

# Estimación de parámetros

## Análisis estadístico de datos

2021

1. Considerar una variable aleatoria  $X$  que sigue una distribución normal con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$  ambas desconocidas. En un experimento se observaron los siguientes valores de  $X$ : 18.9, 17.4, 20.8, 18.3, y 17.0. A partir de los datos, estimar sin sesgo  $\mu$  y  $\sigma^2$ .
2. Simular una muestra de tres variables aleatorias  $X_1$ ,  $X_2$  y  $X_3$  que siguen una distribución normal estándar. Calcular la media muestral  $\bar{X}$ . Repetir este procedimiento 1000 veces y contruir un histograma de frecuencia de  $\bar{X}$ . A partir de este histograma estimar el sesgo y varianza de  $\bar{X}$ . Graficar el histograma y superponer la función de densidad de probabilidad de  $\bar{X}$ . *Nota: no ajustar el histograma.*
3. Simular una muestra de dos variables aleatorias  $X_1$  y  $X_2$  que siguen una distribución normal estándar. Calcular la varianza muestral  $s^2$ . Repetir la simulación 1000 veces y construir un histograma de frecuencia de  $s^2$ . A partir del histograma estimar el sesgo y la varianza de  $s^2$ . Graficar el histograma y superponer la distribución de probabilidad de  $s^2$ . *Nota: no ajustar el histograma.*
4. Considerar una variable aleatoria  $X$  que sigue una distribución normal con una media  $\mu$  desconocida y una desviación estándar  $\sigma = 4.5$ . En un experimento se observa el valor  $x = 37.2$ . Encontrar la función de verosimilitud de  $L(\mu)$ . Calcular el estimador de máxima verosimilitud de  $\mu$  ( $\hat{\mu}$ ). Calcular la verosimilitud máxima  $L_{\max} = L(\hat{\mu})$ . Calcular el cociente de verosimilitudes  $\lambda(\mu) = L(\mu)/L_{\max}$  y graficar la función de costo  $J(\mu) = -2 \ln \lambda(\mu)$ .
5. Una moneda cargada se lanza  $n = 12$  veces de la cuáles salen  $k = 8$  caras. Considerar la función de masa de probabilidad binomial del número de caras  $P(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ . Graficar la función de verosimilitud del parámetro  $p$  para los valores dados de  $n$  y  $k$  ( $L(p)$ ). Calcular el estimador de máxima verosimilitud de  $p$  en función de  $n$  y  $k$  derivando  $L(p)$  ( $\hat{p}$ ). Calcular la máxima verosimilitud  $L_{\max} = L(\hat{p})$ . Calcular el cociente de verosimilitudes  $\lambda(p) = L(p)/L_{\max}$  y graficar la función de costo  $J(p) = -2 \ln \lambda(p)$ .

6. Un experimento mide tres veces una variable normal  $X$  obteniendo los valores  $x_1 = 3.38$ ,  $x_2 = 5.06$  y  $x_3 = 7.67$ . Escribir la distribución de probabilidad conjunta de  $(X_1, X_2, X_3)$ . Considerando que la media  $\mu$  es desconocida y la desviación estándar es  $\sigma = 1.4$ , encontrar y graficar la función de verosimilitud  $L(\mu)$ . Calcular el estimador de máxima verosimilitud de  $\mu$ . Calcular el cociente de verosimilitudes  $\lambda(\mu) = L(\mu)/L_{\max}$  y graficar la función de costo  $J(\mu) = -2 \ln \lambda(\mu)$ .
7. **(Para entregar)** Considerar las variables  $X_1$  and  $X_2$  que siguen una distribución binormal con varianzas  $\sigma_1 = 2.3$ ,  $\sigma_2 = 1.7$  y correlación  $\rho = -0.78$ . Calcular la función de verosimilitud de los parámetros  $\mu_1$  y  $\mu_2$  para los valores observados  $x_1 = 7.9$  y  $x_2 = 13.4$  ( $L(\mu_1, \mu_2)$ ). Calcular los estimadores de máxima verosimilitud de  $\mu_1$  y  $\mu_2$  y evaluar la verosimilitud máxima  $L_{\max}$ . Calcular el cociente de verosimilitudes  $\lambda(\mu_1, \mu_2) = L(\mu_1, \mu_2)/L_{\max}$  y graficar la función de costo  $J(\mu_1, \mu_2) = -2 \ln \lambda(\mu_1, \mu_2)$ .