Regresión lineal

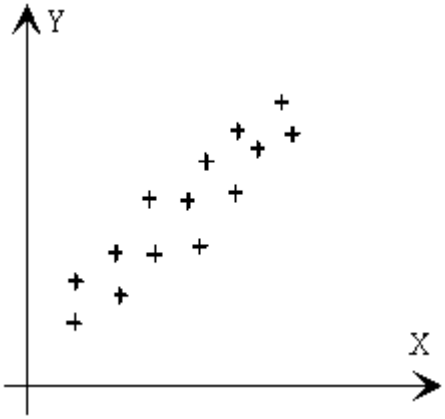
Tratamiento de datos

Regresión lineal

Abordaremos en esta página las distribuciones bidimensionales. Las observaciones se dispondrán en dos columnas, de modo que en cada fila figuren la abscisa x y su correspondiente ordenada y. La importancia de las distribuciones bidimensionales radica en investigar como influye una variable sobre la otra. Esta puede ser una dependencia causa efecto, por ejemplo, la cantidad de lluvia (causa), da lugar a un aumento de la producción agrícola (efecto). O bien, el aumento del precio de un bien, da lugar a una disminución de la cantidad demandada del mismo.

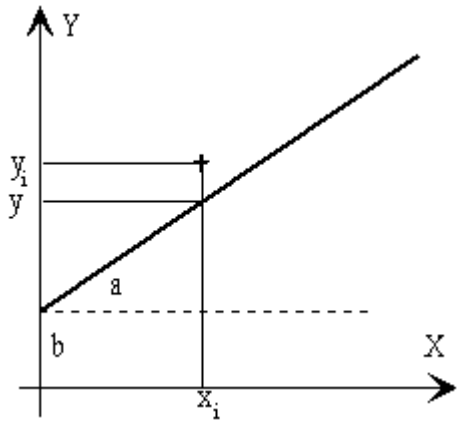
Si utilizamos un sistema de coordenadas cartesianas para representar la distribución bidimensional, obtendremos un conjunto de puntos conocido con el diagrama de dispersión, cuyo análisis permite estudiar cualitativamente, la relación entre ambas variables tal como se ve en la figura. El siguiente paso, es la determinación de la dependencia funcional entre las dos variables x e y que mejor ajusta a la distribución bidimensional. Se denomina regresión lineal cuando la función es lineal, es decir, requiere la determinación de dos parámetros: la pendiente y la ordenada en el origen de la recta de regresión, $y=ax+b$.

La regresión nos permite además, determinar el grado de dependencia de las series de valores X e Y, prediciendo el valor y estimado que se obtendría para un valor x que no esté en la distribución.



Vamos a determinar la ecuación de la recta que mejor ajusta a los datos representados en la figura. Se denomina error e_i a la diferencia y_i-y, entre el valor observado y_i, y el valor ajustado $y= ax_i+b$, tal como se ve en la figura inferior. El criterio de ajuste se toma como aquél en el que la desviación cuadrática media sea mínima, es decir, debe de ser mínima la suma

$$s=\sum_1^N e_i^2=\sum_1^N (y_i-(ax_i+b))^2$$



El extremos de una función: máximo o mínimo se obtiene cuando las derivadas de *s* respecto de *a* y de *b* sean nulas. Lo que da lugar a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas del que se despeja *a* y *b*.

$$\frac{\partial s}{\partial a}=0.....a=\frac{N\sum x_i y_i+\sum x_i\sum y_i}{N\sum x_i^2-\left(\sum x_i\right)^2}$$

$$\frac{\partial s}{\partial b}=0.....b=\frac{\sum y_i-a\sum x_i}{N}$$

El coeficiente de correlación es otra técnica de estudiar la distribución bidimensional, que nos indica la intensidad o grado de dependencia entre las variables X e Y. El coeficiente de correlación *r* es un número que se obtiene mediante la fórmula.

$$r=\frac{\sum(x_i-<x>)(y_i-<y>)}{N\sigma_x\sigma_y}$$

El numerador es el producto de las desviaciones de los valores X e Y respecto de sus valores medios. En el denominador tenemos las desviaciones cuadráticas medias de X y de Y.

El coeficiente de correlación puede valer cualquier número comprendido entre -1 y +1.

- Cuando *r=1*, la correlación lineal es perfecta, directa.
- Cuando *r=-1*, la correlación lineal es perfecta, inversa
- Cuando *r=0*, no existe correlación alguna, independencia total de los valores X e Y

Variantes de la regresión lineal

- **La función potencial**

$y=c\cdot x^a$

Se puede trasformar en

$$\log y=a\log x+\log c$$

Si usamos las nuevas variables $X=\log x$ e $Y=\log y$, obtenemos la relación lineal

$Y=aX+b$.

Donde $b=\log c$

Ejemplo:

x	10	20	30	40	50	60	70	80
y	1.06	1.33	1.52	1.68	1.81	1.91	2.01	2.11

Usar la calculadora para transformar esta tabla de datos en esta otra

X=log x	1.0	1.30	1.477	1.60	1.699	1.778	1.845	1.903
Y=log y	0.025	0.124	0.182	0.225	0.258	0.281	0.303	0.324

Calcular mediante el programa regresión lineal los parámetros *a* y *c*.

- **Función exponencial**

$y=c\cdot e^{ax}$

Tomando logaritmos neperianos en los dos miembros resulta

$\ln y=ax+\ln c$

Si ponemos ahora $X=x$, e $Y=\ln y$, obtenemos la relación lineal

$Y=aX+b$

Donde $b=\ln c$.

Ejemplo:

x	12	41	93	147	204	264	373	509	773
y	930	815	632	487	370	265	147	76	17

Usar la calculadora para transformar esta tabla de datos en esta otra

X= x	12	41	93	147	204	264	373	509	773
Y=ln y	6.835	6.703	6.449	6.188	5.913	5.580	4.990	4.330	2.833

Calcular mediante el programa regresión lineal los parámetros *a* y *c*.

La clase *Regresion*

La clase *Regresion* que describe la regresión lineal no difiere substancialmente de la clase *Estadistica* que se ha descrito en la sección anterior. La diferencia estriba en que los miembros datos son dos arrays *x* e *y* que guardan las series de valores X e Y, cuya dependencia funcional deseamos determinar. En los miembros dato públicos *a* y *b* se guarda la pendiente de la recta de regresión y la ordenda en el origen.

La función miembro *lineal*, calcula la pendiente *a*, y ordenada en el origen *b* de la recta de regresión. Se hace uso de variables auxiliares para guardar resultados intermedios: *sx* guarda la suma de todas las abscisas, *sy* la suma de todas las ordenadas, *sx2* la suma de los cuadrados de las abscisas, *sy2* la suma de las cuadrados de las ordenadas, y *pxy*, la suma de los productos de cada abscisa por su ordenada. Los valores calculados a partir de las fórmulas respectivas, se guardan en los miembros públicos *a* y *b* de la clase *Regresion*.

Para obtener el coeficiente de correlación hemos de calcular primero el valor medio <*x*> de la serie de datos X, y el valor medio <*y*> de Y. No calculamos las desviaciones cuadráticas medias sino que empleamos una expresión equivalente a la dada anteriormente para el coeficiente de correlación.

```
public class Regresion {
    private double[] x;
    private double[] y;
    private int n;          //número de datos
    public double a, b;    //pendiente y ordenada en el origen
    public Regresion(double[] x, double[] y) {
        this.x=x;
        this.y=y;
        n=x.length; //número de datos
    }
    public void lineal(){
        double pxy, sx, sy, sx2, sy2;
        pxy=sx=sy=sx2=sy2=0.0;
        for(int i=0; i<n; i++){
            sx+=x[i];
            sy+=y[i];
            sx2+=x[i]*x[i];
            sy2+=y[i]*y[i];
            pxy+=x[i]*y[i];
        }
        a=(n*pxy-sx*sy)/(n*sx2-sx*sx);
        b=(sy-b*sx)/n;
    }
    public double correlacion(){
//valores medios
        double suma=0.0;
        for(int i=0; i<n; i++){
            suma+=x[i];
        }
        double mediaX=suma/n;

        suma=0.0;
        for(int i=0; i<n; i++){
            suma+=y[i];
        }
        double mediaY=suma/n;
//coeficiente de correlación
        double pxy, sx2, sy2;
        pxy=sx2=sy2=0.0;
        for(int i=0; i<n; i++){
            pxy+=(x[i]-mediaX)*(y[i]-mediaY);
            sx2+=(x[i]-mediaX)*(x[i]-mediaX);
            sy2+=(y[i]-mediaY)*(y[i]-mediaY);
        }
        return pxy/Math.sqrt(sx2*sy2);
    }
}
```

Uso de la clase *Regresion*

Una fábrica de bebidas refrescantes observa que sus temperaturas (x) y las ventas (y) de la calle han sido.

x	5	7	10	12	16	20	23	27	19	14	9	6
y	9	11	15	16	20	24	27					