TITULO: Analisis Numerico

FECHA: 16-Marzo-2023

30% Actividades 4CM14 Lab 4113.

70% Examen

1ra eval Jueves 27 de abril

2da eval Lunes 5 de Junio

3ra eval Jueves 6 de Julio

21-Marzo-23

SERIE DE TAYLOR

La serie de Taylor es una expansión de algunas funciones dentro de una suma infinita de términos, donde cada término tiene un exponente grande como $x, x^2, x^3, \ldots$

Por ejemplo. La serie de Taylor para e^x

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

se dice que la función e^x es igual a la suma infinita de términos.

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

Por ejemplo. e^x donde $x=2$

$$e^2 = e \cdot e = 7.389056$$

Obteniendo términos de la serie infinita

Término	Resultado
$1+2$	3
$1+2+\frac{2^2}{2!}$	5

Análisis Numérico

21-Marzo-23

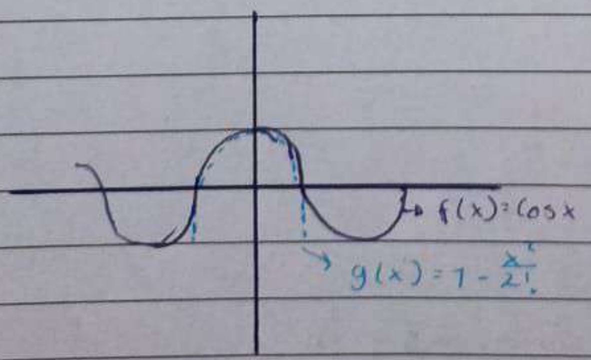
Término	Resultado
$1+2+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}$	6.33
$1+2+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+\frac{2^4}{4!}$	7
$1+2+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+\frac{2^4}{4!}+\frac{2^5}{5!}$	7.26

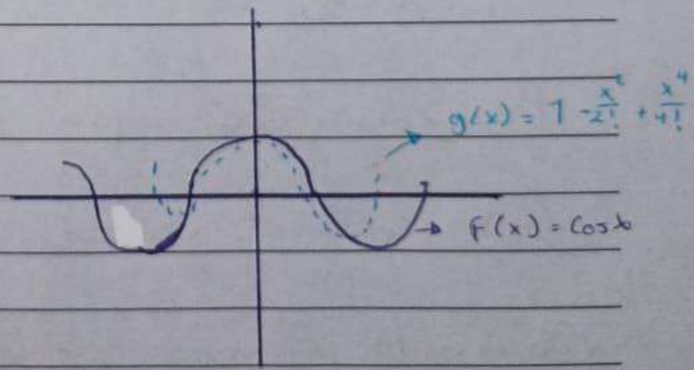
Algunos series de Taylor conocidos

Exponsión de la serie de Taylor	Notación Sigma
$e^x + 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$	$\sum_{n=0} \frac{x^n}{n!}$
$\operatorname{Sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$
$\operatorname{Cos} x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$
$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ para $\lvert x \rvert < 1$	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

Aproximaciones.

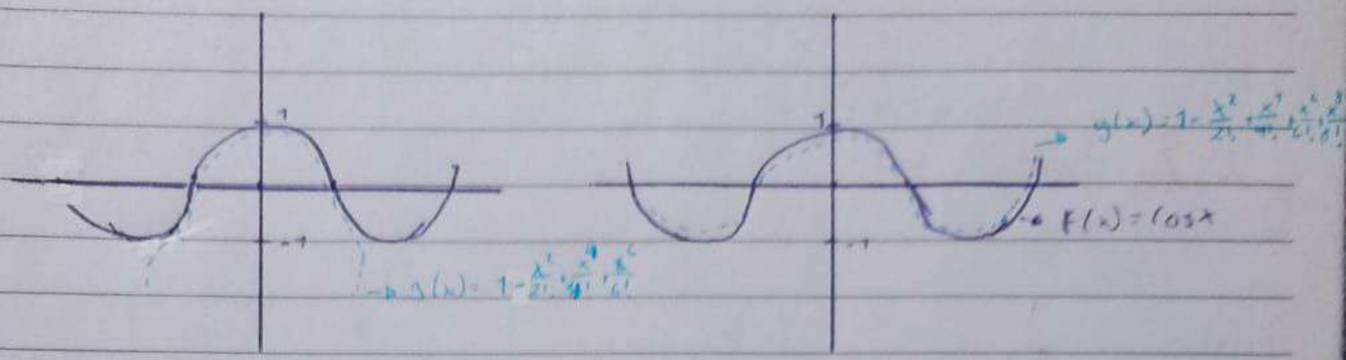
Se puede utilizar los primeros términos de la serie de Taylor, para obtener un valor aproximado para una función





TITULO Análisis Numérico

FECHA 21-Marzo-23



El criterio de la razón. Hace posible una clase de comparación interna de términos de la serie dada, y tiene la ventaja de ser aplicable a series que contienen términos negativos.

Definición del criterio de la razón. Para la serie.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \text{sea} \quad L = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

$\Rightarrow$ a) Si $L < 1$ La serie converge.
b) Si $L > 1$ La serie diverge
c) Si $L = 1$ La serie puede converger o diverger.

El criterio de la razón es útil cuando se aplica a una serie $\sum_{n=0} a_n$ en la que los términos a_n, contienen potencias o factoriales.

Ejemplo: Determinar si cada una de las series converge o diverge.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^2}$

$$L = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{\frac{5^{n+1}}{(n+1)^2} \; a_{n+1}}{\frac{5^n}{n^2} \; a_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{5^{n+1} \cdot n^2}{5^n \cdot (n+1)^2} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{5n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n \to \infty} 5 \frac{\frac{n^2}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2} + \frac{2n}{n^2} + \frac{1}{n^2}}$$

$$= 5 \frac{1}{1+0+0} = 5$$

TITULO Analisis Numerico

FECHA 23 - Marzo - 23

Classroom

5xmmpc5.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!}$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-2)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(-2)^n}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n!\,(-2)^{n+1}}{(n+1)!\,(-2)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\cdot -2}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(-2)}{n+1} = 0$$

La serie es convergente.

Suponga que esta dado una función $f(x)$ y se quieren hallar los coeficientes a_n a subíndice n correspondientes, tal que la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^a$ para descubrir que son iguales esos coeficientes suponga que

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n +$

si $x=0$, solo el primer término en la suma es diferente de 0 y así: $a_0 = f(0)$ luego se deriva la serie término a término. Se puede demostrar que si la serie de potencias original converge a $f(x)$ en el intervalo $-R < x < R$, entonces la serie derivada converge a $f'(x)$ en ese intervalo. Por lo tanto, $f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + n a_n x^{n-1} +$

y si $x=0$, se deduce que $a_1 = f'(0)$. Se deriva nuevamente para obtener $f''(x) = 2a_2 + 2\cdot 3 a_3 x + \dots + n(n-1) a_n x^{n-2} + \dots$ y se hace $x=0$ para concluir que. $f''(0) = 2a_2$ o $a_2 = \frac{f''(0)}{2}$.

Análogamente la tercera derivada de f es.

$f^{(3)}(x) = 3\cdot 2 a_3 + \dots + n(n-1)(n-2) a_n x^{n-3} + \dots$

y $f^{(3)}(0) = 3\cdot 2 a_3$ o $a_3 = \frac{f^{(3)}(0)}{3!}$ y así sucesivamente.

En general, $f^{(n)}(0) = n!\, a_n$ o $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ donde $f^{(n)}(0)$ denota la n-ésima derivada de f evaluada en $x=0$ y $f^{(0)}(0) = f(0)$.

Esto muestra que, si existe una serie de potencias que converge a $f(x)$, esta debe ser aquella cuyos coeficientes se obtienen de las derivadas de f por la fórmula

$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

TITULO Análisis Numérico FECHA 23-Marzo-23

A esta serie se le conoce como la serie de Taylor de f (alrededor de $x=0$) y los coeficientes correspondientes a_n se conocen como los coeficientes de Taylor de la función f.
La serie de Taylor de $f(x)$ alrededor de $x=0$ es la serie de potencias donde $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Cuando se realiza el desarrollo de una función en serie de Taylor, se observa que si existe una serie de potencias que converge a una función $F(x)$ dada, entonces esta debe ser la serie de Taylor.

Por ejemplo $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ como la serie geométrica representa a $g(x) = \frac{1}{1-x}$ para $|x|<1$, se espera que la serie de Taylor para $g(x)$ sea $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

Ejemplo: Demostrar que la serie de Taylor alrededor de $x=0$ para la función $f(x) = \frac{1}{1-n}$ es $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ para $|x|<1$.

Solución: Calcular los coeficiente de Taylor.

$f(x) = \frac{1}{1-x}$ $\quad f(0) = 1 \quad a_0 = \frac{f(0)}{0!} = \frac{1}{0!} = 1$

$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ $\quad f'(0) = 1 \quad a_1 = \frac{1}{1!} = 1$

$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$ $\quad f''(0) = 2 \quad a_2 = \frac{2}{2!} = 1$

$f'''(x) = \frac{6}{(1-x)^4}$ $\quad f'''(0) = 6 \quad a_3 = \frac{6}{6!} = 1 \quad \frac{3}{3!} = 1$

$f''''(x) \; \frac{24}{(1-x)^5}$ $\quad f''''(0) = 24 \quad a_4 = \frac{24}{24!} = \frac{4}{4!} = 1$

$f^{IV}(x) = \frac{24}{(1-x)^5} \quad f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

Blog por equipo
* N. de equipo
* Integrantes.

La serie de Taylor correspondiente es:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (1)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

converge a $f(x) = \frac{1}{1-x}$ para $|x|<1$

Ejemplo: Demostrar que la serie de Taylor de la función $f(x)=e^x$, alrededor de $x=0$ es $e^x=\sum \frac{x^n}{n!}$

Demostrar que esta serie de potencias converge $\forall x$

Solución: Calcular los coeficientes de Taylor.

$f(x)=e^x$	$f(0)=1$	$a_0=\frac{f(0)}{0!}=\frac{1}{0!}$
$f'(x)=e^x$	$f'(0)=1$	$a_1=\frac{f'(0)}{1!}=\frac{1}{1!}$
$f''(x)=e^x$	$f''(0)=1$	$a_2=\frac{f''(0)}{2!}=\frac{1}{2!}$
$f^3(x)=e^x$	$f^3(0)=1$	$a_3=\frac{f^3(0)}{3!}=\frac{1}{3!}$
$f^n(x)=e^x$	$f^n(0)=1$	$a_n=\frac{f^n(0)}{n!}=\frac{1}{n!}$

La serie de Taylor es: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

Para demostrar el conjunto de convergencia de la serie, se utiliza el criterio de la razón. Esto es,

$$L=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!\,x^{n+1}}{(n+1)!\,x^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1}=0 \quad \forall x$$

Como $L=0 \Rightarrow L<1$, la serie de Taylor para e^x converge $\forall x$

Por lo que, la serie de Taylor converge a e^x $\forall x$

$$\Rightarrow e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots$$

SERIE DE TAYLOR ALREDEDOR DE $x=a$

A veces es imposible representar una función dada por una serie de potencias de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, en lugar de ello, es necesario usar una serie de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$, donde a es una constante.

Por ejemplo, la función $f(x)=\ln x$, no está definida para $x\leq 0$ por lo que, no puede ser la serie de potencias de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, en un intervalo simétrico alrededor de $x=0$.

Se puede demostrar que si $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$, los coeficientes de la serie están relacionados con las derivadas de f por la fórmula $a_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$

TITULO FECHA 27 - Marzo - 23.

La serie de potencia en $(x-a)$, se llama serie de Taylor de $f(x)$ alrededor de $x=a$
Se puede demostrar que las series de este tipo convergen en intervalos simétricos de la forma $a-R<x<a+R$, incluyendo posiblemente los dos puntos extremos $x=a-R$ y $x=a+R$

SERIE DE TAYLOR ALREDEDOR DE $x=a$

La serie de Taylor de $f(x)$ alrededor de $x=a$ con la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ donde $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots$$

La serie se denomina serie de Taylor de f en a. El caso especial cuando $a=0$, se llama serie de Maclaurin.

Ejemplo: Demostrar que la serie de Taylor para $\ln x$ alrededor de $x=1$ es $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-1)^n}{n} = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \dots$

¿Para qué valores de ∞ se converge esta serie?
Solución: Calcular los coeficientes de Taylor.

$$f(x) = \ln x \qquad f(1)=0 \qquad a_0 = \frac{f(1)}{0!} = 0$$
$$f'(x) = \frac{1}{x} \qquad f'(1) = 1 \qquad a_1 = \frac{f'(1)}{1!} = 1$$
$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad f''(1) = -1 \qquad a_2 = \frac{f''(1)}{2!} = -\frac{1}{2}$$
$$f^3(x) = \frac{2!}{x^3} \qquad f^3(1) = 2! \qquad a_3 = \frac{f^{(3)}(1)}{3!} = \frac{1}{3}$$
$$f^4(x) = \frac{-3!}{x^4} \qquad f^4(1) = -3! \qquad a_4 = \frac{f^{(4)}(1)}{4!} = -\frac{1}{4}$$
$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{x^n} \qquad f^{(n)}(1) = (-1)^{n+1}(n-1)! \qquad a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

La serie de Taylor es:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n$$

TITULO

FECHA 27-Marzo-23

Usando el criterio de la razón para determinar el conjunto de convergencia para la serie de potencia.

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+2}(x-1)^{n+1}}{n+1}}{\frac{(-1)^{n+1}(x-1)^{n}}{n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n(-1)^{n+2}(x-1)^{n+1}}{(-1)^{n+1}(n+1)(x-1)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n(x-1)^{n+1}}{(n+1)(x-1)^n} \right| = |x-1| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}$$

$$= |x-1|$$

$\Rightarrow$ La serie converge para $L = |x-1| < 1$, $-1 < x-1 < 1$, $0 < x < 2$, y diverge para $|x-1| > 1$. La serie converge también en el punto extremo $x = 2$, y $\ln x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 \dots$ para $0 < x \doteq 2$

Ejercicios: (Fecha de entrega 30 de marzo)
Hallar la serie de Taylor para la función dada en el punto indicado $x = 9$.

a) $f(x) = e^{3x}$; $9=0$

b) $f(x) = \ln(2x)$; $a = \frac{1}{2}$

TITULO: Exactitud y Precisión

FECHA: 28-Marzo-23.

En cualquier actividad científica o técnica no se puede evadir la existencia de errores. Puede tratarse de errores de medición o errores de transcripción, errores de posicionamiento ó errores en la variable medida.

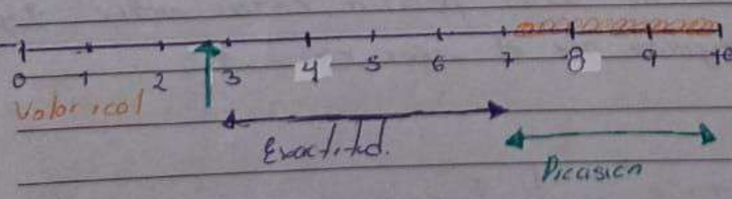
Los errores numéricos se generan con el uso de aproximaciones para representar las operaciones y cantidades matemáticas. Estos incluyen errores de redondeo, errores de   , entre otros.

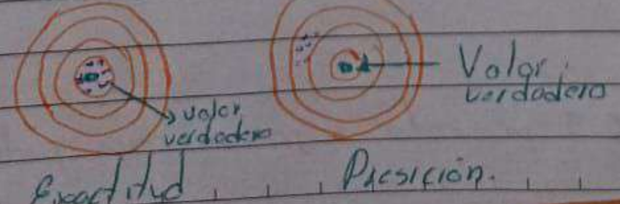
› Precisión. Es lo cerca que los valores medidos estan unos de otros; Es decir, que los valores medidos estan   . Se refiere a que tan cercano esta un valor individual calculado o medido con respecto a otros. Describe cuanta variabilidad hay en varias mediciones del mismo parametro.

Es el detalle con el que un instrumento o procedimiento pueden medir una variable.

› Exactitud. Se refiere a que tan cercano esta un valor calculado o medido del valor verdadero. Esto es, lo que se acerca esta medición al valor real. También se dice, que es lo cerca que el resultado de una medición esta del valor verdadero.

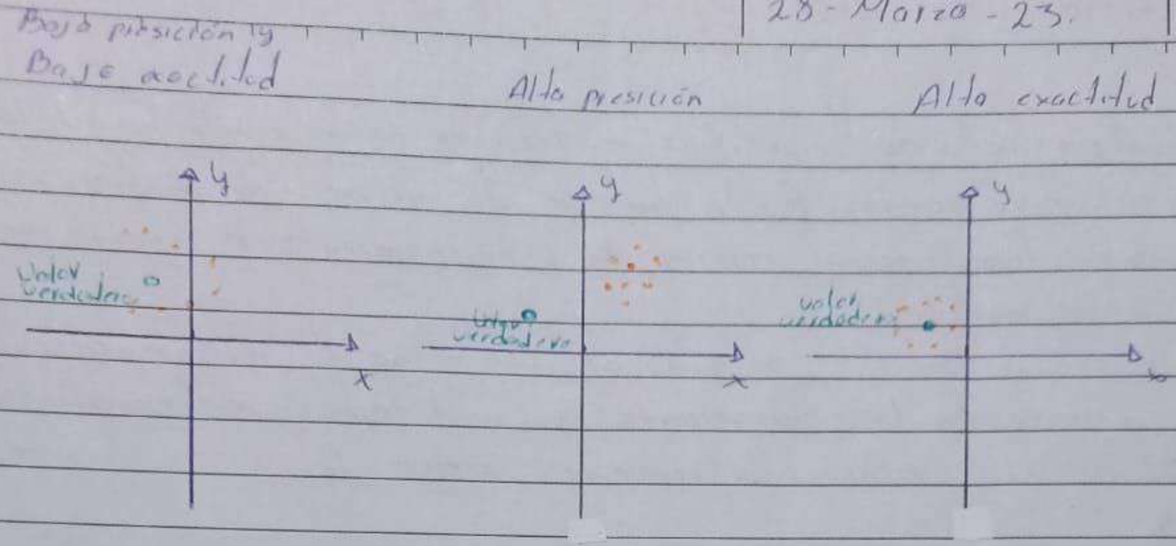
Cuando se expresa la exactitud de un resultado, se hace mediante el error absoluto, el cual es la diferencia entre el valor experimental y el valor verdadero.





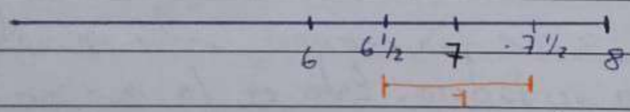
TITULO

FECHA 28 - Marzo - 23.



Grado de exactitud

Como ya se menciono antes, la exactitud depende del instrumento con el que se este midiendo. Pero como regla general, el grado de exactitud es media unidad a cada lado de la unidad de medida. Por ejemplo, cuando el instrumento mide en intervalos de 1'S, entonces cualquier valor entre 6.½ y 7½ se mide como 7



Otro ejemplo cuando el instrumento mide en intervalos de dos, entonces cualquier valor entre 7 y 9 se esta midiendo como 8. Se puede mostrar el error usando los símbolos ($\pm$). Por ejemplo cuando el valor podria estar entre 6.5 y 7, se representaria como. 7 ± 0.5. esto implica que el error es 0.5. Por ejemplo cuando el valor podria estar entre 7 y 9 seria. 8 ± 1 esto implica que el error es ± 1

Ejemplo:

Una valla mide 72.5 m de largo con una exactitud de 0.1 m.

Solución

Si la exactitud es a 0.1 m, esto significa que podria

TITULO

FECHA 28 - Marzo - 23

ser de hasta 0.05 m esto implica que la longitud es igual a $12.5\,m \pm 0.05\,m$.
Por tanto podría tener entre 12.45 m y 12.55 m de largo.

› Error absoluto.
Es la diferencia entre el valor real y el valor medido.
Aunque al medir no se conoce el valor real, por lo que se usa el máximo error posible, como se observo en el ejemplo el error absoluto es 0.05 m.

› Error relativo
Es el error absoluto dividido por la medida real ($\varepsilon_r = \frac{EA}{MR}$.)

› Error porcentual.
Es el error relativo mostrado como un porcentaje, esto es:

$$\varepsilon_p = \frac{|Val\ aprox - Val\ real|}{|Val\ real|} \times 100\%$$

Por ejemplo: Representar el error porcentual en el caso de que 100 personas asistieron a un concierto pero realmente los asistentes fueron 120.

TAREA. Obtener el error absoluto, el error relativo y el error porcentual del ejemplo de la valla

Números punto flotante de 32 y 64 bits

3 - Abril - 23

Consiste en representar un número n en un conjunto de dígitos multiplicado por una base elevada a un exponente. Esto es

$$n = d_1, d \dots d_p \times b^e$$

donde d_p representa a los dígitos, x representa a la base y e al exponente, por ejemplo el ejercicio de la valla.

Las computadoras tratan con números reales en el sistema binario. El sistema binario utiliza la base 2, esto es 0 y 1.

Cuando un número real como el 427.325 se escribe con más detalle, se obtiene:

$$427.325 = 4 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 7 \times 10^0 + 3 \times 10^{-1} + 2 \times 10^{-2} + 5 \times 10^{-3}$$

Por ejemplo: $-\pi = -3.141592653\dots$

El último se representaría como 3×10^{-9}

Un número en sistema binario se puede escribir como:

$$1001\ 11101 = 1 \times 2^0 + 0 \times 2 + 0 \times 2 + 1 \times 2^0 + 1 \times 2^0 + 1 \times 2^0 + 1 \times 2^0 + 0 \times 2 + 1 \times 2^0$$

Su representación en número real es: | 8 | 4 | 2 | 1 |

$$(1001\ 11101)_2 = 9.90625_{10}$$

Se tendría que dividir para pasar a la base 2.

$$\overset{4}{2\overline{)9}} \quad \overset{2}{2\overline{)4}} \quad \overset{1}{2\overline{)2}} \quad \overset{0}{2\overline{)1}}$$

$$1 \qquad 0 \qquad 0 \qquad 1$$

← Va de derecha a izquierda.

TITULO

FECHA 3-Abril-23.

$0.75_{10} = .11_2$

$0.25_{10} = .01_2$

$0.75 \times 2 = 1.5$

$0.5 \times 2 = 1$

$0.25 \times 2 = 0.5$

$0.5 \times 2 = 1$

De arriba hacia abajo

En general, cualquier base $B > 1$, se puede usar como base para un sistema de números. Los números representados en base B contendran digitos $0, 1, 2, \ldots, B-1$. Se puede emplear la notación (N_B), por ejemplo:

$(1001.1101)_2 = 9.90625_{10}$

* Notación científica normalizada (Buscar)

En el sistema decimal cualquier real, se puede expresar en notación científica normalizada. Esto es, el punto decimal se desplaza y se ponen las potencias de 10 necesarias para que todos los digitos queden a la derecha de los puntos decimales y el primer digito mostrado no sea cero, por ejemplo:

$732.5051 = 0.7325051 \times 10^3$

$-0.00 = 0.96 \times 10^{-2}$

De forma general, un real $\mathbb{R}$ no cero x se puede representar como:

$$x = \pm r \times 10^n$$

donde r es un número en el rango de $1/10 \leq r \leq 1$ y n es un $\mathbb{Z}$ (positivo, negativo o cero).

Si $x = 0 \Rightarrow r = 0$, en otro caso, se adjunta

FECHA 3-Abril-23

"n" de modo que "r" quede en el rango de dado.

De la misma forma, se puede utilizar la notación científica en el sistema binario:

$$x = \pm q \times 2^m$$

donde $\frac{1}{2} \leq q < 1$ (si $x \neq 0$) $m \in \mathbb{Z}$

q, se llama mantisa, también conocida como coeficiente o significado, la cual contiene los dígitos del número.

m, representa al exponente, indica donde se pone el punto decimal (o binario) en relación al inciso de la mantisa.

4-Abril-23

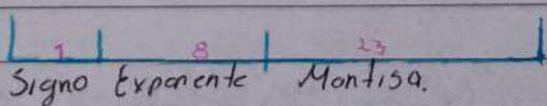
Exponentes negativos representan números menores que 1.
El estándar y IEEE para aritmética en coma flotante IEEE, SS es el estándar más extendido para las computadoras, seguido por muchos de los mejores CPU y FPU. El estándar define formatos para la representación de números en coma flotante, incluyendo el cero y valores desnormalizados, así como valores especiales: Infinito y NaN, en un conjunto de operaciones en coma flotante que trabaja sobre estos valores. También especifica 4 modos de redondeo y 5 excepciones.
La IEEE 754 especifica 4 formatos para la representación de valores en coma flotante:

* Precisión simple 32 bits
* Precisión doble 34 bits
* Precisión simple y extendida ≥ 43 bits
* Precisión doble o extendida ≤ 79 bits (usualmente implementado con 80 bits)

Solo los valores de 32 bits son requeridos por el estándar, los otros son opcionales. Muchos lenguajes especifican que formatos y aritmética de la IEEE incrementan aunque estos formatos sean opcionales.
Un número flotante de 32 bits consta de:

* Un bit para el signo 0+, 1-
* 8 bits del exponente
* 23 bits - mantisa.

Precisión simple 32 bits



Para representar un numero de 32 bits se hace lo siguiente:
1. Se representa el número en binario.

TITULO

FECHA 4 - Abril - 23

2. Se normaliza
3. Se calcula el exponente
4. Se escribe la matisa.

Ejemplo

-300.2

1. Escribir el número en binario

300,2 = $\underbrace{100101100}_{\text{8 lugares}}$ 0.2 x 2 = 0.4

0011001100 11 0.4 x 2 = 0.8

0.8 x 2 = 1.6

| 1 | 10000111 | 0010110000011001100110011 | En exceso 127 ⇒ 8+127 = 135. 0.6 x 2 = 1.2
1 8 32

⇒ 1.00101100000 1100110 x 2^8 0.2 x 2 = 0.4

135 = 10000111_2 0.4 x 2 = 0.8

0.8 x 2 = 1.6

0.6 x 2 = 1.2

Calculadora de decimal a punto flotante simple IEEE754 de 32 bits

73.5

TITULO: TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA

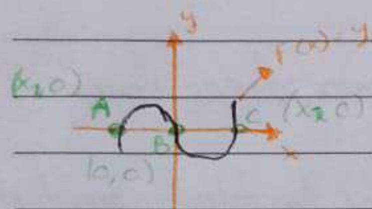
FECHA: 18 - Abril - 23

El teorema fundamental del algebra nos dice algo interesante de los polinomios. El grado del polinomio de una variable es el exponente más grande de esta variable.

Ejemplo 1

$3x^3 + 2x - 5$ El grado del polinomio es 3.

Una raiz (o cero) es cuando el polinomio es igual a cero



A, B, C, son las raices.

$\forall x; \in \mathbb{R}$ raices. $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{57}}{6} \\ x_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{57}}{6} \end{cases}$

$3x^3 + 2x - 5 = 0$

$(x-1)(3x^2 + 3x + 5) =$

$3x^3 + 3x^2 + 5x - 3x^2 - 3x - 5 =$

$3x^3 + 2x - 5$

$$-\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(3)(5)}}{2(3)} = \frac{-3 \pm \sqrt{-51}}{6}$$

Este teorema nos dice que el grado de una ecuación polinomial indica cuantas raices tendra la ecuación

- > Una ecuación lineal (grado uno) tendrá una raiz
- > Ecuación cuadratica (grado dos) tiene dos raices
- > Ecuación cubica (grado tres) tiene tres raices
- > Ecuación polinomial (grado n-ésimo) tiene n raices.

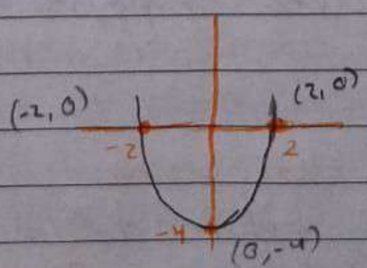
Por ejemplo, ¿Cuáles son las raices del polinomio $x^2 - 4$?

Solución: Como el polinomio es de grado dos, tiene dos raices.

$(x^2 - 4) = 0$

$(x + 2)(x - 2) = 0$

$x_1 = -2 \quad x_2 = 2$



TITULO

FECHA 19 Abril-23

Un polinomio se puede escribir como:

raíces ceros.

$$a\underbrace{(x-r_1)}\underbrace{(x-r_2)}$$

Factores

Nota sobre las raíces (cero) del polinomio:

> Cuando incluyen múltiples raíces, si un polinomio tiene raíces repetidas, cada repetición se cuenta.

> Cuando un polinomio incluye raíces complejas, el término complejo se refiere a raíces complejas con una parte imaginaria no cero ($a+bi$ donde $b \neq 0$).

Lo cual implica que el conjugado de la raíz compleja también se contará como pares conjugados.

TEOREMA. FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA.

Si $P(x)$ es un polinomio de grado $n \geq 1$, entonces $P(x)=0$ tiene exactamente n raíces, incluyendo raíces múltiples y complejas.

Identificando los grados y ceros de una función.

Definición. Un polinomio $P(x)$ de la forma $P(x)=a_n x^n + \dots$, se puede reescribir como un producto de factores lineales denotados como: $P(x)=a(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)\dots(x-r_n)$, donde r_1, r_2, r_3, r_n representan a las raíces (ceros) del polinomio.

Para las raíces conjugadas complejas se toma la fórmula general: $(a+bi)(a-bi)=a^2-abi+abi-bi^2=a^2+b^2$.

DISCRIMINANTE DE UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA.

Para un polinomio cuadrático de la forma $P(x)=ax^2+bx+c$ el discriminante denotado como $D=b^2-4ac$ describe los

TITULO FECHA 18-Abril-23

raíces del polinomio. Existen tres casos a considerar:
Caso 1: Cuando $D>0$, $P(x)$ se puede reducir a un producto de factores lineales obteniendo dos raíces reales distintas.
Caso 2: Cuando $D=0$, $P(x)$ se puede reducir a un producto de multiplicidades obteniendo una raíz repetida real.
Caso 3: Cuando $D<0$, $P(x)$ llega a ser una ecuación cuadrática y reducible, obteniendo dos raíces complejas conjugadas.

REGLAS

REGLA DE LOS SIGNOS DE DESCARTES. 20-Abril-23

Se utiliza para determinar el número de raíces (ceros) reales en una función polinomial.

Nos dice que el número de ceros reales positivos de la función polinomial $f(x)$ es igual o menor que éste en un número par que el número de cambios de signo de los coeficientes.

El número de ceros reales negativos de la función $f(x)$ es igual o menor que por un número par que el número de cambios de signo de los coeficiente de los términos de $f(-x)$

Ejemplo. Determinar el número de ceros reales positivos y negativos de la función. $f(x)=x^5+4x^4-3x^2-3x^2+x-6$

La función está ordenada en potencias descendentes de la variable, esto es, se tiene que ordenar los términos como primer paso. Como segundo paso se cuenta, el número de cambio de signo de los coeficientes de $f(x)$.

⇨ Los coeficientes de la variable en $f(x)$ son:

$x^5+4x^4-3x^2+x-6$

$1 \quad 4 \quad -3 \quad 1 \quad -6$] 3 cambios.

$+ \quad - \quad + \quad -$

TITULO

FECHA 20-Abril-23

La regla de los signos de Descartes dice que se tienen exactamente 3 ceros reales positivos o menos, pero un número impar de ceros. Por tanto, la cantidad de ceros positivos debe ser 3 o 1.

Debido a que algunos de las raíces (ceros) pueden ser generadas por la Fórmula Cuadrática, y estos pares de raíces (ceros) pueden ser complejos por tanto, no graficables como intersecciones "x"

Para encontrar el número de ceros negativos, se halla $f(-x)$ y se cuenta el número de cambios de signo de los coeficientes.

$$\Rightarrow f(-x) = (-x)^5 + 4(-x)^4 - 3(-x)^2 + (-x) - 6 =$$

$$= \underbrace{-x^5 + \underbrace{4x^4}_{2}}_{1} - 3x^2 - x - 6$$

$\exists$ 2 cambios.

Se observan dos cambios de signo, por tanto, se tienen dos ceros negativos o menos, pero un número par de ceros

En total, se tienen 3 o 1 ceros positivos o 2 o 0 raíces negativas

Ejemplo: Utilizar la regla de los signos de Descartes para determinar el número de ceros reales de:

$$f(x) = x^5 - x^4 + 3x^3 + 9x^2 - x + 5$$

Solución Se encuentra ordenado el polinomio en forma descendiente:

Primero. Se observan los cambios de signo de $f(x)$

$$\Rightarrow f(x) = x^5 - x^4 + 3x^3 + 9x^2 - x + 5$$

1 2 3 4 $\exists$ 4 cambios.

Cuatro es el número máximo posible de ceros positivos, esto es todas las intersecciones "x" positivas para el polinomio $f(x)$

TITULO

FECHA 20-Abril-23.

Como algunas raíces podrían generarse con la Fórmula Cuadrática, y estos pares de raíces pueden ser complejos no podrían representarse gráficamente como intersecciones "X". Debido a esta posibilidad, se tiene que contar hacia atrás de dos en dos para hallar el número posible de raíces (ceros). Esto es, si bien puede haber hasta cuatro ceros reales, también puede haber solo dos ceros reales positivos y también puede no haber.

Segundo. Se observa el caso de raíces negativos.

$$f(-x) = (-x)^5 - (-x)^4 + 3(-x)^3 + 9(-x)^2 - (-x) + 5$$
$$= -x^5 - x^4 \underbrace{- 3x^3 + 9x}_{1} + x + 5$$

$\exists$ Un cambio de signo.

Aquí $\exists$ exactamente una raíz negativa. En este caso no se cuenta hacia atrás de dos en dos porque la primera resta sería un número negativo.

$\Rightarrow$ $\exists$ 4, 2 o 0 raíces positivas y exactamente 1 raíz negativa.

En alguna literatura, se evalúa $f(x)$ en $x = 1$ para las raíces positivas, y en $x = -1$ para raíces negativas quedando la expresión para este ejemplo como:

$f(1)$: $1 - 1 + 3 + 9 - 1 + 5$

$f(-1)$: $-1 - 1 - 3 + 9 + 1 + 5$

Se procede igual, observando los cambios de signo.

TITULO

FECHA 25-Abril-23

Paso 2. Una aproximación de la raiz x_i se determina como:

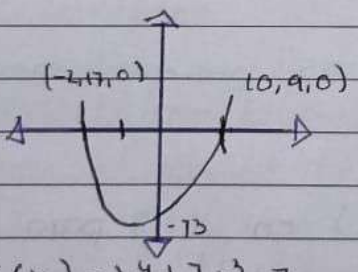
$$x_r = \frac{x_i + x_s}{2}$$

Paso 3. Realiza las siguientes evaluaciones para determinar en que subintervalo esta la raíz.

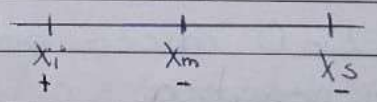
a) Si $f(x_i)f(x_r) < 0$, $\Rightarrow$ La raiz esta en el subintervalo inferior o izquierdo. Por tanto, $x_s = x_r$ y volver al paso 2.

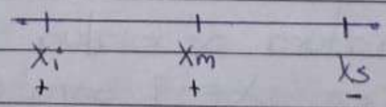
b) Si $f(x_i)f(x_r) > 0$, $\Rightarrow$ La raiz esta en el subintervalo superior o derecho. Por tanto hacer $x_i = x_r$ y volver al paso 2.

c) Si $f(x_i)f(x_r) = 0$, $\Rightarrow$ La raic es igual a x_r y termina en calculo.



$F(x) = x^4 + 7x^3 - 7$





i	x_i	x_s	x_m	$f(x_i)f(x_s)$
1	0	1	$\frac{1}{2}$ (0.5)	$f(0)f(\frac{1}{2}) = (-7)(-\frac{9}{16})$ $= 7$
2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{4}$ (0.75)	$f(\frac{1}{2})f(\frac{3}{4}) = (-)(-) = +22.6$

$$x_n = \frac{\frac{1}{2} + 1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$e_1 = \frac{r_{actua} - r_{anterior}}{r_{actual}} = \left| \frac{\frac{3}{8} - \frac{1}{2}}{\frac{3}{8}} \right| 100 = 33.33\%$$

3 $\quad \frac{3}{4} \quad 1 \quad \frac{7}{8} \quad f(\frac{3}{4})f(\frac{7}{8}) = (-)(-) = 6.43$

$$x_m = \frac{\frac{7}{8} + 1}{2} = \frac{7}{8} = 0.87 \qquad e_2 = \left| \frac{\frac{7}{8} - \frac{3}{4}}{\frac{7}{8}} \right| 100 = 14.28\%$$

TITULO

FECHA 25-Abril-23

4 $\frac{7}{8}$ 1 $\frac{15}{16}$ $f(\frac{7}{8})f(\frac{15}{16}) = (-)(-) = 0.79$

$X_m = \frac{7/8 + 1}{2} = \frac{15}{16} = 0.93$ $e_3 = \left|\frac{15/16 - 7/8}{15/16}\right| 100\% = 6.66\%$

5 $\frac{15}{16}$ 1 $\frac{31}{32}$ $f(\frac{15}{16})f(\frac{31}{32}) = (\ )(\ ) = -0.77$

$X_m = \frac{15/16 + 1}{2} = \frac{31}{32}$ $e_4 = \left|\frac{31/32 - 15/16}{31/32}\right| 100 = 3.22\%$

6 $\frac{15}{16}$ $\frac{31}{32}$ $\frac{61}{64}$ $f(\frac{15}{16})f(\frac{61}{64}) = -0.027$

$X_m = \frac{15/16 + 31/32}{2} = \frac{61}{64}$ $e_5 = \left|\frac{61/64 - 31/32}{61/64}\right| 100\% =$

7 $\frac{15}{16}$ $\frac{61}{64}$

$X_m = \frac{15/16 + 61/64}{2} =$

Práctica 5. $f(x) = x^3 + 7x^2 - 7$ $[0, 1]$

$e_i = 0.5$