Introducción a Álgebra Lineal

4.1 Operaciones con matrices y determinantes

1. **Encuentre la inversa de la siguiente matriz y verifique el resultado:**

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -15 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -15 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -24 & 18 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -24 & 18 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 20 & -15 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

$$\therefore F^{-1} = \begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

2. **Demuestre la propiedad de que el determinante del producto de matrices es igual al producto de determinantes**

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}, \det(AB) = (ae+bg)(cf+dh) - (ce+dg)(af+bh)$$

$$\det(AB) = aecf + aedh + bgcf + bgdh - afce - afdg - bhce - bhdg = aedh + bgcf - afdg - bhce$$

$$\det(A)\det(B) = (ad-bc)(eh-fg) = aedh - afdg - bhce + bgcf$$

$$\therefore \det(AB) = \det(A)\det(B)$$

4.2 Sistemas de ecuaciones lineales

3. **Resuelva el siguiente sistema por el método de Gauss-Seidel.**

$$\begin{cases} 4x - y + z = 7 \\ -2x + 4y - 2z = 1 \\ x - y + 3z = 5 \end{cases} \tag{1}$$

x	y	z
$x_0 = \frac{7}{4} = 1.75$	$y_0 = \frac{1}{4} = 0.25$	$z_0 = \frac{5}{3} = 1.67$
$x_1 = \frac{7+(0.25)-(1.67)}{4} = 1.39$	$y_1 = \frac{1+2(1.75)+2(1.67)}{4} = 1.96$	$z_1 = \frac{5+(0.25)-(1.75)}{3} = 1.17$
$x_2 = \frac{7+(1.96)-(1.17)}{4} = 1.95$	$y_2 = \frac{1+2(1.39)+2(1.17)}{4} = 1.53$	$z_2 = \frac{5+(1.96)-(1.39)}{3} = 1.86$
$x_3 = \frac{7+(1.53)-(1.86)}{4} = 1.67$	$y_3 = \frac{1+2(1.95)+2(1.86)}{4} = 2.16$	$z_3 = \frac{5+(1.53)-(1.95)}{3} = 1.53$
$x_4 = \frac{7+(2.16)-(1.53)}{4} = 1.91$	$y_4 = \frac{1+2(1.67)+2(1.62)}{4} = 1.89$	$z_4 = \frac{5+(2.16)-(1.91)}{3} = 1.75$
$x_5 = \frac{7+(1.89)-(1.75)}{4} = 1.79$	$y_5 = \frac{1+2(1.91)+2(1.75)}{4} = 2.08$	$z_5 = \frac{5+(1.89)-(1.91)}{3} = 1.66$
$x_6 = \frac{7+(2.08)-(1.66)}{4} = 1.86$	$y_6 = \frac{1+2(1.79)+2(1.66)}{4} = 1.98$	$z_6 = \frac{5+(2.08)-(1.79)}{3} = 1.76$

4. **Encuentre todas las soluciones del sistema homogéneo.**

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 4y + 6z = 0 \\ 3x + 6y + 9z = 0 \end{cases} \tag{2}$$

La segunda y tercera ecuación son múltiplos de la primera ecuación, lo que significa que el sistema tiene soluciones infinitas, ya que todo todas las ecuaciones son linealmente dependientes.
Podemos despejar la primera ecuación para que nos de $x = -2y - 3z$ y decir que la solucion es:

$$(x, y, z) = (-2y - 3z, y, z); y, z \in \mathbb{R}$$

4.3 Espacios vectoriales y auto-valores/auto-vectores

5. **Encuentre la base y la dimensión del subespacio generado por los vectores [(1, 2, 3), (2, 4, 6), (3, 6, 9)]**

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como podemos ver, la matriz reducida muestra que solo la primera fila es linealmente independiente. Por lo tanto, podemos decir que el vector $(1, 2, 3)$ genera el subespacio y que su dimensión es 1.

6. **Determine los autovalores y autovectores de la matriz:**

$$G = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$G - \lambda I = \begin{bmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 5-\lambda \end{bmatrix}$$
$$\det(G - \lambda I) = (5-\lambda)^2 - 4 = 25 - 10\lambda + \lambda^2 - 4 = \lambda^2 - 10\lambda + 21$$
$$\lambda^2 - 10\lambda + 21 = (\lambda - 7)(\lambda - 3) = 0$$
$$\lambda_1 = 7, \lambda_2 = 3$$
$$A - 7I = \begin{bmatrix} 5-7 & -2 \\ -2 & 5-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}, (A - 7I)v = 0 \to \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$$
$$-2x - 2y = 0 \to -2x = 2y \to x = -y \therefore v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$
$$A - 3I = \begin{bmatrix} 5-3 & -2 \\ -2 & 5-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, (A - 3I)v = 0 \to \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$$
$$2x - 2y = 0 \to 2x = 2y \to x = y \therefore v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Los autovalores de la matriz G son $\lambda_1 = 7, \lambda_2 = 3$ y sus autovectores son $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

4.4 Aplicaciones en IA: reducción de dimensionalidad

7. **Explique como el PCA (Análisis de Componentes Principales) utiliza el álgebra lineal para reducir dimensiones.**
El PCA es una técnica de reducción de dimensionalidad que busca reducir el número de dimensiones (complejidad) en un conjunto de datos para facilitar su aplicación en modelos de análisis o predictivos. El PCA se compone de los siguientes pasos:

   (a) *Calculo de la matriz de covarianza:* La matriz de covarianza mide el nivel de variación de los datos entre sí. La fórmula es $C = \frac{1}{n} \sum_i x_i x_i^T$

   (b) *Calculo de autovalores y autovectores:* Se usa el proceso de multiplicadores de Lagrange en el que se calcula la gradiente de la matriz de covarianza y del vector unitario de la gráfica y se iguala a 0. Esto nos deja con la fórmula $u^T C u = \lambda$. Entonces empezamos a calcular todos los autovalores y autovectores de nuestro conjunto de datos.

   (c) *Selección de autovalores y autovectores:* Escogemos los autovectores con los autovalores más altos asociados para representar la mayor cantidad de información en el conjunto en la menor cantidad de dimensiones posibles

8. **Calcule la descomposición en valores singulares (SVD) de la matriz:**

$$H = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$HH^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\det(HH^T - \lambda I) = (10-\lambda)(8-\lambda) - (8)(8) = \lambda^2 - 10\lambda - 8\lambda + 80 - 64 = \lambda^2 - 18\lambda + 16 = 0$$

$$\lambda_1 = 9 + \sqrt{65} = 17.06, \lambda_2 = 9 - \sqrt{65} = 0.94$$

$$\sigma_1 = \sqrt{17.06} = 4.13, \sigma_2 = \sqrt{0.94} = 0.97$$

$$(HH^T - 17.06I)v = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} -7.06 & 8 \\ 8 & -9.06 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 1.13 \\ 1 \end{bmatrix}; \vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{1.13^2+1^2}} \begin{bmatrix} 1.13 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.75 \\ 0.66 \end{bmatrix}$$

$$(HH^T - 0.94I)v = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 9.06 & 8 \\ 8 & 7.06 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} -0.88 \\ 1 \end{bmatrix}; \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{(-0.88)^2+1^2}} \begin{bmatrix} -0.88 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.66 \\ 0.75 \end{bmatrix}$$

$$v_1 = \frac{1}{\sigma_1} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}^T (\vec{u}_1) = \frac{1}{4.13} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.75 \\ 0.66 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.86 \\ 0.502 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = \frac{1}{\sigma_2} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}^T (\vec{u}_2) = \frac{1}{0.97} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.66 \\ 0.85 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.502 \\ 0.86 \end{bmatrix}$$

$$\sum = \begin{bmatrix} 4.13 & 0 \\ 0 & 0.97 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 0.75 & -0.66 \\ 0.66 & 0.75 \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} 0.86 & -0.502 \\ 0.502 & 0.86 \end{bmatrix}$$

9. **Analice el uso del álgebra lineal en el aprendizaje profundo con redes neuronales.** El álgebra lineal se utiliza en las redes neuronales en los siguientes aspectos:

   (a) *Representación de datos:* Varios tipos de datos de entrada, como imágenes o texto, se representan como vectores o matrices.

   (b) *Transformaciones lineales:* En las redes neuronales, cada capa aplica una transformación lineal a los datos de entrada.

   (c) *Funciones de activación:* Después de la transformación lineal, se aplica una función de activación no lineal para introducir no linealidades en el modelo, permitiendo que la red aprenda representaciones complejas.

   (d) *Descomposición de matrices:* Se utilizan técnicas de descomposición en valores singulares para optimizar el rendimiento de los modelos.

10. **Explique el impacto de los espacios vectoriales en la representación de datos en la IA.** Los espacios vectoriales son esenciales en la representación de datos en la inteligencia artifical, siendo parte de varios procesos en la creación y desarrollo de modelos de aprendizaje automático, como ocurre en los siguientes ejemplos:

    (a) *Representación de datos:* Los espacios vectoriales proporcionan un marco matemático para representar datos de manera estructurada. Los datos, como palabras, imágenes o sonidos, se pueden mapear en vectores dentro de un espacio vectorial, lo que permite su manipulación y análisis.

    (b) *Reducción de dimensionalidad:* Se utilizan técnicas como el análisis de componentes principales para reducir la dimensionalidad de los conjuntos de datos y así facilitar su uso como datos de entrada y en la visualización de datos.

    (c) *Embeddings:* En IA, los embeddings son representaciones vectoriales de datos (como palabras o imágenes) en un espacio vectorial continuo. Estos embeddings capturan relaciones semánticas o estructurales entre los datos. Por ejemplo, en procesamiento de lenguaje natural (NLP), palabras similares tienden a estar cerca en el espacio vectorial.

    (d) *Generalización y abstracción:* Los espacios vectoriales permiten generalizar conceptos y abstraer características de los datos. Esto es crucial para que los modelos de IA puedan aprender patrones y aplicarlos a nuevos datos no vistos.