RUNGE KUTTA

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

El método de Runge-Kutta es un algoritmo utilizado en el análisis numérico para aproximar soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias. Fue desarrollado por Carl Runge y Martin Wilhelm Kutta a fines del siglo XIX. En este estudio, exploraremos en detalle el método de Runge-Kutta, su objetivo, desarrollo analítico mediante fórmulas y proporcionaremos un ejemplo con su solución.

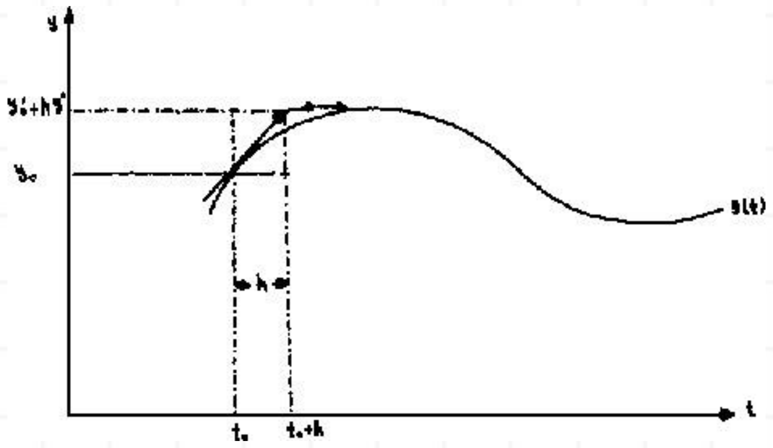
QUIENES LO CREARON

1. El método de Runge-Kutta fue desarrollado de manera independiente por Carl Runge y Martin Wilhelm Kutta en la segunda mitad del siglo XIX.

2. Carl Runge (1856-1927): Fue un matemático alemán conocido por sus contribuciones en el campo del análisis numérico y la interpolación. Runge estudió las ecuaciones diferenciales y su aproximación numérica, y fue pionero en el desarrollo de métodos numéricos para resolver problemas matemáticos.

3. Martin Wilhelm Kutta (1867-1944): Fue un matemático alemán conocido por sus trabajos en mecánica de fluidos y análisis numérico. Kutta es famoso por su contribución al desarrollo de métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales, especialmente el método de Runge-Kutta.

OBJETIVO DEL MÉTODO



El objetivo del método de Runge-Kutta es obtener una aproximación numérica de la solución de una ecuación diferencial ordinaria (EDO) dada. Este método permite calcular

de manera eficiente la evolución de una EDO en diferentes puntos, mejorando la precisión y estabilidad en comparación con otros métodos numéricos.

DESARROLLO DEL MÉTODO RUNGE KUTTA

1

El método de Runge-Kutta se basa en la aproximación de la solución de una EDO mediante el cálculo de incrementos de la variable dependiente en varios puntos intermedios dentro de un intervalo dado.

A continuación, se presentan las fórmulas generales para el método de Runge-Kutta de cuarto orden, también conocido como RK4:

Dada la EDO de primer orden:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

El método RK4 utiliza las siguientes fórmulas para calcular $y_{\{n+1\}}$, la aproximación de y en el siguiente punto $(x_{\{n+1\}})$:

$$k1 = h * f(x_n, y_n)$$

$$k2 = h * f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k1}{2}\right)$$

$$k3 = h * f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k2}{2}\right)$$

$$k4 = h * f(x_n + h, y_n + k3)$$

Donde:

y_n es el valor de y en el punto x_n.

h es el tamaño del paso (incremento en x).

$f(x, y)$ es la función que define la EDO.

EJEMPLO CON SOLUCIÓN

Usar el método de Runge-Kutta de cuarto orden con h = 0.25 para aproximar la solución.

dado en x = 1:

$$\frac{dy}{dx} = 2y - 6 \qquad y(0) = 1$$

Comparar esta aproximación con la solución verdadera, $y = 3 - 2e^{2x}$, evaluada en x = 1.

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + h \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}\cdot\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= h\cdot f\left(x_n, y_n\right) \\ k_2 &= h\cdot f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 &= h\cdot f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right) \\ k_4 &= h\cdot f\left(x_n + h, y_n + k_3\right) \end{aligned}\right\}$$

n = 0

$x_0 = 0$ $\qquad$ $y_0 = 1$

n = 1

$x_1 = 0,25$ $\qquad$ $y_1 = y_0 + \frac{1}{6} \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = -0,296875$

$$\left.\begin{aligned}
k_1 &= h \cdot f(x_0, y_0) = -1 \\
k_2 &= h \cdot f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right) = -1,25 \\
k_3 &= h \cdot f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right) = -1,3125 \\
k_4 &= h \cdot f(x_0 + h, y_0 + k_3) = -1,65625
\end{aligned}\right\}$$

n = 2

$x_2 = 0,5$

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{6}\cdot\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) = -2,434692$$

$$\left.\begin{aligned}
k_1 &= h\cdot f\left(x_1, y_1\right) = -1,6484375\\
k_2 &= h\cdot f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_1}{2}\right) = -2,06055\\
k_3 &= h\cdot f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_2}{2}\right) = -2,1636\\
k_4 &= h\cdot f\left(x_1 + h, y_1 + k_3\right) = -2,7302
\end{aligned}\right\}$$

n = 3

$x_3 = 0,75$

$$y_3 = y_2 + \frac{1}{6}\cdot\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) = -5,95875$$

$$\left.\begin{aligned}
k_1 &= h\cdot f\left(x_2, y_2\right) = -2,71735\\
k_2 &= h\cdot f\left(x_2 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{k_1}{2}\right) = -3,39668\\
k_3 &= h\cdot f\left(x_2 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{k_2}{2}\right) = -3,5665\\
k_4 &= h\cdot f\left(x_2 + h, y_2 + k_3\right) = -4,5006
\end{aligned}\right\}$$

n = 4

$x_4 = 1$

$$y_4 = y_3 + \frac{1}{6} \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = -11,7679$$

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= h \cdot f(x_3, y_3) = -4,47938 \\ k_2 &= h \cdot f\left(x_3 + \frac{h}{2}, y_3 + \frac{k_1}{2}\right) = -5,5992 \\ k_3 &= h \cdot f\left(x_3 + \frac{h}{2}, y_3 + \frac{k_2}{2}\right) = -5,8792 \\ k_4 &= h \cdot f(x_3 + h, y_3 + k_3) = -7,4189 \end{aligned}\right\}$$

$$y = 3 - 2e^{2x} \Rightarrow y(1) = 3 - 2e^2 = -11,7781$$

TABLA DE RESULTADOS

$f(x,y)=$ 2y - 6

$h=$ 0.25

$x_0=$ 0

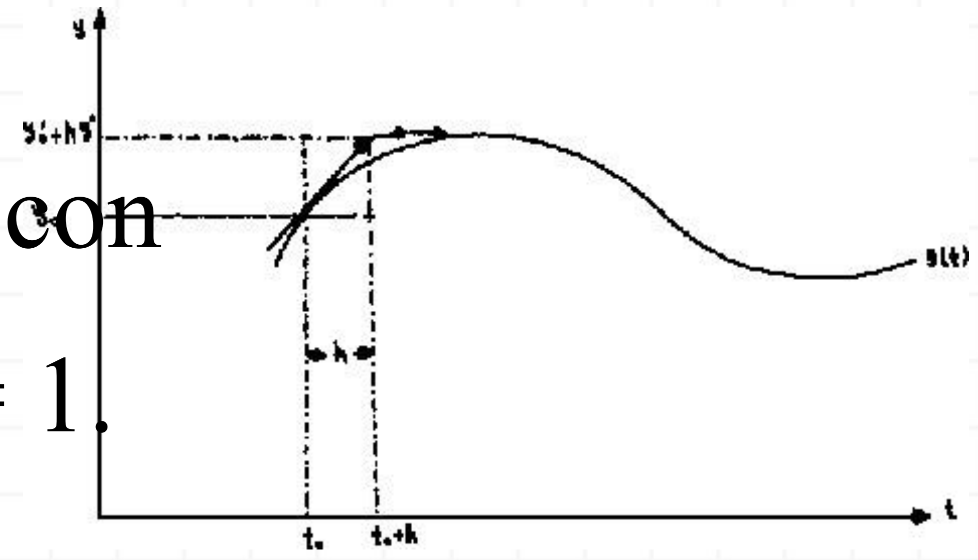
$x_n=$ 1

$n = 4$

$y_0=$ 1

	A	B	C	D	E	F	G
1	Paso	x	y	K_1	K_2	K_3	K_4
2		0	1	-1	-1.25	-1.3125	-1.65625
3	1	0.25	-0.29688	-1.64844	-2.06055	-2.16357	-2.73022
4	2	0.5	-2.43469	-2.71735	-3.39668	-3.56652	-4.5006
5	3	0.75	-5.95875	-4.47938	-5.59922	-5.87918	-7.41897
6	4	1	-11.76794	-7.38397	-9.22996	-9.69146	-12.2297

EJERCICIO



Usar el método de Runge-Kutta de cuarto orden con h = 0.25 para aproximar la solución. dado en x = 1.

$$\frac{dy}{dx} = 2y - 6$$

$$y(0) = 1$$

$f(x,y)=$ x + 1 - y

$h=$ 0.25

$x_0=$ 0

$x_n=$ 1

$n = 4$

$y_0=$ 1

	A	B	C	D	E	F	G
1	Paso	x	y	K_1	K_2	K_3	K_4
2	0	0	1	0	0.03125	0.02734	0.05566
3	1	0.25	1.02881	0.0553	0.07964	0.07659	0.09865
4	2	0.5	1.10654	0.09836	0.11732	0.11495	0.13213
5	3	0.75	1.22238	0.1319	0.14667	0.14482	0.1582
6	4	1	1.36789	0.15803	0.16952	0.16809	0.1785

BIBLIOGRAFÍA

Burden, R. L., & Faires, J. D. (2010). Análisis numérico. Cengage Learning.

Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2014). Métodos numéricos para ingenieros. McGraw-Hill.

Kincaid, D., & Cheney, W. (2002). Análisis numérico: Matemáticas de la computación (3.a ed.). Thomson Learning.

Stoer, J., & Bulirsch, R. (2002). Introduction to numerical analysis (3rd ed.). Springer.