

25-Abril-23

$$4 \quad 7/8 \quad 1 \quad 15/16 \quad F(7/8)F(15/16) = (-)(-) = 0.79$$

$$X_m = \frac{7/8 + 1}{2} = 15/16 = 0.93 \quad c_3 = \left| \frac{15/16 - 7/8}{15/16} \right| 100\% = 6.66\%$$

$$5 \quad 15/16 \quad 1 \quad 31/32 \quad F(15/16)F(31/32) = (-)(-) = -0.17$$

$$X_m = \frac{15/16 + 1}{2} = 31/32 \quad c_4 = \left| \frac{31/32 - 15/16}{31/32} \right| 100 = 3.22\%$$

$$6 \quad 15/16 \quad 31/32 \quad 61/64 \quad F(15/16)F(61/64) = -0.027$$

$$X_m = \frac{15/16 + 31/32}{2} = 61/64 \quad c_5 = \left| \frac{61/64 - 31/32}{61/64} \right| 100\% =$$

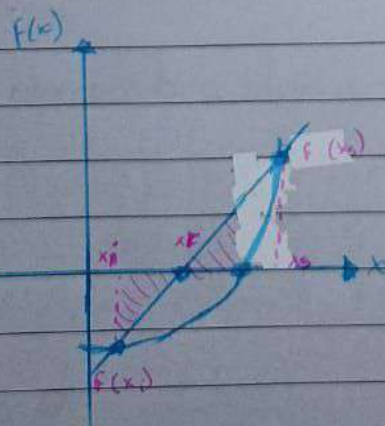
$$7 \quad 15/16 \quad 61/64$$

$$X_m = \frac{15/16 + 61/64}{2} =$$

Práctica 5.  $f(x) = x^3 + 7x^2 - 7$   $[0, 1]$   
 $\epsilon_i = 0.5$

02-May-23

MÉTODO DE LA FALSA POSICIÓN



$$x_r = x_s - \frac{f(x_s)(x_i - x_s)}{f(x_i) - f(x_s)}$$

6.47

EJEMPLO  $f(x) = -0.5x^2 + 2.5x + 4.5$ 

$$x_i = 6, \quad x_s = 7$$

Iteración 1.

$$f(x_i) = 1.5 \quad f(x_i)f(x_s) = (1.5)(-0.1365)$$

$$f(x_s) = -2.5 \quad x_r = 6.37 = 6.1365$$

$$\Rightarrow x_{i+1} = 6.37$$

$$\text{error} = \left| \frac{\text{actual} - \text{anterior}}{\text{actual}} \right| 100\%$$

Next Dude

JEAN  
BOOK



02-Mayo-23

Iteración 2.  $x_i = 6.37, x_s = 7$ 

$$f(x_i) = 0.7365$$

$$x_r = 6.402$$

$$f(x_s) = -2.5$$

$$f(x_r) = 0.012198$$

$$f(x_i)f(x_r) = (0.7365)(0.012198) > 0 \Rightarrow x_i = x_r; x_i = 6.402$$

$$\text{error} = \left| \frac{6.402 - 6.375}{6.402} \right| \times 100\% = 0.421$$

Iteración 3

$$x_i = 6.402, x_s = 7$$

$$f(x_i) = 0.012198$$

$$x_r = 6.9409$$

$$f(x_s) = -2.5$$

$$f(x_r) = 8.77 \times 10^{-4}$$

$$f(x_i)f(x_r) = (0.012198)(8.77 \times 10^{-4}) > 0 \Rightarrow x_i = x_r; x_i = 6.4049$$

$$\text{error} = 4.5277 \times 10^{-2} \approx 0.045277 \rightarrow 0$$

\* Sacar recta secante

\* Gráfica cada iteración.

$$y = mx + b \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ec. punto pendiente

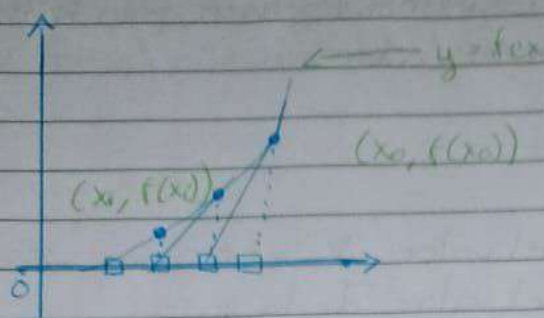
$$(y - y_1) = m(x - x_1)$$



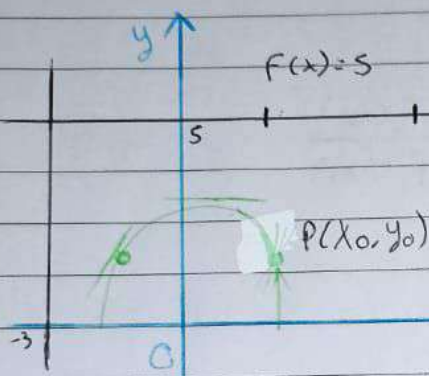
JEAN



## Método de Newton - Rapson



$$\frac{df}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



$$f(x) = 3x^2 - 7x$$

$$x_0 = 1$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{5 - 5}{3 - 2} = \frac{0}{1} = 0$$

$$m = \frac{0}{-3 - (-3)} = \frac{0}{0}$$

$$f(x_i) = f(x_i) + f'(x_i)(x_i - x_i) + \frac{f''(x_i)}{2!}(x_i - x_i)^2 + \dots$$

$\epsilon$  representa a alguna parte del intervalo dada  $x_i$  hasta  $x_{i+1}$

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$

$$0 = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$

$$-f'(x_i)(x_{i+1}) = f(x_i) - x_i f'(x_i)$$

$$-x_{i+1} = \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Next Dude



## MÉTODO DE NEWTON - RAPHSON

Ejemplo. Utilizar el método de Newton - Raphson para hallar una raíz negativa del siguiente polinomio cúbico.

$$y(x) = x^3 - 2x + 1$$

Utilizar como punto de inicio el valor  $x_0 = -1.5$  para encontrar por aproximaciones sucesivas, el valor de la raíz.

Solución.

Considerar que

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \Rightarrow x_{r+1} \Rightarrow x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r)}$$

- Paso 1. Definir la función

$$f(x) = x^3 - 2x + 1$$

- Paso 2. Hallar  $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} (x^3 - 2x + 1) = y' = y$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2$$

- Paso 3. Elegir el punto inicial

$$x_0 = -1.5$$

- Paso 4. Evaluar  $f(x)$  y  $f'(x)$  en  $x_0$

$$f(-1.5) = 0.625$$

$$f'(-1.5) = 4.75$$

- Paso 5. Aplicar la fórmula iterativa de Newton-Raphson para hallar una primera estimación.

$$x_i = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_1 = -1.5 - \frac{0.625}{4.75}$$

$$x = -1.6315$$





## Método de Netwon-Raphson

- Paso 6. Repetir paso 4 y 5 hasta que la estimación coincida con el número de decimales deseados.

09-Mayo-23

$$x + 4y - 2z = 3$$

$$3x - 2y + 5z = 14$$

$$2x + 3y + z = 11$$

①  $x-3$  y ①  $x-2$  y  
sumando a ② y ③

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & -14 & 11 \\ 0 & -5 & 5 \end{bmatrix}$$

②  $x - \frac{5}{14} + \textcircled{3}$ , el resultado se deja  $-\frac{5}{14}$  (0, -14, 11) en ③

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & -14 & 11 \\ 0 & 0 & 15/14 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5/14 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a + 0b + 0c = 3$$

$$5a + b + 0c = 14$$

$$2a + 5/14b + c = 11$$

$$a = 3$$

$$5(3) + b = 14$$

$$2(3) + 5/14b = 11$$

$$a = 3$$

$$b = 5$$

$$3(3) + b = 14$$

$$b = 5$$

$$2(3) + 5/14(5) + c = 11$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 45/14 \end{bmatrix}$$

$$c = \frac{154}{14}$$

$$x + 4y - 2z = 3$$

$$0x - 14y + 11z = 5$$

$$0x + 0y + 15/14z = 45/14$$

$$z = 45/14 \cdot 14/15$$

$$z = 3$$

Next  
Dude

JEAN  
BOOK

09-Mayo-23

$$X = -4(2) + 2(3) + 3$$

$$-14y + 11(3) = 5$$

$$X = -8 + 6 + 3$$

$$y = \frac{28}{14} = 2$$

$$X = 1$$

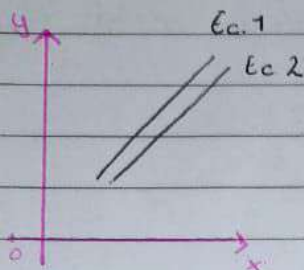




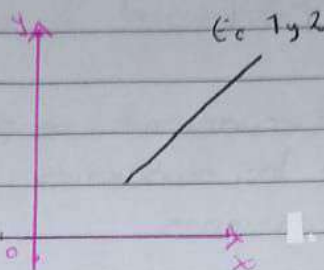
Estas ecuaciones se encuentran en forma de líneas rectas, esta es

$$x_2 = mx_1 + b$$

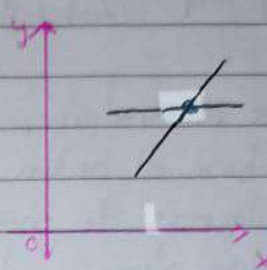
Existen tres tipos de solución para un sistema de ecuaciones de  $2 \times 2$ .



a) No hay solución



b) Infinitas soluciones



c) Única solución

### Eliminación de Gauss

Permite resolver un sistema general de  $m$  ecuaciones como en (A)

Un sistema de ecuaciones puede ser:

- a) Compatible determinado, solo tiene una solución.
- b) Compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.
- c) Incompatible, no tiene solución

La forma matricial de un sistema de ecuaciones lineales es:

$$Ax = B,$$

donde,

\*  $A$  es la matriz que en la fila le contiene los coeficientes de las incógnitas de la ecuación  $K$

\*  $X$  es la matriz columna con las incógnitas

\*  $B$  es la matriz columna con los términos independientes.

\*  $A^*$  es la matriz aumentada o ampliada del sistema, formada como:  $A^* = (A/B)$ .

Ejemplo. El sistema de ecuaciones lineales es

$$2x - 3y + z = 0$$

$$x + y - z = 6$$

$$x + 4y + 2z = -8$$

Next  
Dude



denotado de forma matricial como sistema ampliado:

$$A^* = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ -8 \end{bmatrix}$$

Para resolver un sistema de ecuaciones, se puede:

- \* Intercambiar el orden de las ecuaciones
- \* Sumar algunas de sus ecuaciones
- \* Multiplicar algunas de sus ecuaciones.

Este procedimiento se realiza en el método de Gauss sobre la matriz ampliada del sistema de ecuaciones lineales.

El método consiste en operar sobre la matriz ampliada del sistema hasta hallar la forma escalonada (matriz triangular superior), a esto se le conoce también como eliminación hacia adelante de incógnitas.

Eliminación hacia adelante de incógnitas. El paso inicial es eliminar la primera incógnita,  $x_1$ , desde la segunda hasta la  $n$ -ésima ecuación, es decir, tomando el sistema, toma  $(A)$ , se obtiene

$$a_{21}x_1 + \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12}x_2 + \dots + \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{1n}x_n = \frac{a_{21}}{a_{11}} b_1$$

(Se multiplica  $a_{21}/a_{11}$ )

Se resta de la segunda ecuación.

$$(a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12})x_2 + \dots + (a_{2n} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{1n})x_n = b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} b_1$$

El procedimiento se repite con las ecuaciones restantes dando como resultado:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2$$

$$a''_{32}x_2 + a''_{33}x_3 + \dots + a''_{3n}x_n = b'_3$$

$$\vdots$$
$$a'_{n2}x_2 + a'_{n3}x_3 + \dots + a'_{nn}x_n = b'_n$$

JEAN  
BOOK



donde el superíndice prima indica que los elementos cambiaron su valor original. Además la ecuación del sistema de ecuaciones es la ecuación pivote.

Se repite el procedimiento para eliminar la segunda incógnita hasta llegar a un sistema triangular superior.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2$$

$$a''_{33}x_3 + \dots + a''_{3n}x_n = b''_3$$

$$a^{(n-1)}_{nn}x_n = b^{(n-1)}_n$$

De forma matricial sería:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & | & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & | & b_3 \end{bmatrix}$$

Eliminación hacia adelante en un sistema de  $3 \times 3$ .

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & | & b_1 \\ & a'_{22} & a'_{23} & | & b'_2 \\ & & a''_{33} & | & b''_3 \end{bmatrix}$$

- El método de eliminación Gaussiana con pivoteo parcial es el método que indica cuando el sistema  $Ax = b$  es consistente o no.
- Si el sistema es consistente, también el método indica si  $\exists$  es solución única o no.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}$$

Complejidad del algoritmo.

Sea  $M = [A/b]$ . Suponga que no hace falta intercambiar filas, entonces el algoritmo de eli-

Next Dude 



minación Gaussiana es

```
for i = 1:(n-1)
```

```
    for k = (i+1):n
```

```
        alpha = -M(k,i)/M(i,i);
```

```
        for j = i+1:n
```

```
            M(k,j) = M(k,j) + alpha * M(i,j);
```

```
        end
```

```
    end
```

```
end
```

Si se cuenta el número de operaciones, se observará que el algoritmo es de orden

$O(n^3)$

Este método requiere más memoria y tiempo.

**Nota:** En programación el rendimiento o la complejidad de un algoritmo se suele medir usando la notación Big-O conocida como Notación Asintótica o Notación Landau. (en honor a Edmund Landau).

Esta notación proporciona una manera de saber cómo se va a comportar un algoritmo en función de los argumentos que se le pasan y la escala de los mismos.

$O(n^2)$  cuadrática son algoritmos que necesitan realizar una iteración con todos sus elementos en cada uno de los elementos a procesar. Si se tiene que realizar la iteración más de una vez sería de complejidad  $O(n^3)$ ,  $O(n^4)$ , etc. que serían casos muy raros y poco optimizados.





Método de Cholesky

11-Mayo-23.

$$x - y + z = 2$$

$$-x + 5y - 5z = -6$$

$$x - 5y + 6z = 9$$

$$Ax = b$$

Simétrica positiva definida.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -5 \\ 1 & -5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$C^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -5 \\ 1 & -5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$C = C^T$$

C se considera matriz simétrica.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -5 \\ 1 & -5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$A \quad x = b$

$$|C_1| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -1 - 49 = -50$$

\* Verificar que A sea simétrica positiva definida.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -5 \\ 1 & -5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -5 \\ 1 & -5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A = A^T$$

$$|A_1| = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 1 = 4$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -5 \\ 1 & -5 & 6 \end{vmatrix} = [30 + 5 + 5] - [5 + 25 + 6] = 40 - 36 = 4$$

\* Descomponer  $A = LL^T$ 

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -5 \\ 1 & -5 & 6 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & d & 0 \\ c & e & f \end{bmatrix}}_L \underbrace{\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}}_{L^T}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -5 \\ 1 & -5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2+d & bc+de \\ ca & cb+ed & c^2+e^2+f^2 \end{bmatrix}$$

$a^2 = 1 \quad a = 1$   
 $ab = -1 \quad (1)b = -1 \quad b = -1$   
 $b^2 = 1$

JEAN BOOK

Next Dude 



17-Mayo-23

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 6 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 1 & 8 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = C$$

$$3 \times 3$$

$$3 \times 3 = 3 \times 3$$

$$\begin{bmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{bmatrix}$$

$$2 \times 3$$

$$3 \times 2 = 2 \times 1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$2 \times 3$$

$$2 \times 1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} =$$

$$2 \times 3$$

$$2 \times 1$$

$$L = \begin{bmatrix} \text{---} \\ \text{---} \end{bmatrix}$$

$$c = 1$$

$$b^2 + d^2 = 5$$

$$(-1)^2 + d^2 = 5$$

$$d^2 = 4$$

$$d = 2$$

$$c^2 + e^2 + f^2 = 6$$

$$(1)^2 + (-2)^2 + f^2 = 6$$

$$f = \sqrt{1}$$

$$f = 1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -5 \\ 1 & -5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L y = b$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = 2 \quad -1/2 \cdot 2 \cdot y_2 = 6$$

$$y_2 = \frac{-6 - 4}{2} \quad y_2 = -2$$

$$1(2) + -2(-2) + y_3 = 9$$

$$2 + 4 + y_3 = 9$$

$$y_3 = 9 - 4 - 2$$

$$y_3 = 3$$





11-Mayo-23

\* Hallar  $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$  con  $L^T x = y$

donde  $x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$L^T x = y$

$$z = 3$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$2y - 2z = -2$$

$$2y - 2(3) = -2$$

$$2y = -2 + 6$$

$$y = \frac{4}{2} = 2$$

$$x - y + z = 2$$

$$x - (2) + 3 = 2$$

$$x + 1 = 2$$

$$\boxed{x = 1}$$

Next Dude 



$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 4x_3 &= 6 \\ \rightarrow 5x_1 - x_2 + 2x_3 &= 12 \\ 3x_1 + 8x_2 - 2x_3 &= -25 \\ |1| > |-1| + |4| &= 5 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 5x_1 - x_2 + 2x_3 &= 12 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 &= 6 \\ 3x_1 + 8x_2 - 2x_3 &= -25 \\ |5| > |-1| + |2| &= 3 \\ |1| > |-1| + |4| &= 5 \end{aligned}$$

Debido de dar esto

$$5x_1 - x_2 + 2x_3 = 12$$

$$x_1 = 1$$

$$18 > |3| + |-2| = 5$$

$$3x_1 + 8x_2 - 2x_3 = -25$$

$$x_2 = -3$$

$$4 > |1| + |1| = 2$$

$$x_1 + x_2 + 4x_3 = 6$$

$$x_3 = 2$$

ITERACIONES

$$x_1 = \frac{x_2 - 2x_3 + 12}{5}$$

	1	2
$x_1$	0	$\frac{0 - 2(0) + 12}{5} \approx 2.4$
$x_2$	0	$\frac{-5(2.4) + 2(0) - 25}{8} \approx -4.025$
$x_3$	0	$\frac{-2.4 + 4.025 + 6}{4} \approx 1.906$

$$x_2 = \frac{-3x_1 - 2x_3 - 25}{8}$$

$$x_3 = \frac{-x_1 - x_2 + 6}{4}$$

$$|E_{q,i}| = \left| \frac{B_i - a_i}{B_i} \times 100\% \right|$$

$$E_1 = \left| \frac{0.8325 - 2.4}{0.8325} \times 100\% \right| = 188.28\%$$

$$x_1 \quad 0.8325 \quad 0.995 \quad E_1 = 16.33\%$$

$$E_2 = \left| \frac{-2.9606 + 4.025}{-2.9606} \times 100\% \right| = 35.95\%$$

$$x_2 \quad -2.9606 \quad -2.4901 \quad E = 0.9865\%$$

$$E_3 = \left| \frac{2.032 - 1.906}{2.032} \times 100\% \right| = 6.188\%$$

$$x_3 \quad 2.032 \quad 1.9986 \quad E = 0.166\%$$

METODO DE GAUSS - SEIDEL

$$4x_1 + 6x_2 - x_3 = 9$$

$$10x_1 + x_2 + 2x_3 = 3$$

$$-2x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 51$$

Gauss

Gauss-Jordan

Gauss-Seidel





## METODO DE NEWTON PARA SISTEMAS DE ECUACIONES

Sea un sistema de ecuaciones, se quiere hallar el punto  $(x, y)$  que hace que dichas ecuaciones sean iguales a cero. Es decir, este punto será raíz de ambas ecuaciones

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0 \\ f_2(x, y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0 \\ f_2(x, y) = 0 \end{cases}$$

Se genera un sistema matricial como:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} - J^{-1} \begin{bmatrix} f_1(x_0, y_0) \\ f_2(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

Para iniciar, hay que definir los valores para los puntos iniciales y calcular  $J^{-1}$  que corresponde a la matriz inversa del Jacobiano del sistema de ecuaciones como:

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Se calcula el valor siguiente de la aproximación y se repite iterativamente el procedimiento. En general, para un vector  $x$  de raíces a encontrar y  $F$  un vector de funciones que corresponden al sistema de ecuaciones  $F(x) = 0$

$$x_{k+1} = x_k - J^{-1} | x_k \cdot F(x_k)$$

Matriz Jacobiana. Es una matriz formada por los derivados parciales de primer orden de una función, denotada como:

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = (f_1, f_2, \dots, f_m)$$

$$J_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Next Dude 



18-Mayo-23

• los matrices Jacobianas siempre tendrán tantos filas como funciones escalares  $(f_1, f_2, \dots, f_n)$  tenga la función, el número de columnas coincidirá con el número de variables  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$

A esta matriz también se le llama diferencial Jacobiana o aplicación lineal Jacobiana, también se le denota con la letra D en lugar J

$$\Rightarrow Jf = Df$$

La matriz Jacobiana recibe ese nombre en honor al matemático Carl Gustav Jacobi.

**Ejemplo:** Determinar la matriz Jacobiana en el punto  $(1, 2)$  de la siguiente función:

$$f(x, y) = (x^4 + 3y^2x, 5y^2 - 2xy + 1)$$

**Solución:** Calcular todas las derivadas parciales de 1er orden de la función:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 4x^3 + 3y^2, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = 6yx$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = -2y, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = 10y - 2x$$

Se representa la matriz Jacobiana, como la  $f_n$  tiene dos variables y dos funciones escalares, la matriz Jacobiana será una matriz de tamaño  $2 \times 2$ .

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x^3 + 3y^2 & 6yx \\ -2y & 10y - 2x \end{pmatrix}$$

Evaluar en el punto  $(1, 2)$

$$J_f(1, 2) = \begin{pmatrix} 4(1)^3 + 3(2)^2 & 6(1)(2) \\ -2(2) & 10(2) - 2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 12 \\ -4 & 18 \end{pmatrix}$$

**Matriz Wersa.** Sea A una matriz cuadrada, la inversa de A se denota como  $A^{-1}$  y debe cumplir:

JEAN  
BOOK



18-Mayo-23

$$A \cdot A^{-1} = I$$

$$A^{-1} \cdot A = I$$

donde  $I$  representa a la matriz identidad.

Para que una matriz sea invertible, su determinante debe ser diferente de 0 (cero).

Fórmula para la inversa de una matriz de  $2 \times 2$ :

Sea  $A$  una matriz de tamaño  $2 \times 2$ , su inversa se calcula como:

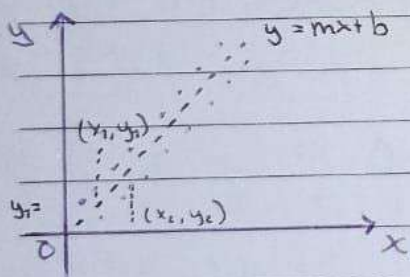
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

donde  $\det(A)$  es el determinante de  $A$ , que se calcula como:

$$\det(A) = ad - bc$$

23-Mayo-23

## MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS



(x, y)

$$y = mx + b$$

ordenada

$$S = [y_1 - (mx_1 + b)]^2 + [y_2 - (mx_2 + b)]^2 + \dots + [y_n - (mx_n + b)]^2$$

$$= \sum_{i=1}^n [y_i - (mx_i + b)]^2$$

⇒ que se cumple que  $y = mx + b$

$$F(m, b) = \sum_{i=1}^n [y_i - (mx_i + b)]^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial m} = 2 \sum_{i=1}^n [y_i - (mx_i + b)] (-x_i) = 0 \quad \dots (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^n [y_i - (mx_i + b)] (-1) = 0 \quad \dots (2)$$

Next Dude

JEAN BOOK



23-Mayo-23

De (2)

$$\sum_{i=1}^n y_i - m \sum_{i=1}^n x_i - b = 0$$

$$b = \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i}_{\bar{y}} - m \underbrace{\left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)}_{\bar{x}}$$

$$\Rightarrow b = \bar{y} - m\bar{x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial m} = \sum_{i=1}^n x_i (y_i - m x_i - (\bar{y} - m\bar{x})) = 0$$

$$m = \frac{\sum_{i=1}^n x_i (y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n x_i (x_i - \bar{x})} \dots (b)$$

(a) va a tener un punto crítico para (b)

De los puntos críticos se tiene que hallar el mín. local con la 2da derivada parcial:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial m^2} = -2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 < 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial m \partial b} = - \sum_{i=1}^n x_i = 2 \sum_{i=1}^n x_i \dots (II)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial b^2} = -2 \sum_{i=1}^n (-1) = 2n > 0 \dots (III)$$

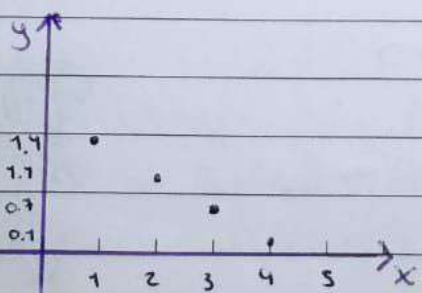
Tomando I, II, III menores a 0

$$\Rightarrow (2 \sum_{i=1}^n x_i^2)^2 - (2 \sum_{i=1}^n x_i^2)(2n) < 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial m^2} > 0$$

$$\Rightarrow \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 < n \sum_{i=1}^n x_i$$

• La función  $f$  posee un mínimo local en el punto crítico  
Ejemplo: Se tienen los siguientes valores obtenidos experimentalmente para  $x, y$ , los cuales se sabe que tienen entre sí una relación lineal

$x$	1.0	2.0	3.0	4.0
$y$	1.4	1.1	0.7	0.1



JEAN BOOK



23-Mayo-23

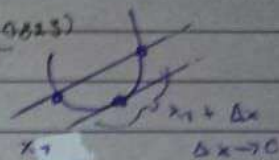
Solución. Se debe hallar la recta que mejor se ajuste a los datos. De acuerdo con el método de los mínimos cuadrados se tiene:

$$\bar{x} = \frac{1+2+3+4}{4} = 2.5$$

$$\bar{y} = \frac{1.4+1.1+0.7+0.1}{4} = 0.825$$

$$m = \frac{\sum_{i=1}^n x_i (y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n x_i (x_i - \bar{x})} = \frac{(1)(1.4-0.825) + (2)(1.1-0.825) + (3)(0.7-0.825)}{(1)(1-2.5) + (2)(2-2.5) + (3)(3-2.5)}$$

$$b = \bar{y} - m\bar{x} = 0.825 - (-0.43)(2.5) = 1.9$$



$$b = 0.825 - (-0.43)(2.5)$$

$$b = 1.9$$

⇒ La recta que aproxima mejor los datos es:

$$y = -0.43x + 1.9$$

$$1 \quad 1 \quad 1.4 \quad 1.47 \quad y = -0.43x + 1.9 \quad \text{Desviación}$$

$$2 \quad 2 \quad 1.1 \quad 1.04 \quad 1.4 - 1.47 = -0.07 \quad 1.4 =$$

$$3 \quad 3 \quad 0.7 \quad 0.61 \quad 1.1 - 1.04 = 0.06$$

$$4 \quad 4 \quad 0.1 \quad 0.18 \quad 0.7 - 0.61 = 0.09$$

$$(x, y) \quad \sum = 0$$

$$1 \quad 1 \quad 1.4 \quad 1.4 \quad 1 \quad 1.96$$

$$2 \quad 2 \quad 1.1 \quad 2.2 \quad 4 \quad 1.21$$

$$3 \quad 3 \quad 0.7 \quad 2.1 \quad 9 \quad 0.49$$

$$4 \quad 4 \quad 0.1 \quad 0.4 \quad 16 \quad 0.01$$

$$\sum = 10 \quad 3.3 \quad 6.1 \quad 30 \quad 3.67$$

$$m = \frac{N \sum xy - \sum x \sum y}{N \sum x^2 - \sum x \sum x}$$

b

Next  
Dude

JEAN  
BOOK



29-Mayo-23

¿Qué tan buena es la aproximación?

Coefficiente de correlación lineal nos dice que tan precisa es la aproximación.

$$r = \frac{N\sum xy - \sum x \sum y}{\sqrt{N\sum xx - \sum x \sum x} \cdot \sqrt{N\sum yy - \sum y \sum y}} = \frac{4(6.1) - (10)(3.3)}{\sqrt{4(30) - (10)(10)} \cdot \sqrt{4(3.67) - (3.3)(3.3)}} = \frac{-8.6}{\sqrt{120 - 100} \cdot \sqrt{14.68 - 10.89}} = \frac{-8.6}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{3.79}} = \frac{-8.6}{(4.47)(1.94)} = \frac{-8.6}{8.7063} = -0.9877 \approx -1$$

} Puede tomar valores de -1 a 1

⇒ que  $\exists$  una buena correlación y probablemente los datos se aproximan a una línea recta

**Nota.**  $r$  puede tomar valores de -1 o 1, si la aproximación se acerca a -1 o a 1  $\exists$  una buena correlación. Si  $r$  es muy pequeño  $\nexists$  una buena correlación y hay que hacer otro tipo de aproximación.

**COEFICIENTE DE CORRELACIÓN LINEAL.** Es una medida de la relación lineal entre dos variables aleatorias cuantitativas.

Parámetros del ajuste:

$$m = \frac{N\sum xy - \sum x \sum y}{N\sum xx - \sum x \sum x} \quad y = mx + b \quad b = \frac{\sum y \sum xx - \sum x \sum xy}{N\sum xx - \sum x \sum x}$$

$$b = \frac{13.3(30) - (10)(6.1)}{4(30) - (10)(10)} = \frac{99 - 61}{120 - 100} = \frac{38}{20} = 1.9$$

$$m = \frac{N\sum xy - \sum x \sum y}{N\sum xx - \sum x \sum x}$$

Next Dude 



29-11-23

$$m = \frac{4(6.7) - (10)(3.3)}{4(30) - (10)(10)} = \frac{24.4 - 33}{120 - 100} = \frac{-8.6}{20} = -0.43$$

Hallar el error de cada magnitud  $\beta^2$  como:

$$i (b + mx - y)^2$$

$$1 [1.9 + (-0.43)(1) - 1.4]^2 = 0.0049$$

$$2 [1.9 + (-0.43)(1) - 1.1]^2 = 3.6 \times 10^{-3}$$

$$3 [1.9 + (-0.43)(1) - 0.7]^2 = 8.7 \times 10^{-3}$$

$$4 [1.9 + (-0.43)(1) - 0.7]^2 = 6.4 \times 10^{-3}$$

$$\Sigma \quad 0.0271$$

Error de la pendiente:

$$e(m) = \sqrt{\frac{N}{N \Sigma_{xx} - \Sigma x \Sigma x} \cdot \frac{\beta^2}{N-2}} = \sqrt{\frac{4}{4(30) - (10)(10)} \cdot \frac{0.0271}{4-2}} = \sqrt{(0.2)(0.0135)} =$$

$$= \sqrt{2.7 \times 10^{-3}} = 0.051$$

Error en el punto de corte "b"

$$e(b) = \sqrt{\frac{\Sigma_{xx}}{N \Sigma_{xx} - \Sigma x \Sigma x} \cdot \frac{\beta^2}{N-2}} = \sqrt{\frac{30}{4(30) - (10)(10)} \cdot \frac{0.0271}{2}} = \sqrt{(1.5)(0.0135)}$$

$$= 0.142$$

Ecuación FINAL

Reemplazar en  $y = mx + b$  los valores:

$$y = -0.43x + 1.9$$

Agregando los errores, se tiene

$$y = (-0.43 \pm 0.051)x + (1.9 \pm 0.142)$$

