TITULO

FECHA 25-Abril-23

4 $\quad 7/8 \quad 1 \quad 15/16 \quad f(7/8)f(15/16) = (-)(-) = 0.79$

$X_m = \frac{7/8 + 1}{2} = 15/16 = 0.93 \quad e_3 = \left| \frac{15/16 - 7/8}{15/16} \right| 100\% = 6.66\%$

5 $\quad 15/16 \quad 1 \quad 31/32 \quad f(15/16)f(31/32) = (\ )(\ ) = -0.11$

$X_m = \frac{15/16 + 1}{2} = 31/32 \quad e_4 = \left| \frac{31/32 - 15/16}{31/32} \right| 100 = 3.22\%$

6 $\quad 15/16 \quad 31/32 \quad 61/64 \quad f(15/16)f(61/64) = -0.027$

$X_m = \frac{15/16 + 31/32}{2} = 61/64 \quad e_5 = \left| \frac{61/64 - 31/32}{61/64} \right| 100\% =$

7 $\quad 15/16 \quad 61/64$

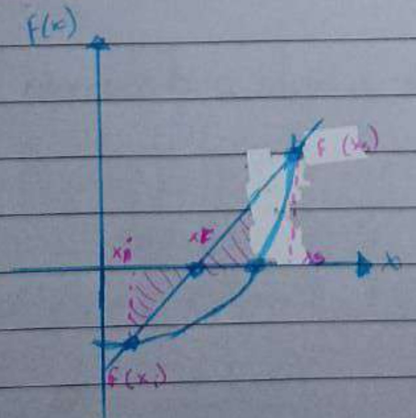
$X_m = \frac{15/16 + 61/64}{2} =$

Práctica 5. $f(x) = x^3 + 7x^2 - 7 \quad [0, 1]$

$e_i = 0.5$

02-Mayo-23

MÉTODO DE LA FALSA POSICIÓN



$$x_r = x_s - \frac{f(x_s)(x_i - x_s)}{f(x_i) - f(x_s)}$$

6.47

EJEMPLO $f(x) = -0.5x^2 + 2.5x + 4.5$

$x_i = 6, \quad x_s = 7$

Iteración 1.

$f(x_i) = 1.5 \quad f(x_i)f(x_r) = (1.5)(0.1365)$

$f(x_s) = -2.5 \quad x_r = 6.37 = 0.1365$

$\Rightarrow x_i = 6.37$

$\text{error} = \left| \frac{r_{actual} - r_{anterior}}{r_{actual}} \right| 100\%$

FECHA 02-Mayo-23

Iteración 2 $x_i = 6.37, \quad x_s = 7$

$f(x_i) = 0.7365$ $\qquad x_r = 6.402$

$f(x_s) = -2.5$ $\qquad f(x_r) = 0.012198$

$f(x_i)f(x_r) = (0.7365)(0.012198) > 0 \quad \Rightarrow x_i = x_r;\ x_i = 6.402$

$$\text{error} = \left| \frac{6.402 - 6.375}{6.402} \right| \times 100\% = 0.421$$

Iteración 3

$x_i = 6.402, \quad x_s = 7$

$f(x_i) = 0.012198$ $\qquad x_r = 6.9404$

$f(x_s) = -2.5$ $\qquad f(x_i) = 8.77\times10^{-4}$

$f(x_i)f(x_r) = (0.012198)(8.77\times10^{-4}) > 0 \quad \Rightarrow x_i = x_r;\ x_i = 6.4049$

$\text{error} = 4.5277\times10^{-2} \simeq 0.045277 \to 0$

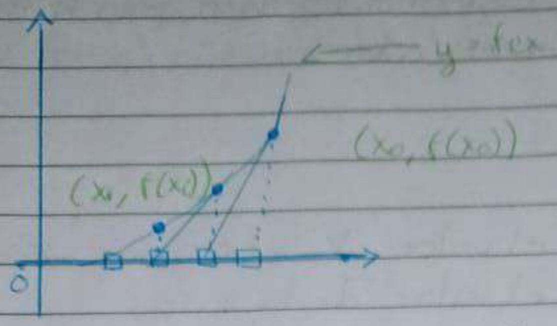
* Sacar recta secante $\qquad$ * Graficar cada iteración.

$y = mx + b \qquad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

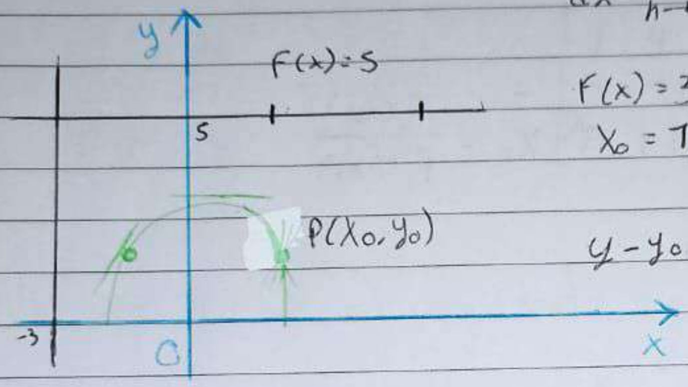
Ec. punto pendiente

$(y - y_1) = m(x - x_1)$

Método de Newton - Rapson



$$\frac{df}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



$F(x) = 3x^2 \cdot 7x$

$x_0 = 1$

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{5-5}{3-2} = \frac{0}{1} = 0$$

$$m = \frac{0}{-3-(-3)} = \frac{0}{0}$$

$$F(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f''(\varepsilon)}{2!}(x_{i+1} - x_i)^2 + \ldots$$

ε representa a alguna parte del intervalo dado x_i hasta x_{i+1}

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$

$$0 = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$

$$-f'(x_i)(x_{i+1}) = f(x_i) - x_i f'(x_i)$$

$$-x_{i+1} = \frac{f(x_i)}{}$$

Método de Newton - Raphson

Ejemplo. Utilizar el método de Newton - Raphson para hallar una raíz negativa del siguiente polinomio cúbico.

$$y(x) = x^3 - 2x + 1$$

Utilizar como punto de inicio el valor $x_0 = -1.5$ para encontrar por aproximaciones sucesivas, el valor de la raíz.

solución

Considerar que.

$$x_i + 1 = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \Rightarrow x_r + 1 \Rightarrow x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r)}$$

- Paso 1 definir la función

$f(x) = x^3 - 2x + 1$

- Paso 2. Hallar $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{d(x^3 - 2x + 1)}{dx} = y' = y$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2$$

- Paso 3. Elegir el punto inicial

$x_0 = -1.5$

- Paso 4. Evaluar $f(x)$ y $f'(x)$ en x_0

$f(-1.5) = 0.625$

$f'(-1.5) = 4.75$

- Paso 5. Aplicar la fórmula iterativa de Newton-Raphson para hallar una primera estimación.

$$x_i = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_1 = -1.5 - \frac{0.625}{4.15}$$

$$x = -1.6315$$

TITULO

FECHA

METODO DE NETWON - RAPHSON

- Paso 6. Repetir paso 4 y 5 hasta que la estimación coincida con el número de decimales deseados.

09 - Mayo - 23

$x + 4y - 2z = 3$
$3x - 2y + 5z = 14$
$2x + 3y + z = 11$

① x -3 y ① x -2 y sumando a ② y ③

$$A = \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} ① \\ ② \\ ③ \end{matrix} \end{array} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & -14 & 11 \\ 0 & -5 & 5 \end{bmatrix}$$

② $x - \frac{5}{14}$ + ③, el resultado se deja $-\frac{5}{14}$ (0, -14, 11) en ③

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & -14 & 11 \\ 0 & 0 & 15/14 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5/14 & 1 \end{bmatrix}$$

$a + 0b + 0c = 3$
$5a + b + 0c = 14$
$2a + 5/14 b + c = 11$

$a = 3$
$5(3) + b = 14$
$2(3) + 5/14$

$a = 3$ $\qquad b = 5$
$3(3) + b = 14$ $\qquad b = 5$
$2(3) + 5/14 (5) + c = 11$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 45/14 \end{bmatrix}$$

$$c = \frac{154}{14}$$

$x + 4y - 2z = 3$
$0x - 14y + 11z = 5$
$0x + 0y + 15/14 \cdot z = 45/14$

$z = 45/14 \cdot 14/15$
$z = 3$

Next Dude

JEAN BOOK

TITULO

FECHA 09-Mayo-23

$x = -4(2) + 2(3) + 3$

$x = -8 + 6 + 3$

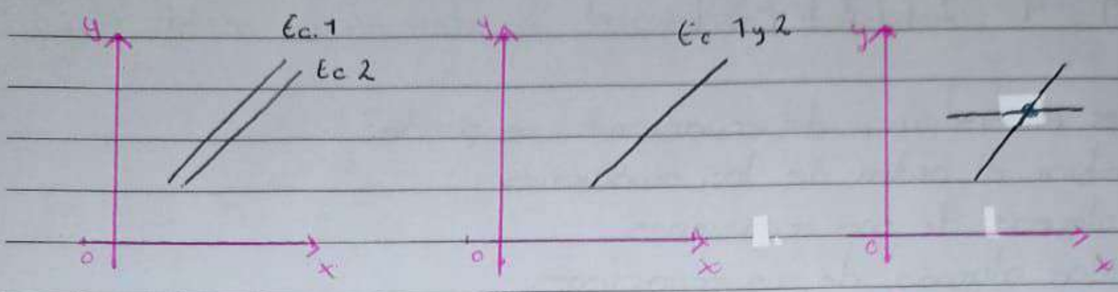
$x = 1$

$-14y + 11(3) = 5$

$y = \frac{28}{14} = 2$

Estas ecuaciones se encuentran en forma de lineas rectas, esto es
$x_2 = mx_1 + b$

∃ tres tipos de solución para un sistema de ecuaciones de 2×2.



a) No hay solución b) Infinitas soluciones c) Unica solución

Eliminación de Gauss.

Permite resolver un sistema general de m ecuaciones como en (A)

Un sistema de ecuaciones puede ser:

a) Compatible determinado, solo tiene una solución.

b) Compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

c) Incompatible, no tiene solución

La forma matricial de un sistema de ecuaciones lineales es:

$$A x = B,$$

donde,

* A es la matriz que en la fila k contiene los coeficientes de las incógnitas de la ecuación K
* X es la matriz columna con las incognitas
* B es la matriz columna con los términos independientes.
* A^* es la matriz aumentada o ampliada del sistema, formada como: $A^* = (A/B)$.

Ejemplo. El sistema de ecuaciones lineales es

$$2x - 3y + z = 0$$
$$x + y - z = 6$$
$$x + 4y + 2z = -8$$

denotado de forma matricial como sistema ampliado:

$$A^* = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ -8 \end{bmatrix}$$

Para resolver un sistema de ecuaciones, se puede:
* Intercambiar el orden de las ecuaciones
* Sumar algunas de sus ecuaciones
* Multiplicar algunas de sus ecuaciones.

Este procedimiento se realiza en el método de Gauss sobre la matriz ampliada del sistema de ecuaciones lineales.
El método consiste en operar sobre la matriz ampliada del sistema hasta hallar la forma escalonada (matriz triangular superior), a esto se le conoce también como eliminación hacia adelante de incognitas.
Eliminación hacia adelante de incognitas. El paso inicial es eliminar la primera incognita, x_1, desde la segunda hasta la e-nésima ecuación, es decir, tomando el sistema, toma (A), se obtiene

$$a_{21} x_1 + \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12} x_2 + \dots + \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{1n} x_n = \frac{a_{21}}{a_{11}} b_1$$

(Se multiplica a_{21}/a_{11})
Se resta de la segunda ecuación.

$$\left(a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12}\right) x_2 + \dots + \left(a_{21} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{1n}\right) x_n = b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} b_1$$

El procedimiento se repite con las ecuaciones restantes dando como resultado:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \dots + a_{1n} x_1 = b'_1$$
$$a'_{22} x_2 + a'_{23} x_3 + \dots + a'_{2n} x_n = b'_2$$
$$a'_{32} x_2 + a''_{33} x_3 + \dots + a''_{3n} x_n = b'_3$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$a_{12} x_2 + a'_{n3} x_3 + \dots + a'_{nn} x_n = b'_n$$

TITULO FECHA

donde el superíndice prima indica que los elementos cambiaron su valor original. Además la ecuación del sistema de ecuaciones es la ecuación pivote.

Se repite el procedimiento para eliminar la segunda incógnita hasta llegar a un sistema triangular superior.

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \dots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\
a''_{33}x_3 + \dots + a''_{3n}x_n &= b''_3 \\
\vdots \qquad & \;\;\vdots \\
a_{nn}^{(n-1)}x_n &= b_n^{(n-1)}
\end{aligned}
$$

De forma matricial sería:

$$
\left.
\begin{array}{l}
\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & c_3 \end{array}\right] \\[2ex]
\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & c_1 \\ & a'_{22} & a'_{23} & c_2 \\ & & a''_{33} & c_3 \end{array}\right]
\end{array}
\right\}
$$

Eliminación hacia adelante en un sistema de 3x3.

- El método de eliminación Gaussiana con pivoteo parcial es el método que indica cuando el sistema $Ax = b$ es consistente o no
- Si el sistema es consistente, también el método indica si $\exists$ es solución única o no.

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\
0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\
0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}
$$

Complejidad del algoritmo.

Sea $M = [A/b]$. Suponga que no hace falta intercambiar filas, entonces el algoritmo de eliminación Gaussiana es.

```
for i = 1:(n-1)
  for k = (i+1):n
    alpha = -M(k,i)/M(i,i);
    for j = i:(n+1)
      M(k,j) = M(k,j) + alpha * M(i,j);
    end
  end
end
```

Si se cuenta el número de operaciones, se observará que el algoritmo es de orden.

$O(n^3)$

Este metodo requiere más memoria y tiempo.

Nota: En programación el rendimiento o la complejidad de un algoritmo se suele medir usando la notación Big=O conocida como Notación Asistótica o Notación Landau (en honor a Edmud Landau).

Esta notación proporciona una manera de saber cómo se va a comportar un algoritmo en función de los argumentos que se le pasen y la escala de los mismos.

$O(n^2)$ cuadrática son algoritmos que necesitan realizar una iteración con todos sus elementos en cada uno de los elementos a procesar. Si se tiene que realizar la iteración más de una vez sería de complejidad $O(n^3)$, $O(n^4)$, etc. que serían casos muy raros y poco optimizados.

TITULO: Método de Cholesky

FECHA: 11-Mayo-23

$x - y + z = 2$

$-x + 5y - 5z = -6$

$x - 5y + 6z = 9$

$Ax = b$

Simétrica positiva definida.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 7 & -1 & -5 \\ 4 & -5 & 2 \end{bmatrix} \qquad C^T = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 7 & -1 & -5 \\ 4 & -5 & 2 \end{bmatrix} \qquad C = C^T$$

C se considera matriz simétrica.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -5 \\ 1 & -5 & 6 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 9 \end{bmatrix}}_{b}$$

$$|C_1| = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 49 = -50$$

~~* verificar que A sea simétrica positivo definida.~~

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -5 \\ 1 & -5 & 6 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -5 \\ 1 & -5 & 6 \end{bmatrix} \qquad A = A^T$$

$|A_1| = 1$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 1 = 4$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -5 \\ 1 & -5 & 6 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -5 \end{vmatrix} = [30 + 5 + 5] - [5 + 25 + 6] = 40 - 36 = 4$$

* Descomponer $A = LL^T$

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 1 \\ -1 & 5 & -5 \\ 1 & -6 & 6 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & d & 0 \\ c & e & f \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}}_{L^T}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -5 \\ 1 & -5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 + d & bc + de \\ ca & cb + ed & c^2 + e^2 + f^2 \end{bmatrix}$$

$a^2 = 1 \quad a = 1$

$ab = -1 \quad (1)b = -1$

$b = -1$

TITULO

FECHA 17-Mayo-23.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 6 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 1 & 8 \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

A · B = C

3x3 3x3 = 3x3

2x3 3x2 = 2x1

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

2x3 2x1

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} =$$

2x3 2x1

$c = 1$

$b^2 + d^2 = 5$

$(-1)^2 + d^2 = 5$

$d^2 = 4$

$d = 2$

$c^2 + e^2 + f^2 = 6$

$(1)^2 + (-2)^2 + f^2 = 6$

$f = \sqrt{1}$

$f = 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -5 \\ 1 & -5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$Ly = b$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$y_1 = 2$ $\quad -1(2) + 2y_2 = 6$

$y_2 = \frac{-6+4}{2}$ $\quad y_2 = -2$

$1(2) + -2(-2) + y_3 = 9$

$2 + 4 + y_3 = 9$

$y_3 = 9 - 4 - 2$

$y_3 = 3$

JEAN BOOK

TITULO

FECHA 11-Mayo-23.

* Hallar $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ con $L^T x = y$

donde $x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L^T} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$x = y$

$z = 3$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$2y - 2z = -2$

$2y - 2(3) = -2$

$2y = -2 + 6$

$y = \frac{4}{2} = 2$

$x - y + z = 2$

$x - (2) + 3 = 2$

$x + 1 = 2$

$\boxed{x = 1}$

METODO DE GAUSS - SEIDEL

FECHA: 16-Mayo-23

$x_1 + x_2 + 4_3 = 6$

-> $5x_1 - x_2 + 2x_3 = 12$

$3x_1 + 8x_2 - 2x_3 = -25$

$|1| > |1| + |4| = 5$

$\Rightarrow$

$5x_1 - x_2 + 2x_3 = 12$

$x_1 + x_2 + 4x_3 = 6$

$3x_1 + 8x_2 - 2x_3 = -25$

$|5| > |-1| + |2| = 3$

$|1| > |1| + |4| = 5$

→ Debido de dar esto

$5x_1 - x_2 + 2x_3 = 12$ $\quad x_1 = 1$

$3x_1 + 8x_2 - 2x_3 = -25$ $\quad x_2 = -3$

$x_1 + x_2 + 4x_3 = 6$ $\quad x_3 = 2$

$|8| > |3| + |-2| = 5$

$|4| > |1| + |1| = 2$

$$x_1 = \frac{x_2 - 2x_3 + 12}{3}$$

$$x_2 = \frac{-3x_1 - 2x_3 - 25}{8}$$

$$x_3 = \frac{-x_1 - x_2 + 6}{4}$$

ITERACIONES

	1	2
x_1	0	$\frac{0-2(0)+12}{5} \approx 2.4$
x_2	0	$\frac{-3(2.4)+2(0)-25}{8} \approx -4.025$
x_3	0	$\frac{-2.4+4.025+6}{4} \approx 1.906$

$$|\varepsilon_{a,i}| = \left| \frac{B_1 - \alpha_1}{B_1} \times 100\% \right|$$

$$\varepsilon_1 = \left| \frac{0.8325 - 2.4}{0.8325} \times 100\% \right| = 188.28\%$$

$$\varepsilon_2 = \left| \frac{-2.9606 + 4.025}{-2.9606} \times 100\% \right| = 35.95\%$$

$$\varepsilon_3 = \left| \frac{2.032 - 1.906}{2.032} \times 100\% \right| = 6.188\%$$

x_1	0.8325	0.995	$\varepsilon_1 = 16.33\%$
x_2	-2.9606	-2.4901	$\varepsilon = 0.9865\%$
x_3	2.032	1.9986	$\varepsilon = 6.166\%$

METODO DE GAUSS-SEIDEL.

$4x_1 + 6x_2 - x_3 = 9$

$10x_1 + x_2 + 2x_3 = 3$

$-2x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 51$

Gauss

Gauss-Jordan

Gauss-Seidel

TITULO

FECHA 18-Mayo-23

METODO DE NEWTON PARA SISTEMAS DE ECUACIONES.

Sea un sistema de ecuaciones, se quiere hallar el punto (x, y) que hace que dichas ecuaciones sean iguales a cero. Es decir, este punto será raíz de ambas ecuaciones

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0 \\ f_2(x, y) = 0 \end{cases}$$

Se genera un sistema matricial como:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} - J^{-1}\Big|_{(x_0, y_0)} \begin{bmatrix} f_1(x_0, y_0) \\ f_2(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

Para iniciar, hay que definir los valores para los puntos iniciales y calcular J^{-1} que corresponde a la matriz inversa del Jacobiano del sistema de ecuaciones como:

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Se calcula el valor siguiente de la aproximación y se repite iterativamente el procedimiento. En general, para un vector X de raíces a encontrar y F un vector de funciones que corresponden al sistema de ecuaciones $F(x) = 0$

$$X_{k+1} = X_k - J^{-1}\Big|_{X_k} \cdot F(X_k)$$

Matriz Jacobiana. Es una matriz formada por las derivadas parciales de primer orden de una función, denotada como:

$$F(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$$

$$J_F = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & & \frac{\partial f_m}{\partial f_n} \end{bmatrix}$$

FECHA 18-Mayo-23

∴ las matrices Jacobianas siempre tendrán tantas filas como funciones escalares $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ tenga la función, el número de columnas coincidirá con el número de variables $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

A esta matriz también se le llama diferencial Jacobiana o aplicación lineal Jacobiana, también se le denota con la letra D en lugar J

$$\Rightarrow J_f = D_f$$

La matriz Jacobiana recibe ese nombre en honor al matemático Carl Gustav Jacobi.

Ejemplo: Determinar la matriz Jacobiana en el punto (1,2) de la siguiente función:

$$f(x,y) = (x^4 + 3y^2x,\ 5y^2 - 2xy + 1)$$

Solución ∴ Calcular todas las derivadas parciales de 1er orden de la función:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 4x^2 + 3y^2, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = 6yx$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = -2y, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = 10y - 2x$$

Se representa la matriz Jacobiana, como la fn tiene dos variables y dos funciones escalares, la matriz Jacobiana será una matriz de tamaño 2×2

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x^3 + 3y^2 & 6yx \\ 2y & 10y - 2x \end{pmatrix}$$

Evaluar en el punto (1,2)

$$J_f(1,2) = \begin{pmatrix} 4(1)^3 + 3(2)^2 & 6(1)(2) \\ -2(2) & 10(2) - 2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 12 \\ -4 & 18 \end{pmatrix}$$

Matriz Inversa. Sea A una matriz cuadrada, la inversa de A se denota como A^{-1} y debe cumplir:

TITULO

FECHA 18-Mayo-23

$A \cdot A^{-1} = I$

$A^{-1} \cdot A = I$

donde I representa a la matriz identidad.
Para que una matriz sea invertible, su determinante debe ser diferente de 0 (cero).
Fórmula para la inversa de una matriz de 2x2:
Sea A una matriz de tamaño 2x2, su inversa se calcula como:

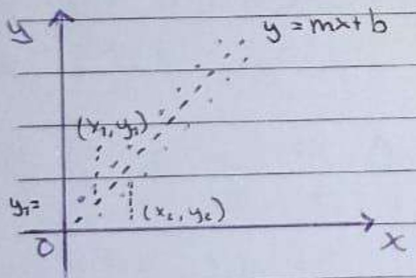
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

donde det(A) es el determinante de A, que se calcula como:

$$det(A) = ab - bc$$

23-Mayo-23

MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS



(x, y)

$y = mx + b$ → ordenada

$$S = [y_1 - (mx_1 + b)]^2 + [y_2 - (mx_2 + b)]^2 + \dots + [y_n - (mx_n + b)]^2$$
$$= \sum_{i=1}^{n} [y_i - (mx_i + b)]^2$$

⇒ que se cumple que $y = mx + b$

$$f(m,b) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (mx_i + b)]^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial m} = 2 \sum_{i=1}^{n} [y_i - (mx_i + b)](-x_i) = 0 \quad \dots (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^{n} [y_i - (mx_i + b)](-1) = 0 \quad \dots (2)$$

FECHA 23-Mayo-23

De (2)

$$\sum_{i=1}^{n} y_i - m\sum_{i=1}^{n} x_i - b = 0 \qquad b = \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i}_{\bar{y}_i} - m\underbrace{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)}_{\bar{x}_i}$$

$$\Rightarrow b = \bar{y}_i - m\bar{x}_i \qquad \frac{\partial f}{\partial m} = \sum_{i=1}^{n} x_i\left(y_i - mx_i - (\bar{y} - m\bar{x})\right) = 0$$

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n} x_i(x_i - \bar{x})} \quad \ldots (b)$$

(a) va a tener un punto crítico para (b)
De los puntos críticos se tiene que hallar el mín. local con la 2da derivada parcial:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial m^2} = -2\sum_{i=1}^{n} -x_i^2 = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \ldots (I) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial m\,\partial b} = -\sum_{i=1}^{n} -x_i = 2\sum_{i=1}^{n} x_i \ldots (II)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial b^2} = -2\sum_{i=1}^{n}(-1) = 2n \ldots (III)$$

Tomando I, II, III menores a 0

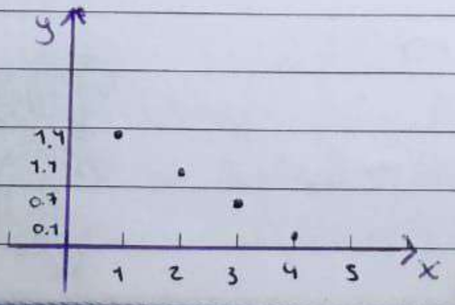
$$\Rightarrow \left(2\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - \left(2\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)(2n) < 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial m^2} > 0$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 < n\sum_{i=1}^{n} x_i$$

∴ La función f posee un mínimo local en el punto crítico

Ejemplo: Se tienen los siguientes valores obtenidos experimentalmente para x, y, los cuales se sabe que tienen entre sí una relación lineal (x, y)

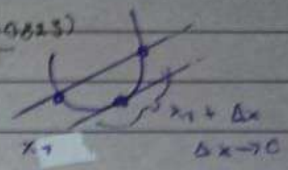
	1	2	3	4
x	1.0	2.0	3.0	4.0
y	1.4	1.1	0.7	0.1



Solución. Se debe hallar la recta que mejor se ajuste a los datos. De acuerdo con el método de los mínimos cuadrados se tiene:

$$\bar{x} = \frac{1+2+3+4}{4} = 2.5 \qquad \bar{y} = \frac{1.4+1.1+0.7+0.1}{4} = 0.825$$

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i (y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n} x_i (x_i - \bar{x})} = \frac{(1)(1.4-0.825)+(2)(1.1-0.825)+3(0.7-0.825) + 4(0.1-0.825)}{(1)(1-2.5)+(2)(2-2.5)+3(3-2.5) + (4)(4-2.5)} = -0.43$$



$$b = \bar{y} - m\bar{x}$$

$$b = 0.825 - (-0.43)(2.5)$$
$$b = 1.9$$

$\Rightarrow$ La recta que aproxima mejor los datos es:

$$y = -0.43x + 1.9$$

i	x	y		$y = -0.43x + 1.9$
1	1	1.4	1.47	$1.4 - 1.47 = -0.07$
2	2	1.1	1.04	$1.1 - 1.04 = 0.06$
3	3	0.7	0.61	$0.7 - 0.61 = 0.09$
4	4	0.1	0.18	$0.1 - 0.18 = -0.08$
				$\Sigma = 0$

(x, y)

Desviación

$1.4 =$

i	x	y	xy	x^2	y^2
1	1	1.4	1.4	1	1.96
2	2	1.1	2.2	4	1.21
3	3	0.7	2.1	9	0.49
4	4	0.1	0.4	16	0.01
$\Sigma =$	10	3.3	6.1	30	3.67

$$m = \frac{N\sum xy - \sum x \sum y}{N\sum xx - \sum x \sum x}$$

b