EQUIPO 2

METODO DE SIMPSON

INTEGRANTES

De La Rosa Valenzuela Adrián

Méndez Montes Mauricio Ariel

Morales Najera Josue Rogelio

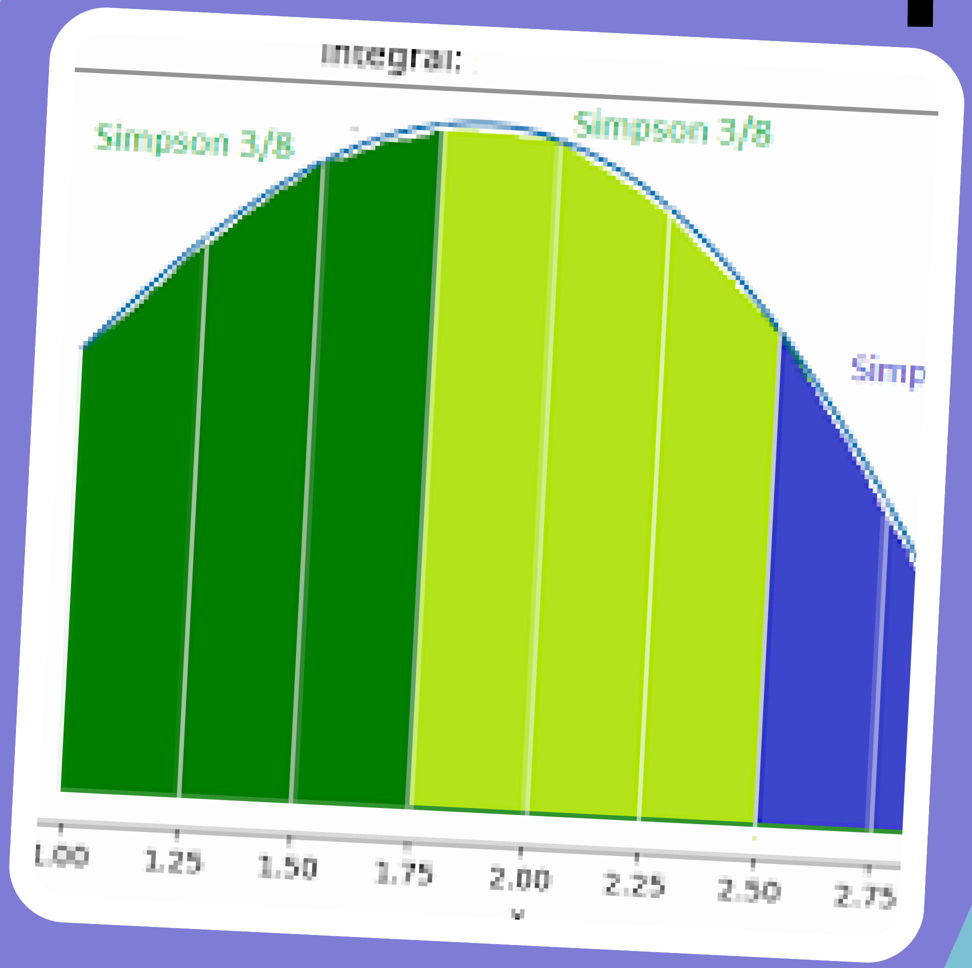
Vargas Reyes Elias Tadeo

INTRODUCCIÓN

La regla de Simpson es un método que utiliza parábolas para aproximar la curva trazando segmentos lineales.

THOMAS SIMPSON

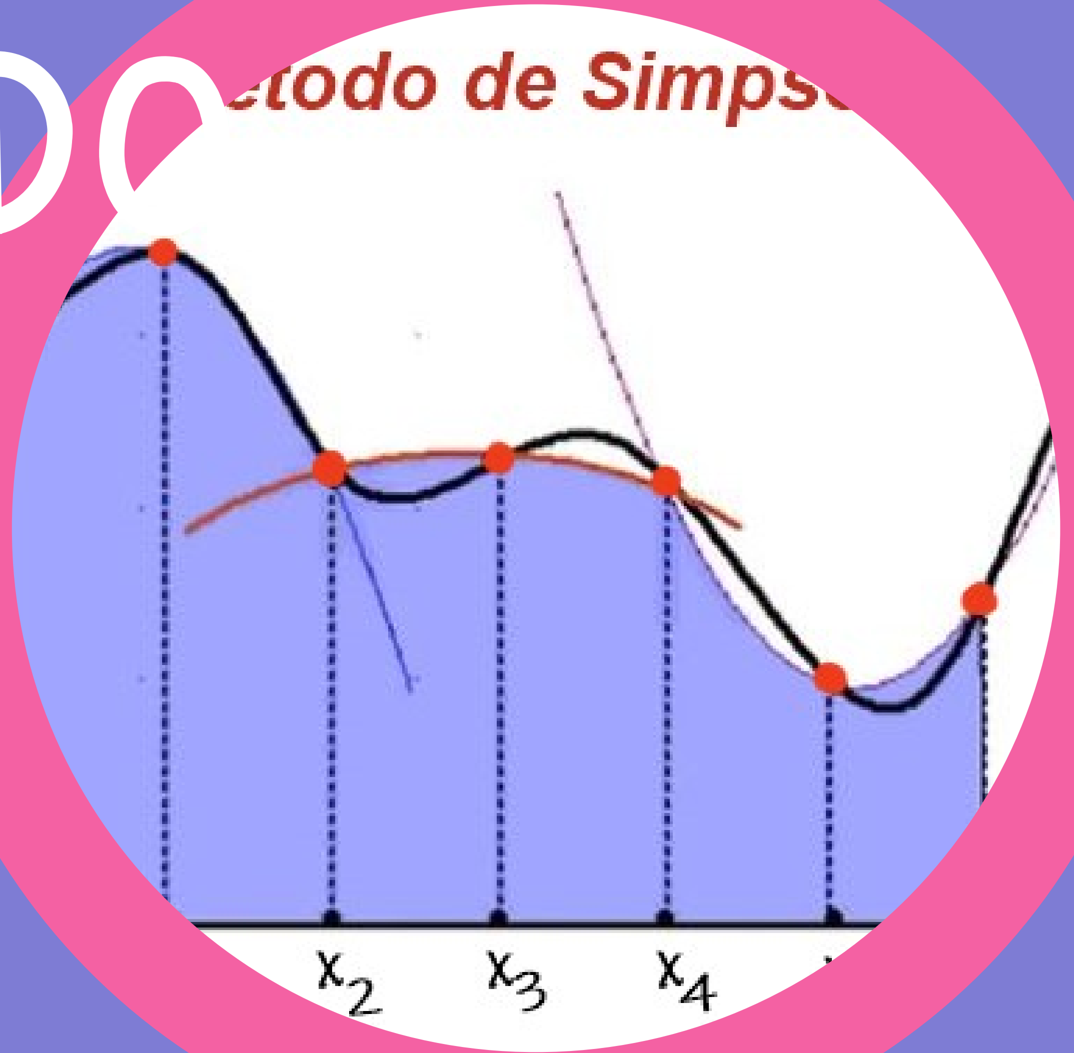
Historia



El método de Simpson fue llamado así en el honor de Thomas Simpson, el cual fue una matemático inglés, el mismo dictaminó que este método es una integración numérica utilizada con el fin de obtener la aproximación de la integral.

OBJETIVO DEL METODO

Calcula una integral definida al calcular el área de solapamiento de segmentos parabólicos en el intervalo de integración y luego sumándolos.



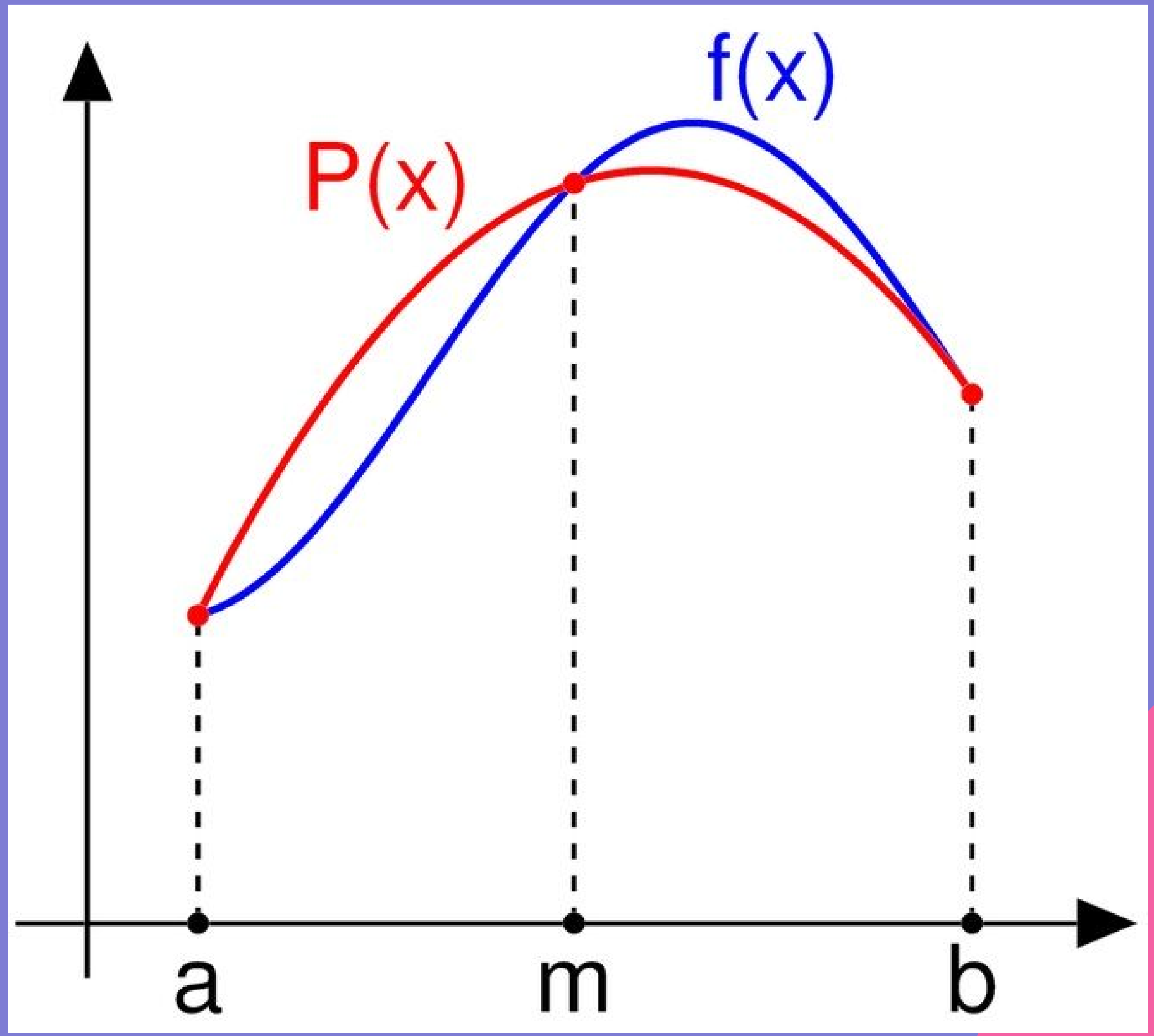
DESARROLLO ANALITICO

La regla de Simpson es un método de integración numérica. En otras palabras, es la aproximación numérica de integrales definidas.

La regla de Simpson es la siguiente:

En ella,

- f(x) es llamado el integrand
- a = es el límite inferior de integración
- b = es el límite superior de integración



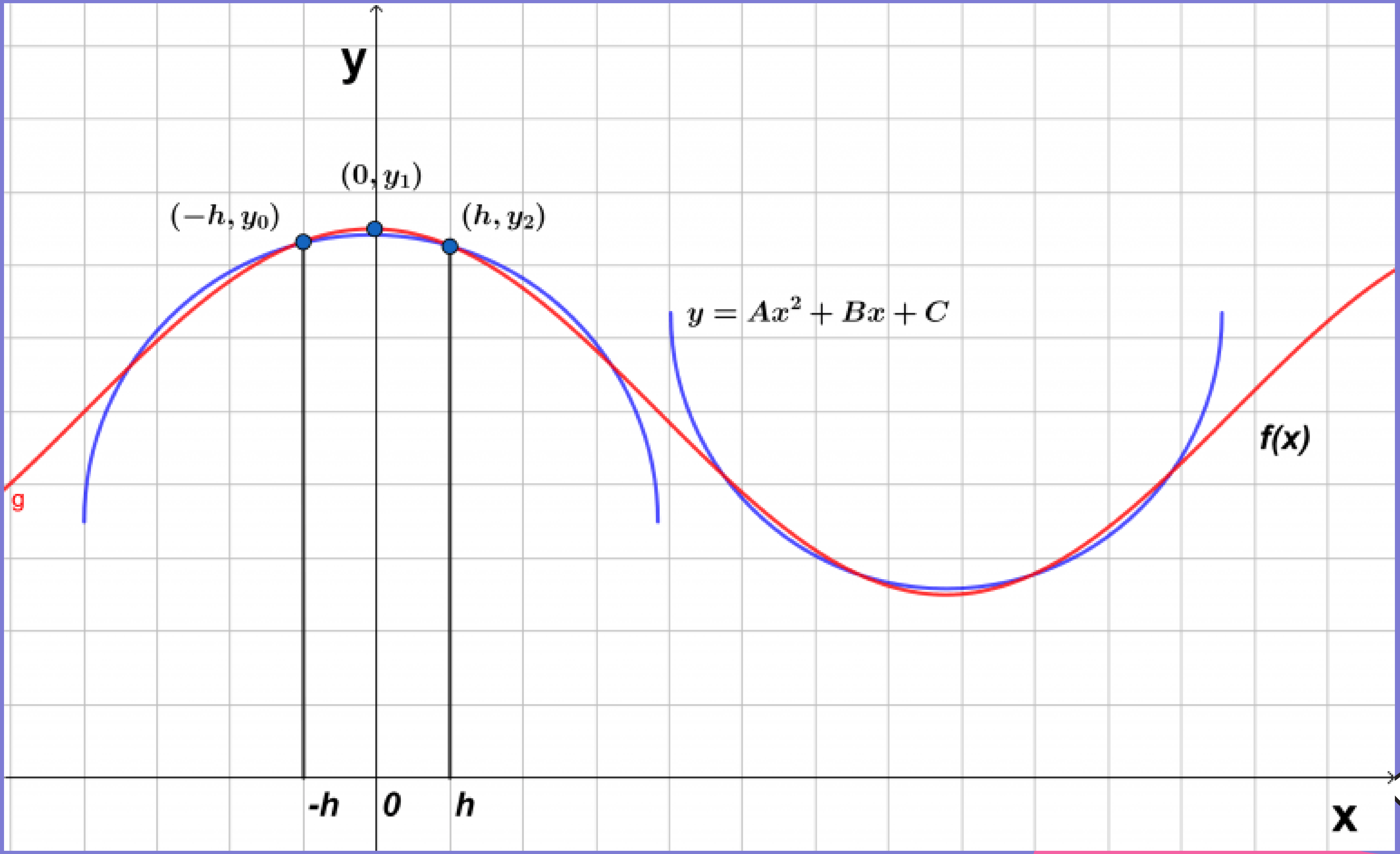
DESARROLLO ANALITICO

Sea una curva dada por $f(x)$ en el plano en un intervalo $[a, b]$, dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual longitud dado como:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

En el que esta vez se requiere que n sea un número par.

DESARROLLO ANALITICO



La ecuación de una parábola está dada como:

$$y = Ax^2 + Bx + C \tag{1}$$

Por lo que su área en el intervalo $[-h, h]$ es:

$$\acute{A}rea = \int_{-h}^{h} (Ax^2 + Bx + C)dx = \left[A\frac{x^3}{3} + B\frac{x^2}{2} + Cx + D\right]\Bigg|_{-h}^{h}$$

$$= \left[A\frac{h^3}{3} + B\frac{h^2}{2} + Ch + D\right] - \left[A\frac{(-h)^3}{3} + B\frac{(-h)^2}{2} + C(-h) + D\right]$$

$$= \left[A\frac{h^3}{3} + B\frac{h^2}{2} + Ch + D\right] + \left[A\frac{h^3}{3} - B\frac{h^2}{2} + Ch - D\right]$$

$$= \frac{2Ah^3}{3} + 2Ch = h\frac{(2Ah^2 + 6C)}{3} \tag{2}$$

De la figura 1 vemos que una de las curvas pasa por los puntos $(-h, y_0)$, $(0, y_1)$ y (h, y_2), evaluando estos puntos en la ecuación cuadrática (1) se obtiene lo siguiente:

$$y_0 = Ah^2 - Bh + C$$

$$y_1 = C$$

$$y_2 = Ah^2 + Bh + C$$

Si sumamos estas relaciones como:

$$y_0 + 4y_1 + y_2 = Ah^2 - Bh + C + 4C + Ah^2 + Bh + C = 2Ah^2 + 6C$$

Podemos expresar el área (2) en términos de y_0, y_1 y y_2, como:

$$A_1 = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Que es el área debajo de la parábola que pasa por los puntos $(x_0 = -h, y_0)$, $(x_1 = 0, y_1)$ y $(x_2 = h, y_2)$, imaginemos que la segunda parábola intercepta en los puntos: (x_2, y_2), (x_3, y_3) y (x_4, y_4) entonces el área de esta segunda parábola es:

$$A_2 = \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$$

Si sumamos todas las áreas hasta un n-esima parábola que se aproxima a la función $f(x)$, tendremos que el área total es:

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_n = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \ldots + \frac{h}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

$$= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

Vemos que hay un patrón en los coeficientes:

$$1,\ 4,\ 2,\ 4,\ 2\ \ldots .\ 2,\ 4,\ 1$$

Por lo que la regla de Simpson se define como:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{\Delta x}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \ldots + \frac{\Delta x}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

$$= \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n) \qquad (3)$$

Con $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, n un número par, y los puntos x_i los calculamos como:

$$x_0 = a$$

$$x_1 = a + \Delta x$$

$$\ldots\ldots$$

$$x_{n-1} = a + (n-1)\Delta x$$

$$x_n = b \qquad (4)$$

EJEMPLO

EJEMPLO:

Utiliza la regla de Simpson para aproximar $\int_1^4 \frac{1}{x} dx$ con $n = 6$.

SOLUCION:

Encontramos $\triangle x = \frac{b-a}{n} = \frac{4-1}{6} = \frac{1}{2}$.

EJEMPLO

$$\int_1^4 \frac{1}{x}dx \approx \frac{1}{6}\left[f(1)+4f\left(\frac{3}{2}\right)+2f(2)+4f\left(\frac{5}{2}\right)+2f(3)+4f\left(\frac{7}{2}\right)+f(4)\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[1+\left(4\cdot\frac{2}{3}\right)+\left(2\cdot\frac{1}{2}\right)+\left(4\cdot\frac{2}{5}\right)+\left(2\cdot\frac{1}{3}\right)+\left(4\cdot\frac{2}{7}\right)+\frac{1}{4}\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{3517}{420}\right] = 1.3956.$$

EJEMPLO

ESTO RESULTA SER UN ESTIMADO CERCANO AL REAL, SABIENDO QUE:

$$\int_1^4 \frac{1}{x} dx = \ln x \Big]_1^4 = \ln(4) - \ln(1) = 1.3863.$$

BIBLIOGRAFÍA

- 1° Libro
- 2° Libro
- 3° Libro
- 4° Libro

PRESIONAR EN LOS LIBROS PARA VER LOS LINKS DE INTERNET