplicação contínua de Lipschitz, então $\exists L > 0$ tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$ e tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$, temos que $\|x - y\| < \delta$ então

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\| < L\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon.$$

Portanto, f é contínua em M .

□

Definição 4.1.5 Sejam M, N espaços métricos. Chamamos de contração uma aplicação $f : M \rightarrow N$ quando existe uma constante L , com $0 \leq L < 1$, tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|$$

para quaisquer $x, y \in M$.

Teorema 4.1.1 (Princípio da contração de Banach) Seja M um espaço métrico completo. Se $T : M \rightarrow M$ é uma contração, então T possuirá um ponto fixo. Além disso, se x^* é um ponto fixo de T então para todo $x \in M$, temos que

$$\|T^m(x) - x^*\| \rightarrow 0$$

quando $m \rightarrow \infty$.

A demonstração desse teorema pode ser encontrada, por exemplo, em (DUARTE, 2015).

Para simplificar a notação, considere os seguintes conjuntos:

- a) $J = [t_0 - a, t_0 + a]$.
- b) $B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq b\}$.
- c) $E = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : t \in J, x \in B\}$.

Teorema 4.1.2 (Teorema de Existência e Unicidade de Cauchy) Seja a função $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua e lipschitziana na segunda variável, isto é, existe uma constante real L tal que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|,$$

para $t \in J$ e $x, y \in B$. Então, existe a_1 com $0 < a_1 \leq a$ tal que o problema $y' = f(t, x)$ tem apenas uma solução $\mu(t)$ definida em J e satisfazendo $\mu(t_0) = y_0$.

Demonstração: Por hipótese $f(t, x)$ é contínua então existe M tal que $|f(t, x)| \leq M$, para $(t, x) \in E$. Tomamos então $a_1 = \min(a, \frac{b}{M})$. Suponhamos que $a \leq \frac{b}{M}$, ou seja $a_1 = a$. Para $M = 0$ temos $f \equiv 0$, caso trivial. Vamos mostrar então para o caso $M \neq 0$.

Consideramos agora o espaço métrico completo e formado pelas funções contínuas de J em B , munido da métrica da convergência uniforme,

$$\|x\| = \sup_{t \in J} \{\|x(t)\|\}$$

com $x \in \Psi$ onde $\Psi = \{x \in C(J, \mathbb{R}^n) : \|x - x_0\| \leq b\}$.

Como estamos no caso inteiro, da equação (4.2), definimos $T_u : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ da seguinte forma

$$T_u(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds$$

para $u \in \Psi$. Mostraremos que $T_u \in \Psi$.

De fato,

$$\|T_u(t) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds \right\| \leq \int_{t_0}^t \|f(s, u(s))\| ds \quad (4.3)$$

Como $\|f(t, x)\| \leq M$ para $(t, x) \in E$, obtemos da equação (4.3)

$$\|T_u(t) - x_0\| \leq \int_{t_0}^t M ds = M|t - t_0| = M(t - t_0)$$

O fato de $t \in [t_0 - a, t_0 + a]$ e de $a \leq \frac{b}{M}$, concluímos

$$\|T_u(t) - x_0\| \leq M|t - t_0| \leq M.a \leq b$$

Portanto, $T_u(t) \in \Psi$ para qualquer $u \in \Psi$.

Agora, mostraremos que T_u é contínua. Dados $t_1, t_2 \in [t_0 - a, t_0 + a]$, com $t_1 < t_2$, então vale que

$$\begin{aligned} \|T_u(t_2) - T_u(t_1)\| &= \left\| x_0 + \int_{t_0}^{t_2} f(s, u(s)) ds - x_0 - \int_{t_0}^{t_1} f(s, u(s)) ds \right\| \\ &= \left\| \int_{t_0}^{t_2} f(s, u(s)) ds - \int_{t_0}^{t_1} f(s, u(s)) ds \right\| \\ &= \left\| \int_{t_0}^{t_1} f(s, u(s)) ds + \int_{t_1}^{t_2} f(s, u(s)) ds - \int_{t_0}^{t_1} f(s, u(s)) ds \right\| \\ &= \left\| \int_{t_1}^{t_2} f(s, u(s)) ds \right\| \\ &\leq \int_{t_1}^{t_2} \|f(s, u(s))\| ds \\ &\leq \int_{t_1}^{t_2} M ds \\ &= M|t_2 - t_1|. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Portanto, T_u é de Lipschitz e, conseqüentemente, pelo Lema 4.1.2, T_u é contínua.

Em outras palavras, o operador T é uma aplicação de Ψ nele mesmo. Sendo assim garantimos a existência de solução.

Por fim vamos mostrar que T é uma contração. Para $u, v \in \Psi$ e pelo fato que f é lipschitziana na segunda variável,

$$\begin{aligned}
 \|T_u - T_v\| &= \sup_{t \in J} \|T_u(t) - T_v(t)\| \\
 &= \sup_{t \in J} \left\| \int_{t_0}^t [f(s, u(s)) - f(s, v(s))] ds \right\| \\
 &\leq \sup_{t \in J} \int_{t_0}^t \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\| ds \\
 &\leq \sup_{t \in J} \int_{t_0}^t L \|u(s) - v(s)\| ds \\
 &\leq L \|u - v\| \sup_{t \in J} \int_{t_0}^t ds \\
 &= L \|u - v\| \sup(t - t_0) = La \|u - v\|.
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Como $t \in [t_0 - a, t_0 + a]$, escolhemos a de tal forma que $C = La < 1$,

$$\|T_u - T_v\| \leq C \|u - v\|.$$

O que implica que T é uma contração, pela definição 4.1.5, pois $0 < C < 1$. Então, sendo T uma contração em Ψ , um espaço métrico completo, podemos aplicar o Teorema do ponto fixo de Banach 4.1.1, o qual garante que existe uma e só uma $u \in \Psi$ que satisfaz $T_u = u(t)$, ou seja,

$$u(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds.$$

Ainda, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos $u'(t) = f(t, u(t))$ e $u(t_0) = x_0$. Portanto, o problema de valor inicial (4.1) admite uma única solução definida em $J = [t_0 - a, t_0 + a]$ satisfazendo $u(t_0) = x_0$.

□

4.1.2 Existência e unicidade de soluções de EDO's fracionárias

Vamos antes apresentar algumas definições, lemas e teoremas que serão importantes para a demonstração do teorema de existência e unicidade de uma equação diferencial de ordem não inteira. Algumas das demonstrações desses resultados podem ser encontrados em livros de análise, topologia, espaços métricos e análise funcional ([OLIVEIRA, 2001](#)).

Definição 4.1.6 O conjunto $\mathcal{C}(X, Y)$ é o espaço das funções contínuas e limitadas entre os espaços métricos Y e X munido da norma do supremo sobre X .

Definição 4.1.7 Seja X um espaço topológico e M um espaço métrico. Dizemos que uma família \mathcal{F} de funções definidas em X com valores em M é equicontínuo no ponto $x_0 \in X$

se, dado $\varepsilon > 0$, existe $V \subset X$ vizinhança aberta no ponto x_0 tal que, $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$, $\forall x \in V$ e $f \in \mathcal{F}$. Dizemos que a \mathcal{F} é equicontínua se \mathcal{F} é equicontínua em todos os pontos de X . Sendo assim, temos $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X, M)$, se \mathcal{F} é equicontínua.

Definição 4.1.8 Seja X um espaço topológico. Dizemos que $H \subset X$ é relativamente compacto se \overline{H} é compacto.

Teorema 4.1.3 Seja X um conjunto compacto e Y um espaço métrico. Seja $H \subset \mathcal{C}(X, Y)$ então H é relativamente compacto se, e somente se, H é equicontínuo e $H(x) = \{f(x) : f \in H\}$ é relativamente compacto.

Demonstração desse teorema pode ser encontrado em (JAHNKE; GARCIA; GARCIA,).

Definição 4.1.9 Sejam X e Y um espaço de Banach e $T : X \rightarrow Y$ um operador linear. T é dito relativamente compacto se $\overline{T(H)}$ é compacto, para todo H limitado.

Definição 4.1.10 Seja $T : X \rightarrow Y$ um operador linear. T é dito ser completamente contínuo se for contínuo e relativamente compacto.

Definição 4.1.11 $L(X, Y)$ é dito espaço vetorial das funções integráveis a Lebesgue, ou seja, $L(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y \text{ integrável a Lebesgue}\}$.

Definição 4.1.12 Sejam (X, A) e (Y, B) espaços mensuráveis. Dizemos que a função $f : X \rightarrow Y$ é (A, B) -mensurável se

$$f^{-1}(Y) \in A, \forall Y \in B,$$

isto é, $f^{-1}(B) \subset A$

Observação 4.1.1 Funções mensuráveis são aquelas que apresentam comportamento suficientemente simples para que se possa desenvolver uma teoria de integração.

Teorema 4.1.4 (Teorema do ponto fixo de Schauder) Seja U um subconjunto fechado, limitado e convexo de um espaço de Banach. Suponhamos que $T : U \rightarrow U$ é completamente contínua. Então T terá, pelo menos, um ponto fixo em U .

A demonstração desse teorema pode ser encontrada em (ZEIDLER, 2013).

Definição 4.1.13 Seja p um número real tal que $1 \leq p < \infty$. Representamos por $L^p(\Omega)$ a classe de todas as funções reais mensuráveis x , definidas em Ω tais que $|x|^p$ é integrável.

Teorema 4.1.5 (Desigualdade de Holder) Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, com $1 \leq p < \infty$ e q o conjugado de p , isto é, $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. Então $fg \in L^1(\Omega)$ e

$$\left| \int_{\Omega} (f \cdot g) dx \right| \leq \left(\int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |g|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

.

A demonstração desse teorema pode ser encontrada em (MEDEIROS; MELLO, 1985).

Lema 4.1.3 A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = (t - 1)^p - (t^p - 1)$ é decrescente com $p \geq 1, \forall t \geq 1$. Além disso, se dados a, b , com $0 < b \leq a$, então

$$(a - b)^p \leq (a^p - b^p)$$

Demonstração: Seja $p \geq 1$. Derivando a função f , temos

$$f'(t) = p[(t - 1)^{p-1} - t^{p-1}] < 0, \forall t \geq 1$$

o que implica que é decrescente e $f(t) \leq f(1) = 0, \forall t \geq 1$. Considerando $0 < b \leq a$ então $\frac{a}{b} \geq 1$,

$$\left(\frac{a}{b} - 1 \right)^p - \left(\frac{a^p}{b^p} - 1 \right) \leq 0$$

de onde segue que

$$\frac{(a - b)^p}{b^p} - \frac{(a^p - b^p)}{b^p} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (a - b)^p \leq a^p - b^p \quad (4.6)$$

e o resultado segue.

□

Vamos apresentar agora os resultados de existência e unicidade. Como referência foi usado o artigo de (ZHOU; JIAO; LI, 2009).

Para simplificar a notação, considere os seguintes conjuntos:

- a) $J = [t_0 - h, t_0 + h];$
- b) $B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq b\}$
- c) $E = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : t \in J, x \in B\}$

4.1.3 Teorema de existência

Teorema 4.1.6 (Teorema de existência) *Assuma que a função $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfaça as seguintes condições do tipo de Carathéodory:*

- (i) $f(t, x)$ é mensurável por Lebesgue com respeito à variável t em J .
- (ii) $f(t, x)$ é contínua com respeito à variável x em B .
- (iii) Existe uma constante $\beta \in (0, q)$ e uma função real $m(t) \in L^{\frac{1}{\beta}}(J)$ tal que

$$\|f(t, x)\| \leq m(t),$$

para quase todo $t \in J$ e para todo $x \in B$.

Então, para $q \in (0, 1)$, existe pelo menos uma solução para o PVI (4.1) no intervalo $J = [t_0 - h, t_0 + h]$ onde

$$h = \min \left\{ a, \left[\frac{b\Gamma(q)}{M} \left(\frac{q - \beta}{1 - \beta} \right)^{1-\beta} \right]^{\frac{1}{q-\beta}} \right\}.$$

$$M = \left(\int_{t_0}^{t_0+a} (m(s))^{\frac{1}{\beta}} ds \right)^{\beta}$$

Demonstração: Vamos mostrar para o caso $t \in J' = [t_0, t_0 + h]$. Sabemos que $f(t, x(t))$ é Lebesgue mensurável em J' então $f(t, x(t)) \in L^{\frac{1}{\beta}}$ de acordo com a condição (i) e (ii). Assim temos pelo Teorema 4.1.5 que q é o conjugado de $p = \frac{1}{\beta}$. Então,

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1 \Rightarrow q = \frac{p}{p-1}$$

substituindo p na equação acima, obtemos que

$$q = \frac{1}{1-\beta} \Rightarrow (t-s)^{q-1} \in L^{\frac{1}{1-\beta}}$$

para $t \in J'$. De acordo com a desigualdade de Holder dado pelo Teorema 4.1.5, temos que $(t-s)^{q-1}f(s, x(s))$ é Lebesgue integrável com respeito a $s \in [t_0, t] \forall t \in J'$ e vale que

$$\int_{t_0}^t \|(t-s)^{q-1}f(s, x(s))\| ds \leq \left(\int_{t_0}^t ((t-s)^{q-1})^{\frac{1}{1-\beta}} ds \right)^{1-\beta} \left(\int_{t_0}^t (m(s))^{\frac{1}{\beta}} ds \right)^{\beta} \quad (4.7)$$

Para $x \in C(J', \mathbb{R}^n)$ definimos a norma

$$\|x\| = \sup_{s \in J'} \|x(s)\|$$

e $C(J, \mathbb{R}^n)$ com a norma $\|\cdot\|$ é um espaço de Banach.

Seja $\Psi = \{x \in C(J', \mathbb{R}^n) : \|x - x_0\| \leq b\}$. Observamos que Ψ é um subconjunto fechado e limitado de $C(J', \mathbb{R}^n)$.

Vamos mostrar que Ψ é convexo. De fato, sejam $x_1, x_2 \in \Psi$ e $\lambda \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \|(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 - x_0\| &= \|(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 - x_0 + \lambda x_0 - \lambda x_0\| \\ &= \|(1-\lambda)x_1 - (1-\lambda)x_0 + \lambda(x_2 - x_0)\| \\ &\leq (1-\lambda)\|x_1 - x_0\| + \lambda\|x_2 - x_0\| \\ &\leq (1-\lambda)b + \lambda b = b \end{aligned}$$

o que implica que $(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 \in \Psi$.

Agora, para cada $x \in \Psi$, definimos o operador T como um operador de Volterra do segundo tipo como no Lema 4.1.1

$$(Tx)(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^t (t-s)^{q-1} f(s, x(s)) ds$$

$\forall t \in J' = [t_0, t_0 + h]$. Vamos mostrar que para qualquer $x \in \Psi$, temos $Tx \in \Psi$

De fato, seja $x \in \Psi$, usando a desigualdade de Holder dado pelo Teorema 4.1.5, a condição (iii) e tomando $h = \min \left\{ a, \left[\frac{bM}{\Gamma(q)} \left(\frac{q-\beta}{1-\beta} \right)^{1-\beta} \right]^{\frac{1}{q-\beta}} \right\}$. Suponhamos que $a \leq \left[\frac{b\Gamma(q)}{M} \left(\frac{q-\beta}{1-\beta} \right)^{1-\beta} \right]^{\frac{1}{q-\beta}}$, ou seja $h=a$, obtemos que

$$\begin{aligned} \|(Tx)(t) - x_0\| &= \left\| \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^t (t-s)^{q-1} f(s, x(s)) ds \right\| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^t \|(t-s)^{q-1} f(s, x(s))\| ds \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(q)} \left(\int_{t_0}^t ((t-s)^{q-1})^{\frac{1}{1-\beta}} ds \right)^{1-\beta} \left(\int_{t_0}^t (m(s))^{\frac{1}{\beta}} ds \right)^{\beta} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Para a primeira integral fazemos a seguinte substituição $w = t - s$, então $dw = -ds$, temos que

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t (t-s)^{\frac{q-1}{1-\beta}} ds &= \int_{t-t_0}^0 w^{\frac{q-1}{1-\beta}} (-dw) = \int_0^{t-t_0} w^{\frac{q-1}{1-\beta}} dw \\ &= \left(\frac{1-\beta}{q-\beta} \right) (t-t_0)^{\frac{q-\beta}{1-\beta}}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

substituindo (4.9) em (4.8)

$$\begin{aligned}
\|(Tx)(t) - x_0\| &\leq \frac{1}{\Gamma(q)} \left(\left(\frac{1-\beta}{q-\beta} \right) (t-t_0)^{\frac{q-\beta}{1-\beta}} \right)^{1-\beta} \left(\int_{t_0}^{t_0+h} (m(s))^{\frac{1}{\beta}} ds \right)^{\beta} \\
&= \frac{1}{\Gamma(q)} \left(\frac{1-\beta}{q-\beta} \right)^{1-\beta} (t-t_0)^{q-\beta} \left(\int_{t_0}^{t_0+h} (m(s))^{\frac{1}{\beta}} ds \right)^{\beta} \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(q)} \left(\frac{1-\beta}{q-\beta} \right)^{1-\beta} h^{q-\beta} M \\
&= \frac{1}{\Gamma(q)} \left(\frac{1-\beta}{q-\beta} \right)^{1-\beta} a^{q-\beta} M \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(q)} \left(\frac{1-\beta}{q-\beta} \right)^{1-\beta} \left[\left[\frac{b\Gamma(q)}{M} \left(\frac{q-\beta}{1-\beta} \right)^{1-\beta} \right]^{\frac{1}{q-\beta}} \right]^{q-\beta} \\
&= b
\end{aligned}$$

para $t \in J'$. Isso implica que $\|Tx - x_0\| \leq b$, então T é uma função de Ψ nele mesmo.

Agora mostraremos que T é completamente contínua. Para isso mostrando que T é contínua e relativamente compacta.

Sejam (x_n) , $x \in \Psi$, $n \in \mathbb{N}$ com $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$, temos $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = x(t)$, para $t \in J'$. Da condição (ii), temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(t, x_n(t)) = f(t, x(t))$$

para $t \in J'$. O que implica que $\sup_{s \in J'} \|f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))\| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\|(Tx_n)(t) - (Tx)(t)\| &= \frac{1}{\Gamma(q)} \left\| \int_{t_0}^t (t-s)^{q-1} [f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))] ds \right\| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^t \|(t-s)^{q-1} [f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))]\| ds \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(q)} \left(\int_{t_0}^t (t-s)^{q-1} ds \right) \sup_{s \in J'} \|f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))\| \\
&= \frac{t^{q-1}}{\Gamma(q)} \left(\int_{t_0}^t \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{q-1} ds \right) \sup_{s \in J'} \|f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))\|
\end{aligned}$$

Fazemos $u = \frac{s}{t}$ e pelo Teorema 3.1.1, temos que

$$\begin{aligned}
\|(Tx_n)(t) - (Tx)(t)\| &\leq \frac{t^{q-1}}{\Gamma(q)} \left(\int_0^1 (1-u)^{q-1} t du \right) \sup_{s \in J'} \|f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))\| \\
&= \frac{t^q}{\Gamma(q)} B(1, q) \sup_{s \in J'} \|f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))\| \\
&= \frac{t^q}{\Gamma(q)} \frac{\Gamma(1)\Gamma(q)}{\Gamma(q+1)} \sup_{s \in J'} \|f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))\| \\
&= \frac{t^q}{\Gamma(q+1)} \sup_{s \in J'} \|f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))\|
\end{aligned}$$

o que implica que

$$\|(Tx_n)(t) - (Tx)(t)\| \rightarrow 0,$$

quando $n \rightarrow \infty$. Logo, o operador T é contínuo.

Vamos mostrar agora que $T(\Psi)$ é relativamente compacto. Para isso é necessário mostrar que a família de funções $\{Tx : x \in \Psi\}$ é pontualmente limitado e equicontínua em J' .

Para $x \in \Psi$, temos que, por (4.8)

$$\begin{aligned} \|(Tx)(t)\| &= \|(Tx)(t) - x_0 + x_0\| \\ &\leq \|(Tx)(t) - x_0\| + \|x_0\| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(q)} \left(\frac{1-\beta}{q-\beta} \right)^{1-\beta} h^{q-\beta} M + \|x_0\| \\ &\leq b + \|x_0\| \end{aligned}$$

o que implica que $\{Tx : x \in \Psi\}$ é uniformemente limitado. Portanto, pontualmente limitado.

Por fim mostraremos que $\{Tx : x \in \Psi\}$ é equicontínuo em J' . Sejam $t_1, t_2 \in J'$, com $t_1 < t_2$, temos que

$$\begin{aligned} &\|(Tx)(t_2) - (Tx)(t_1)\| = \\ &= \frac{1}{\Gamma(q)} \left\| \int_{t_0}^{t_2} (t_2 - s)^{q-1} f(s, x(s)) ds - \int_{t_0}^{t_1} (t_1 - s)^{q-1} f(s, x(s)) ds \right\| \\ &= \frac{1}{\Gamma(q)} \left\| \int_{t_0}^{t_1} (t_2 - s)^{q-1} f(s, x(s)) ds + \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{q-1} f(s, x(s)) ds - \right. \\ &\quad \left. - \int_{t_0}^{t_1} (t_1 - s)^{q-1} f(s, x(s)) ds \right\| \\ &= \frac{1}{\Gamma(q)} \left\| \int_{t_0}^{t_1} [(t_2 - s)^{q-1} - (t_1 - s)^{q-1}] f(s, x(s)) ds + \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{q-1} f(s, x(s)) ds \right\| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^{t_1} \|(t_2 - s)^{q-1} - (t_1 - s)^{q-1}\| |f(s, x(s))| ds \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_1}^{t_2} \|(t_2 - s)^{q-1} f(s, x(s))\| ds \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Holder dada pelo Teorema 4.1.5

$$\begin{aligned} &\|(Tx)(t_2) - (Tx)(t_1)\| \leq \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^{t_1} [(t_2 - s)^{q-1} - (t_1 - s)^{q-1}] m(s) ds + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{q-1} m(s) ds \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(q)} \left(\int_{t_0}^{t_1} [(t_2 - s)^{q-1} - (t_1 - s)^{q-1}]^{\frac{1}{1-\beta}} ds \right)^{1-\beta} \left(\int_{t_0}^{t_1} [m(s)]^{\frac{1}{\beta}} ds \right)^{\beta} \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(q)} \left(\int_{t_1}^{t_2} [(t_2 - s)^{q-1}]^{\frac{1}{1-\beta}} ds \right)^{1-\beta} \left(\int_{t_1}^{t_2} [m(s)]^{\frac{1}{\beta}} ds \right)^{\beta} \end{aligned}$$

Aplicando o Lema 4.1.3, onde $a = (t_2 - s)$, $b = (t_1 - s)$ e $p = \frac{q-1}{1-\beta} \geq 1$ temos que

$$\begin{aligned} & ||(Tx)(t_2) - (Tx)(t_1)|| \leq \\ & \leq \frac{1}{\Gamma(q)} \left(\int_{t_0}^{t_1} \left[(t_2 - s)^{\frac{q-1}{1-\beta}} - (t_1 - s)^{\frac{q-1}{1-\beta}} \right] ds \right)^{1-\beta} \left(\int_{t_0}^{t_1} [m(s)]^{\frac{1}{\beta}} ds \right)^{\beta} \\ & + \frac{1}{\Gamma(q)} \left(\int_{t_1}^{t_2} \left[(t_2 - s)^{\frac{q-1}{1-\beta}} \right] ds \right)^{1-\beta} \left(\int_{t_1}^{t_2} [m(s)]^{\frac{1}{\beta}} ds \right)^{\beta} \end{aligned}$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos que

$$\begin{aligned} & ||(Tx)(t_2) - (Tx)(t_1)|| \leq \\ & \leq \frac{M}{\Gamma(q)} \left(\frac{1-\beta}{q-\beta} \right)^{1-\beta} \left((t_1 - s)^{\frac{q-1}{1-\beta}+1} \Big|_{t_1}^{t_2} - (t_2 - s)^{\frac{q-1}{1-\beta}+1} \Big|_{t_1}^{t_0} \right)^{1-\beta} \\ & + \frac{M}{\Gamma(q)} \left(\frac{1-\beta}{q-\beta} \right)^{1-\beta} \left((t_2 - s)^{\frac{q-1}{1-\beta}+1} \Big|_{t_2}^{t_1} \right)^{1-\beta} \\ & = \frac{M}{\Gamma(q)} \left(\frac{1-\beta}{q-\beta} \right)^{1-\beta} \left[(t_1 - t_0)^{\frac{q-\beta}{1-\beta}} - (t_2 - t_0)^{\frac{q-\beta}{1-\beta}} + (t_2 - t_1)^{\frac{q-\beta}{1-\beta}} \right]^{1-\beta} \\ & + \frac{M}{\Gamma(q)} \left(\frac{1-\beta}{q-\beta} \right)^{1-\beta} \left[(t_2 - t_1)^{\frac{q-\beta}{1-\beta}} \right]^{1-\beta} \\ & = \frac{M}{\Gamma(q)} \left(\frac{1-\beta}{q-\beta} \right)^{1-\beta} \left[- \left((t_2 - t_0)^{\frac{q-\beta}{1-\beta}} - (t_1 - t_0)^{\frac{q-\beta}{1-\beta}} \right) + (t_2 - t_1)^{\frac{q-\beta}{1-\beta}} \right]^{1-\beta} \\ & + \frac{M}{\Gamma(q)} \left(\frac{1-\beta}{q-\beta} \right)^{1-\beta} \left[(t_2 - t_1)^{\frac{q-\beta}{1-\beta}} \right]^{1-\beta} \\ & \leq \frac{M}{\Gamma(q)} \left(\frac{1-\beta}{q-\beta} \right)^{1-\beta} \left[-(t_2 - t_0 - t_1 + t_0)^{\frac{q-\beta}{1-\beta}} + (t_2 - t_1)^{\frac{q-\beta}{1-\beta}} \right]^{1-\beta} \\ & + \frac{M}{\Gamma(q)} \left(\frac{1-\beta}{q-\beta} \right)^{1-\beta} (t_2 - t_1)^{q-\beta} \\ & = \frac{M}{\Gamma(q)} \left(\frac{1-\beta}{q-\beta} \right)^{1-\beta} \left[-(t_2 - t_1)^{\frac{q-\beta}{1-\beta}} + (t_2 - t_1)^{\frac{q-\beta}{1-\beta}} \right]^{1-\beta} + \frac{M}{\Gamma(q)} \left(\frac{1-\beta}{q-\beta} \right)^{1-\beta} (t_2 - t_1)^{q-\beta} \\ & = \frac{M}{\Gamma(q)} \left(\frac{1-\beta}{q-\beta} \right)^{1-\beta} (t_2 - t_1)^{q-\beta} \end{aligned}$$

mas note que quando $t_1 \rightarrow t_2$, o lado direito da desigualdade acima tende a zero. Logo $\{Tx : x \in \Psi\}$ é equicontínuo em J' . Portanto como Ψ é fechado, equicontínuo e pontualmente limitado concluímos que é relativamente compacto. Então, aplicando o teorema do ponto fixo de Schauder 4.1.4, existe $x^* \in \Psi$, tal que, $Tx^* = x^*$ e, assim,

$$x^*(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^t (t-s)^{q-1} f(s, x^*(s)) ds$$

para $t \in J'$. Portanto, x^* é uma solução para o PVI (4.1) em $J' = [t_0, t_0 + h]$.

□

4.1.4 Teorema de Unicidade

Para garantir unicidade de solução consideramos o mesmo teorema de existência e adicionamos uma quarta hipótese.

Teorema 4.1.7 (Unicidade) *Nas mesmas hipóteses do Teorema 4.1.6 de existência, assumimos uma quarta hipótese:*

(iv) *Existe uma constante $\lambda \in (0, q)$ e uma função real $\mu(t) \in L^{\frac{1}{\lambda}}(J)$, tal que,*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq \mu(t)\|x - y\|,$$

para todo $t \in J$ e para todo $x, y \in B$. Então, existe uma única solução para o PVI (4.1) em $[t_0 - h_1, t_0 + h_1]$, onde

$$h_1 < \min \left\{ a, h, \left[\frac{\Gamma(q)}{M_1} \left(\frac{q - \lambda}{1 - \lambda} \right)^{1-\lambda} \right]^{\frac{1}{q-\lambda}} \right\}$$

$$M_1 = \left(\int_{t_0}^{t_0+h} (u(s))^{\frac{1}{\lambda}} ds \right)^{\lambda}.$$

Demonstração: Seja agora $\Psi' = \{x \in C([t_0, t_0 + h_1], \mathbb{R}^n) : \|x - x_0\| \leq b\}$ e Tx definido exatamente igual ao teorema de existência para $t \in J'' = [t_0, t_0 + h_1]$. Analogamente verificamos que $T(\Psi') \subset \Psi'$.

Vamos mostrar então que o operador T é uma contração em Ψ' . De fato, dados $x, y \in \Psi'$, pela desigualdade de Holder e tomando $h_1 < \min \left\{ a, h, \left[\frac{\Gamma(q)}{M_1} \left(\frac{q - \lambda}{1 - \lambda} \right)^{1-\lambda} \right]^{\frac{1}{q-\lambda}} \right\}$ temos que

$$\begin{aligned} \|(Tx)(t) - (Ty)(t)\| &\leq \frac{1}{\Gamma(q)} \left(\int_{t_0}^t (t-s)^{q-1} u(s) ds \right) \sup_{s \in J''} \|x(s) - y(s)\| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(q)} \left(\int_{t_0}^t (t-s)^{q-1} u(s) ds \right) \|x - y\| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(q)} \left(\int_{t_0}^t ((t-s)^{q-1})^{\frac{1}{1-\lambda}} ds \right)^{1-\lambda} \left(\int_{t_0}^t (u(s))^{\frac{1}{\lambda}} ds \right)^{\lambda} \|x - y\| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(q)} \left(\frac{1-\lambda}{q-\lambda} \right)^{1-\lambda} (t-t_0)^{q-\lambda} \left(\int_{t_0}^{t_0+h_1} (u(s))^{\frac{1}{\lambda}} ds \right)^{\lambda} \|x - y\| \\ &\leq \frac{M_1}{\Gamma(q)} \left(\frac{1-\lambda}{q-\lambda} \right)^{1-\lambda} h_1^{q-\lambda} \|x - y\| \\ &< \frac{M_1}{\Gamma(q)} \left(\frac{1-\lambda}{q-\lambda} \right)^{1-\lambda} \left[\left[\frac{\Gamma(q)}{M_1} \left(\frac{q-\lambda}{1-\lambda} \right)^{1-\lambda} \right]^{\frac{1}{q-\lambda}} \right]^{q-\lambda} \|x - y\| \\ &= \|x - y\| \end{aligned}$$

para $t \in J''$.

O que implica que $C = \frac{M_1}{\Gamma(q)} \left(\frac{1-\lambda}{q-\lambda}\right)^{1-\lambda} h_1^{q-\lambda} \in (0, 1)$. Logo pela definição 4.1.4, temos que T é uma contração. Portanto usando o Teorema 4.1.1 do Princípio da contração de Banach concluímos que T tem um único ponto fixo x , que é a solução para o PVI 4.1 em $J'' = [t_0, t_0 + h_1]$.

□

Vejamos agora outra maneira de demonstrar unicidade.

Teorema 4.1.8 Assuma que a condição (iv) do teorema de unicidade 4.1.8 seja válida. Se a solução do PVI (4.1) existe em $[t_0 - h, t_0 + h]$, então a solução do PVI é única.

Demonstração: Suponhamos que existam duas soluções diferentes, $x(t)$ e $y(t)$ para o PVI (4.1) em $[t_0, t_0 + h]$. Então, para $t \in [t_0, t_0 + h]$ temos que

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^t (t-s)^{q-1} f(s, x(s)) ds$$

e

$$y(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^t (t-s)^{q-1} f(s, y(s)) ds.$$

Então,

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \frac{1}{\Gamma(q)} \left\| \int_{t_0}^t [f(s, x(s)) - f(s, y(s))] ds \right\|,$$

para $t \in J' = [t_0, t_0 + h]$. Pelos os mesmos passos da demonstração anterior, temos que

$$\|x(t) - y(t)\| \leq C \cdot \sup_{s \in J'} \|x(s) - y(s)\|$$

para $t \in J'$ e onde $C = \frac{M_1}{\Gamma(q)} \left(\frac{1-\lambda}{q-\lambda}\right)^{1-\lambda} h_1^{q-\lambda} \in (0, 1)$. Então daí,

$$\sup_{s \in J'} \|x(t) - y(t)\| \leq C \cdot \sup_{s \in J'} \|x(s) - y(s)\|$$

o que implica que

$$\begin{aligned} \sup_{s \in J'} \|x(t) - y(t)\| - C \cdot \sup_{s \in J'} \|x(s) - y(s)\| &\leq 0 \\ \Rightarrow \|x - y\| - C \cdot \|x - y\| &\leq 0 \\ \Rightarrow (1 - C) \|x - y\| &\leq 0. \end{aligned}$$

Como $C \in (0, 1)$, então $(1 - C) > 0$, logo essa desigualdade é válida se e, só se

$$\|x - y\| \leq 0$$

Mas como sabemos que a norma é sempre positiva. Então, concluímos que

$$x(t) \equiv y(t), \forall t \in J'.$$

Portanto, a solução é única.

□

4.2 Existência e Unicidade do Modelo Epidemiológico

Nesta seção, vamos aplicar o teorema de existência e unicidade para mostrar que o modelo epidemiológico proposto está bem posto, ou seja, possui solução para qualquer valor de cada constante e concluir que está solução é única.

Relembrando o modelo epidemiológico dado por:

$$\begin{cases} S^n(t) = (1 - v)m - \delta SI - mS \\ I^n(t) = \delta SI - \mu I - mI \\ R^n(t) = vm + \mu I - mR \end{cases} \quad (4.10)$$

onde $\lambda(t) = \delta I$ é a força de infecção e $0 < n \leq 1$ é a ordem das derivadas.

4.2.1 Modelo epidemiológico de ordem inteira

Definição 4.2.1 Duas normas quaisquer no espaço \mathbb{R}^n são equivalentes, se existirem constantes positivas L_1 e L_2 tais que

$$L_1 \|x\| \leq \|x\|_1 \leq L_2 \|x\|$$

$\forall x \in \mathbb{R}^n$ onde $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ e $\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$.

Sejam $x(t) = (S(t), I(t), R(t))$ e

$$f(t, x(t)) = \begin{bmatrix} (1 - v)m - \delta SI - mS \\ \delta SI - \mu I - mI \\ vm + \mu I - mR \end{bmatrix}.$$

Proposição 4.2.1 O modelo epidemiológico SIR com vacinação constante de ordem inteira possui solução se a aplicação $f(t, x(t))$ for contínua e Lipschitz em relação a segunda variável.

Demonstração: De fato, sabemos que cada solução $x(t)$ do sistema é contínua num intervalo compacto $J = [t_0 - h, t_0 + h]$, então é limitada, ou seja, $\|x(t)\| \leq M \forall t \in J$

Pela definição 4.2.1 temos que qualquer norma do \mathbb{R}^n é equivalente então para facilitar os cálculos, vamos usar a norma $\|\cdot\|_1$, temos que

$$\begin{aligned}
& \|f(t, x(t)) - f(t, \overline{x(t)})\|_1 = \\
& = \left\| \begin{bmatrix} (1-v)m - \delta SI - mS \\ \delta SI - \mu I - mI \\ vm + \mu I - mR \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (1-v)m - \delta \overline{SI} - m\overline{S} \\ \delta \overline{SI} - \mu \overline{I} - m\overline{I} \\ vm + \mu \overline{I} - m\overline{R} \end{bmatrix} \right\|_1 \\
& = \left\| \begin{bmatrix} -\delta SI - mS + \delta \overline{SI} + m\overline{S} + (\delta \overline{SI} - \delta SI) \\ \delta SI - \mu I - mI - \delta \overline{SI} + \mu \overline{I} + m\overline{I} + (\delta \overline{SI} - \delta SI) \\ \mu I - mR - \mu \overline{I} + m\overline{R} \end{bmatrix} \right\|_1 \\
& = |-\delta SI - mS + \delta \overline{SI} + m\overline{S} + (\delta \overline{SI} - \delta SI)| \\
& + |\delta SI - \mu I - mI - \delta \overline{SI} + \mu \overline{I} + m\overline{I} + (\delta \overline{SI} - \delta SI)| \\
& + |\mu I - mR - \mu \overline{I} + m\overline{R}| \\
& \leq |\delta||I||S - \overline{S}| + |m||S - \overline{S}| + |\delta||\overline{S}||I - \overline{I}| \\
& + |\delta||S||I - \overline{I}| + |\mu||I - \overline{I}| + |m||I - \overline{I}| + |\delta||\overline{I}||S - \overline{S}| \\
& + |\mu||I - \overline{I}| + |m||R - \overline{R}| \\
& = 2M|\delta||S - \overline{S}| + 2M|\delta||I - \overline{I}| + 2|\mu||I - \overline{I}| \\
& + |m||S - \overline{S}| + |m||I - \overline{I}| + |m||R - \overline{R}| \\
& = (2M|\delta| + |m|)|S - \overline{S}| + (2M|\delta| + 2|\mu| + |m|)|I - \overline{I}| + |m||R - \overline{R}| \\
& \leq \max(2M|\delta|, 2|\mu|, |m|) [|S - \overline{S}| + |I - \overline{I}| + |R - \overline{R}|] \\
& = L\|x(t) - \overline{x(t)}\|_1
\end{aligned} \tag{4.11}$$

onde $L = \max(2M|\delta|, 2|\mu|, |m|)$, portanto $f(t, x(t))$ é de Lipschitz em relação a segunda variável. Também é contínua pelo Lema 4.1.2 e concluímos pelo Teorema 4.1.2 que a solução existe e é única.

□

4.2.2 Modelo epidemiológico de ordem não inteira

Teorema 4.2.1 Toda função contínua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é Lebesgue mensurável

A demonstração desse teorema pode ser encontrada em (OLIVEIRA; VIANA, 2010).

Proposição 4.2.2 O modelo epidemiológico SIR com vacinação constante de ordem fracionária possui solução se $f(t, x(t))$ for contínua em relação a segunda variável e Lebesgue mensurável em relação a t em $J = [t_0 - a, t_0 + a]$.

Demonstração: Observamos que a condição (iii) do Teorema 4.1.6 e (iv) do Teorema 4.1.7 são imediatas. Para o modelo de ordem não inteira, $q \in (0, 1)$, devemos mostrar as condições (i) e (ii) do Teorema 4.1.6, ou seja, $f(t, x(t))$ é Lebesgue mensurável

e contínua em relação a segunda variável, respectivamente. Como mostramos em (4.11), $f(t, x(t))$ é Lipschitz em relação a segunda variável, portanto é contínua em relação a segunda variável. Logo, resta mostrarmos apenas que $f(t, x(t))$ do modelo é Lebesgue mensurável em relação a t em J .

De fato, pois como cada coordenada de f é constituída de somas e produtos de funções contínuas então f é contínua em t . Logo, pelo Teorema 4.2.1 temos que f é Lebesgue mensurável em relação a t em J .

□

Portanto concluímos que tanto para ordem inteira e não inteira a solução existe e é única.

5 Resultados Numéricos

Vamos apresentar nesta seção os resultados numéricos para ambas as ordens, a saber inteira e não inteira, usando o modelo epidemiológico SIR com dinâmica vital e vacinação constante (2.15), fazendo comparações e analisando em quais das situações é preciso uma intervenção através de vacinas para erradicar uma tal epidemia.

Lembramos que é possível obtermos um outro sistema de equações diferenciais simplificado e equivalente a (2.15). Sendo,

$$R(t) = 1 - S(t) - I(t),$$

reduzimos assim o sistema (2.15) para apenas duas equações diferenciais inteira ou fracionária não lineares.

$$\begin{cases} S^n(t) = (1 - v)m - \delta SI - mS \\ I^n(t) = \delta SI - \mu I - mI \end{cases} \quad (5.1)$$

onde $\lambda(t) = \delta I(t)$ é a força de infecção e $0 < n \leq 1$ é a ordem das derivadas.

Lembramos que a Razão de reprodução básica que foi usada para o cálculos dos pontos de equilíbrio e a porcentagem mínima de vacinação são, respectivamente, dadas por

$$R_0 = \frac{\delta}{m + \mu} \quad v_c = 1 - \frac{1}{R_0}$$

Os pontos de equilíbrio do sistema (5.1) livre de doença e endêmico são, respectivamente,

$$E_0 = (1 - v, 0) \quad E_1 = \left(\frac{1}{R_0}, \frac{m}{\mu + m} \left[1 - v - \frac{1}{R_0} \right] \right)$$

Neste capítulo foram realizadas simulações numéricas levando em conta o ponto de equilíbrio livre de doença E_0 e o ponto de equilíbrio endêmico E_1 do sistema de equações diferenciais tanto para ordem inteira como para ordem não inteira. Para o ponto de equilíbrio endêmico foi testado o método de vacinação. Nos resultados foram usados dois valores iniciais diferentes que tornam o modelo bem definido.

(a) $(S(0), I(0)) = (0.90, 0.10)$, 90% da população suscetível e 10% infectada;

(b) $(S(0), I(0)) = (0.60, 0.40)$, 60% da população suscetível e 40% infectada.

5.1 Simulações para o ponto de equilíbrio livre da doença E_0

Notemos que para um $R_0 < 1$ a doença é erradicada, ou seja, a solução deverá convergir para o ponto de equilíbrio livre de doença. Assim não faz sentido aplicarmos uma campanha de vacinação e, portanto, consideramos $v = 0$. Abaixo segue a tabela de valores usados.

Parâmetros	Valor
δ	0,455
m	0,004
μ	0,48
v	0

Tabela 1 – Valores dos parâmetros do sistema (5.1)

As simulações foram feitas para as ordens, $q = 0.7$, $q = 0.8$, $q = 0.9$ e $q = 1$, em um tempo $t = 300$ dias. Com $v = 0$, temos o ponto de equilíbrio livre de doença $E_0 = (1, 0)$. De acordo com os valores dados acima encontramos um $R_0 = 0,9401$, ou seja, não há necessidade de vacinação.

Podemos perceber pelas figuras 4 e 5 que as soluções simuladas para o modelo inteiro e fracionário convergem para o ponto de equilíbrio livre de doença E_0 independentemente dos dois valores iniciais considerados para a condição inicial do sistema. Logo podemos considerar estabilidade global do sistema no ponto de vista numérico.

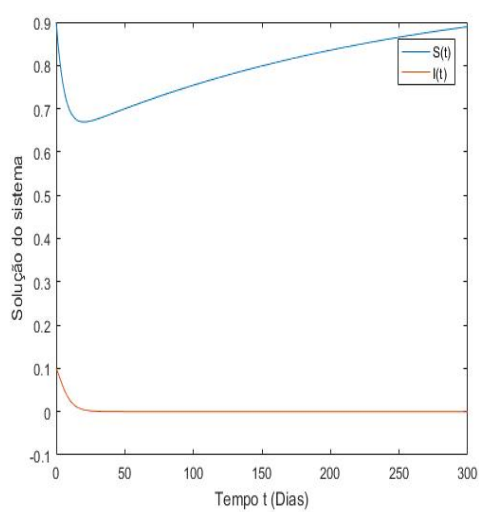
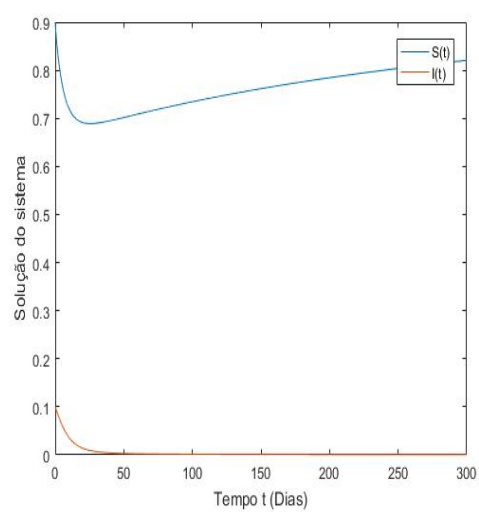
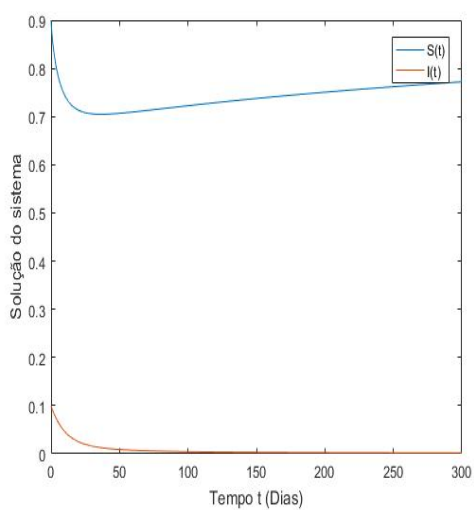
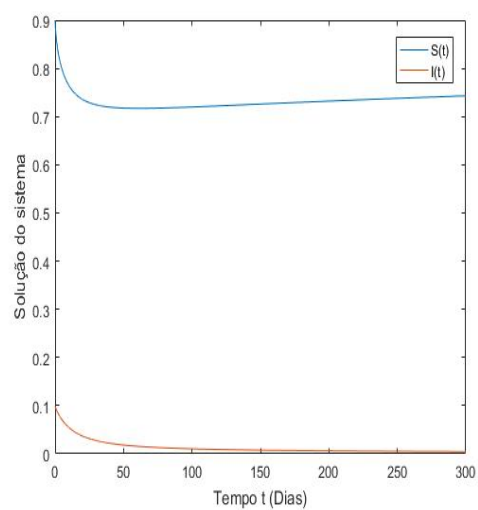
(a) $q = 1$ (b) $q = 0.9$ (c) $q = 0.8$ (d) $q = 0.7$

Figura 4 – Gráficos das soluções para $R_0 = 0,9401$ utilizando a condição inicial (a)

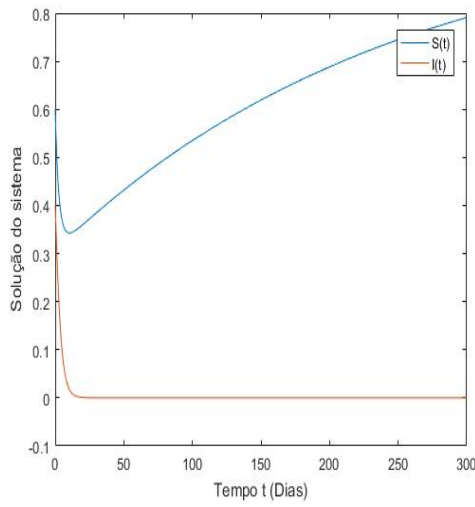
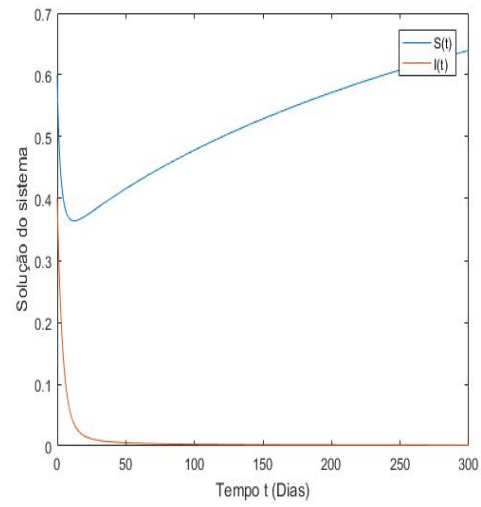
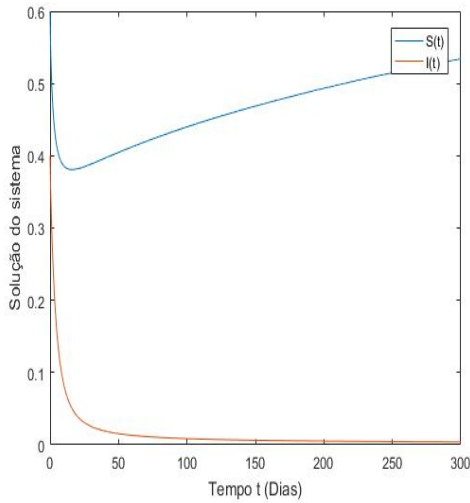
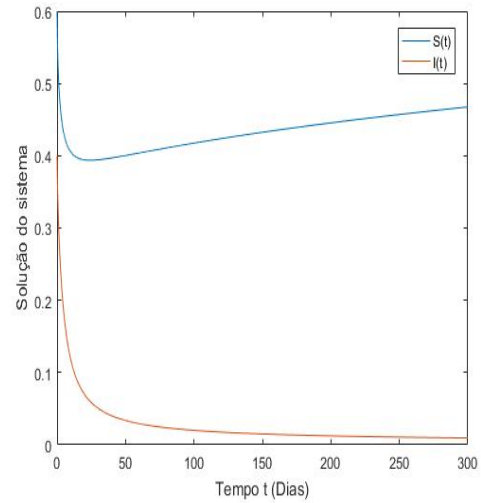
(a) $q = 1$ (b) $q = 0.9$ (c) $q = 0.8$ (d) $q = 0.7$

Figura 5 – Gráficos das soluções para $R_0 = 0,9401$ utilizando a condição inicial (b)

Observamos que o efeito na mudança de expoente não acarreta uma grande diferença nas soluções. Podemos observar que a medida em que q se aproxima de 1 a convergência é mais rápida para o ponto E_0 .

5.2 Simulações para o ponto de Equilíbrio Endêmico E_1

Será verificado o efeito do valor expoente fracionário q , mas agora para um tempo $t = 1000$ dias para uma melhor visualização. Novamente, consideremos a ordens sendo $q = 0.7$, $q = 0.8$, $q = 0.9$ e $q = 1$. Nesse caso como teremos $R_0 > 1$, então não se tem controle da epidemia. Para esse caso é interessante adicionarmos campanha de vacinação como meio de erradicar a epidemia. Consideramos a nova tabela de valores abaixo.

Parâmetros	Valor
δ	0,9
m	0,004
μ	0,14

Tabela 2 – Valores dos parâmetros do sistema (5.1)

Para estes valores encontramos $R_0 = 6.25$. Com isso vamos primeiro analisar o sistema usando $v = 0$, ou seja, nenhuma campanha de vacinação será aplicada. Para tais valores temos $E_1 = (0.16, 0.0233)$.

Podemos perceber pelas figuras 6 e 7 que ambas as ordens convergem para o ponto de equilíbrio endêmico como esperado, isto é, a doença nunca será extinta. Observamos também que para ambas condições iniciais o modelo de ordem inteira apresenta maior oscilação que o modelo de ordem fracionária, assim temos que o modelo de ordem fracionária possui nesse caso, uma convergência amortecida para o ponto de equilíbrio endêmico E_1 .

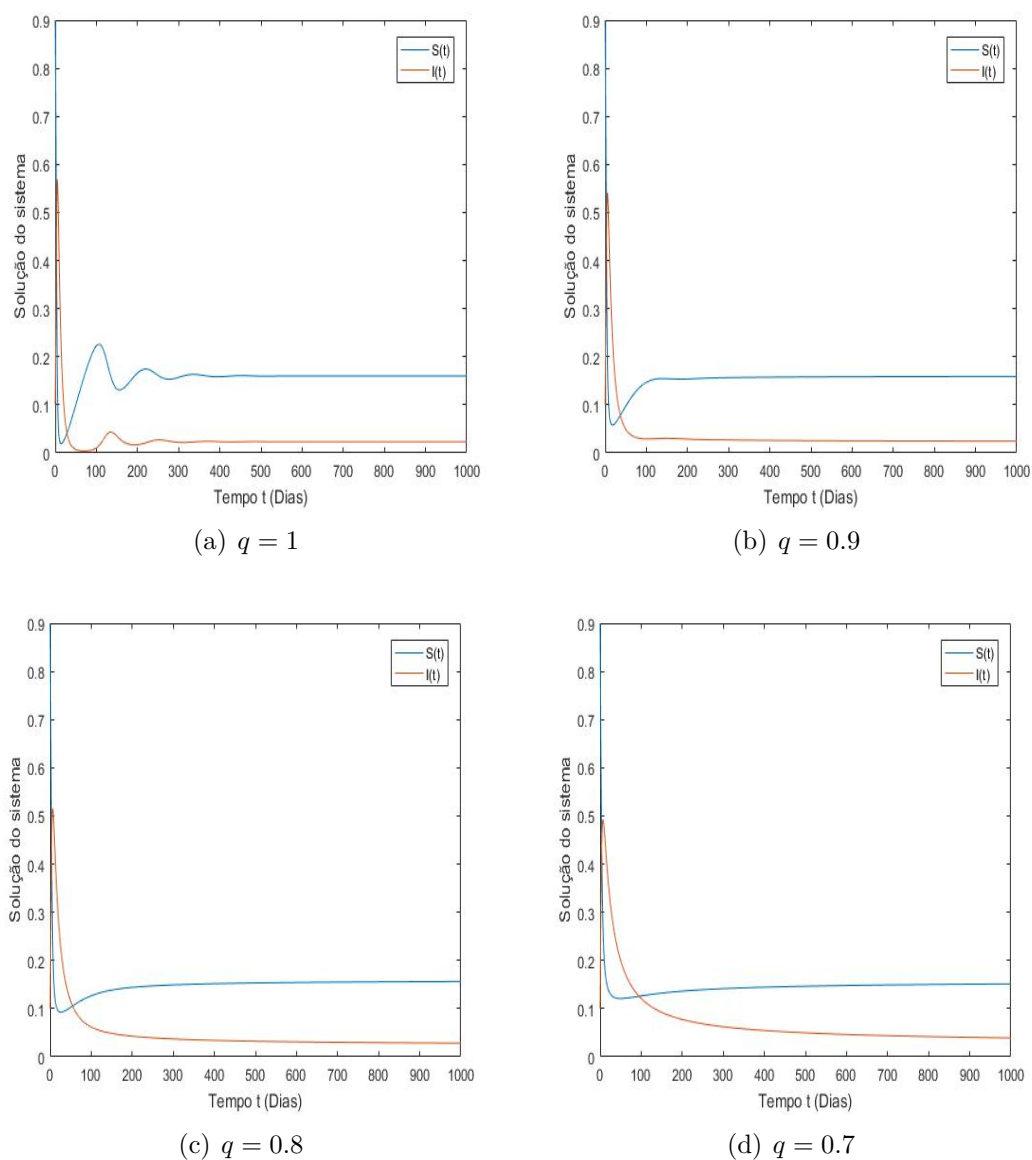


Figura 6 – Gráficos das soluções para $R_0 = 6,25$ sem campanha de vacinação para a condição inicial (a)

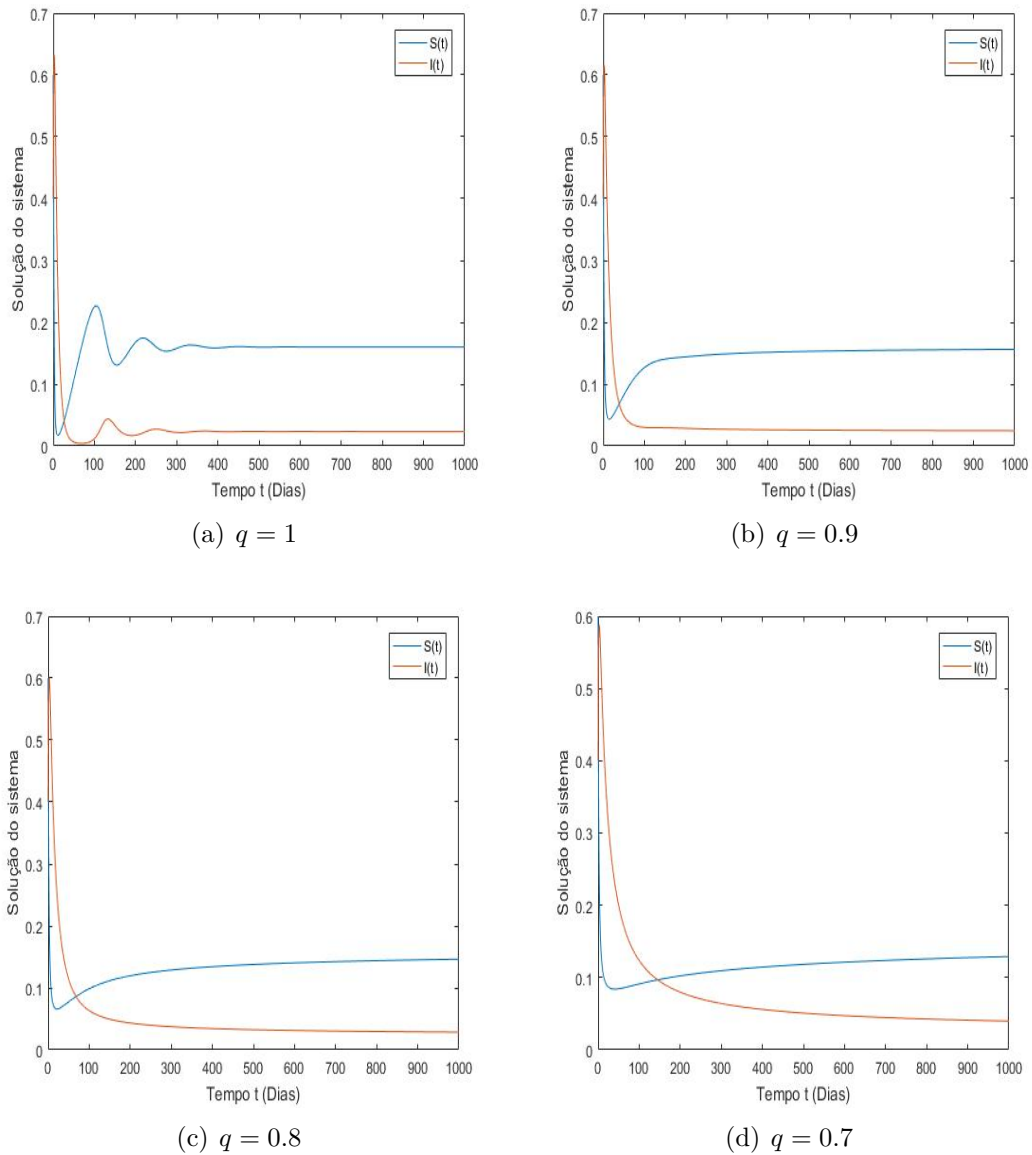


Figura 7 – Gráficos das soluções para $R_0 = 6,25$ sem campanha de vacinação para a condição inicial (b)

Desse modo uma maneira de tentar erradicar de vez a doença, fazendo com que o sistema convirja para o ponto de equilíbrio livre de doença E_0 , é usando campanha de vacinação. Vimos na Proposição 2.5.2 que $v_c = 1 - \frac{1}{R_0}$ é a proporção mínima de vacinação que governa a dinâmica do sistema. Então, calculando a proporção mínima temos $v_c = 0.84$, ou seja, isso nos diz que para erradicar a doença é preciso aplicarmos uma campanha de vacinação na qual 84% dos recém-nascidos da população sejam vacinados. Usando os mesmos dados que a simulação anterior e tomando $v = v_c$ para $t = 300$ dias novamente, temos $E_0 = (0, 16, 0)$.

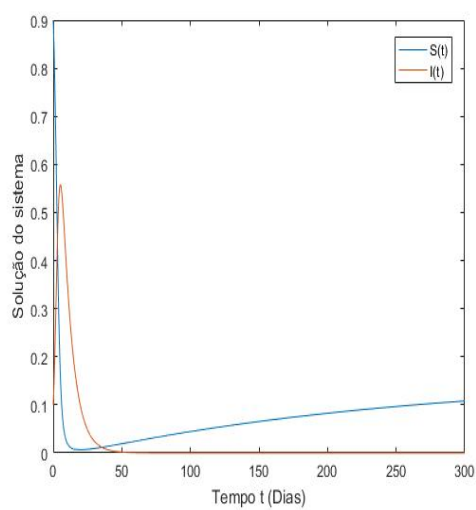
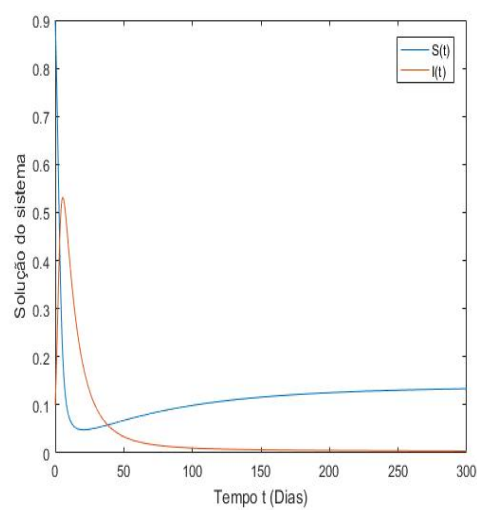
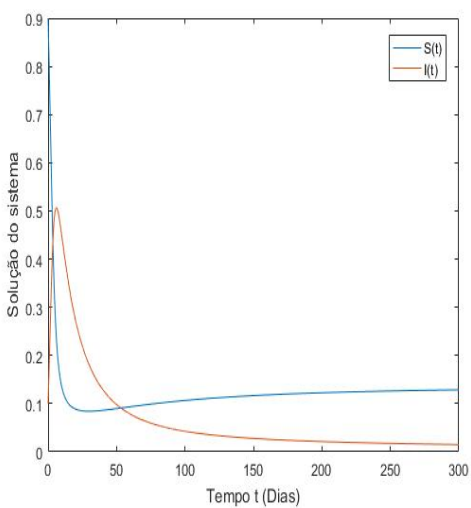
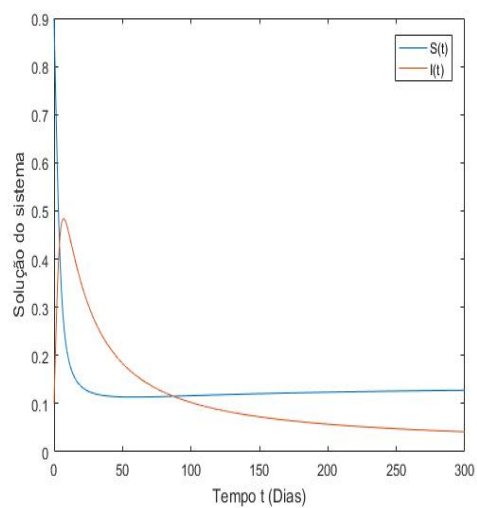
(a) $q = 1$ (b) $q = 0.9$ (c) $q = 0.8$ (d) $q = 0.7$

Figura 8 – Gráficos das soluções para $R_0 = 6,25$ com campanha de vacinação para a condição inicial (a)

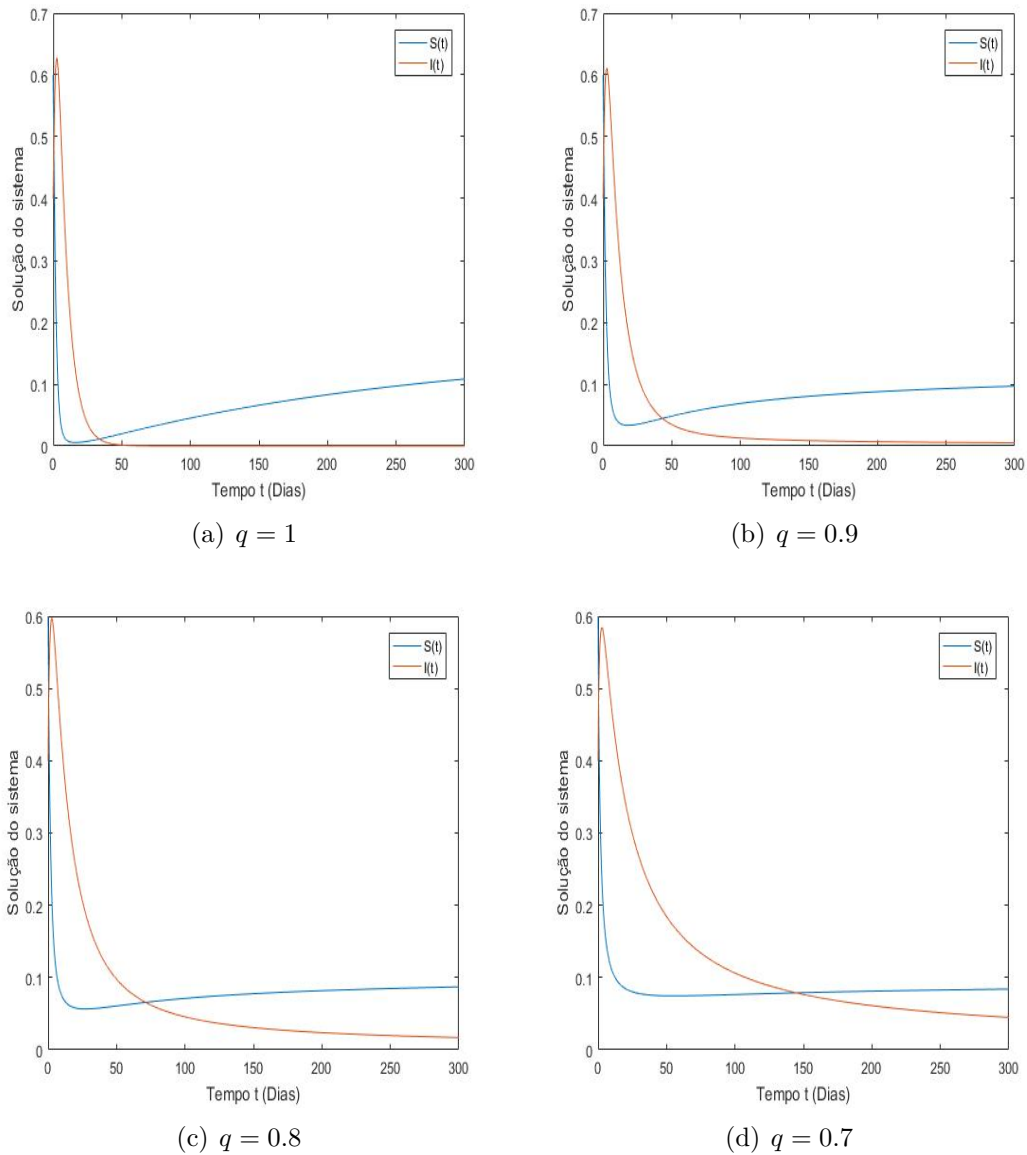


Figura 9 – Gráficos das soluções para $R_0 = 6,25$ com campanha de vacinação para a condição inicial (b)

Podemos observar pelas figuras 8 e 9 que quando $v = 0,84$, o sistema passa a convergir para o ponto de equilíbrio livre de doença E_0 mesmo tendo um $R_0 > 1$, erradicando assim de vez a epidemia. Analisando os gráficos, observamos que há uma maior velocidade de convergência para o modelo de ordem inteira. Por outro lado, com essas simulações demonstramos numericamente a Proposição 2.5.2. Portanto, de fato $v_c = 1 - \frac{1}{R_0}$ é a proporção mínima de vacinação capaz de governar o sistema para o ponto de equilíbrio livre de doença.

Agora, notemos que se ao invés de adicionarmos $v = v_c$, adicionamos uma campanha de vacinação na qual 50% dos recém-nascidos sejam vacinados, ou seja, $v < v_c$. Então analisando os novos gráficos da figura 10 e figura 11, para $t = 1000$ dias, observamos que agora todas as ordens do sistema convergem para o ponto de equilíbrio endêmico $E_1 = (0.16, 0.0094)$ como era de se esperar pela Proposição 2.5.2, isto é, a epidemia diminui consideravelmente com a aplicação da campanha de vacinação de 50%, mas não ao ponto da doença ser extinta de vez. Podemos observar nessas simulações que novamente o sistema de ordem fracionária possui uma convergência sem oscilações para o ponto de equilíbrio endêmico, enquanto o sistema de ordem inteira apresenta oscilação em torno do ponto de equilíbrio endêmico. Concluimos que o modelo fracionário apresenta um amortecimento da convergência quando o sistema converge para o ponto de equilíbrio E_1 . Por outro lado, quando a convergência é para o ponto E_0 observamos um mesmo comportamento, porém a medida que aumentamos a ordem do sistema o mesmo apresenta uma convergência mais rápida para o ponto E_0 .

Concluimos aqui que o modelo de ordem fracionária possui propriedade de memória, a qual está presente em qualquer fenômeno infeccioso e, portanto, o modelo fracionário é uma proposta mais fidedigna a realidade.

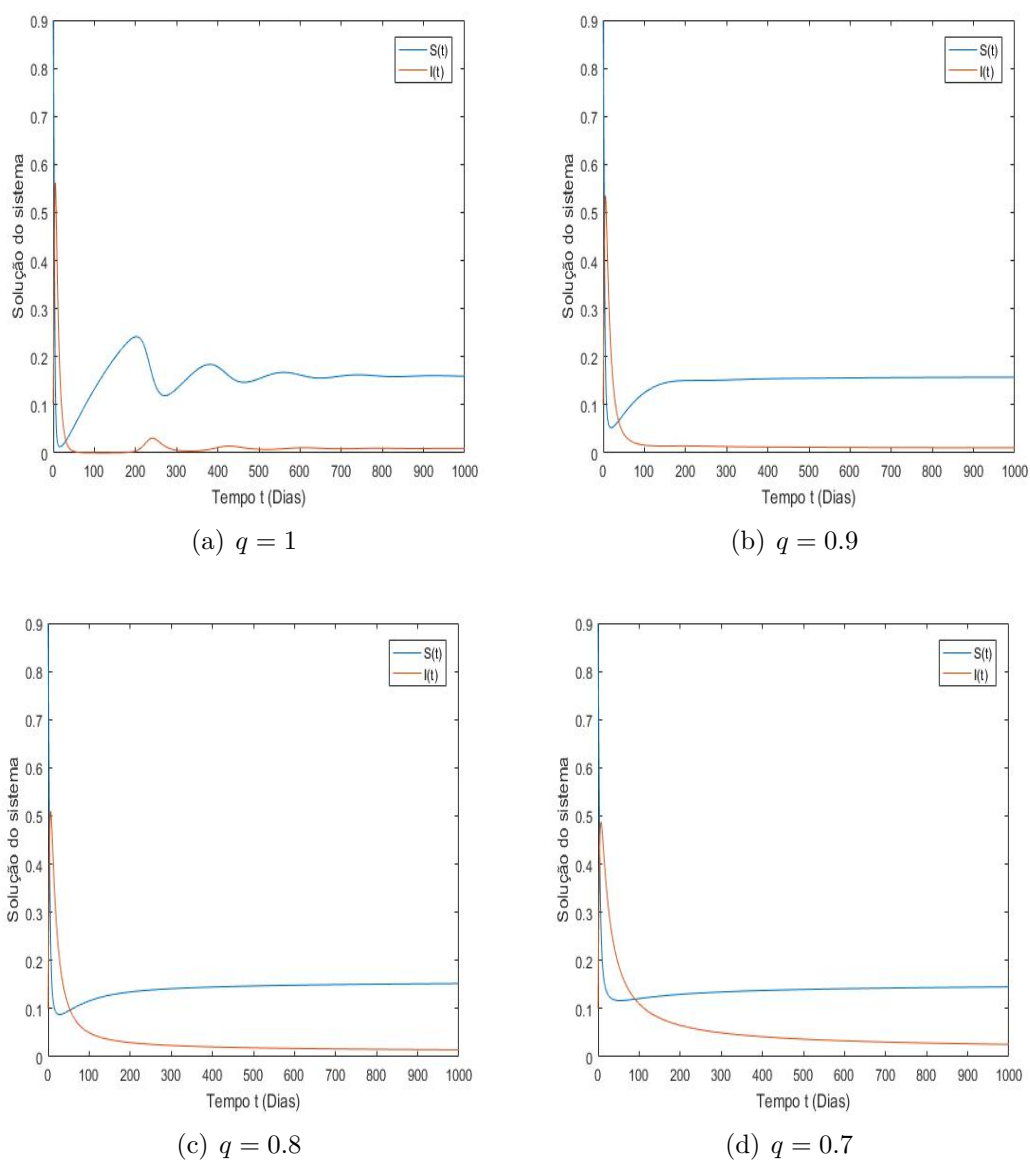


Figura 10 – Gráficos das soluções para $R_0 = 6,25$ com campanha de vacinação de 50% para a condição inicial (a)

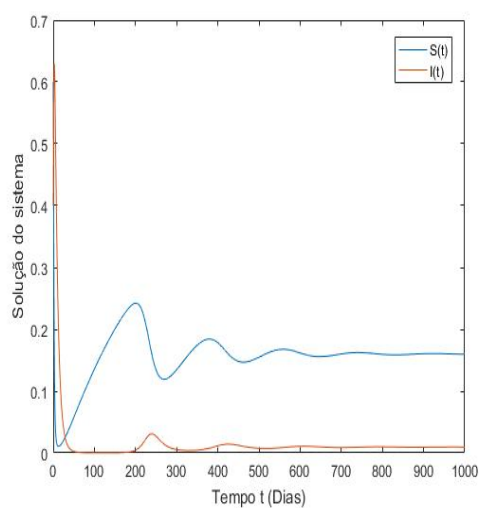
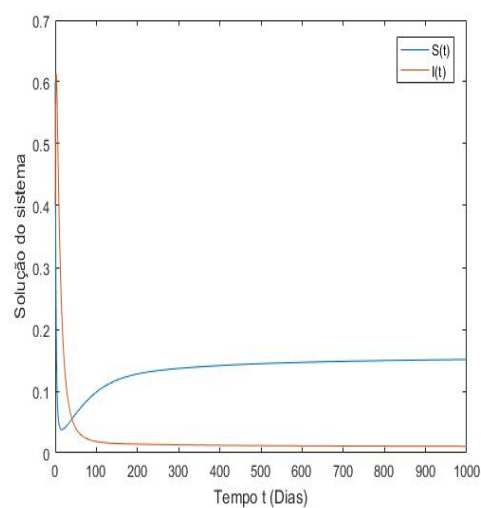
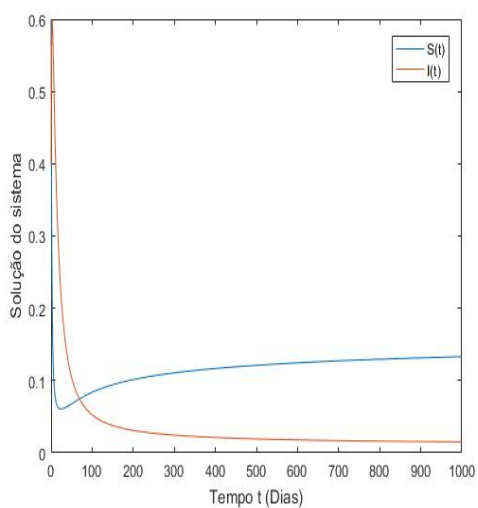
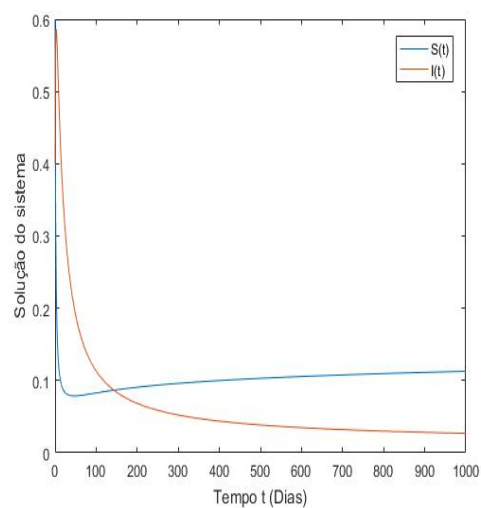
(a) $q = 1$ (b) $q = 0.9$ (c) $q = 0.8$ (d) $q = 0.7$

Figura 11 – Gráficos das soluções para $R_0 = 6,25$ com campanha de vacinação de 50% para a condição inicial (b)

Conclusão

Neste trabalho estudamos as equações diferenciais ordinárias de ordem inteira e não inteira como proposta para a modelagem epidemiológica. Para isso, foi necessário estudar a teoria sobre equações diferenciais ordinárias que são bem conhecidas, bem como a teoria sobre Cálculo Fracionário. Neste trabalho apresentamos uma breve da sua origem e ainda um apanhado das ferramentas necessárias para o desenvolvimento e resolução de equações de ordem fracionária. Por exemplo, as transformadas de Laplace e as funções especiais, assim como resultados fundamentais como integrais e derivadas de ordem não inteira.

Nossa contribuição com este estudo pode ser dividido em três pontos. Primeiro apresentamos a modelagem epidemiológica SIR com dinâmica vital e vacinação constante. Estudamos os efeitos na qual a entrada de uma constante de vacinação pode causar no modelo. Desse modo, foram obtidos resultados de proporção mínima de vacinação a ser escolhida para se governar o sistema de forma que a solução converge para o ponto de equilíbrio livre de doença.

Segundo apresentamos resultados de existência e unicidade de solução, tanto para o sistema de ordem inteira quanto para o sistema de ordem não inteira. Desse modo foram obtidos resultados mais completos, com lemas e definições que complementaram a demonstração de um trabalho já disponível na literatura ([ZHOU; JIAO; LI, 2009](#)).

Por fim apresentamos resultados numéricos onde comprovamos os resultados teóricos de estabilidade e comparamos as soluções usando ordem inteira e fracionária. Assim, vimos que ao variar a ordem do sistema, obtemos um amortecimento da convergência quando o sistema converge para o ponto de equilíbrio endêmico E_1 . Concluímos que o modelo de ordem fracionária apresenta propriedade de memória, a qual está presente em qualquer fenômeno infeccioso. Foi possível também demonstrarmos, através de simulações numéricas, que existe uma proporção mínima de vacinação capaz de erradicar uma doença contagiosa, governando assim o sistema SIR para o ponto de equilíbrio livre de doença.

Como trabalhos futuros, pretendemos estudar outros modos de campanha de vacinação, nesse mesmo modelo e bem como outros modelos relacionados, de forma a acelerar a erradicação da doença e reduzir o custo governamental com campanhas. Portanto, a execução deste trabalho foi fundamental para adquirir um melhor e mais amplo conhecimento na área de matemática, mais específico na área de calculo fracionário, de forma a usar em um problema real a teoria matemática adquirida durante toda a graduação e usá-la na prática.

Referências

- ALMEIDA, P. R. d. et al. *Modelos epidêmicos sir, contínuos e discretos, e estratégias de vacinação*. Universidade Federal de Viçosa, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 28.
- ALONSO, D.; MEDICO, J. B.; SOLÉ, R. V. The stochastic nature of ecological interactions: communities, metapopulations, and epidemics. [S.l.: s.n.], 2003. Citado na página 9.
- ANDERSON, R. M.; MAY, R. M.; ANDERSON, B. Infectious diseases of humans: dynamics and control. [S.l.]: Wiley Online Library, 1992. v. 28. Citado na página 9.
- BOUCHARA, J. C.; ZANETIC, V. L. C.; HELLMMEISTER, A. C. P. Cálculo integral avançado. [S.l.]: Edusp, 1996. Citado na página 35.
- CAMARGO, R. F.; OLIVEIRA, E. C. de; CHIACCHIO, A. O. Sobre a função de mittag-leffler. Relatório de Pesquisa, v. 15, n. 06, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 43.
- CAPUTO, M. Elasticità e dissipazione. [S.l.]: Zanichelli, 1969. Citado na página 32.
- COX, N. J.; TAMBLYN, S. E.; TAM, T. Influenza pandemic planning. Vaccine, Elsevier, v. 21, n. 16, p. 1801–1803, 2003. Citado na página 9.
- DIEKMANN, O.; HEESTERBEEK, J. A. P.; METZ, J. A. On the definition and the computation of the basic reproduction ratio r_0 in models for infectious diseases in heterogeneous populations. Journal of mathematical biology, Springer, v. 28, n. 4, p. 365–382, 1990. Citado na página 18.
- DIETHELM, K. A fractional calculus based model for the simulation of an outbreak of dengue fever. Nonlinear Dynamics, Springer, v. 71, n. 4, p. 613–619, 2013. Citado na página 32.
- DUARTE, I. S. Espaços métricos e o teorema do ponto fixo de banach. 2015. Citado 2 vezes nas páginas 45 e 47.
- GONZÁLEZ-PARRA, G.; ARENAS, A. J.; CHEN-CHARPENTIER, B. M. A fractional order epidemic model for the simulation of outbreaks of influenza a (h1n1). Mathematical methods in the Applied Sciences, Wiley Online Library, v. 37, n. 15, p. 2218–2226, 2014. Citado na página 32.
- HARTLEY, T. T.; LORENZO, C. F. A solution to the fundamental linear fractional order differential equation. 1998. Citado na página 32.
- HETHCOTE, H. W. The mathematics of infectious diseases. SIAM review, SIAM, v. 42, n. 4, p. 599–653, 2000. Citado na página 10.
- ISEA, R.; LONNGREN, K. E. On the mathematical interpretation of epidemics by kermack and mckendrick. Gen, v. 19, n. 2, p. 83–87, 2013. Citado na página 20.

JAHNKE, M. R.; GARCIA, M. V. P.; GARCIA, S. R. L. O teorema de arzelà-ascoli e aplicações à análise. Citado na página 50.

KEELING, M. J.; ROHANI, P. Modeling infectious diseases in humans and animals. [S.l.]: Princeton University Press, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 14.

KERMACK, W. O.; MCKENDRICK, A. G. A contribution to the mathematical theory of epidemics. In: THE ROYAL SOCIETY. Proceedings of the Royal Society of London A: mathematical, physical and engineering sciences. [S.l.], 1927. v. 115, n. 772, p. 700–721. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 20.

KRETZSCHMAR, M.; WALLINGA, J. Mathematical models in infectious disease epidemiology. In: Modern infectious disease epidemiology. [S.l.]: Springer, 2009. p. 209–221. Citado na página 14.

LIMA, E. L. Elementos de topologia geral. [S.l.]: Ao Livro Técnico, Editôra da Universidade de São Paulo, 1970. Citado na página 46.

LIMA, E. L. Espaços métricos, impa. Rio de Janeiro, 1977. Citado na página 46.

LIMA, E. L. Análise real. [S.l.]: Impa, 2004. Citado na página 46.

MEDEIROS, L.; MELLO, E. A. de. A integral de Lebesgue. [S.l.]: Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1985. v. 1. Citado na página 51.

OLIVEIRA, C. R. D. Introdução à análise funcional. [S.l.]: Impa, 2001. Citado na página 49.

OLIVEIRA, K.; VIANA, M. Teoria ergódica um curso introdutório. IMPA, v. 103, p. 104, 2010. Citado na página 60.

SABETI, M. Modelo epidêmico discreto sir com estrutura etária e aplicação de vacinação em pulsos e constante. Universidade Federal de Pernambuco, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 14.

SOTOMAYOR, J. Licões de equações diferenciais ordinárias. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1979. v. 11. Citado na página 16.

VIEIRA, G. B. et al. Teoria qualitativa e estabilidade de lyapunov para sistemas de equações de ordem fracionária e uma aplicação em um modelo sir-si para a dengue. Universidade Federal de Alfenas, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 41.

WALDMAN, E. A.; ROSA, T. E. da C. Vigilância em saúde pública. [S.l.]: Universidade de São Paulo. Faculdade de Saúde Pública, 1998. v. 7. Citado na página 9.

YANG, H. M. Epidemiologia matemática: estudos dos efeitos da vacinação em doenças de transmissão direta. [S.l.]: Unicamp, 2001. Citado na página 14.

ZEIDLER, E. Nonlinear functional analysis and its applications: III: variational methods and optimization. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. Citado na página 50.

ZHOU, Y.; JIAO, F.; LI, J. Existence and uniqueness for fractional neutral differential equations with infinite delay. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, Elsevier, v. 71, n. 7, p. 3249–3256, 2009. Citado 3 vezes nas páginas 45, 51 e 74.