UNIVERSIDAD PONTIFICIA COMILLAS

**ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA (ICAI)**

**INGENIERO EN INFORMÁTICA**

PROYECTO FIN DE CARRERA

# INTEGRACIÓN ADAPTATIVA E INTEGRALES MÚLTIPLES

**AUTOR: CELSO RODRÍGUEZ GARCÍA**

**MADRID Junio de 2006**

Autorizada la entrega del proyecto del alumno:

**D. Celso Rodríguez García**

Madrid, 20 de Junio de 2006

EL DIRECTOR DEL PROYECTO

Fdo.: **Dr. D. Francisco Javier Rodríguez Gómez**

Vº Bº del Coordinador de Proyectos

Fdo.: **Dr. D. Miguel Ángel Sanz Bobi** Fecha: 28/ 06/ 06

UNIVERSIDAD PONTIFICIA COMILLAS

**ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA (ICAI)**

**INGENIERO EN INFORMÁTICA**

PROYECTO FIN DE CARRERA

# INTEGRACIÓN ADAPTATIVA E INTEGRALES MÚLTIPLES

**AUTOR:** **D. CELSO RODRÍGUEZ GARCÍA**

**DIRECTOR:** **DR. D. FRANCISCO JAVIER RODRÍGUEZ GÓMEZ**

# *Integración Adaptativa e Integrales Múltiples*

## Agradecimientos


Dedico especialmente este proyecto a mis padres.

Quiero agradecerles todo el apoyo que me han dado y me dan siempre.

Por su cariño y comprensión en los momentos buenos y

en los malos. Por darme una formación y educación

tanto en lo profesional como en lo personal.

Mencionar al resto de mi familia, en especial a mi hermana África,

por estar ahí siempre y darme ánimos

en todos estos años de carrera.

También quiero dar las gracias a Francisco Javier Rodríguez Gómez,

por ser un gran director de proyecto, que se preocupa por sus alumnos y que gracias a sus conocimientos y ayuda me ha sido

posible realizar este proyecto.

Me gustaría mencionar a todos mis compañeros y amigos, que he ido conociendo

curso tras curso en la Universidad y con los que he compartido

tantos momentos especiales en mi vida.

Gracias a todos.

# Resumen

Este Proyecto consiste en el estudio de la Integración Adaptativa e Integrales Múltiples, proceso utilizado en diversos ámbitos de las ciencias e ingeniería por el que se calculan valores aproximados de integrales definidas de una función en un intervalo, que de forma general no pueden calcularse analíticamente.

En multitud de fórmulas en Ingeniería y el marco de las Ciencias es muy difícil o imposible encontrar la función primitiva. En tales circunstancias se justifican los métodos numéricos de la integración adaptativa basados en aproximaciones sucesivas, así como las integrales dobles y triples.

Se van a analizar los métodos o algoritmos numéricos que encuentran la aproximación de una función según unos parámetros iniciales, tanto en las integrales simples como en las múltiples, tratando también funciones no acotadas o con intervalos con uno o más extremos infinitos, llamadas integrales impropias.

Se utilizará un lenguaje de programación numérico y simbólico, en concreto el lenguaje de programación del paquete *Mathematica*® en el que se desarrollarán los algoritmos adaptativos de integración con integrales simples, múltiples e impropias.

Este Proyecto pretende demostrar que a través del procesamiento matemático numérico y simbólico, el uso de fórmulas matemáticas y cálculo numérico es aplicable en la

ingeniería de una manera más sencilla y rápida, con la ayuda de este tipo de herramientas software. Se desarrollará un paquete en *Mathematica®* que contendrá una serie de métodos y algoritmos que se emplean en la integración adaptativa y múltiple.

Gracias a la utilización del lenguaje de alto nivel *Mathematica®* y a través del cálculo simbólico, se facilita proceso de cálculo numérico y se dispone de unas posibilidades gráficas enormes. Del mismo modo, al incorporar el paquete de creación de interfaces de usuario, llamado *GUIkit*, en las nuevas versiones del programa, se aporta una razón más para su utilización en el presente proyecto.

El interés e importancia de este Proyecto reside en que la amplia gama de métodos de integración numérica sirven para fundamentar el tratamiento numérico de ecuaciones diferenciales. Por tanto, todos los métodos y algoritmos estudiados aquí se podrán aplicar a multitud de funciones dentro de la computación simbólica y el procesamiento matemático digital.

Por último se fundamentan las ventajas y mejoras conseguidas con la metodología consistente en emplear los programas de cálculo numérico, simbólico y gráfico con las Matemáticas:

- Facilidad de utilización en la docencia dentro del campo matemático en los planes de estudio modernos en las titulaciones técnicas y científicas.

- La informática como una herramienta más en el estudio y aprendizaje en todos los niveles, partiendo de la educación primaria hasta la formación universitaria, postgrado y de empresa.

- Posibilidad de abordar problemas del mundo real, que de otro modo sería casi imposible resolver manualmente, dado el elevado número de datos a procesar y a la cantidad de cálculos a realizar.

- El interfaz gráfico de usuario permite una aproximación sencilla al conocimiento de los algoritmos basada en la representación grafica, con las consiguientes ideas intuitivas que puedan derivar, previo al estudio específico de los algoritmos.

- La gran modularidad del lenguaje utilizado permite la posible adaptación de futuras mejoras, modificaciones o reestructuración de los algoritmos programados, así como su aprovechamiento en nuevos aplicativos.

# Abstract

This Project consist in the study of the Adaptive Integration and Multiple Integrals, process used in very different fields on sciences and engineering in order to calculate approximated values of determine integrals of a function in a range that generally can't be calculated using the analytical method.

In multitude formulas in engineering and sciences is very difficult or impossible to find the primitive function. With these circumstances, the numeric methods of the adaptive integration based on successive approximations, the double and triple integrations are completely justified.

Numeric methods or algorithms that find a function approximately will be analysed according to an initial parameters, with simple and multiple integrals, dealing with unlimited functions or with one or more infinity end-points of an interval, named improper integrals.

A numerical and symbolic program language will be used, in particular the package *Mathematica*®, to develop adaptive integration algorithms with simple, multiple and improper integrals.

Due to use of the high level language *Mathematica*® and through the symbolic calculation, the process of numeric-calculations makes easy and gives enormous graphical

possibilities. In the same way, using the user interface, named GUIkit, incorporated to *Mathematica®* in its new versions, contributes with other reason to use it in this present project.

The most important of this project consist on the wide range of numeric integration methods that fundaments the differential equation in numeric processing. Therefore, all the methods and algorithms that have been studied here will be applied with a lot of functions in symbolic computing and digital and mathematical processing.

To finish, the advantages and improvements obtained with the methodology used in numeric, symbolic and graphic mathematic programs will be described next:

- Easy to use on teaching, in the mathematical field and the modern study plans in the technical and scientific careers.

- Computer Science like other study and learning tool at all levels, from the primary education to the University, post grade and company curses.

- The possibility to tackle real problems that with another methods would be nearly impossible to resolve because of the wide rage of data and calculations processed.

- The graphical user interface allows an easy approximation to the algorithms knowledge, based on graphical representation, with the following intuitive ideas that can be created previously to the specific study of the algorithms.

- The great modularity of the languages used allows the possible adaptation of the future improvements, modifications or reconstruntions of the programmed algorithms.

# Índice

# 1. Introducción

El presente proyecto consiste en analizar y estudiar las bases matemáticas y el cálculo que subyace en el cálculo numérico para resolver la integración numérica mediante los métodos de la integración adaptativa y las integrales múltiples, como extensión de los métodos numéricos para las integrales de una variable.

Para ello se utiliza paquete de software simbólico y numérico *Mathematica®* que dispone de unas posibilidades de cálculo y representaciones gráficas muy amplias.

Se ha desarrollado también un interfaz gráfico implementado con GUIkit, que permite desarrollar aplicaciones independientes con cálculos sofisticados y creación de gráficos y que se incluye en la versión de *Mathematica® 5.2*.

En ingeniería se presenta con frecuencia la necesidad de integrar una función que sería, en general, de una de las tres formas siguientes:

1. Una función simple y continua tal como un polinomio, una función exponencial o una función trigonométrica.

2. Una función complicada y continua que es difícil o imposible de integrar directamente.

3. Una función tabulada en donde los valores de $x$ y $f(x)$ se dan en un conjunto de puntos discretos, como es el caso a menudo, de datos experimentales.

En el primer caso, la integral simplemente es una función que se puede evaluar fácilmente usando métodos analíticos aprendidos en el cálculo. En los dos últimos casos, sin embargo, se deben emplear métodos aproximados.

La forma más sencilla de evaluar numéricamente una integral es dividir el intervalo de integración en pasos equiespaciados y evaluar la función en esos puntos, de forma que sea posible construir una suma de coeficientes por valores de la función en los puntos para aproximar el valor de la integral.

La integración adaptativa utiliza métodos complejos que resuelven la integración por medio de evaluaciones aproximadas de la función, mediante la selección idónea del tamaño de los intervalos según la variabilidad de la función.

En regiones con mayor variabilidad tenderán a seleccionar un tamaño de paso menor frente a las de mayor. Todo ello con una precisión específica y con el mínimo número posible de evaluaciones de la función.

Las fórmulas o reglas que se estudiarán para aproximar la integral numérica, con diferentes grados de precisión, son:

- Métodos adaptativos de cuadratura para integrales simples. Regla compuesta de Simpson.

- Extensión de los métodos adaptativos de cuadratura para integrales múltiples. Regla compuesta de Simpson y cuadratura Gaussiana.

- Extensión de los métodos adaptativos de cuadratura para integrales impropias. Regla compuesta de Simpson.

En resumen, en este Proyecto se han estudiado una serie de algoritmos numéricos para la integración de la manera más detallada posible. Para cada algoritmo o método numérico se ha realizado:

- Una introducción explicando en qué consiste dicho algoritmo, su funcionalidad, sus variantes, y su error.

- Un pseudocódigo para implementar en un lenguaje de programación de alto nivel.

- Una serie de ejemplos y problemas para demostrar la aproximación al valor real de la integral, de manera numérica y gráfica.

# 2. Objetivos

El objetivo principal del proyecto es diseñar una herramienta que ayude a estudiar y analizar de forma sencilla el dominio matemático centrado en el estudio de la resolución numérica mediante métodos adaptativos de integrales simples, múltiples e impropias.

Pero además, también se desprenden los siguientes sub-objetivos en el desarrollo del software para la integración adaptativa:

1. El estudio de los algoritmos numéricos que resuelven la integración numérica de una función con el método adaptativo.

2. Extender los métodos para una sola integral para aproximar las integrales múltiples con los métodos de la integral doble de *Simpson*, la integral doble de *Gauss* y la integral triple de *Gauss*.

3. Estudio y resolución mediante métodos adaptativos de las integrales impropias.

4. Determinar el error cometido con la aproximación numérica.

5. Diseñar un paquete de funciones en el lenguaje *Mathematica* que contendrá los algoritmos numéricos que se emplearán en la integración numérica.

6. Verificar mediante el procesamiento simbólico matemático cómo está cambiando la manera de ver y utilizar las matemáticas.

7. Abordar problemas del mundo real, que de otro modo sería casi imposible de resolver de forma manual, dado el elevado número de datos a procesar y a la cantidad de cálculos a realizar.

8. Emplear medios informáticos actuales como una herramienta más en el estudio y aprendizaje.

9. Desarrollar una interfaz gráfica de usuario con el paquete GUIKit de *Mathematica*.

10. Desarrollo modular del software lo que permite futuras integraciones con otros sistemas y la inclusión de mejoras o modificaciones.

11. La herramienta debe permitir cierta manipulación de los datos de cara a la representación, de manera que el usuario pueda adaptarlo al tratamiento específico de sus problemas.

12. Y por último, debe ofrecer como salida, además de la representación gráfica, un archivo de texto, en el que se presente el informe detallado de las operaciones realizadas al utilizar el software, muy útiles en cuanto al estudio y compresión de los algoritmos.

# 3. Métodos adaptativos de Cuadratura

## 3.1. Descripción de la cuadratura adaptativa

En las fórmulas compuestas se utilizan nodos equidistantes. Al integrar una función en un intervalo que contiene regiones en las que la funcion varía en gran medida, y en otras en las que esta variación es pequeña no es factible el uso de nodos equidistantes.

Así mismo si el error de distribución, se distribuirá de forma uniforme, necesitaremos que el paso sea de menor tamaño en las regiones de gran variación frente a las de menor variación.

Los métodos adaptativos de cuadratura se consideran eficientes en estos casos, pues son capaces de predecir el grado de variación funcional y adaptar el tamaño del paso a las diferentes necesidades.

El primer paso para aproximar la integral es aplicar la regla compuesta de Simpson con el tamaño de paso :

$$h = \frac{(b-a)}{2} \tag{1}$$

y este procedimiento nos da lo siguiente:

$$\int_a^b f(x)\,dx = S(a,b) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\mu) \tag{2}$$

Para algún $\mu$ del intervalo $(a, b)$

Siendo $S(a, b)$ igual a :

$$S(a,b) = \frac{h}{3}[f(a) + 4f(a+h) + f(b)] \tag{3}$$

Para encontrar una forma de no tener que estimar determinar $f^{(4)}(\mu)$ y poder estimar la exactitud de nuestra aproximación, aplicamos la regla de Simpson al problema con $n = 4$ y el tamaño de paso $\frac{(b-a)}{4} = \frac{h}{2}$ lo que nos da:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \frac{h}{6}\left[f(a) + 4f\left(a+\frac{h}{2}\right) + 2f(a+h) + 4f\left(a+\frac{3h}{2}\right) + f(b)\right] - \left(\frac{h}{2}\right)^4 \frac{(b-a)}{180} f^{(4)}(\partial) \tag{4}$$

Y simplificando la expresión usando:

$$\begin{aligned} S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) &= \frac{h}{6}\left[f(a) + 4f\left(a+\frac{h}{2}\right) + f(a+h)\right] \\ S\left(\frac{a+b}{2}, b\right) &= \frac{h}{6}\left[f(a+h) + 4f\left(a+\frac{3h}{2}\right) + f(b)\right] \end{aligned} \tag{5}$$

resulta:

$$\int_a^b f(x)\,d\,x = S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) + S\left(\frac{a+b}{2}, b\right) - \frac{1}{16}\left(\frac{h^5}{90}\right) f^{(4)}(\partial) \tag{6}$$

Para estimar el error suponemos que $f^{(4)}(\mu) \approx f^{(4)}(\partial)$. Si es exacto por lo tanto igualamos las integrales (2) y (6) :

$$S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) + S\left(\frac{a+b}{2}, b\right) - \frac{1}{16}\left(\frac{h^5}{90}\right) f^{(4)}(\partial) \approx S(a,b) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\mu) \tag{7}$$

Por lo que al despejar :

$$\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\mu) \approx \frac{1}{15}\left[S(a,b) - S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) - S\left(\frac{a+b}{2}, b\right)\right] \tag{8}$$

Y al utilizar esta estimación en la ecuación (6) obtenemos la estimación del error :

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) - S\left(\frac{a+b}{2}, b\right) \right| \approx \left| \frac{1}{15}\left[S(a,b) - S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) - S\left(\frac{a+b}{2}, b\right)\right] \right| \tag{9}$$

Lo que significa que $S(a, \frac{a+b}{2}) + S(\frac{a+b}{2}, b)$ aproxima unas 15 veces mejor la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ de lo que lo hace el valor conocido $S(a, b)$. Es decir:

$$\left| S(a,b) - S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) - S\left(\frac{a+b}{2}, b\right) \right| < 15\,\epsilon \tag{10}$$

Esperando obtener

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} - S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) - S\left(\frac{a+b}{2}, b\right) \right| < \epsilon \tag{11}$$

Si $\epsilon$ es un error lo suficientemente aceptable entonces la aproximación:

$$S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) - S\left(\frac{a+b}{2}, b\right) \tag{12}$$

será suficientemente exacta para $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$.

Cuando la estimación del error en (10) no es válida, aplicamos la regla de Simpson a los subintervalos $[a, \frac{a+b}{2}]$ y $[\frac{a+b}{2}, b]$ de manera individual. A continuación utilizamos el procedimiento de estimación del error para determinar si la aproximación a la integral en cada intervalo se encuentra dentro de una tolerancia de $\frac{\epsilon}{2}$. Si ocurre esto sumaremos las aproximaciones para producir una aproximación a $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$ con una tolerancia de $\epsilon$.

Si la aproximación en uno de los subintervalos no se encuentra dentro de la tolerancia $\frac{\epsilon}{2}$, se subdividirá el subintervalo y repetiremos el procedimiento en dos subintervalos para determinar si la aproximación en cada subintervalo tiene una exactitud de $\frac{\epsilon}{4}$. De manera que se realizará este procedimiento de división en mitades hasta que cada parte esté dentro de la tolerancia requerida. En cada subdivisión por lo general, aumentará la exactitud de la aproximación en un factor de 16, aunque se requiere un factor de mayor precisión de solo 2.

## 3.2 Pseudocódigo de la regla de la cuadratura adaptativa

En el siguiente apartado se representa el pseudocódigo para implementar el algoritmo de la regla la *Cuadratura Adaptativa*.

El algoritmo está adaptado de manera que difiere de lo expuesto en la descripción del método de la cuadratura adaptativa, para una correcta implementación:

En el paso 1 fijamos una tolerancia de $10\epsilon$ y no de $15\epsilon$ (como se ve en la inecuación). Esto se debe a que se intenta compensar de esta manera el error de la suposición $f^{(4)}(\mu) \approx f^{(4)}(\partial)$. De manera que en los problemas que se conozce que $f^{(4)}$ varía mucho debe reducirse aún más este valor.

En una subdivisión, el procedimiento que se incluye en el algoritmo aproxima primero la integral en el subintervalo del extremo izquierdo. Debido a esto se introduce un procedimiento que almacena y llama eficientemente las evaluaciones funcionales calculadas con anterioridad para los nodos de los subintervalos de la mitad derecha.

En el código correspondiente al bucle "while" se realiza un procedimiento para apilar, con un indicador que lleva un control de los datos necesarios para calcular la aproximación en el subintervalo contiguo y a la derecha del subintervalo sobre el cual se va a generar la aproximación.

- **Algoritmo 1. Método de la cuadratura adaptativa.**

**Input** $(f(x),\ [a,\ b],\ \delta,\ n)$

**For** $i = 0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$ **do**
(* Inicializacion de los arrays *)
$a_i \leftarrow 0$
$\mathrm{fa}_i \leftarrow 0$
$\mathrm{fc}_i \leftarrow 0$
$\mathrm{fb}_i \leftarrow 0$
$s_i \leftarrow 0$
$l_i \leftarrow 0$
**End**

$\mathrm{app} \leftarrow 0$
$i \leftarrow 1$
$a_i \leftarrow a$
$\mathrm{toltotal}_i \leftarrow 10 * \delta$
$h_i \leftarrow \frac{b-a}{2}$
$\mathrm{fa}_i \leftarrow f(a)$
$\mathrm{fc}_i \leftarrow f(a + h_i)$
$\mathrm{fb}_i \leftarrow f(b)$
(* Aproximación a partir del método de Simpson para *)
(* el intervalo completo *)
$s_i \leftarrow \frac{1}{3}(h_i\ \mathrm{fa}_i + 4\,\mathrm{fc}_i + \mathrm{fb}_i)$
$l_i \leftarrow 1$

**While** $i > 0$ **do**
$\mathrm{fd} \leftarrow f\left(a_i + \frac{h_i}{2}\right)$

$\mathrm{fe} \leftarrow f\left(a_i + \frac{3\,h_i}{2}\right)$

(* Aproximaciones a partir del método de Simpson*)
(* para mitades de subintervalos *)
$\mathrm{s1} \leftarrow \frac{1}{6}\,h_i(\mathrm{fa}_i + 4\,\mathrm{fd} + \mathrm{fc}_i)$
$\mathrm{s2} \leftarrow \frac{1}{6}\,h_i(\mathrm{fc}_i + 4\,\mathrm{fe} + \mathrm{fb}_i)$
$\mathrm{v1} \leftarrow a_i$
$\mathrm{v2} \leftarrow \mathrm{fa}_i$
$\mathrm{v3} \leftarrow \mathrm{fc}_i$
$\mathrm{v4} \leftarrow \mathrm{fb}_i$
$\mathrm{v5} \leftarrow h_i$
$\mathrm{v6} \leftarrow \mathrm{toltotal}_i$
$\mathrm{v7} \leftarrow s_i$
$\mathrm{v8} \leftarrow l_i$

(* Se elimina un nivel *)
$i \leftarrow i - 1$
**If** $|\mathrm{s1} + \mathrm{s2} - \mathrm{v7}| < \mathrm{v6}$ **Then**
$\mathrm{app} \rightarrow \mathrm{app} + (\mathrm{s1} + \mathrm{s2})$
**else**

**If** (v8 ≥ $n$)**Then**
(* Nivel excedido, Error*)
**Print** (Se ha excedido el nivel)
**Return**
**else**
(* Se agrega un nivel *)
$i \leftarrow i + 1$ (* Mitad del subintervalo derecha *)
$a_i \leftarrow \text{v1} + \text{v5}$
$\text{fa}_i \leftarrow \text{v3}$
$\text{fc}_i \leftarrow \text{fe}$
$\text{fb}_i \leftarrow \text{v4}$
$h_i \leftarrow \frac{\text{v5}}{2}$
$\text{toltotal} \leftarrow \frac{\text{v6}}{2}$
$s_i \leftarrow \text{s2}$
$l_i \leftarrow \text{v8} + 1$
$i \leftarrow i + 1$ (* Mitad del subintervalo izquierda *)
$a_i \leftarrow \text{v1}$
$\text{fa}_i \leftarrow \text{v2}$
$\text{fc}_i \leftarrow \text{fd}$
$\text{fb}_i \leftarrow \text{v3}$
$h_i \leftarrow h_{i-1}$
$\text{toltotal}_i \leftarrow \text{toltotal}_{i-1}$
$s_i \leftarrow \text{s1}$
$l_i \leftarrow l_{i-1}$
**End If**
**End IF**
**End While**
**Return** (app)
**Output**

## 3.3 Problemas

■ **Problema 1.** Calcúlese el valor aproximado de la integral

$$\int_a^b \frac{100}{x^2} \operatorname{sen}\left(\frac{10}{x}\right) d\,x$$

empleando el método de *cuadratura adaptativa* en el intervalo $x \in [1, 3]$ con una tolerancia de $10^{-4}$.

---

**Solución**

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_{1.}^{3.} \left( \frac{100 \sin\left(\frac{10}{x}\right)}{x^2} \right) dx$$

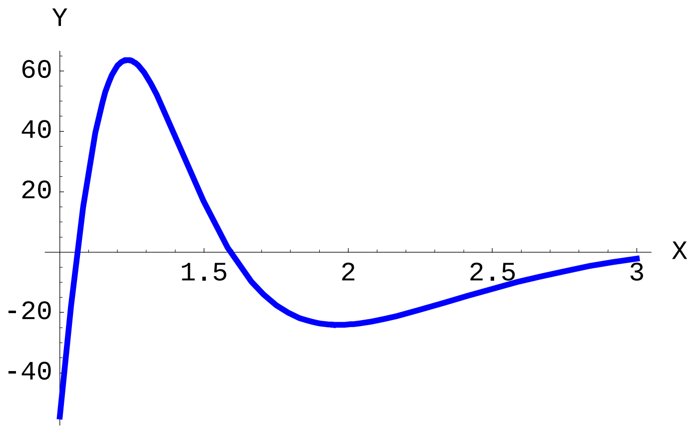
$[a,\, b] = [1.,\, 3.]$ $\quad n = 48 \quad$ $\delta = 0.0001$

empleando el algoritmo de *cuadratura adaptativa*.

$$I = \int_{1.}^{3.} \left( \frac{100 \sin(\frac{10}{x})}{x^2} \right) dx \approx -1.42601481005$$

Representación de la función

$$f(x) = \frac{100 \sin(\frac{10}{x})}{x^2}$$




■ **Problema 2.** Calcular la integral

$$\int_a^b x^2 \ln(x)\, d\, x$$

empleando el método de *cuadratura adaptativa* en el intervalo $x \in [1, 1.5]$ con una tolerancia de $10^{-3}$.

---

**Solución**

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b f(x)\ dx = \int_{1.}^{1.5} (\, x^2 \log(x)\,)\ dx$$

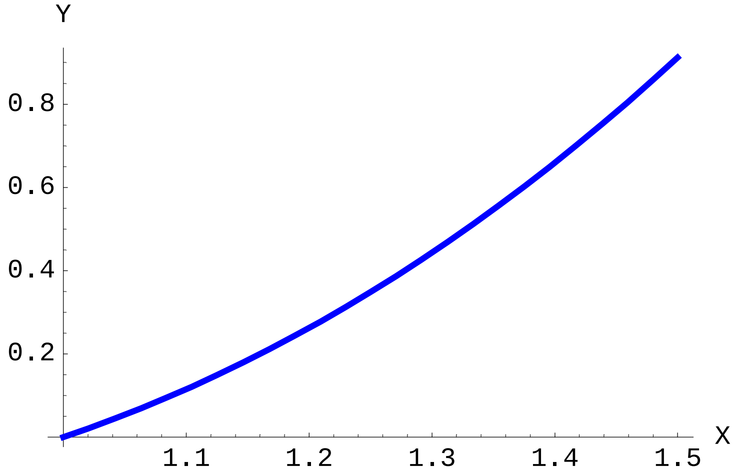
$[a,\ b] = [1.,\ 1.5]$ $\quad$ $n = 48$ $\quad$ $\delta = 0.001$

empleando el algoritmo de *cuadratura adaptativa*.

$$I = \int_{1.}^{1.5} (x^2 \log(x))\, dx \approx 0.192258460446$$

Representación de la función

$f(x) = x^2 \log(x)$




■ **Problema 3.** Calcular la integral

$$\int_a^b x^2 e^{-x}\, d\, x$$

empleando el método de *cuadratura adaptativa* en el intervalo $x \in [0, 1]$ con una tolerancia de $10^{-3}$.

---

**Solución**

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b f(x)\, dx = \int_{0.}^{1.} (e^{-x} x^2)\, dx$$

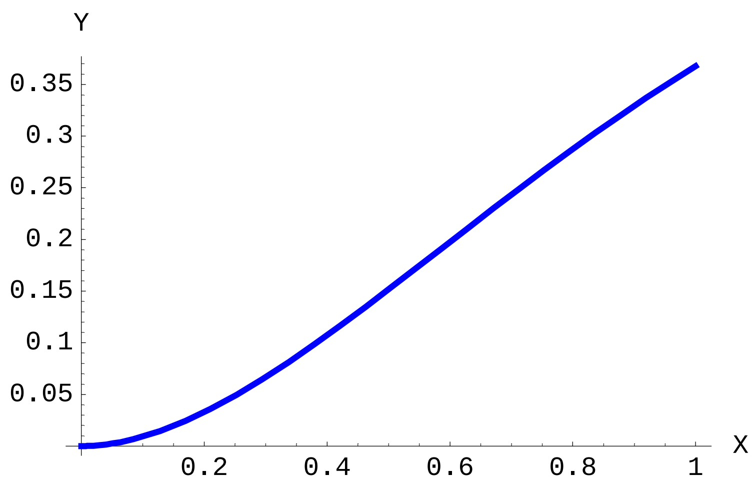
$[a, b] = [0., 1.]$ $n = 48$ $\delta = 0.001$

empleando el algoritmo de *cuadratura adaptativa*.

$$I = \int_{0.}^{1.} (e^{-x} x^2)\, dx \approx 0.160722475872$$

Representación de la función

$f(x) = e^{-x} x^2$




■ **Problema 4.** Calcular la integral

$$\int_a^b \frac{2}{x^2-4}\, d\, x$$

empleando el método de *cuadratura adaptativa* en el intervalo $x \in [0, 0.35]$ con una tolerancia de $10^{-3}$.

---

**Solución**

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b f(x)\, dx = \int_{0.}^{0.35} \left( \frac{2}{x^2-4} \right) dx$$

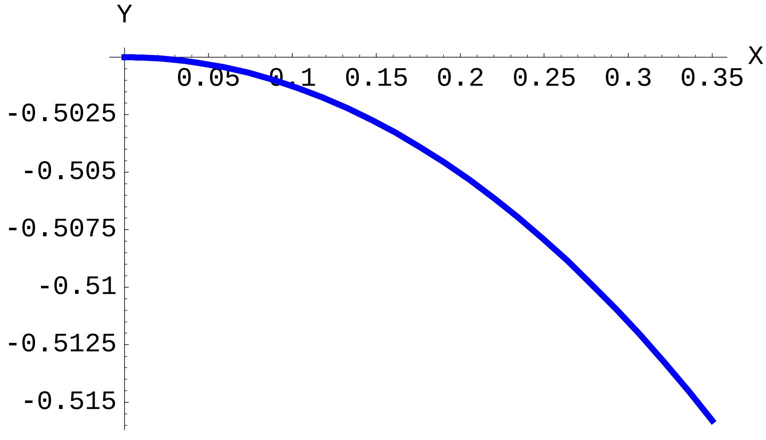
$[a, b] = [0., 0.35]$ $\quad n = 48 \quad$ $\delta = 0.001$

empleando el algoritmo de *cuadratura adaptativa*.

$$I = \int_{0.}^{0.35} \left( \frac{2}{x^2-4} \right) dx \approx -0.176820119130$$

Representación de la función

$$f(x) = \frac{2}{x^2 - 4}$$




■ **Problema 5.** Calcular la integral

$$\int_a^b x^2 \operatorname{sen}(x)\, d\,x$$

empleando el método de *cuadratura adaptativa* en el intervalo $x \in [0, \frac{\Pi}{4}]$ con una tolerancia de $10^{-3}$.

---

**Solución**

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b f(x)\, dx = \int_{0.}^{0.785398} (\, x^2 \sin(x)\,)\, dx$$

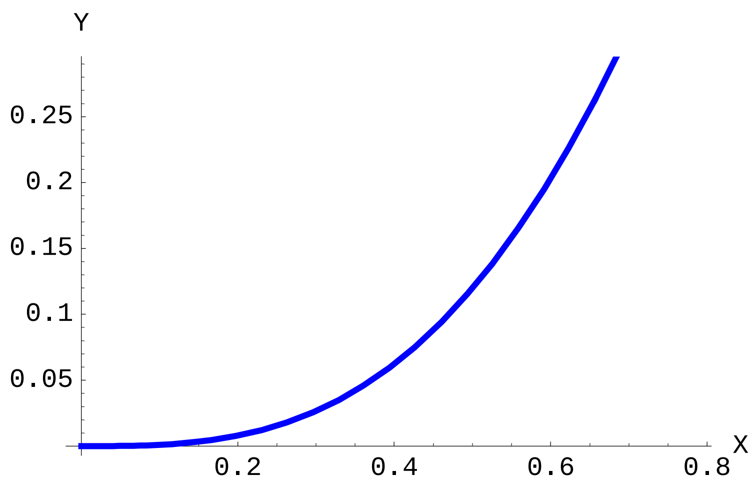
$[a,\, b] = [0.,\, 0.785398]$ $n = 48$ $\delta = 0.001$

empleando el algoritmo de *cuadratura adaptativa*.

$$I = \int_{0.}^{0.785398} (\, x^2 \sin(x)\,)\, dx \approx 0.0887092039436$$

Representación de la función

$$f(x) = x^2 \sin(x)$$




■ **Problema 6.** Calcular la integral

$$\int_a^b e^{3x} \operatorname{sen}(2x)\, d\, x$$

empleando el método de *cuadratura adaptativa* en el intervalo $x \in [0, \frac{\Pi}{4}]$ con una tolerancia de $10^{-3}$.

---

**Solución**

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b f(x)\, dx = \int_{0.}^{0.785398} (e^{3x} \sin(2x))\, dx$$

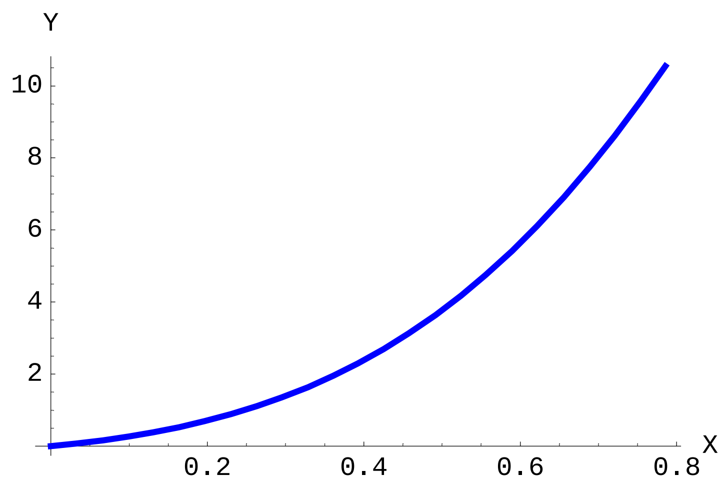
$[a, b] = [0., 0.785398]$ $n = 48$ $\delta = 0.001$

empleando el algoritmo de *cuadratura adaptativa*.

$$I = \int_{0.}^{0.785398} (e^{3x} \sin(2x))\, dx \approx 2.58770145346$$

Representación de la función

$$f(x) = e^{3x} \sin(2x)$$




■ **Problema 7.** Calcular la integral

$$\int_a^b \frac{2}{x^2-4}\, d\,x$$

empleando el método de *cuadratura adaptativa* en el intervalo $x \in [1, 1.6]$ con una tolerancia de $10^{-3}$.

---

**Solución**

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b f(x)\, dx = \int_{1.}^{1.6} \left( \frac{2}{x^2-4} \right) dx$$

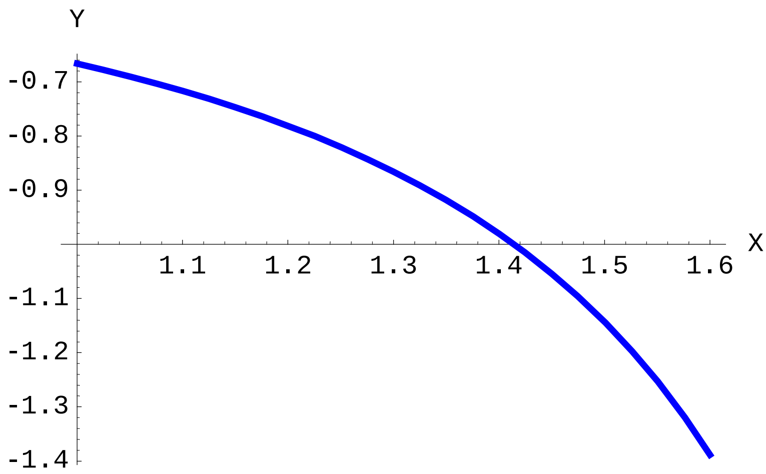
$[a, b] = [1., 1.6]$ $n = 48$ $\delta = 0.001$

empleando el algoritmo de *cuadratura adaptativa*.

$$I = \int_{1.}^{1.6} \left( \frac{2}{x^2-4} \right) dx \approx -0.549554643992$$

Representación de la función

$$f(x) = \frac{2}{x^2-4}$$




■ **Problema 8.** Calcular la integral

$$\int_a^b \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\, d\, x$$

empleando el método de *cuadratura adaptativa* en el intervalo $x \in [3, 3.5]$ con una tolerancia de $10^{-3}$.

---

**Solución**

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b f(x)\, dx = \int_{3.}^{3.5} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} \right) dx$$

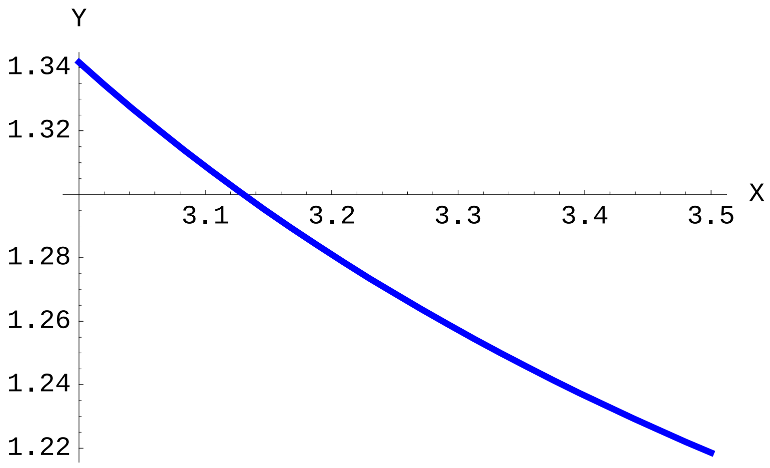
$[a,\ b] = [3.,\ 3.5]$    $n = 48$    $\delta = 0.001$

empleando el algoritmo de *cuadratura adaptativa*.

$$I = \int_{3.}^{3.5} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} \right) dx \approx 0.636215080059$$

Representación de la función

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$$




■ **Problema 9.** Calcular la integral

$$\int_a^b \cos^2(x)\, d\,x$$

empleando el método de *cuadratura adaptativa* en el intervalo $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ con una tolerancia de $10^{-3}$.

---

**Solución**

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b f(x)\, dx = \int_{0.}^{0.785398} (\cos^2(x))\, dx$$

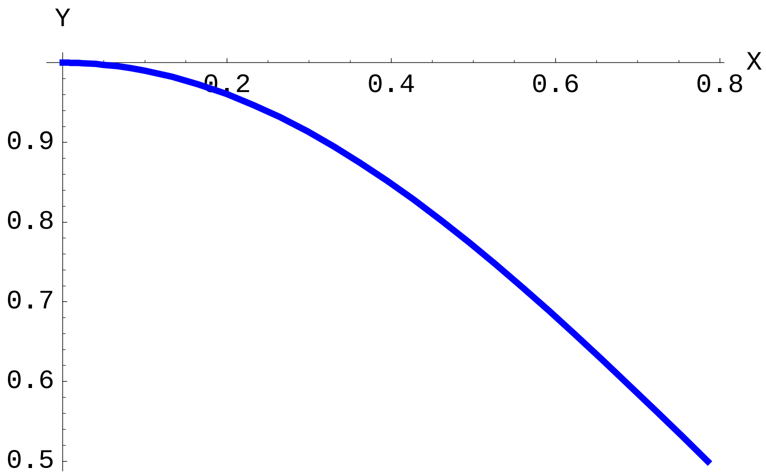
$[a, b] = [0., 0.785398]$ $n = 48$ $\delta = 0.001$

empleando el algoritmo de *cuadratura adaptativa*.

$$I = \int_{0.}^{0.785398} (\cos^2(x))\, dx \approx 0.642732727942$$

Representación de la función

$$f(x) = \cos^2(x)$$




■ **Problema 10.** Calcular la integral

$$\int_a^b e^{2x} \operatorname{sen}(3x)\, dx$$

empleando el método de *cuadratura adaptativa* en el intervalo $x \in [1, 3]$ con una tolerancia de $10^{-5}$.

---

**Solución**

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b f(x)\, dx = \int_{1.}^{3.} (e^{2x} \sin(3x))\, dx$$

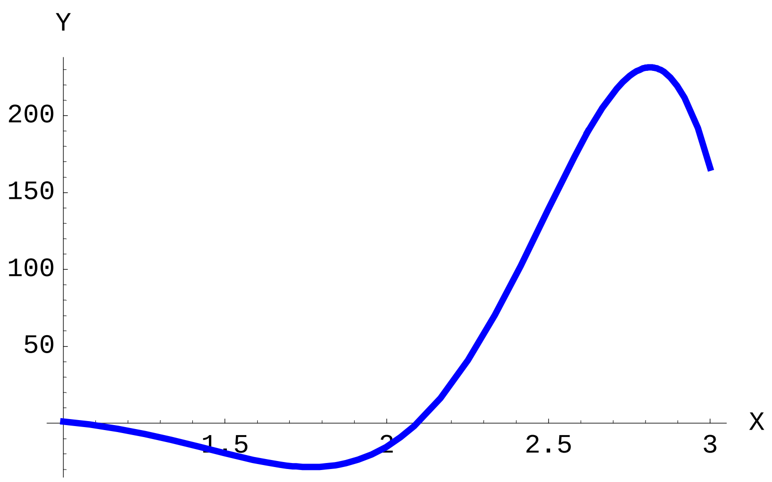
$[a, b] = [1., 3.]$ $n = 48$ $\delta = 0.00001$

empleando el algoritmo de *cuadratura adaptativa*.

$$I = \int_{1.}^{3.} (e^{2x} \sin(3x))\, dx \approx 108.555281316$$

Representación de la función

$$f(x) = e^{2x} \sin(3x)$$




■ **Problema 11.** Calcular la integral

$$\int_a^b e^{3x} \operatorname{sen}(2x)\, d\, x$$

empleando el método de *cuadratura adaptativa* en el intervalo $x \in [1, 3]$ con una tolerancia de $10^{-5}$.

---

**Solución**

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b f(x)\, dx = \int_{1.}^{3.} \left( e^{3x} \sin(2x) \right) dx$$

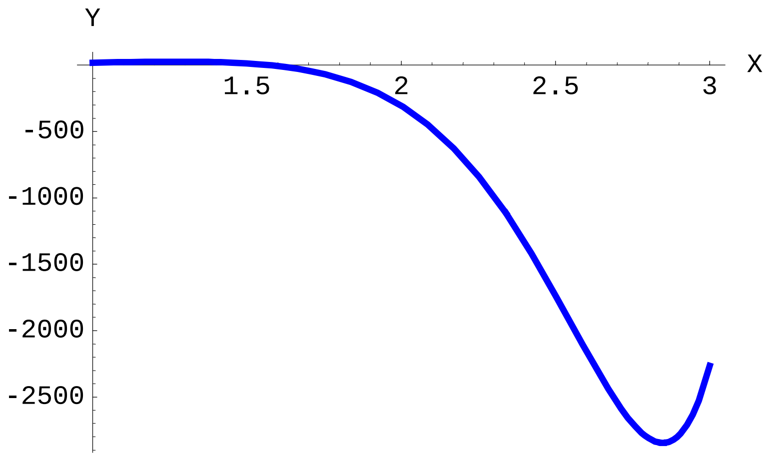
$[a, b] = [1., 3.]$  $n = 48$  $\delta = 0.00001$

empleando el algoritmo de *cuadratura adaptativa*.

$$I = \int_{1.}^{3.} \left( e^{3x} \sin(2x) \right) dx \approx -1724.96698288$$

Representación de la función

$$f(x) = e^{3x} \sin(2x)$$




■ **Problema 12.** Calcular la integral

$$\int_a^b (2\,x\cos(2\,x) - (x-2)^2)\,d\,x$$

empleando el método de *cuadratura adaptativa* en el intervalo $x \in [1, 5]$ con una tolerancia de $10^{-5}$.

---

**Solución**

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_{0.}^{5.} (\,2\,x\cos(2\,x) - (x-2)^2\,)\,dx$$

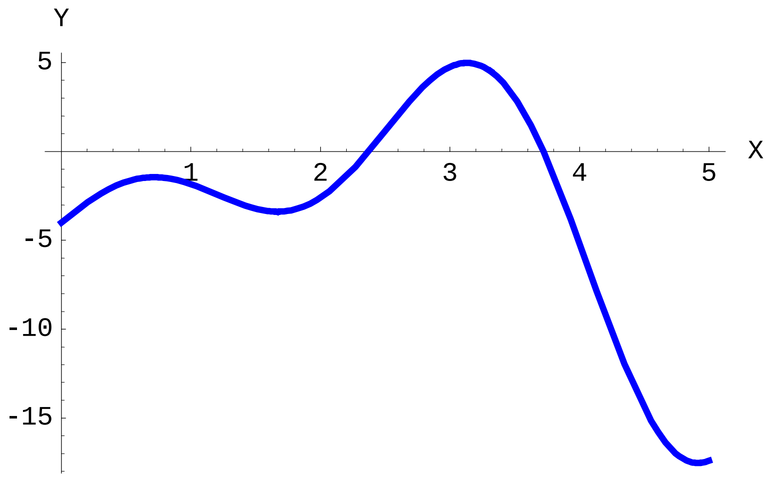
$[a,\,b] = [0.,\,5.]$ $\qquad n = 48 \qquad \delta = 0.00001$

empleando el algoritmo de *cuadratura adaptativa*.

$$I = \int_{0.}^{5.} (\,2\,x\cos(2\,x) - (x-2)^2\,)\,dx \approx -15.3063082698$$

Representación de la función

$$f(x) = 2\,x\cos(2\,x) - (x-2)^2$$




■ **Problema 13.** Calcular la integral

$$\int_a^b (4\,x\cos(2\,x) - (x-2)^2)\,d\,x$$

empleando el método de *cuadratura adaptativa* en el intervalo $x \in [1, 5]$ con una tolerancia de $10^{-5}$.

---

**Solución**

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_{0.}^{5.} (\,4\,x\cos(2\,x) - (x-2)^2\,)\,dx$$

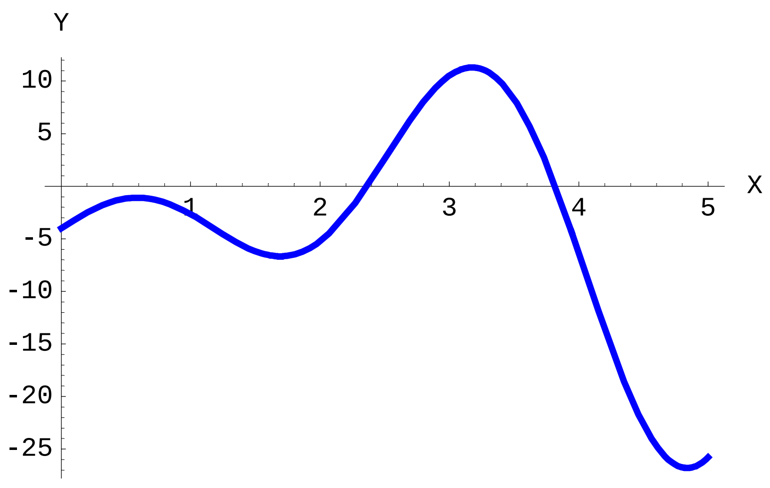
$[a,\,b] = [0.,\,5.]$ $\quad n = 48 \quad$ $\delta = 0.00001$

empleando el algoritmo de *cuadratura adaptativa*.

$$I = \int_{0.}^{5.} (\,4\,x\cos(2\,x) - (x-2)^2\,)\,dx \approx -18.9459488693$$

Representación de la función

$$f(x) = 4\,x\cos(2\,x) - (x-2)^2$$




■ **Problema 14.** Calcular la integral

$$\int_a^b x\cos(x^2)\,d\,x$$

empleando el método de *cuadratura adaptativa* en el intervalo $x \in [0, \pi]$ con una tolerancia de $10^{-6}$.

---

**Solución**

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b f(x)\;dx = \int_{0.}^{3.14159} (\,x\cos(x^2)\,)\;dx$$

$[a,\ b] = [0.,\ 3.14159]$ $n = 48$ $\delta =$ $-6$

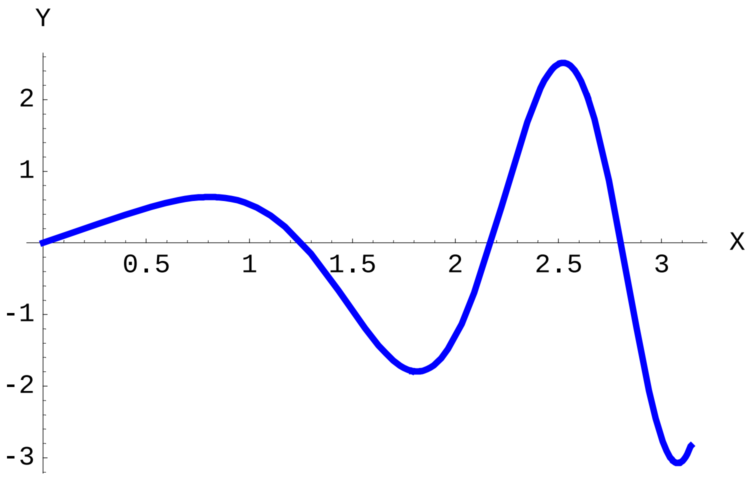
1. 10

empleando el algoritmo de *cuadratura adaptativa*.

$$I = \int_{0.}^{3.14159} (\,x\cos(x^2)\,)\;dx \approx -0.215150617161$$

Representación de la función

$$f(x) = x\cos(x^2)$$




■ **Problema 15.** Calcular la integral

$$\int_a^b x \sin(x^2)\, d\, x$$

empleando el método de *cuadratura adaptativa* en el intervalo $x \in [0, \pi]$ con una tolerancia de $10^{-6}$.

---

**Solución**

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b f(x)\, dx = \int_{0.}^{3.14159} (\, x \sin(x^2)\,)\, dx$$

$[a, b] = [0., 3.14159]$ $n = 48$ $\delta =$ $-6$

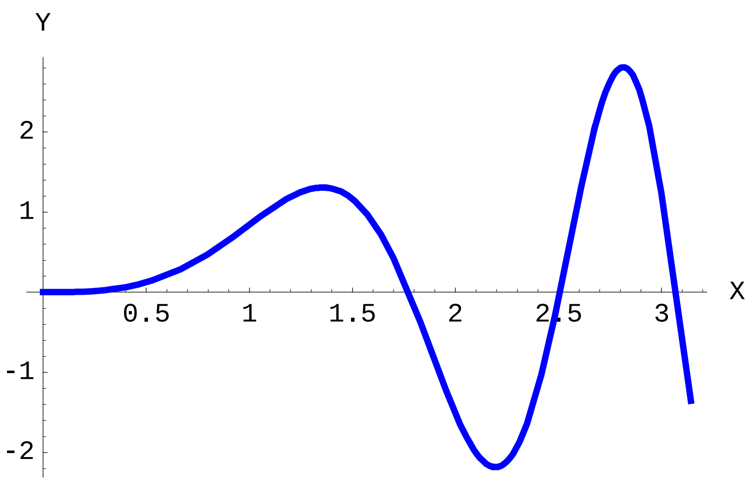
1. 10

empleando el algoritmo de *cuadratura adaptativa.*

$$I = \int_{0.}^{3.14159} (\, x \sin(x^2)\,)\, dx \approx 0.951342565988$$

Representación de la función

$f(x) = x \sin(x^2)$




■ **Problema 16.** Calcular la integral

$$\int_a^b x^2 \cos(x)\, d\, x$$

empleando el método de *cuadratura adaptativa* en el intervalo $x \in [0, \pi]$ con una tolerancia de $10^{-6}$.

---

**Solución**

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b f(x)\, dx = \int_{0.}^{3.14159} (x^2 \cos(x))\, dx$$

$[a, b] = [0., 3.14159]$ $n = 48$ $\delta = \quad -6$

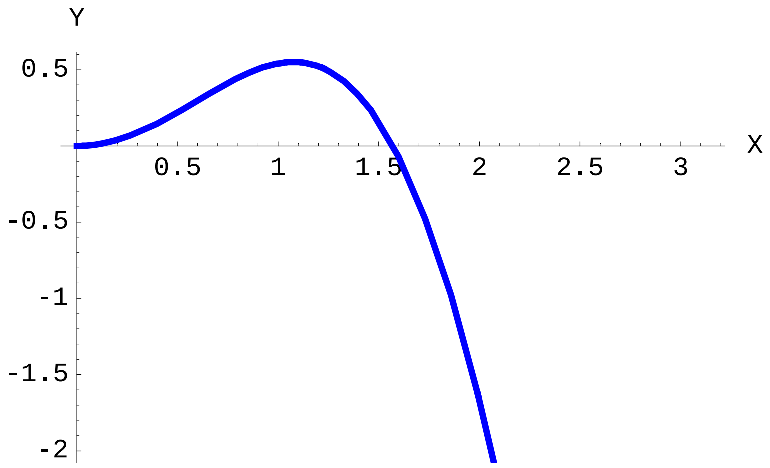
1. 10

empleando el algoritmo de *cuadratura adaptativa*.

$$I = \int_{0.}^{3.14159} (x^2 \cos(x))\, dx \approx -6.28318518381$$

Representación de la función

$$f(x) = x^2 \cos(x)$$




■ **Problema 17.** Calcular la integral

$$\int_a^b x^2 \sin(x^2)\, d\, x$$

empleando el método de *cuadratura adaptativa* en el intervalo $x \in [0, \pi]$ con una tolerancia de $10^{-6}$.

---

**Solución**

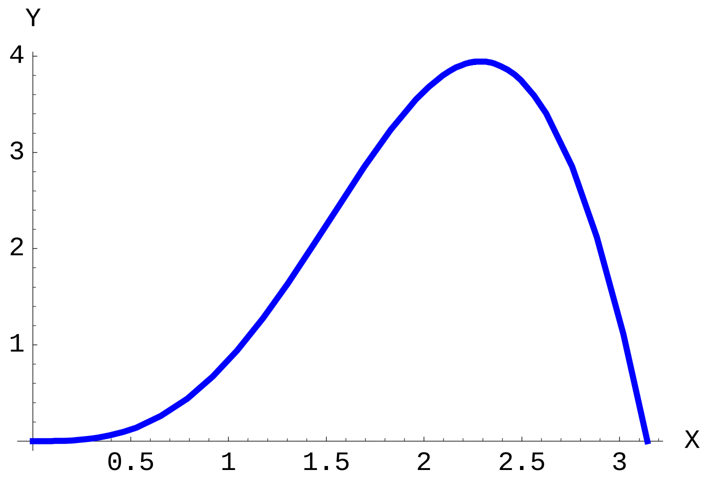
Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b f(x)\, dx = \int_{0.}^{3.14159} (\, x^2 \sin(x)\,)\, dx$$

$[a, b] = [0., 3.14159]$ $n = 48$ $\delta =$ $-6$
1. 10
empleando el algoritmo de *cuadratura adaptativa*.

$$I = \int_{0.}^{3.14159} (\, x^2 \sin(x)\,)\, dx \approx 5.86960437088$$

Representación de la función
$f(x) = x^2 \sin(x)$




■ **Problema 18.** Calcular la integral

$$\int_a^b \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) d\,x$$

empleando el método de *cuadratura adaptativa* en el intervalo $x \in [0.1, 2]$ con una tolerancia de $10^{-3}$.

---

**Solución**

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_{0.1}^{2.} \left(\sin\left(\tfrac{1}{x}\right)\right) dx$$

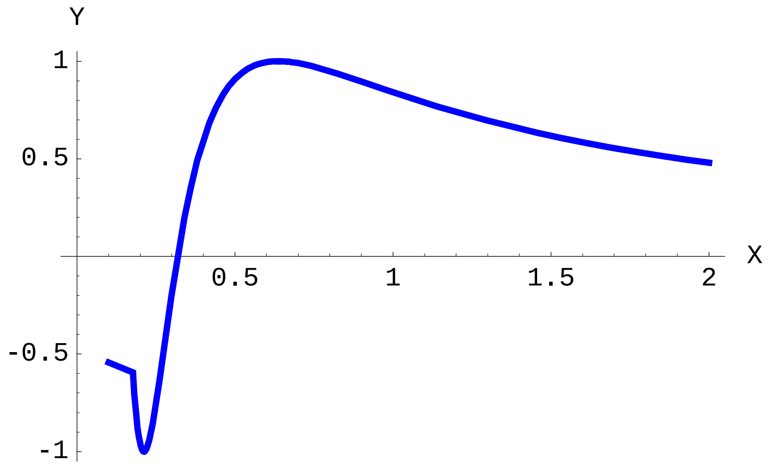
$[a,\ b] = [0.1,\ 2.]$ $\quad n = 48 \quad$ $\delta = 0.001$

empleando el algoritmo de *cuadratura adaptativa*.

$$I = \int_{0.1}^{2.} \left(\sin\left(\tfrac{1}{x}\right)\right) dx \approx 1.14544664221$$

Representación de la función

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$




■ **Problema 19.** Calcular la integral

$$\int_a^b \cos(\tfrac{1}{x})\, d\, x$$

empleando el método de *cuadratura adaptativa* en el intervalo $x \in [0.1, 2]$ con una tolerancia de $10^{-3}$.

---

**Solución**

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b f(x)\, dx = \int_{0.1}^{2.} \left(\cos(\tfrac{1}{x})\right) dx$$

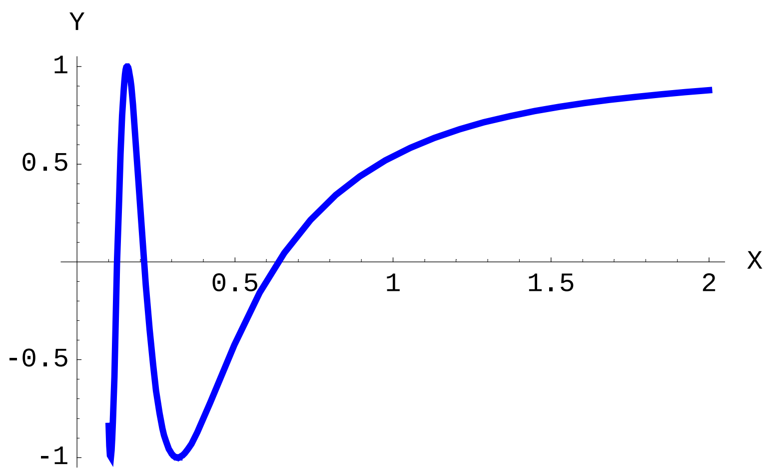
$[a,\, b] = [0.1,\, 2.]$ $n = 48$ $\delta = 0.001$

empleando el algoritmo de *cuadratura adaptativa*.

$$I = \int_{0.1}^{2.} \left(\cos(\tfrac{1}{x})\right) dx \approx 0.673781508453$$

Representación de la función

$$f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$




■ **Problema 20.** Calcular la integral

$$\int_a^b u(x)\, d\, x$$

siendo $u(x) = \frac{2}{(\sqrt{9})^2-4} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{9}-2}{2}\, x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{9}+2}{2}\, x\right)$, y empleando el método de *cuadratura adaptativa* en el intervalo $x \in [0,\, 2\,\pi]$ con una tolerancia de $10^{-4}$.

---

**Solución**

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b f(x)\, dx = \int_{0.}^{6.28319} \left( \frac{2}{5} \sin\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{5\,x}{2}\right) \right) dx$$

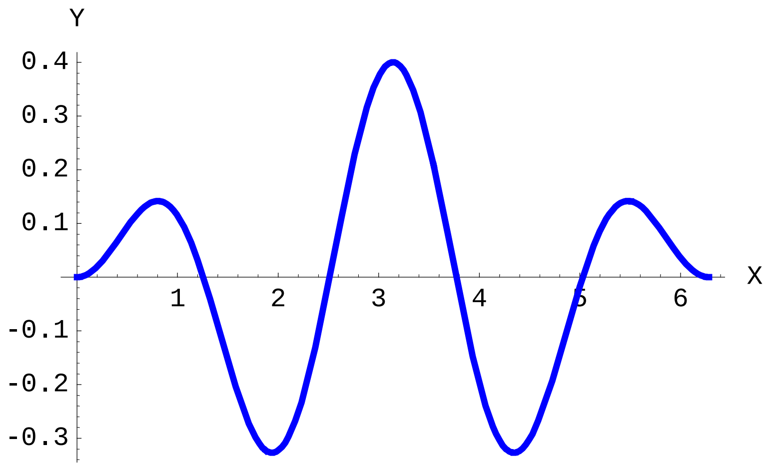
$[a,\, b] = [0.,\, 6.28319]$ $\quad n = 48 \quad \delta = 0.0001$

empleando el algoritmo de *cuadratura adaptativa*.

$$I = \int_{0.}^{6.28319} \left( \frac{2}{5} \sin\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{5\,x}{2}\right) \right) dx \approx 1.11672823766 \times 10^{-16}$$

Representación de la función

$$f(x) = \frac{2}{5} \sin\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{5\,x}{2}\right)$$




■ **Problema 21.** Calcular la integral

$$c(x) = \int_a^b \cos(\tfrac{\pi}{2}\, x^2)\, d\, x$$

empleando el método de *cuadratura adaptativa* en el intervalo $x \in [0, 1.0]$ con una tolerancia de $10^{-4}$.

---

**Solución**

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b f(x)\, dx = \int_{0.}^{1.} \left(\cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right)\right) dx$$

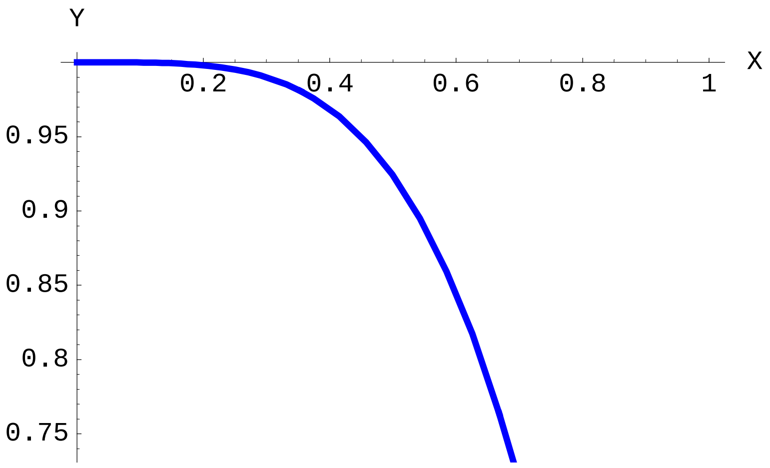
$[a,\, b] = [0.,\, 1.]$ $\quad n = 48 \quad$ $\delta = 0.0001$

empleando el algoritmo de *cuadratura adaptativa*.

$$I = \int_{0.}^{1.} \left(\cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right)\right) dx \approx 0.779880036871$$

Representación de la función

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right)$$




■ **Problema 22.** Calcular la integral

$$c(x) = \int_a^b \operatorname{sen}(\tfrac{\pi}{2}\, x^2)\, d\, x$$

empleando el método de *cuadratura adaptativa* en el intervalo $x \in [0, 1.0]$ con una tolerancia de $10^{-4}$.

---

**Solución**

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b f(x)\, dx = \int_{0.}^{1.} \left(\sin\left(\tfrac{\pi x^2}{2}\right)\right) dx$$

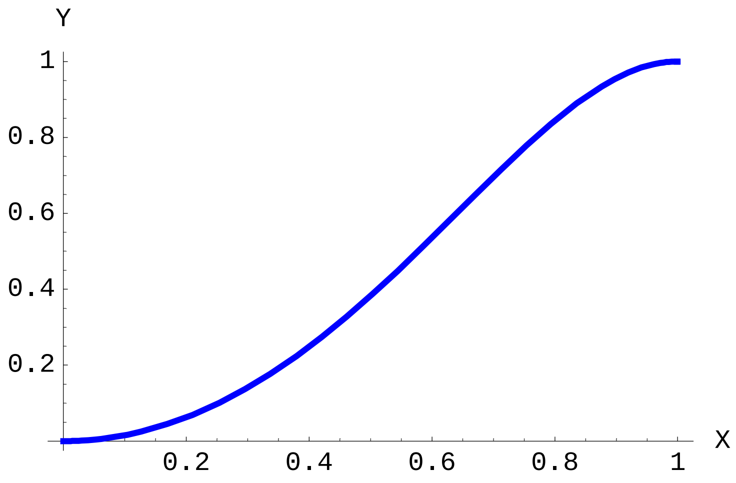
$[a, b] = [0., 1.]$ $n = 48$ $\delta = 0.0001$

empleando el algoritmo de *cuadratura adaptativa*.

$$I = \int_{0.}^{1.} \left(\sin\left(\tfrac{\pi x^2}{2}\right)\right) dx \approx 0.438245259596$$

Representación de la función

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi x^2}{2}\right)$$


Y
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0.2
0.4
0.6
0.8
1
X

# 4. Integrales múltiples

## 4.1 Descripción de la integral doble de Simpson

Consideramos la integral doble:

$$\iint_R f(x, y)\, dA \tag{13}$$

donde $R$ es una región rectangular en el plano:

$$R = \{(x, y) \mid a \le x \le b,\ c \le y \le d\} \tag{14}$$

para algunas constantes $a$, $b$, $c$, y $d$.

Usando para describir el método de la regla *compuesta de Simpson*, dividimos la región $R$ fraccionando $[a, b]$ y $[c, d]$ en un número par de intervalos. Simplificando la notación escogemos los enteros $n$ y $m$ junto a las particiones $[a, b]$ y $[c, d]$ con los puntos de red uniformemente espaciados $x_0, x_1, \ldots, x_{2n}$ y $y_0, y_1, \ldots, y_{2m}$, respectivamente.

Estas subdivisiones determinan los tamaños del paso:

$$h = \frac{(b-a)}{2n} \qquad k = \frac{(d-c)}{2m}. \tag{15}$$

Al escribir la integral doble como integral iterada:

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx. \tag{16}$$

Primero aplicamos la regla *compuesta de Simpson* para evaluar:

$$\int_c^d f(x, y)\, dy. \tag{17}$$

Tratando a $x$ como una constante. Sea $y_i = c + jk$ para cada $j = 0, 1, ..., 2m$, entonces:

$$\begin{aligned}\int_c^d f(x, y)\, dy \\ &= \frac{k}{3}\left[f(x, y_0) + 2\sum_{j=1}^{m-1} f(x, y_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{m} f(x, y_{2j-1}) + f(x, y_{2m})\right] \\ &- \frac{(d-c)k^4}{180}\frac{\partial^4 f(x, \mu)}{\partial y^4}\end{aligned} \tag{18}$$

para alguna $\mu$ en $(c, d)$.Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx = \\ \frac{k}{3}\Big[\int_a^b f(x, y_0)\, dx + 2\sum_{j=1}^{m-1}\int_a^b f(x, y_{2j})\, dx \\ + 4\sum_{j=1}^{m}\int_a^b f(x, y_{2j-1})\, dx + \int_a^b f(x, y_{2m})\, dx\Big] \\ - \frac{(d-c)k^4}{180}\int_a^b \frac{\partial^4 f(x, \mu)}{\partial y^4}\, dx.\end{aligned} \tag{19}$$

Ahora se aplica la regla *compuesta de Simpson* en las integrales de esta ecuación. Sea $x_i = a + ih$ para cada $i = 0, 1, ..., 2n$. Entonces para cada $j = 0, 1, ..., 2m$ tenemos :

$$\begin{aligned}\int_c^d f(x, y)\, dy = \\ \frac{k}{3}\left[f(x_0, y_j) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_{2i}, y_j) + 4\sum_{j=1}^{n} f(x_{2i-1}, y_j) + f(x_{2n}, y_j)\right] \\ - \frac{(b-a)h^4}{180}\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(\xi_j, y_j)\end{aligned} \tag{20}$$

para alguna $\xi_j$en $(a,\, b)$.La aproximación resultante tiene la forma:

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \int_c^d f(x,\, y)\, dy\, dx \approx \\
&\frac{h\,k}{9} \Big\{ \Big[ f(x_0,\, y_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2\,i},\, y_0) + 4 \sum_{i=1}^{n} f(x_{2\,i-1},\, y_0) + f(x_{2\,n},\, y_0) \Big] \\
&\qquad + 2 \Big[ \sum_{j=1}^{m-1} f(x_0,\, y_{2\,j}) + 2 \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2\,i},\, y_{2\,j}) \\
&\qquad\quad + 4 \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{i=1}^{n} f(x_{2\,i-1},\, y_{2\,j}) + \sum_{j=1}^{m-1} f(x_{2\,n},\, y_{2\,j}) \Big] \\
&\qquad + 4 \Big[ \sum_{j=1}^{m} f(x_0,\, y_{2\,j-1}) + 2 \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2\,i},\, y_{2\,j-1}) \\
&\qquad\quad + 4 \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} f(x_{2\,i-1},\, y_{2\,j-1}) + \sum_{j=1}^{m} f(x_{2\,n},\, y_{2\,j-1}) \Big] \\
&\qquad + \Big[ f(x_0,\, y_{2\,m}) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2\,i},\, y_{2\,m}) + 4 \sum_{i=1}^{n} f(x_{2\,i-1},\, y_{2\,m}) \\
&\qquad\quad + f(x_{2\,n},\, y_{2\,m}) \Big] \Big\}.
\end{aligned} \tag{21}$$

El término de error $E$ vendrá dado por:

$$\begin{aligned}
E = &\frac{-k(b-a)\,h^4}{540} \Big[ \frac{\partial^4 f(\xi_0,\, y_0)}{\partial x^4} + 2 \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\partial^4 f(\xi_{2\,j},\, y_{2\,j})}{\partial x^4} \\
&\quad + 4 \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^4 f(\xi_{2\,j-1},\, y_{2\,j-1})}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 f(\xi_{2\,m},\, y_{2\,m})}{\partial x^4} \Big] \\
&\quad - \frac{(d-c)\,k^4}{180} \int_a^b \frac{\partial^4 f(x,\, \mu)}{\partial y^4}\, dx.
\end{aligned} \tag{22}$$

Si $\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}$ es continua, el teorema del valor intermedio puede aplicarse varias veces para demostrar que la evaluación de las derivadas parciales respecto a $x$ puede ser reemplazada por un valor común y que:

$$E = \frac{-k(b-a)h^4}{540}\left[6m\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(\bar{\eta}, \bar{\mu})\right] - \frac{(d-c)k^4}{180}\int_a^b \frac{\partial^4 f(x,\mu)}{\partial y^4}\,dx \tag{23}$$

para algunas $(\bar{\eta}, \bar{\mu})$en $R$.

Si $\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}$ también es continua, el teorema del valor medio ponderado de las integrales implica que:

$$\int_a^b \frac{\partial^4 f(x,\mu)}{\partial y^4}\,dx = (b-a)\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\left(\hat{\eta}, \hat{\mu}\right) \tag{24}$$

para algunas $(\bar{\eta}, \bar{\mu})$en $R$.

Puesto que $2m = \frac{(d-c)}{k}$, el término de error tiene la forma:

$$\begin{aligned} E &= \frac{-k(b-a)h^4}{540}\left[6m\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(\bar{\eta}, \bar{\mu})\right] - \frac{(d-c)(b-a)}{180}k^4\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\left(\hat{\eta}, \hat{\mu}\right) \\ &= -\frac{(d-c)(b-a)}{180}\left[h^4\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(\bar{\eta}, \bar{\mu}) + k^4\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\left(\hat{\eta}, \hat{\mu}\right)\right] \end{aligned} \tag{25}$$

para algunas $(\bar{\eta}, \bar{\mu})$ y $\left(\hat{\eta}, \hat{\mu}\right)$ en $R$.

Podemos aplicar la misma técnica para aproximar las integrales triples y las integrales superiores de funciones con más de tres variables. La cantidad de evaluaciones funcionales necesarias para la aproximación, es producto del número de las que se requieren cuando aplicamos el método a cada variable. Si queremos reducir la cantidad de evaluaciones funcionales, en vez de las *fórmulas de Newton-Cotes* podemos incorporar métodos más eficientes como la *cuadratura gaussiana*, la *integración de Romberg* o la *cuadratura adaptativa*.

El uso de los métodos con que se aproximan las integrales dobles no se limita a las que tienen regiones rectangulares de integración. Los métodos explicados anteriormente pueden modificarse para aproximar las integrales dobles del tipo:

$$\int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy\, dx \tag{26}$$

o

$$\int_c^d \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, y)\, dx\, dy\,. \tag{27}$$

También se pueden efectuar las aproximaciones de las integrales en las regiones que no son de este tipo efectuando particiones de la región adecuadas.

Para describir el método que se utiliza al aproximar una integral en la forma:

$$\int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy\, dx \tag{28}$$

aplicamos la *regla de Simpson* para integrar respecto a ambas variables. El tamaño del paso de la variable $x$ es $h = \frac{(b-a)}{2}$, pero el tamaño del paso de $y$ varía con $x$ y se escribe:

$$k(x) = \frac{d(x) - c(x)}{2}\,. \tag{29}$$

En consecuencia:

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy\, dx \\
&\qquad \approx \int_a^b \frac{k(x)}{3}[f(x, c(x)) + 4 f(x, c(x) + k(x)) + f(x, d(x))]\, dx \\
&\qquad \approx \frac{h}{3}\Big\{\frac{k(a)}{3}[f(a, c(a)) + 4 f(a, c(a) + k(a)) + f(a, d(a))] \\
&\qquad\quad + \frac{4\, k(a+h)}{3}[f(a+h, c(a+h)) + \\
&\qquad\qquad 4 f(a+h, c(a+h) + k(a+h)) + f(a+h, d(a+h))] \\
&\qquad\quad + \frac{k(b)}{3}[f(b, c(b)) + 4 f(b, c(b) + k(b)) + f(b, d(b))]\Big\}.
\end{aligned} \tag{30}
$$

## 4.2 Pseudocódigo de la regla de la integral doble de Simpson

Este algoritmo aplica la regla compuesta de *Simpson* a una integral de la forma:

$$\int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy\, dx \tag{31}$$

- **Algoritmo 2. Método de la integral doble de Simpson.**

**Input** $(f(x, y), [a, b], c(x), d(x), m, n)$

$h \leftarrow \frac{b-a}{2n}$
$J_1 \leftarrow 0$ (* Términos extremos *)
$J_2 \leftarrow 0$ (* Términos pares *)
$J_3 \leftarrow 0$ (* Términos impares *)

**For** $i = 0, 1, 2, 3, \ldots, 2n$ **do**
(* Método compuesto de Simpson para x *)
$x \leftarrow a + i\,h$
$\text{HX} \leftarrow \frac{d(x)-c(x)}{2m}$

(* Términos Extremos *)
$\text{K1} \leftarrow f(x, c(x)) + f(x, d(x))$

(* Términos pares *)
$\text{K2} \leftarrow 0$

(* Términos impares *)
$\text{K3} \leftarrow 0$

**For** $j = 1, 2, 3, \ldots, 2\,m - 1$ **do**
$y \leftarrow c(x) + j\,\mathrm{HX}$
$Q \leftarrow f(x, y)$

**If Mod** $(j, 2) = 0$ **Then**
$\mathrm{K2} \leftarrow \mathrm{K2} + Q$
**Else**
$\mathrm{K3} \leftarrow \mathrm{K3} + Q$
**End If**
**End For**

$L \leftarrow \frac{(K_1 + 2\,K_2 + 4\,K_3)\,\mathrm{HX}}{3}$

**If** $i = 0 \;||\; i = 2\,n$ **Then**
$J_1 \leftarrow J_1 + L$
**Else**
**If** Mod $(i, 2) = 0$ **Then**
$J_2 \leftarrow J_2 + L$
**Else**
$J_3 \leftarrow J_3 + L$
**End If**
**End If**
**End For**

$J \leftarrow \frac{h(J_1 + 2\,J_2 + 4\,J_3)}{3}$

**Return** $(J)$
**Output**

## 4.3 Problemas

■ **Problema 23.** Calcúlese el valor aproximado de la integral

$$\int_a^b \int_c^d (x\,y^2)\,d\,y\,d\,x$$

con $[a, b] = [2.1, 2.5]$, $[c, d] = [1.2, 1.4]$ empleando la integral doble de *Simpson* con $n = m = 2$.

---

**Solución**

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\,dy\,dx = \int_{2.1}^{2.5} \int_{1.2}^{1.4} (\,x\,y^2\,)\,dy\,dx$$

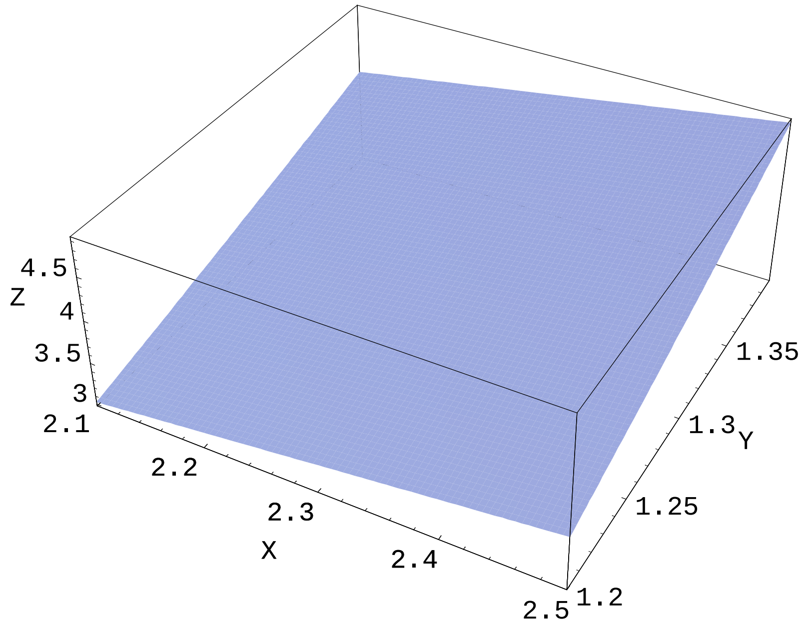
$[a, b] = [2.1, 2.5]$ $\quad c(x) = 1.2$ $\quad d(x) = 1.4$

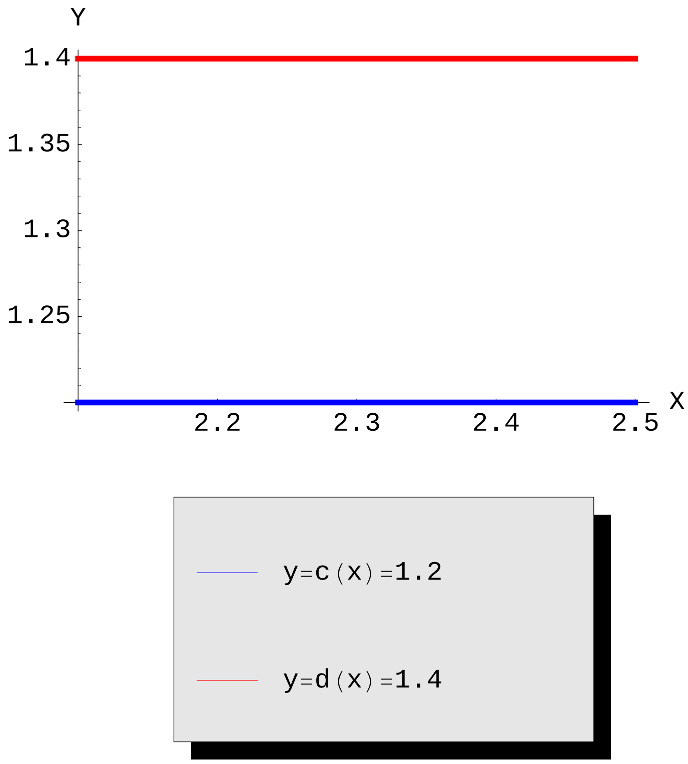
$n = 2$ $\quad m = 2$

empleando la *integral doble de Simpson*.

$$I = \int_{2.1}^{2.5} \int_{1.2}^{1.4} (\,x\,y^2\,)\,dy\,dx \approx 0.311573333333$$

Gráfica de la función $z = f(x, y) = x\,y^2$


4.5
Z
4
3.5
3
2.1
2.2
2.3
X
2.4
2.5
1.2
1.25
1.3
Y
1.35


Y
1.4
1.35
1.3
1.25
X
2.2
2.3
2.4
2.5
y=c(x)=1.2
y=d(x)=1.4

■ **Problema 24.** Calcúlese el valor aproximado de la integral

$$\int_a^b \int_c^d (\epsilon^{y-x})\, d\, y\, d\, x$$

con $[a, b] = [0, 0.5]$, $[c, d] = [0, 0.5]$ empleando la integral doble de *Simpson* con $n = m = 2$.

---

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy\, dx = \int_{0.}^{0.5} \int_{0.}^{0.5} (e^{x-y})\, dy\, dx$$

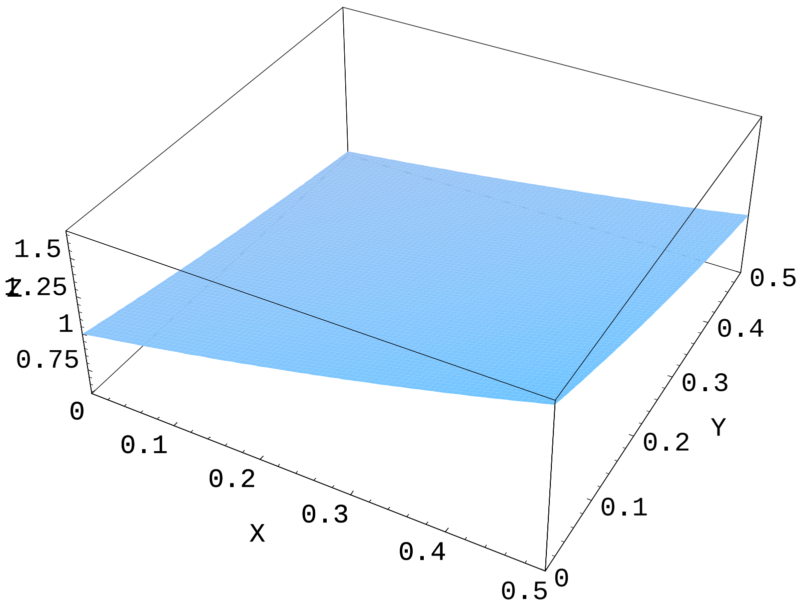
$[a, b] = [0., 0.5]$ $\quad c(x) = 0.$ $\quad d(x) = 0.5$

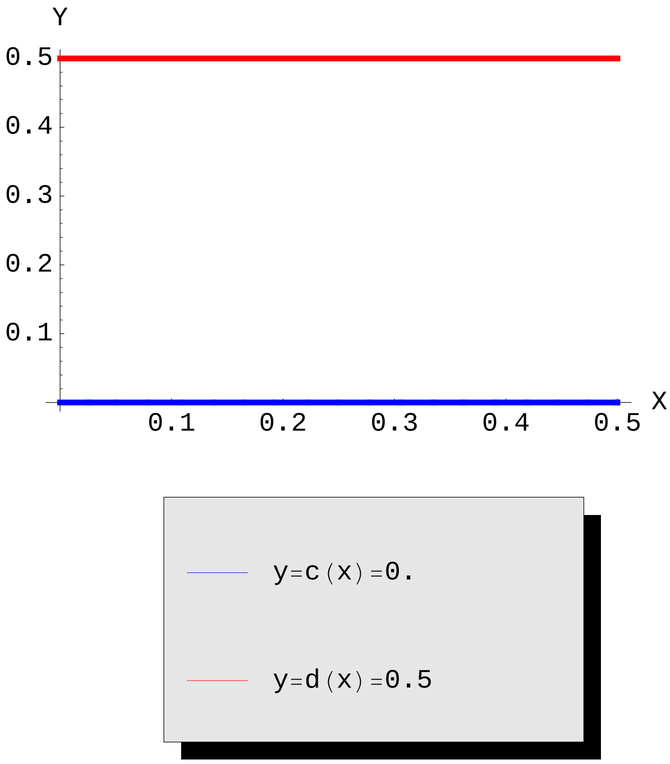
$n = 2$ $\quad m = 2$

empleando la *integral doble de Simpson*.

$$I = \int_{0.}^{0.5} \int_{0.}^{0.5} (e^{x-y})\, dy\, dx \approx 0.255252621543$$

Gráfica de la función $z = f(x, y) = e^{x-y}$






■ **Problema 25.** Calcúlese el valor aproximado de la integral

$$\int_a^b \int_c^d (x^2 + y^3)\, d\, y\, d\, x$$

con $[a, b] = [2.0, 2.2]$, $c(x) = x$, $d(x) = 2\,x$ empleando la integral doble de *Simpson* con $n = m = 2$.

---

**Solución**

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy\, dx = \int_{2.}^{2.2} \int_x^{2\,x} (\,y^3 + x^2\,)\, dy\, dx$$

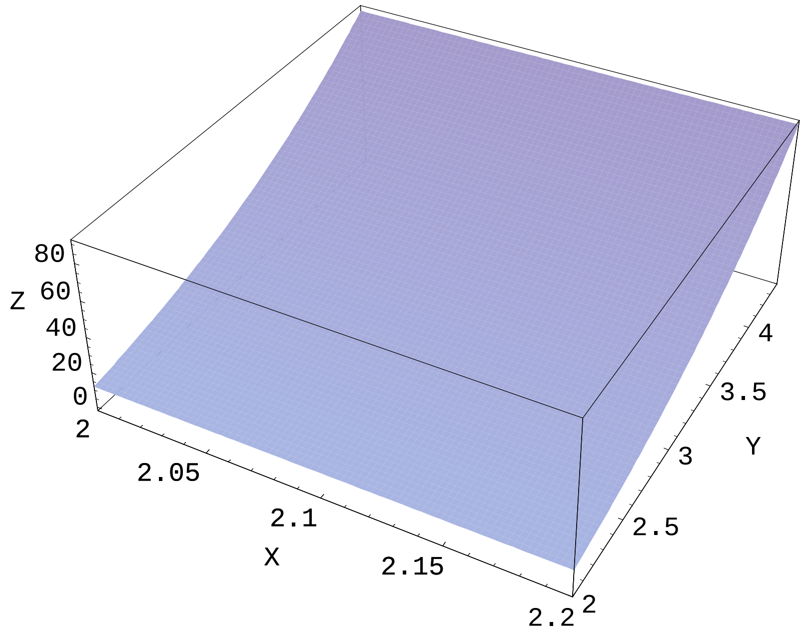
$[a, b] = [2., 2.2]$ $\quad c(x) = x$ $\quad d(x) = 2\,x$

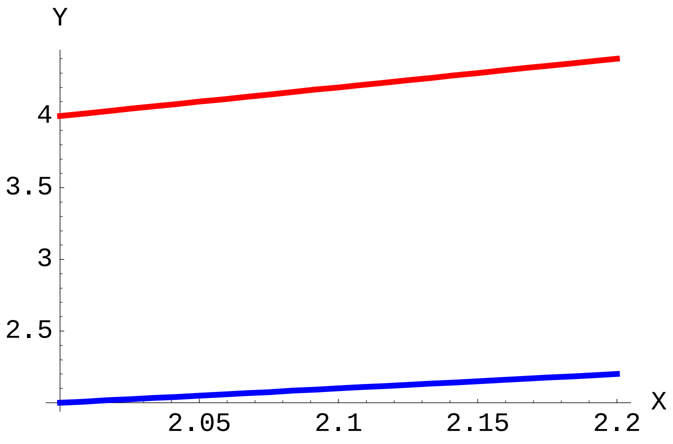
$n = 2$ $\quad m = 2$

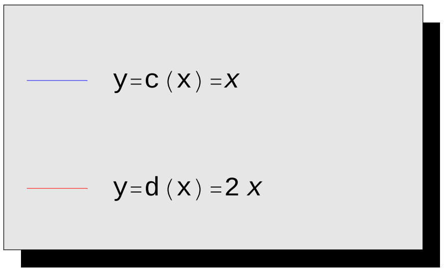
empleando la *integral doble de Simpson.*

$$I = \int_{2.}^{2.2} \int_x^{2\,x} (\,y^3 + x^2\,)\, dy\, dx \approx 16.5086406250$$

Gráfica de la función $z = f(x, y) = y^3 + x^2$


80
60
40
20
0
Z
2
2.05
2.1
2.15
2.2
X
2
2.5
3
3.5
4
Y


Y
4
3.5
3
2.5
2.05
2.1
2.15
2.2
X


y=c(x)=x
y=d(x)=2 x

■ **Problema 26.** Calcúlese el valor aproximado de la integral

$$\int_a^b \int_c^d \left(x^2 + \sqrt{y}\right) d\,y\,d\,x$$

con $[a, b] = [1.0, 1.5]$, $c(x) = 0$, $d(x) = x$ empleando la integral doble de *Simpson* con $n = m = 2$.

---

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy\, dx = \int_{1.}^{1.5} \int_0^x (x^2 + \sqrt{y})\, dy\, dx$$

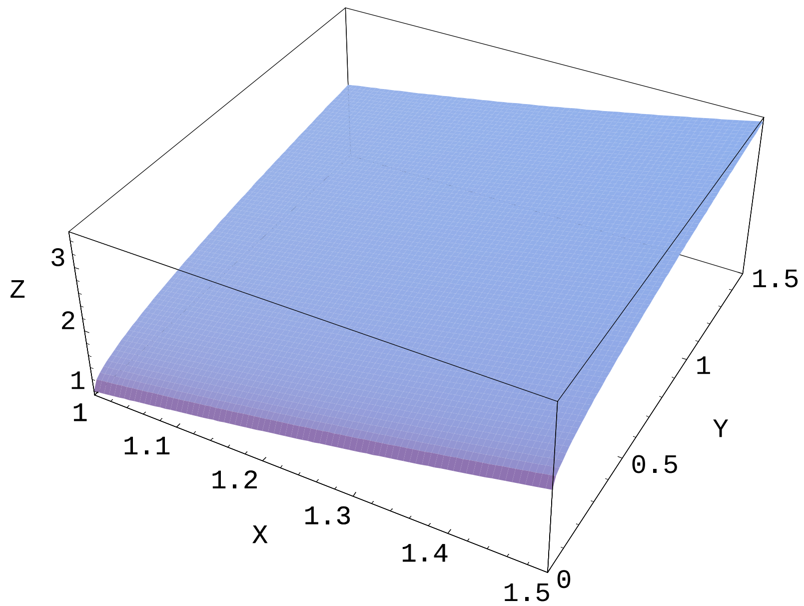
$[a, b] = [1., 1.5]$ $\quad c(x) = 0$ $\quad d(x) = x$

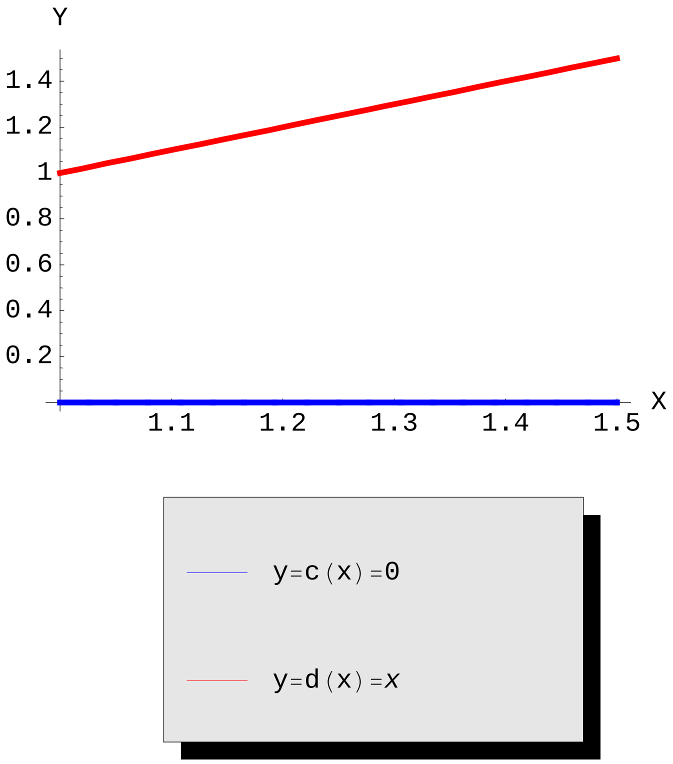
$n = 2$ $\quad m = 2$

empleando la *integral doble de Simpson*.

$$I = \int_{1.}^{1.5} \int_0^x (x^2 + \sqrt{y})\, dy\, dx \approx 1.47668410269$$

Gráfica de la función $z = f(x, y) = x^2 + \sqrt{y}$






■ **Problema 27.** Calcúlese el valor aproximado de la integral

$$\int_a^b \int_c^d (2\,y\,\text{sen}\,x + \cos^2(x))\,d\,y\,d\,x$$

con $[a, b] = [0, \frac{\pi}{4}]$, $c(x) = \text{sen}\,(x)$, $d(x) = \cos\,(x)$ empleando la integral doble de *Simpson* con

a) $n = 2$, $m = 4$.

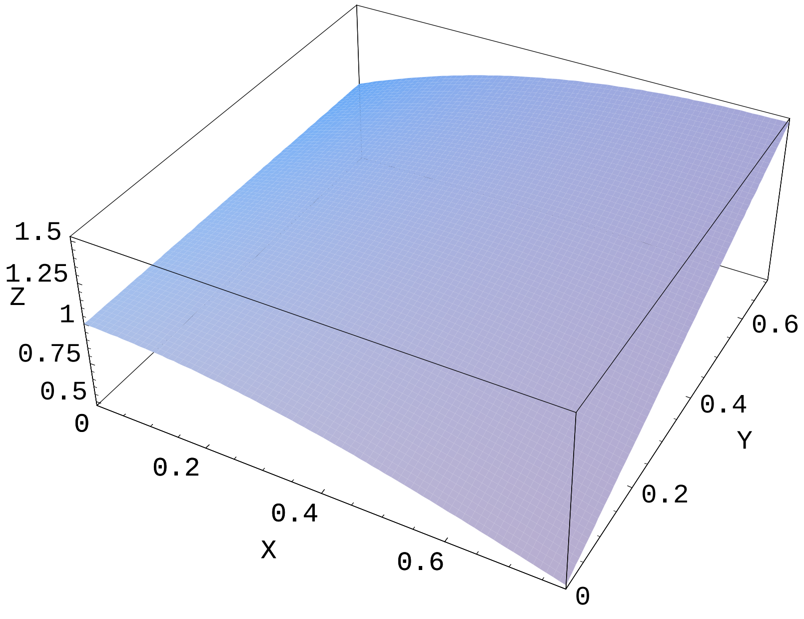
b) $n = 4$, $m = 2$.

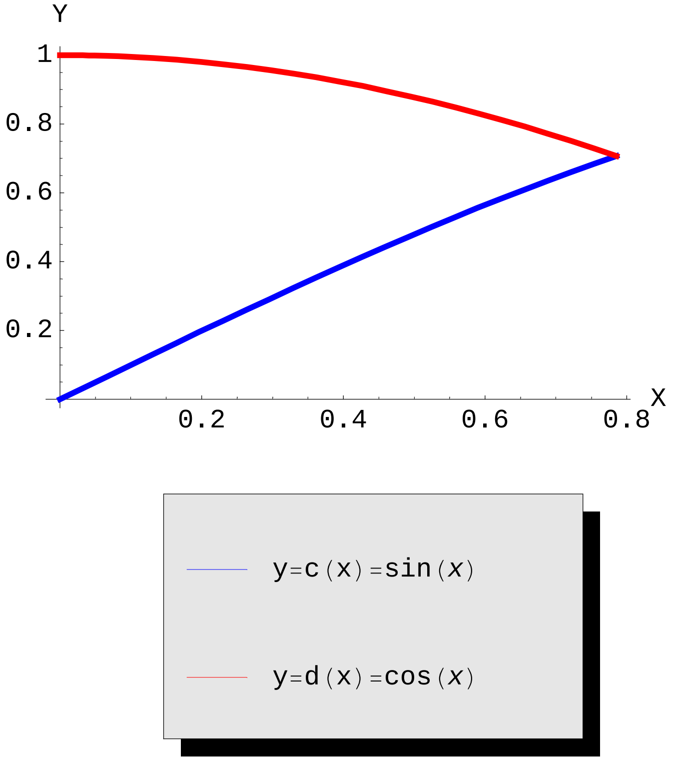
c) $n = m = 3$.

---

| $n$ | $m$ | $I$ | |
|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 0.5118446353 | 1.0000000000 integralDobleSimpson($\cos^{2.0000000000}(x)$ + |
| 4 | 2 | 0.5118446353 | 1.0000000000 integralDobleSimpson($\cos^{2.0000000000}(x)$ + |
| 3 | 3 | 0.5118446353 | 1.0000000000 integralDobleSimpson($\cos^{2.0000000000}(x)$ + |

Gráfica de la función $z = f(x, y) = \cos^2(x) + 2\,y\,\sin(x)$


1.5
1.25
Z
1
0.75
0.5
0
0.2
0.4
X
0.6
0
0.2
0.4
Y
0.6


Y
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0.2
0.4
0.6
0.8
X
y=c(x)=sin(x)
y=d(x)=cos(x)

■ **Problema 28.** Calcúlese el valor aproximado de la integral

$$\int_a^b \int_c^d (\ln(x\,y))\,d\,y\,d\,x$$

con $[a, b] = [1, e]$, $c(x) = 1$, $d(x) = x$ empleando la integral doble de *Simpson* con

a) $n = 2$, $m = 4$.

b) $n = 4$, $m = 2$.

c) $n = m = 3$.

---

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,\,y)\,dy\,dx = \int_{1.}^{e} \int_{1.}^{x} (\log(x\,y))\,dy\,dx$$

$[a,\,b] = [1.,\,e]$ $c(x) = 1.$ $d(x) = x$

$n = 2$ $m = 4$

empleando la *integral doble de Simpson.*

$$I = \int_{1.}^{e} \int_{1.}^{x} (\log(x\,y))\,dy\,dx \approx 1.71885673038$$

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,\,y)\,dy\,dx = \int_{1.}^{e} \int_{1.}^{x} (\log(x\,y))\,dy\,dx$$

$[a,\,b] = [1.,\,e]$ $c(x) = 1.$ $d(x) = x$

$n = 4$ $m = 2$

empleando la *integral doble de Simpson.*

$$I = \int_{1.}^{e} \int_{1.}^{x} (\log(x\,y))\,dy\,dx \approx 1.71822007342$$

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,\,y)\,dy\,dx = \int_{1.}^{e} \int_{1.}^{x} (\log(x\,y))\,dy\,dx$$

$[a,\,b] = [1.,\,e]$ $c(x) = 1.$ $d(x) = x$

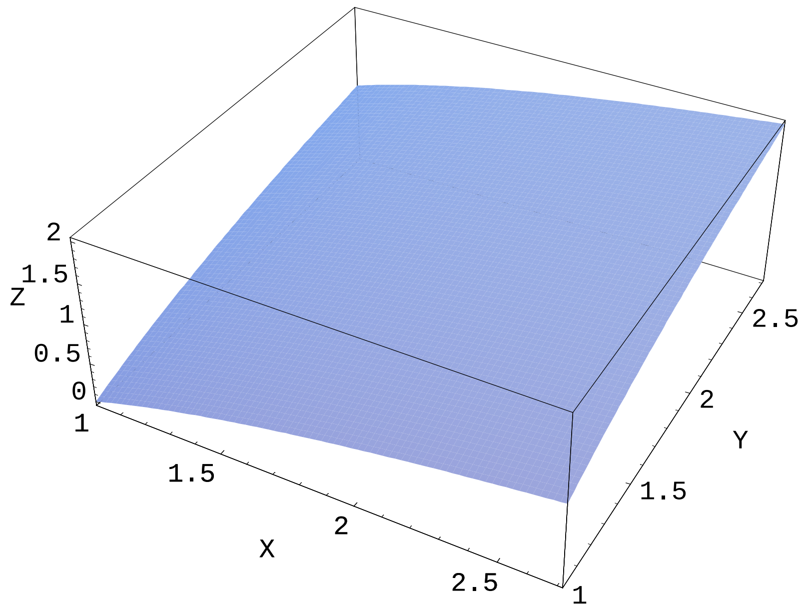
$n = 3$ $m = 3$

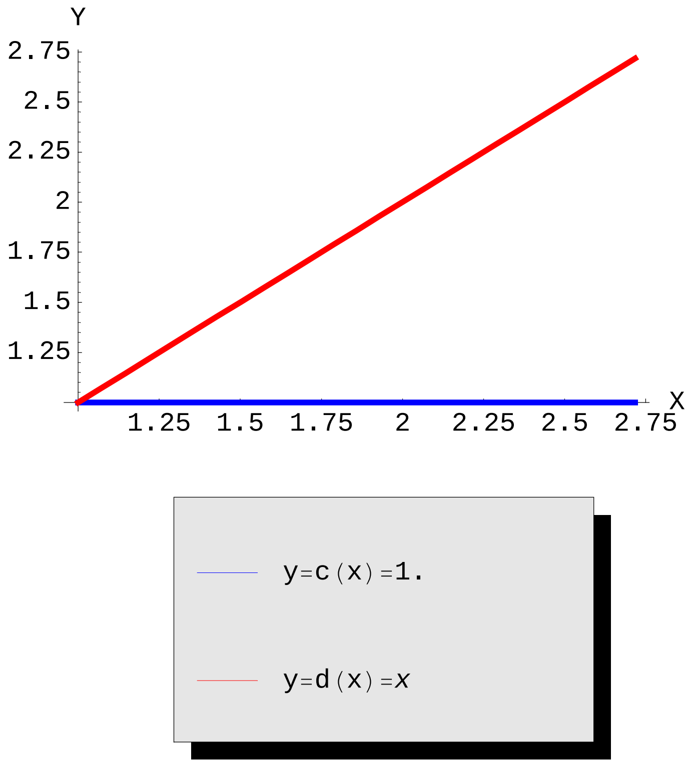
empleando la *integral doble de Simpson.*

$$I = \int_{1.}^{e} \int_{1.}^{x} (\log(x\,y))\,dy\,dx \approx 1.71838469741$$

| $n$ | $m$ | $I$ | $\bar{I}$ | $\lvert I-\bar{I}\rvert$ |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 1.7182818285 | 1.7188567304 | 0.0005749019 |
| 4 | 2 | 1.7182818285 | 1.7182200734 | 0.0000617550 |
| 3 | 3 | 1.7182818285 | 1.7183846974 | 0.0001028689 |

Gráfica de la función $z = f(x, y) = \log(x\,y)$






■ **Problema 29.** Calcúlese el valor aproximado de la integral

$$\int_a^b \int_c^d (x^2 + y^3)\, d\, y\, d\, x$$

con $[a, b] = [0, 1]$, $c(x) = x$, $d(x) = 2\,x$, empleando la integral doble de *Simpson* con los valores siguientes:

a) $n = 2$, $m = 4$.

b) $n = 4$, $m = 2$.

c) $n = m = 3$.

---

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,\, y)\, dy\, dx = \int_{0.}^{1.} \int_x^{2\,x} (\,y^3 + x^2\,)\, dy\, dx$$

$[a,\, b] = [0.,\, 1.]$ $\quad c(x) = x$ $\quad d(x) = 2\,x$

$n = 2$ $\quad m = 4$

empleando la *integral doble de Simpson.*

$$I = \int_{0.}^{1.} \int_x^{2\,x} (\,y^3 + x^2\,)\, dy\, dx \approx 1.00195312500$$

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,\, y)\, dy\, dx = \int_{0.}^{1.} \int_{x}^{2\,x} (\, y^3 + x^2 \,)\, dy\, dx$$

$[a,\, b] = [0.,\, 1.]$ $\quad c(x) = x \quad$ $d(x) = 2\,x$

$n = 4 \quad m = 2$

empleando la *integral doble de Simpson*.

$$I = \int_{0.}^{1.} \int_{x}^{2\,x} (\, y^3 + x^2 \,)\, dy\, dx \approx 1.00012207031$$

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,\, y)\, dy\, dx = \int_{0.}^{1.} \int_{x}^{2\,x} (\, y^3 + x^2 \,)\, dy\, dx$$

$[a,\, b] = [0.,\, 1.]$ $\quad c(x) = x \quad$ $d(x) = 2\,x$

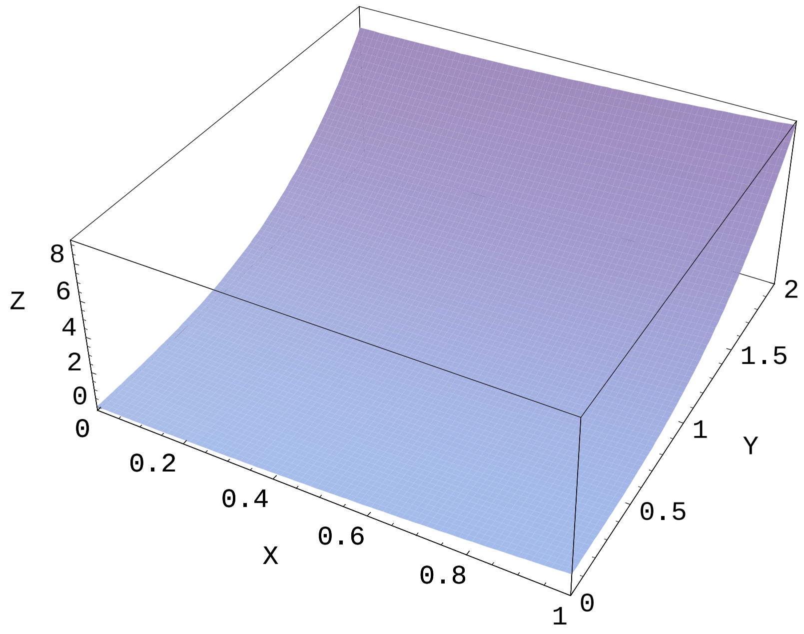
$n = 3 \quad m = 3$

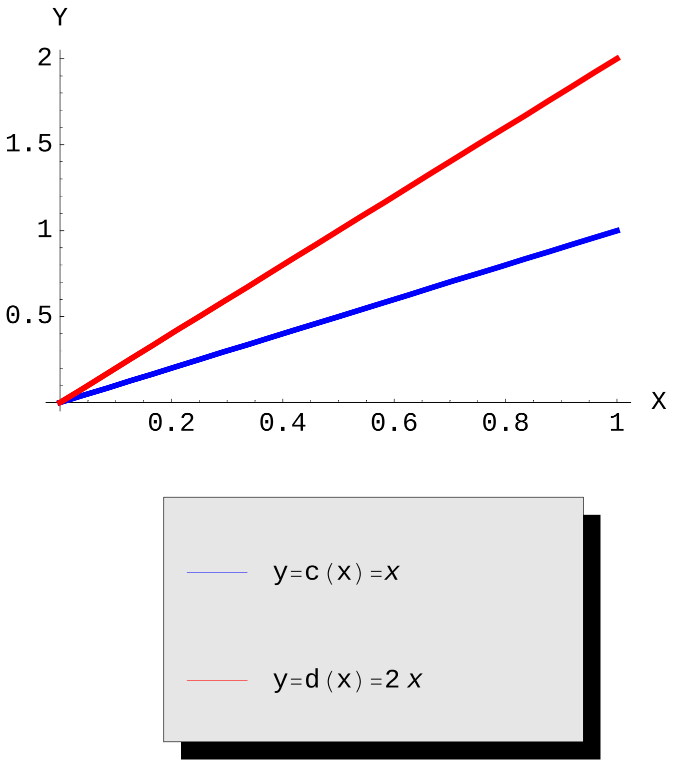
empleando la *integral doble de Simpson*.

$$I = \int_{0.}^{1.} \int_{x}^{2\,x} (\, y^3 + x^2 \,)\, dy\, dx \approx 1.00038580247$$

| $n$ | $m$ | $I$ | $\bar{I}$ | $\lvert I-\bar{I}\rvert$ |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 1.0000000000 | 1.0019531250 | 0.0019531250 |
| 4 | 2 | 1.0000000000 | 1.0001220703 | 0.0001220703 |
| 3 | 3 | 1.0000000000 | 1.0003858025 | 0.0003858025 |

Gráfica de la función $z = f(x,\, y) = y^3 + x^2$


Z
8
6
4
2
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
X
0
0.5
1
1.5
2
Y


Y
2
1.5
1
0.5
0.2
0.4
0.6
0.8
1
X
y=c(x)=x
y=d(x)=2 x

■ **Problema 30.** Calcúlese el valor aproximado de la integral

$$\int_a^b \int_c^d (y^2 + x^3)\, d\,y\, d\,x$$

con $[a, b] = [0, 1]$, $c(x) = x$, $d(x) = 2\,x$ empleando la integral doble de *Simpson* con los siguientes valores.

a) $n = 2$, $m = 4$.
b) $n = 4$, $m = 2$.
c) $n = m = 3$.

---

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,\, y)\, dy\, dx = \int_{0.}^{1.} \int_x^{2\,x} (\, x^3 + y^2\,)\, dy\, dx$$

$[a,\, b] = [0.,\, 1.]$ $\quad c(x) = x$ $\quad d(x) = 2\,x$

$n = 2$ $\quad m = 4$

empleando la *integral doble de Simpson*.

$$I = \int_{0.}^{1.} \int_x^{2\,x} (\, x^3 + y^2\,)\, dy\, dx \approx 0.783854166667$$

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,\, y)\, dy\, dx = \int_{0.}^{1.} \int_x^{2\,x} (\, x^3 + y^2\,)\, dy\, dx$$

$[a,\, b] = [0.,\, 1.]$ $\quad c(x) = x$ $\quad d(x) = 2\,x$

$n = 4$ $\quad m = 2$

empleando la *integral doble de Simpson*.

$$I = \int_{0.}^{1.} \int_x^{2\,x} (\, x^3 + y^2\,)\, dy\, dx \approx 0.783365885417$$

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,\, y)\, dy\, dx = \int_{0.}^{1.} \int_x^{2\,x} (\, x^3 + y^2\,)\, dy\, dx$$

$[a,\, b] = [0.,\, 1.]$ $\quad c(x) = x$ $\quad d(x) = 2\,x$

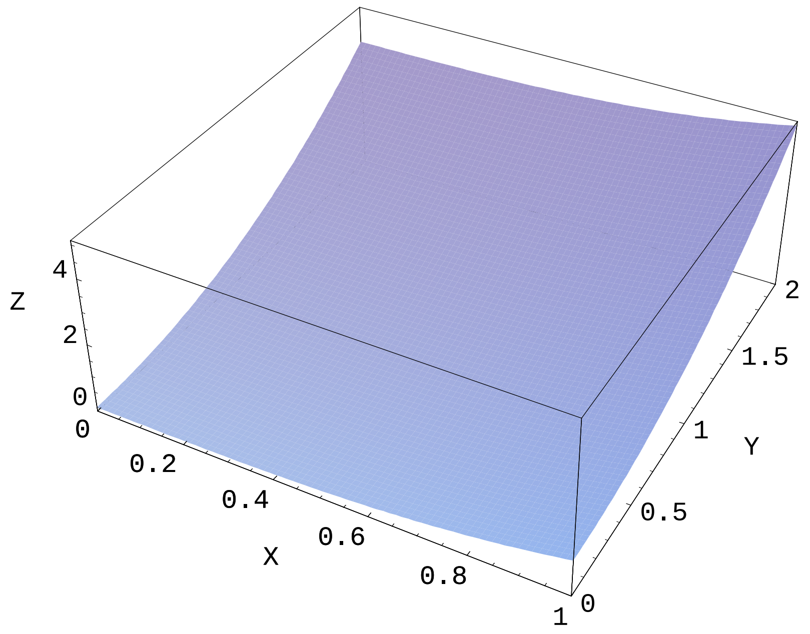
$n = 3$ $\quad m = 3$

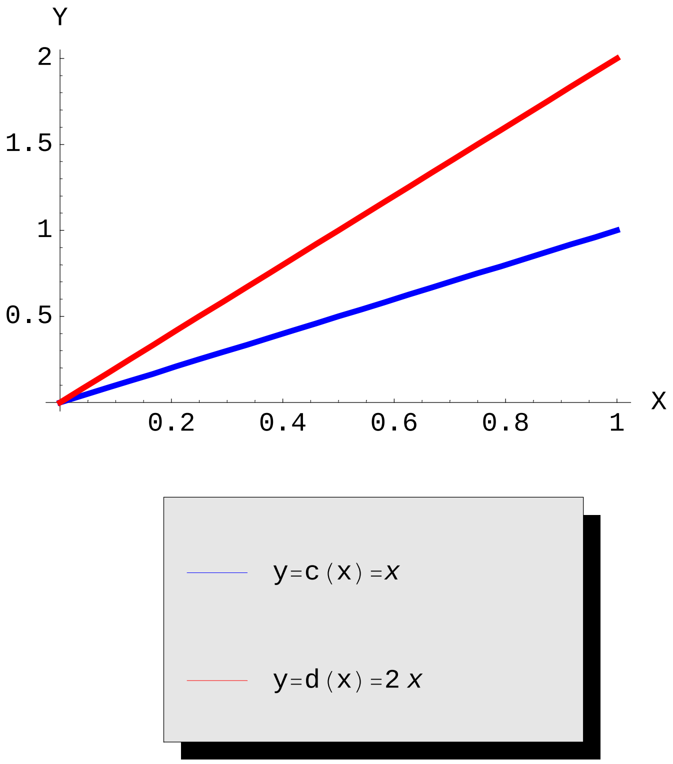
empleando la *integral doble de Simpson*.

$$I = \int_{0.}^{1.} \int_x^{2\,x} (\, x^3 + y^2\,)\, dy\, dx \approx 0.783436213992$$

| $n$ | $m$ | $I$ | $\bar{I}$ | $\lvert I-\bar{I}\rvert$ |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 0.7833333333 | 0.7838541667 | 0.0005208333 |
| 4 | 2 | 0.7833333333 | 0.7833658854 | 0.0000325521 |
| 3 | 3 | 0.7833333333 | 0.7834362140 | 0.0001028807 |

Gráfica de la función $z = f(x, y) = x^3 + y^2$






■ **Problema 31.** Calcúlese el valor aproximado de la integral

$$\int_a^b \int_c^d (\cos(x))\, d\, y\, d\, x$$

con $[a, b] = [0, \pi]$, $c(x) = 0$, $d(x) = x$ empleando la integral doble de *Simpson* con

a) $n = 2$, $m = 4$.

b) $n = 4$, $m = 2$.

c) $n = m = 3$.

---

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy\, dx = \int_{0.}^{\pi} \int_{0.}^{x} (\cos(x))\, dy\, dx$$

$[a, b] = [0., \pi]$ $\quad c(x) = 0.$ $\quad d(x) = x$

$n = 2$ $\quad m = 4$

empleando la *integral doble de Simpson*.

$$I = \int_{0.}^{\pi} \int_{0.}^{x} (\cos(x))\, dy\, dx \approx -1.98561106670$$

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy\, dx = \int_{0.}^{\pi} \int_{0.}^{x} (\cos(x))\, dy\, dx$$

$[a,\ b] = [0.,\ \pi]$ $c(x) = 0.$ $d(x) = x$
$n = 4$ $m = 2$
empleando la *integral doble de Simpson.*

$$I = \int_{0.}^{\pi}\int_{0.}^{x}(\cos(x))\,dy\,dx \approx -1.99918246623$$

Cálculo de la integral

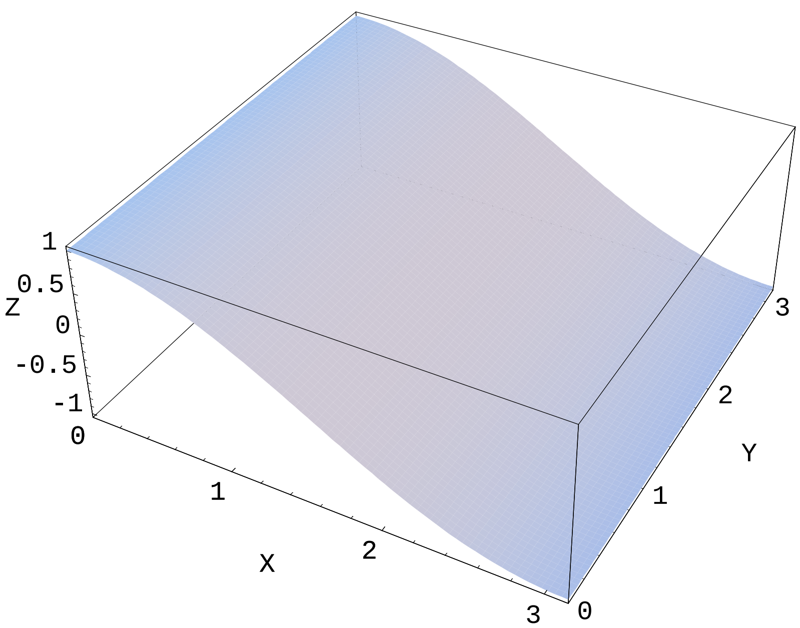
$$I = \int_{a}^{b}\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,\ y)\,dy\,dx = \int_{0.}^{\pi}\int_{0.}^{x}(\cos(x))\,dy\,dx$$

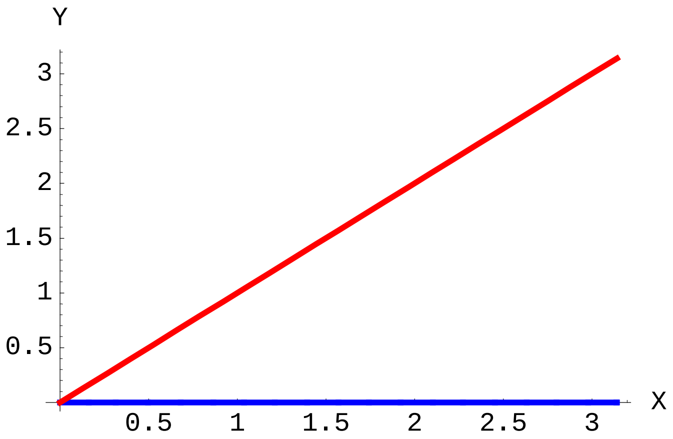
$[a,\ b] = [0.,\ \pi]$ $c(x) = 0.$ $d(x) = x$
$n = 3$ $m = 3$
empleando la *integral doble de Simpson.*

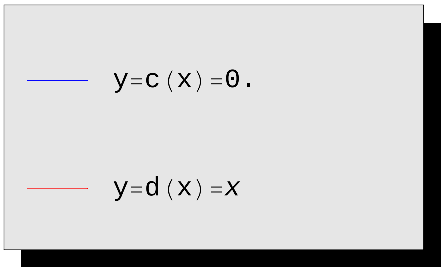
$$I = \int_{0.}^{\pi}\int_{0.}^{x}(\cos(x))\,dy\,dx \approx -1.99735264255$$

| $n$ | $m$ | $I$ | $\overline{I}$ | $\lvert I-\overline{I}\rvert$ |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 4 | −2.0000000000 | −1.9856110667 | 0.0143889333 |
| 4 | 2 | −2.0000000000 | −1.9991824662 | 0.0008175338 |
| 3 | 3 | −2.0000000000 | −1.9973526425 | 0.0026473575 |

Gráfica de la función $z = f(x,\ y) = \cos(x)$






■ **Problema 32.** Calcúlese el valor aproximado de la integral

$$\int_a^b \int_c^d (\cos(y))\, d\,y\, d\,x$$

con $[a, b] = [0, \pi]$, $c(x) = 0$, $d(x) = x$ empleando la integral doble de *Simpson* con los valores dados.

a) $n = 2$, $m = 4$.

b) $n = 4$, $m = 2$.

c) $n = m = 3$.

---

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy\, dx = \int_{0.}^{\pi} \int_{0.}^{x} (\cos(y))\, dy\, dx$$

$[a, b] = [0., \pi]$ $c(x) = 0.$ $d(x) = x$

$n = 2$ $m = 4$

empleando la *integral doble de Simpson*.

$$I = \int_{0.}^{\pi} \int_{0.}^{x} (\cos(y))\, dy\, dx \approx 2.00459575834$$

Cálculo de la integral

$$I = \int_{a}^{b}\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,\, y)\; dy\; dx = \int_{0.}^{\pi}\int_{0.}^{x} (\cos(y))\; dy\; dx$$

$[a,\, b] = [0.,\, \pi]$ $c(x) = 0.$ $d(x) = x$

$n = 4$ $m = 2$

empleando la *integral doble de Simpson*.

$$I = \int_{0.}^{\pi}\int_{0.}^{x} (\cos(y))\; dy\; dx \approx 2.00087920521$$

Cálculo de la integral

$$I = \int_{a}^{b}\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,\, y)\; dy\; dx = \int_{0.}^{\pi}\int_{0.}^{x} (\cos(y))\; dy\; dx$$

$[a,\, b] = [0.,\, \pi]$ $c(x) = 0.$ $d(x) = x$

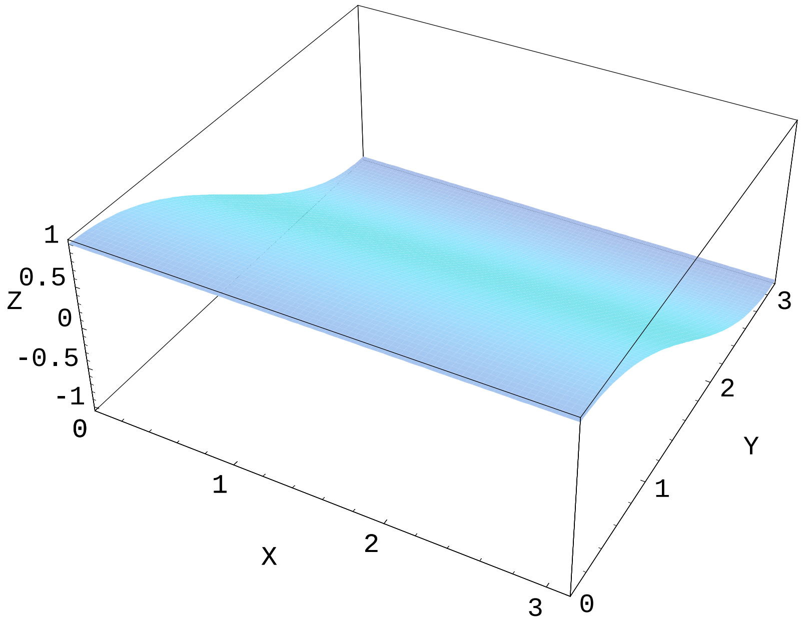
$n = 3$ $m = 3$

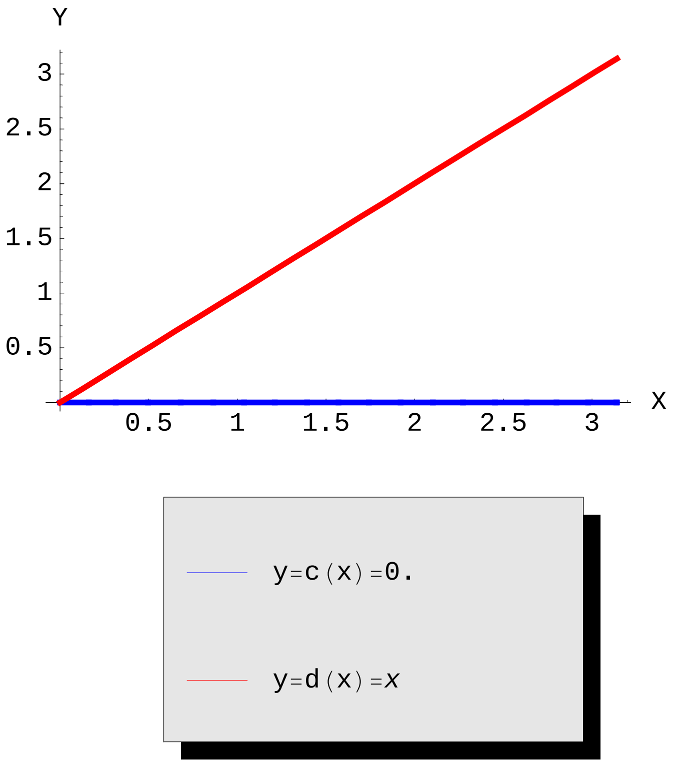
empleando la *integral doble de Simpson*.

$$I = \int_{0.}^{\pi}\int_{0.}^{x} (\cos(y))\; dy\; dx \approx 2.00098045359$$

| $n$ | $m$ | $I$ | $\overline{I}$ | $\lvert I-\overline{I}\rvert$ |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 2.0000000000 | 2.0045957583 | 0.0045957583 |
| 4 | 2 | 2.0000000000 | 2.0008792052 | 0.0008792052 |
| 3 | 3 | 2.0000000000 | 2.0009804536 | 0.0009804536 |

Gráfica de la función $z = f(x,\, y) = \cos(y)$


1
0.5
Z
0
-0.5
-1
0
1
X
2
3
0
1
Y
2
3


Y
3
2.5
2
1.5
1
0.5
X
0.5
1
1.5
2
2.5
3
y=c(x)=0.
y=d(x)=x

■ **Problema 33.** Calcúlese el valor aproximado de la integral

$$\int_a^b \int_c^d \left(\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\right) d\,y\,d\,x$$

con $[a, b] = [0, \frac{\pi}{4}]$, $c(x) = 0$, $d(x) = \text{sen}(x)$ empleando la integral doble de *Simpson* con

a) $n = 2$, $m = 4$.

b) $n = 4$, $m = 2$.

c) $n = m = 3$.

---

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy\, dx = \int_{0.}^{\frac{\pi}{4}} \int_{0.}^{\sin(x)} \left( \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \right) dy\, dx$$

$[a, b] = [0., \frac{\pi}{4}]$ $\quad c(x) = 0.$ $\quad d(x) = \sin(x)$

$n = 2$ $\quad m = 4$

empleando la *integral doble de Simpson*.

$$I = \int_{0.}^{\frac{\pi}{4}} \int_{0.}^{\sin(x)} \left( \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \right) dy\, dx \approx 0.308427721367$$

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy\, dx = \int_{0.}^{\frac{\pi}{4}} \int_{0.}^{\sin(x)} \left( \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \right) dy\, dx$$

$[a, b] = [0., \frac{\pi}{4}]$ $\quad c(x) = 0.$ $\quad d(x) = \sin(x)$

$n = 4$ $\quad m = 2$

empleando la *integral doble de Simpson*.

$$I = \int_{0.}^{\frac{\pi}{4}} \int_{0.}^{\sin(x)} \left( \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \right) dy\, dx \approx 0.308456244324$$

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy\, dx = \int_{0.}^{\frac{\pi}{4}} \int_{0.}^{\sin(x)} \left( \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \right) dy\, dx$$

$[a, b] = [0., \frac{\pi}{4}]$ $\quad c(x) = 0.$ $\quad d(x) = \sin(x)$

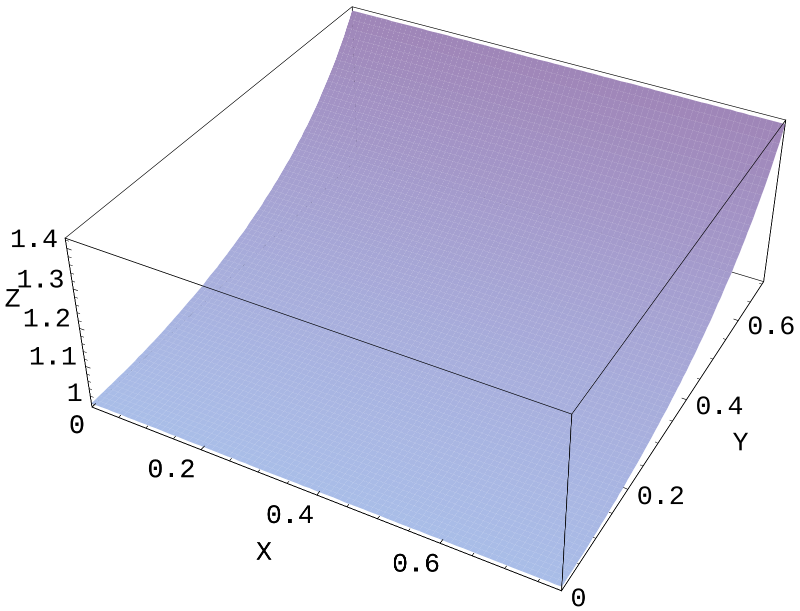
$n = 3$ $\quad m = 3$

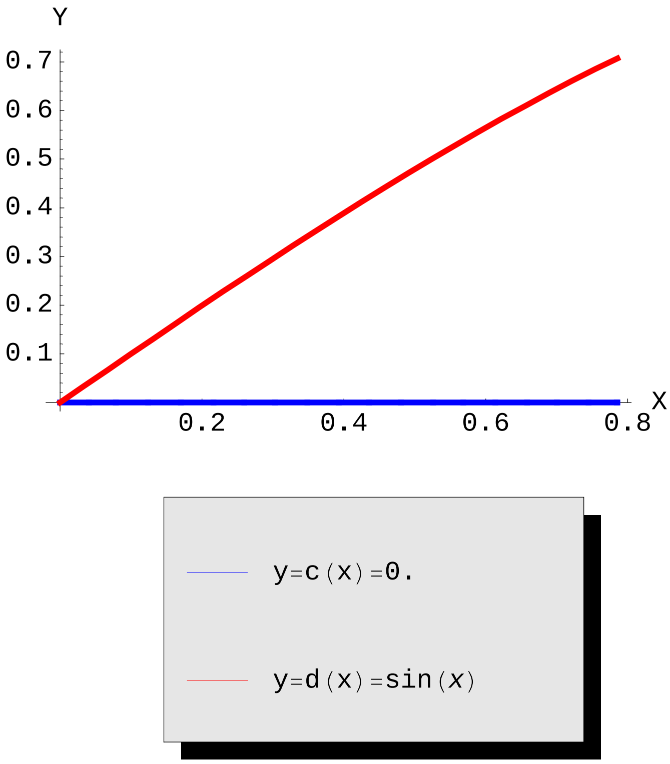
empleando la *integral doble de Simpson*.

$$I = \int_{0.}^{\frac{\pi}{4}} \int_{0.}^{\sin(x)} \left( \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \right) dy\, dx \approx 0.308432314074$$

| $n$ | $m$ | $I$ | $\overline{I}$ | $\lvert I-\overline{I}\rvert$ |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 0.3084251375 | 0.3084277214 | $2.5838328792\times 10^{-6}$ |
| 4 | 2 | 0.3084251375 | 0.3084562443 | 0.0000311068 |
| 3 | 3 | 0.3084251375 | 0.3084323141 | $7.1765398696\times 10^{-6}$ |

Gráfica de la función $z = f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$






■ **Problema 34.** Calcúlese el valor aproximado de la integral

$$\int_a^b \int_c^d (y\text{sen}(x) + x\cos(y))\, d\, y\, d\, x$$

con $[a, b] = [-\pi, \frac{3\pi}{2}]$, $c(x) = 0$, $d(x) = 2\pi$ empleando la integral doble de *Simpson* con
a) $n = 2$, $m = 4$.
b) $n = 4$, $m = 2$.
c) $n = m = 3.$.

---

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy\, dx = \int_{-\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \int_{0.}^{2x} (x\cos(y) + y\sin(x))\, dy\, dx$$

$[a, b] = [-\pi, \frac{3\pi}{2}]$  $c(x) = 0.$  $d(x) = 2x$

$n = 2$  $m = 4$

empleando la *integral doble de Simpson.*

$$I = \int_{-\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \int_{0.}^{2x} (x\cos(y) + y\sin(x))\, dy\, dx \approx -21.3857608742$$

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,\ y)\ dy\ dx = \int_{-\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \int_{0.}^{2\,x} (\,x\cos(y) + y\sin(x)\,)\ dy\ dx$$

$[a,\ b] = [-\pi,\ \frac{3\,\pi}{2}]$ $\quad c(x) = 0.$ $\quad d(x) = 2\,x$

$n = 4$ $\quad m = 2$

empleando la *integral doble de Simpson.*

$$I = \int_{-\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \int_{0.}^{2\,x} (\,x\cos(y) + y\sin(x)\,)\ dy\ dx \approx -32.9131210883$$

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,\ y)\ dy\ dx = \int_{-\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \int_{0.}^{2\,x} (\,x\cos(y) + y\sin(x)\,)\ dy\ dx$$

$[a,\ b] = [-\pi,\ \frac{3\,\pi}{2}]$ $\quad c(x) = 0.$ $\quad d(x) = 2\,x$

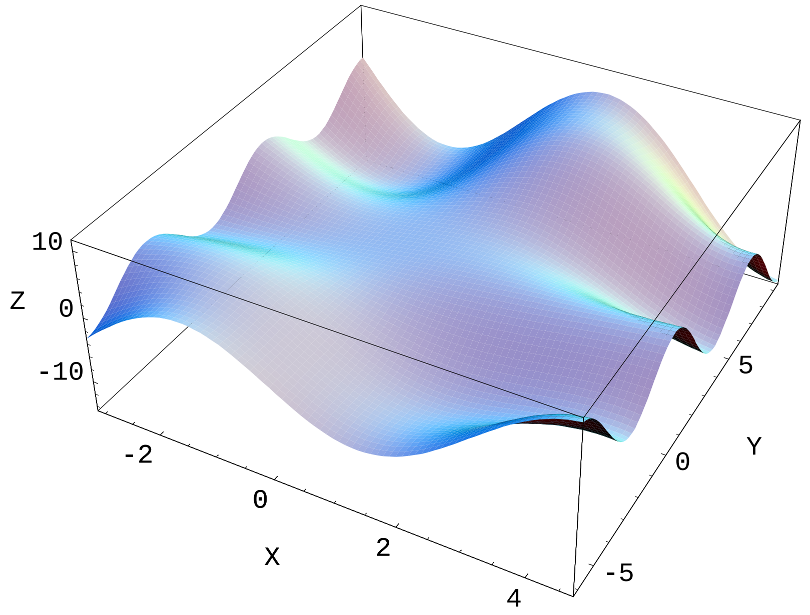
$n = 3$ $\quad m = 3$

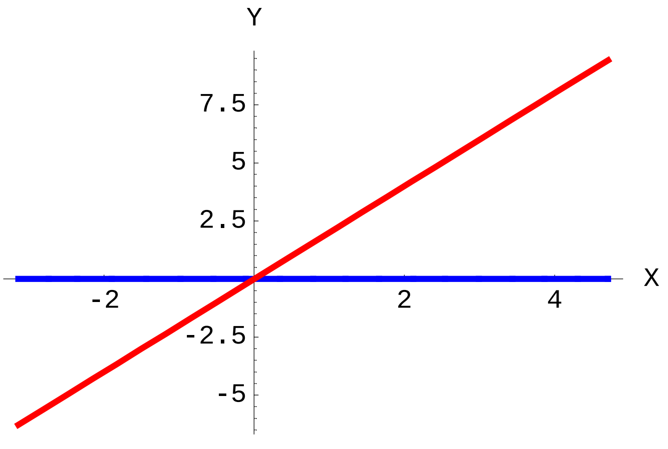
empleando la *integral doble de Simpson.*

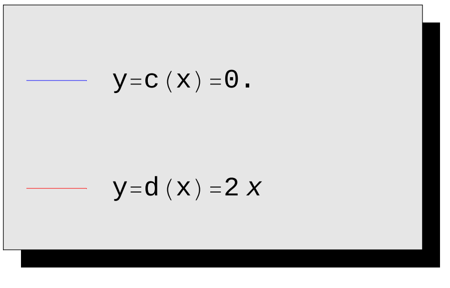
$$I = \int_{-\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \int_{0.}^{2\,x} (\,x\cos(y) + y\sin(x)\,)\ dy\ dx \approx -31.6706310373$$

| $n$ | $m$ | $I$ | $\overline{I}$ | $\lvert I-\overline{I}\rvert$ |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 4 | −33.8033665603 | −21.3857608742 | 12.4176056861 |
| 4 | 2 | −33.8033665603 | −32.9131210883 | 0.8902454720 |
| 3 | 3 | −33.8033665603 | −31.6706310373 | 2.1327355230 |

Gráfica de la función $z = f(x,\ y) = x\cos(y) + y\sin(x)$


10
Z 0
-10
-2
0
X
2
4
5
Y
0
-5


Y
7.5
5
2.5
-2
2
4
X
-2.5
-5


y=c(x)=0.
y=d(x)=2 x

## 4.4 Descripción de la integral doble de Gauss

Si queremos aplicar la *cuadratura gaussiana* a:

$$\int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy\, dx \tag{32}$$

primero debemos tranformar, el intervalo $[c(x), d(x)]$ a $[-1, 1]$ para cada $x$ en $[a, b]$ y luego aplicar la *cuadratura gaussiana*. Y esto nos da la fórmula:

$$\int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy\, dx \approx \int_a^b \frac{d(x) - c(x)}{2} \sum_{j=1}^{m} c_{n,j}\, f\left(x, \frac{d(x) - c(x)\, r_{n,j} + d(x) + c(x)}{2}\right) dx \tag{33}$$

donde, como antes, las raíces $r_{n,j}$ y los coeficientes $c_{n,j}$, correspondientes a las raíces de los *polinomios ortogonales de Legendre*, que son conocidos.

Transformamos también el intervalo $[a, b]$ en $[-1, 1]$ y usamos la cuadratura gaussiana para aproximar la integral del lado derecho de esta ecuación.

## 4.5 Pseudocódigo de la regla de la Integral doble de Gauss

Este algoritmo aplica la regla de la integral doble de *Gauss* a una integral de la forma:

$$\int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy\, dx. \tag{34}$$

- **Algoritmo 3. Método de la integral doble de Gauss.**

**Input** $(f(x, y), [a, b], c(x), d(x), m, n)$

(* Las raíces $r_{i,j}$ y los coeficientes $c_{i,j}$ deben estar disponibles para $i = \text{máx}\{m, n\}$ y para $i \leq j \leq i$ siendo ambos conocidos *)

$h_1 \leftarrow \frac{b-a}{2}$
$h_2 \leftarrow \frac{b-a}{2}$
$J \leftarrow 0$

**For** $i = 1, 2, 3, \ldots, m$ **do**
$\quad \text{JX} \leftarrow 0$
$\quad x \leftarrow h_1 r_{m,i} + h_2$
$\quad d_1 \leftarrow d(x)$
$\quad c_1 \leftarrow c(x)$
$\quad k_1 \leftarrow \frac{(d_1 - c_1)}{2}$
$\quad k_2 \leftarrow \frac{(d_1 + c_1)}{2}$

$\quad$ **For** $j = 1, 2, 3, \ldots, n$ **do**
$\quad\quad y \leftarrow k_1 r_{n,j} + k_2$
$\quad\quad Q \leftarrow f(x, y)$
$\quad\quad \text{JX} \leftarrow \text{JX} + c_{n,j} Q$
$\quad\quad J \leftarrow J + c_{m,i} k_1 \text{JX}$
$\quad$ **End For**
**End For**

$J \leftarrow h_1 J$
**Return** $(J)$
**Output**

## 4.6 Problemas

■ **Problema 35.** Calcúlese el valor aproximado de la integral

$$\int_a^b \int_c^d (e^{\frac{y}{x}})\, d\,y\, d\,x$$

con $[a, b] = [0.1, 0.5]$, $[c, d] = [x^3, x^2]$ empleando la integral doble de *Gauss* con $n = m = 5$.

---

**Solución**

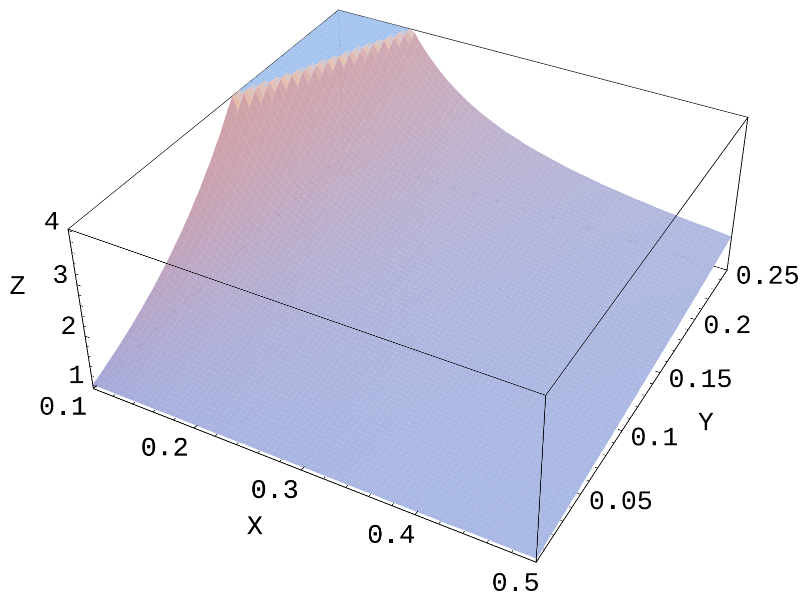
Cálculo de la integral

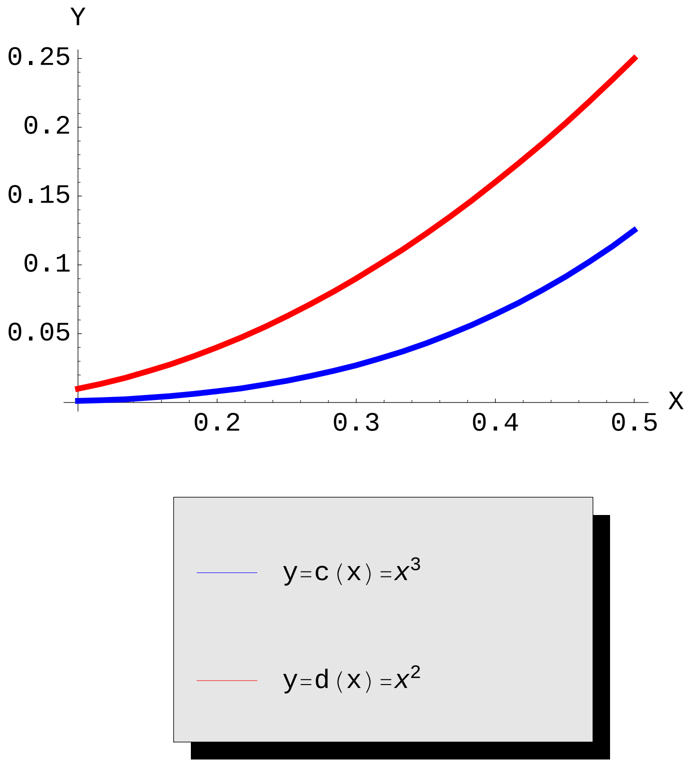
$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy\, dx = \int_{0.1}^{0.5} \int_{x^3}^{x^2} (e^{\frac{y}{x}})\, dy\, dx$$

$[a, b] = [0.1, 0.5]$ $c(x) = x^3$ $d(x) = x^2$,
$n = 5$ $m = 5$
empleando la *integral doble de Gauss.*

$$I = \int_{0.1}^{0.5} \int_{x^3}^{x^2} \left( e^{\frac{y}{x}} \right) dy\, dx \approx 0.0333055661187$$

Gráfica de la función $z = f(x, y) = e^{\frac{y}{x}}$






■ **Problema 36.** Calcúlese el valor aproximado de la integral

$$\int_a^b \int_c^d (x\,y^2)\,d\,y\,d\,x$$

con $[a, b] = [2.1, 2.5]$, $[c, d] = [1.2, 1.4]$ empleando la integral doble de *Gauss* con $n = m = 2$.

**Solución**

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\,dy\,dx = \int_{2.1}^{2.5} \int_{1.2}^{1.4} (x\,y^2)\,dy\,dx$$

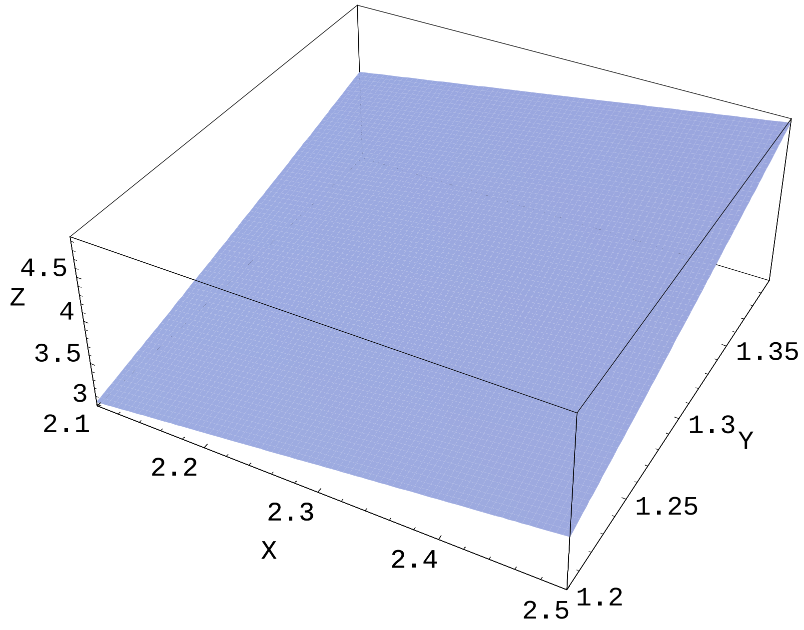
$[a, b] = [2.1, 2.5]$ $c(x) = 1.2$ $d(x) = 1.4,$

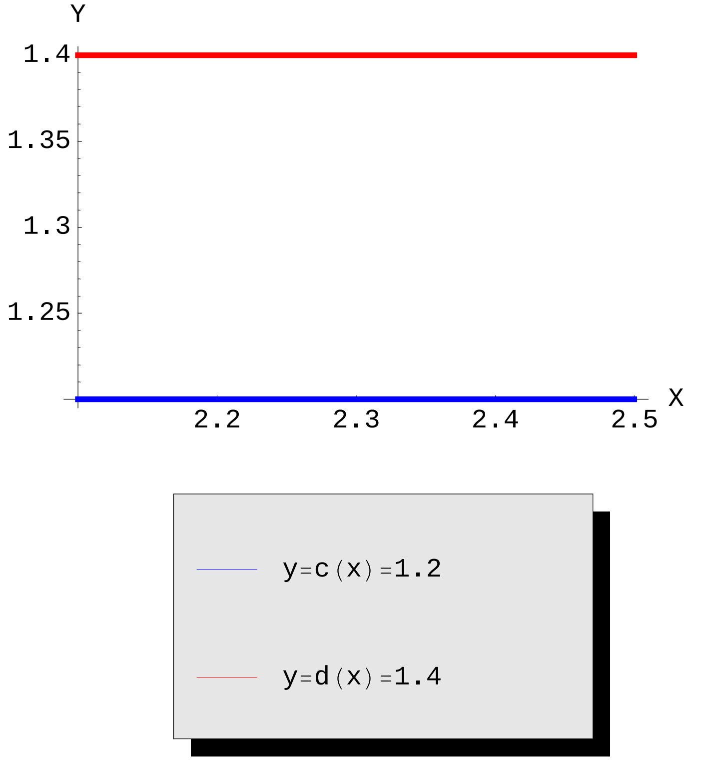
$n = 2$ $m = 2$

empleando la *integral doble de Gauss.*

$$I = \int_{2.1}^{2.5} \int_{1.2}^{1.4} (x\,y^2)\,dy\,dx \approx 0.311573333333$$

Gráfica de la función $z = f(x, y) = x\,y^2$


4.5
Z
4
3.5
3
2.1
2.2
2.3
X
2.4
2.5
1.2
1.25
1.3
Y
1.35


Y
1.4
1.35
1.3
1.25
X
2.2
2.3
2.4
2.5
y=c(x)=1.2
y=d(x)=1.4

■ **Problema 37.** Calcúlese el valor aproximado de la integral

$$\int_a^b \int_c^d (e^{y-x})\, d\, y\, d\, x$$

con $[a, b] = [0, 0.5]$, $[c, d] = [0, 0.5]$ empleando la integral doble de *Gauss* con $n = m = 2$.

---

**Solución**

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy\, dx = \int_{0.}^{0.5} \int_{0.}^{0.5} (e^{y-x})\, dy\, dx$$

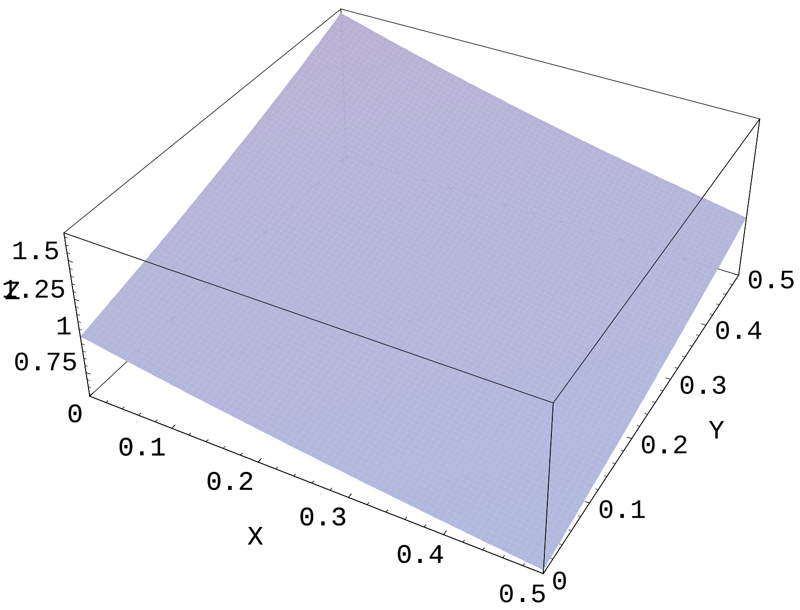
$[a, b] = [0., 0.5]$ $\quad c(x) = 0.$ $\quad d(x) = 0.5,$

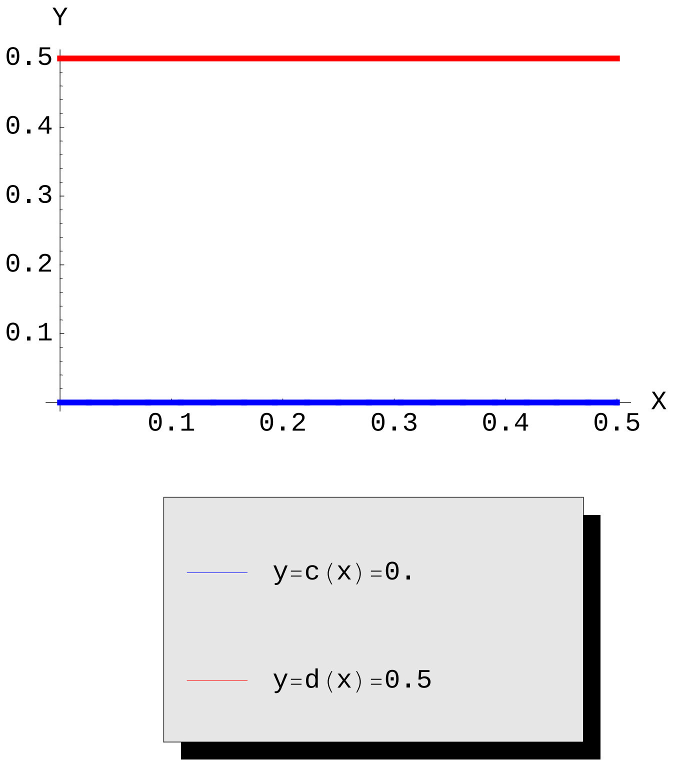
$n = 2$ $\quad m = 2$

empleando la *integral doble de Gauss.*

$$I = \int_{0.}^{0.5} \int_{0.}^{0.5} (e^{y-x})\, dy\, dx \approx 0.255244602934$$

Gráfica de la función $z = f(x, y) = e^{y-x}$




Y
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
X
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
y=c(x)=0.
y=d(x)=0.5

■ **Problema 38.** Calcúlese el valor aproximado de la integral

$$\int_a^b \int_c^d (x^2 + y^3)\, d\, y\, d\, x$$

con $[a, b] = [2.0, 2.2]$, $c(x) = x$, $d(x) = 2\,x$ empleando la integral doble de *Gauss* con $n = m = 2$.

---

**Solución**

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy\, dx = \int_{2.}^{2.2} \int_x^{2\,x} (\, y^3 + x^2\,)\, dy\, dx$$

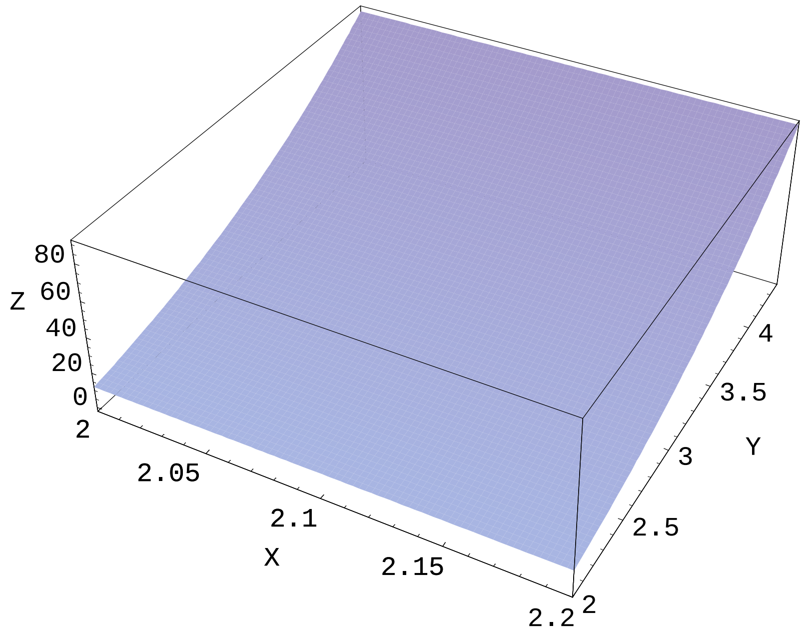
$[a, b] = [2., 2.2]$ $c(x) = x$ $d(x) = 2\,x,$

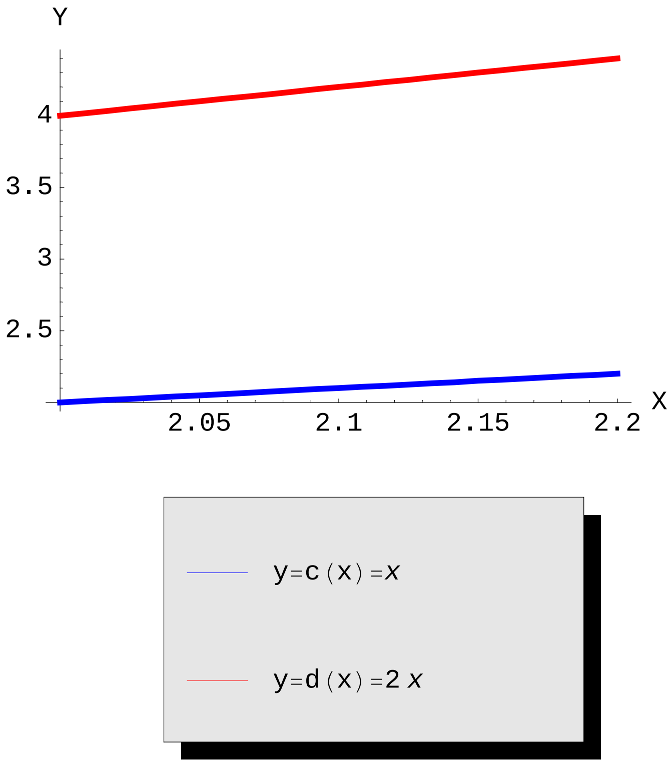
$n = 2$ $m = 2$

empleando la *integral doble de Gauss.*

$$I = \int_{2.}^{2.2} \int_x^{2\,x} (\, y^3 + x^2\,)\, dy\, dx \approx 16.5086333333$$

Gráfica de la función $z = f(x, y) = y^3 + x^2$






■ **Problema 39.**Calcúlese el valor aproximado de la integral

$$\int_a^b \int_c^d \left(x^2 + \sqrt{y}\right) d\,y\,d\,x$$

con $[a, b] = [1.0, 1.5]$, $c(x) = 0$, $d(x) = x$ empleando la integral doble de *Gauss* con $n = m = 2$.

---

**Solución**

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy\, dx = \int_{1.}^{1.5} \int_{0.}^{x} (x^2 + \sqrt{y}\,)\, dy\, dx$$

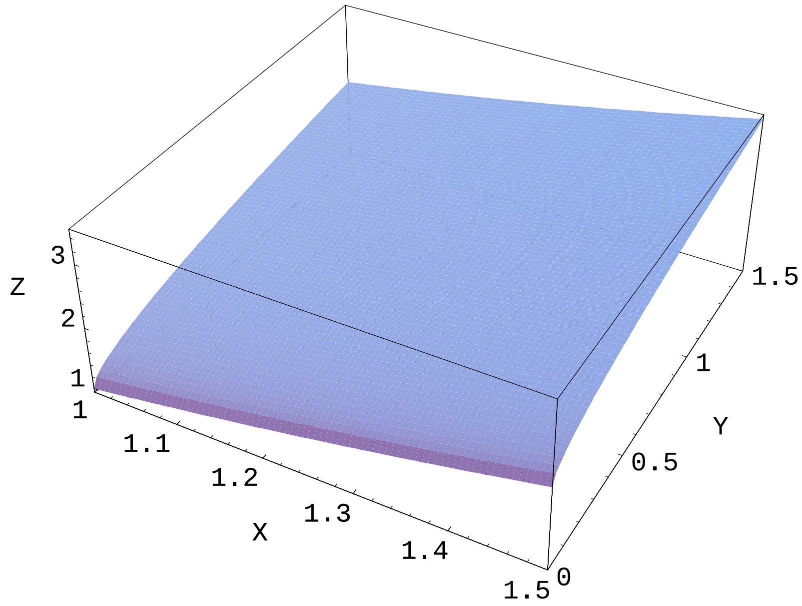
$[a, b] = [1., 1.5]$ $\quad c(x) = 0.$ $\quad d(x) = x,$

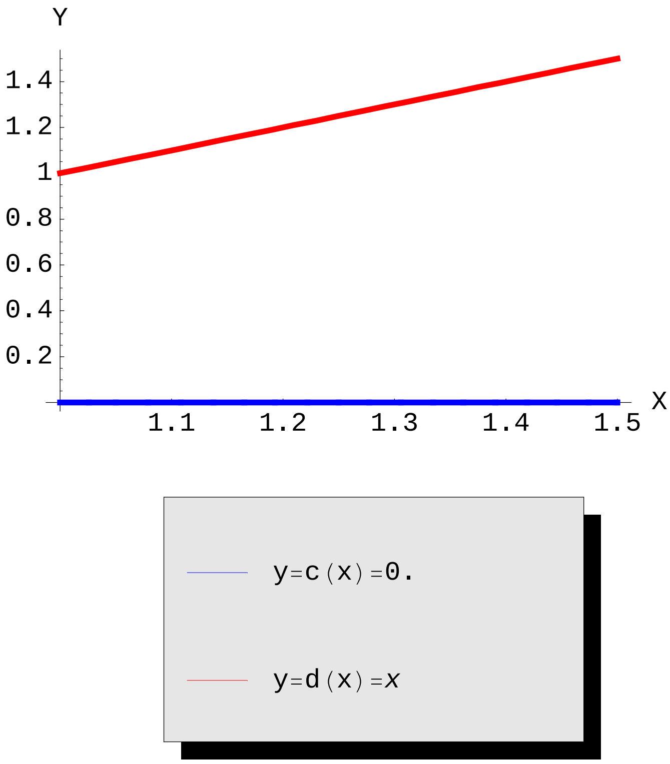
$n = 2$ $\quad m = 2$

empleando la *integral doble de Gauss.*

$$I = \int_{1.}^{1.5} \int_{0.}^{x} (x^2 + \sqrt{y}\,)\, dy\, dx \approx 1.48887452847$$

Gráfica de la función $z = f(x, y) = x^2 + \sqrt{y}$


Z
3
2
1
1
1.1
1.2
1.3
1.4
1.5
X
0
0.5
1
1.5
Y


Y
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
1.1
1.2
1.3
1.4
1.5
X
y=c(x)=0.
y=d(x)=x

■ **Problema 40.** Calcúlese el valor aproximado de la integral

$$\int_a^b \int_c^d (2\, y \operatorname{sen} x + \cos^2(x))\, d\, y\, d\, x$$

con $[a, b] = [0, \frac{\pi}{4}]$, $c(x) = \operatorname{sen}(x)$, $d(x) = \cos(x)$ empleando la integral doble de *Gauss* para los valores $\{(n, m)\} = \{(3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}$ y hallar el error absoluto sabiendo que el valor de la integral es

$I = 0.4162757534 \ldots$

---

**Solución**

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\sin(x)}^{\cos^2(x)} (\cos^2(x) + 2\, y \sin(x))\, dy\, dx$$

$[a, b] = [0, \frac{\pi}{4}]$ $c(x) = \sin(x)$ $d(x) = \cos^2(x)$,

$n = 3$ $m = 3$

empleando la *integral doble de Gauss.*

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\sin(x)}^{\cos^2(x)} (\cos^2(x) + 2\, y \sin(x))\, dy\, dx \approx 0.41636209380$$

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\sin(x)}^{\cos^2(x)} (\cos^2(x) + 2\, y \sin(x))\, dy\, dx$$

$[a, b] = [0, \frac{\pi}{4}]$ $c(x) = \sin(x)$ $d(x) = \cos^2(x)$,

$n = 3$ $m = 4$

empleando la *integral doble de Gauss.*

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\sin(x)}^{\cos^2(x)} (\cos^2(x) + 2\, y \sin(x))\, dy\, dx \approx 0.41627436647$$

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\sin(x)}^{\cos^2(x)} (\cos^2(x) + 2\, y \sin(x))\, dy\, dx$$

$[a, b] = [0, \frac{\pi}{4}]$ $c(x) = \sin(x)$ $d(x) = \cos^2(x)$,

$n = 4$ $m = 3$

empleando la *integral doble de Gauss.*

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\sin(x)}^{\cos^2(x)} (\cos^2(x) + 2\, y \sin(x))\, dy\, dx \approx 0.41636209380$$

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,\, y)\, dy\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\sin(x)}^{\cos^2(x)} (\cos^2(x) + 2\, y \sin(x))\, dy\, dx$$

$[a,\, b] = [0,\, \frac{\pi}{4}]$ $\qquad c(x) = \sin(x)$ $\qquad d(x) = \cos^2(x),$

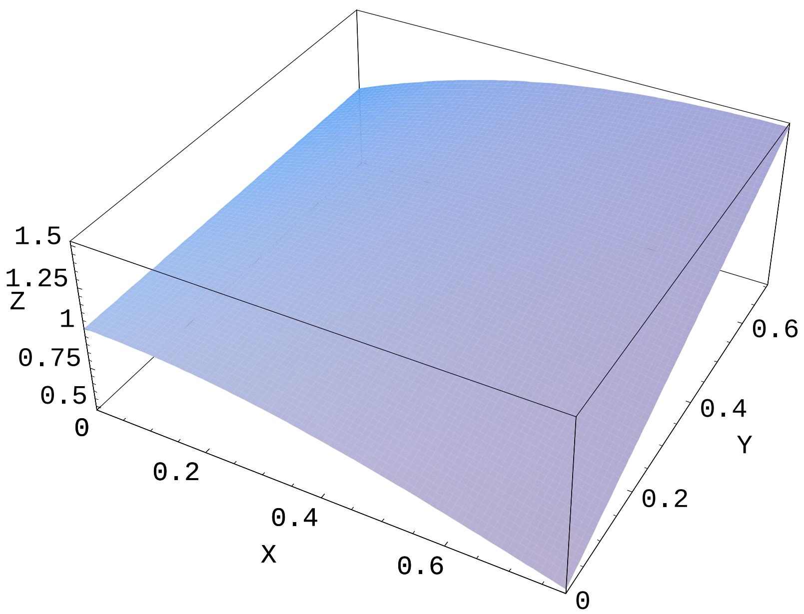
$n = 4$ $\qquad m = 4$

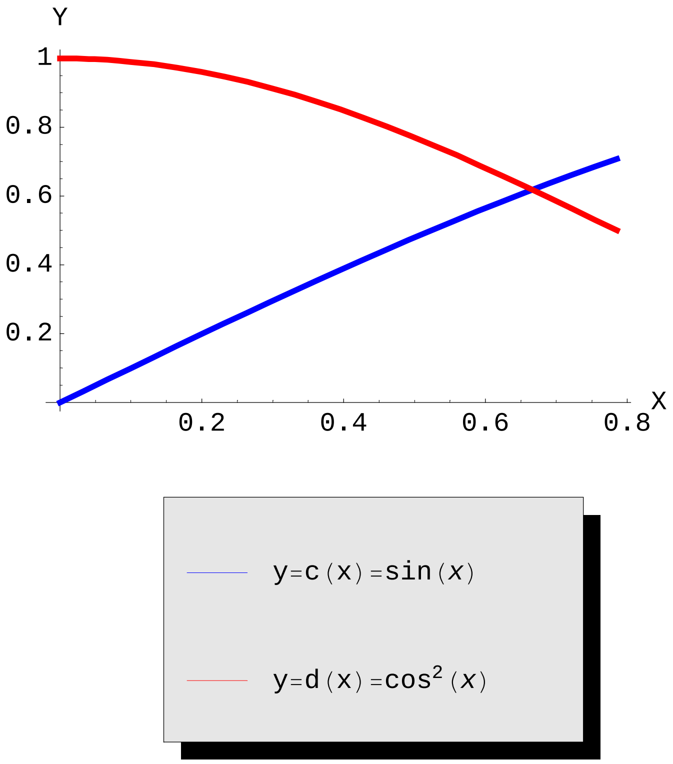
empleando la *integral doble de Gauss*.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\sin(x)}^{\cos^2(x)} (\cos^2(x) + 2\, y \sin(x))\, dy\, dx \approx 0.41627436647$$

| $n$ | $m$ | $I$ | $\bar{I}$ | $\lvert I-\bar{I}\rvert$ |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 3 | 0.4162757534 | 0.4163620938 | 0.0000863404 |
| 3 | 4 | 0.4162757534 | 0.4162743665 | $1.3869308000\times 10^{-6}$ |
| 4 | 3 | 0.4162757534 | 0.4163620938 | 0.0000863404 |
| 4 | 4 | 0.4162757534 | 0.4162743665 | $1.3869308002\times 10^{-6}$ |

Gráfica de la función $z = f(x,\, y) = \cos^2(x) + 2\, y \sin(x)$






■ **Problema 41.** Calcúlese el valor aproximado de la integral

$$\int_a^b \int_c^d (\ln(x\,y))\,d\,y\,d\,x$$

con $[a, b] = [1, e]$, $c(x) = 1$, $d(x) = x$ empleando la integral doble de *Gauss* para los valores $\{(n, m)\} = \{(3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}$ y hallar el error absoluto sabiendo que el valor de la integral es

$I = 2.7182818285\ldots$

---

**Solución**

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\,dy\,dx = \int_0^e \int_1^x (\log(x\,y))\,dy\,dx$$

$[a, b] = [0, e]$ $\quad c(x) = 1$ $\quad d(x) = x,$

$n = 3$ $\quad m = 3$

empleando la *integral doble de Gauss*.

$$I = \int_0^e \int_1^x (\log(x\,y))\,dy\,dx \approx 2.5487234967$$

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,\ y)\ dy\ dx = \int_0^e \int_1^x (\log(x\,y))\ dy\ dx$$

$[a,\ b] = [0,\ e]$ $\quad c(x) = 1$ $\quad d(x) = x,$

$n = 3$ $\quad m = 4$

empleando la *integral doble de Gauss*.

$$I = \int_0^e \int_1^x (\log(x\,y))\ dy\ dx \approx 2.6228820472$$

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,\ y)\ dy\ dx = \int_0^e \int_1^x (\log(x\,y))\ dy\ dx$$

$[a,\ b] = [0,\ e]$ $\quad c(x) = 1$ $\quad d(x) = x,$

$n = 4$ $\quad m = 3$

empleando la *integral doble de Gauss*.

$$I = \int_0^e \int_1^x (\log(x\,y))\ dy\ dx \approx 2.5487612567$$

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,\ y)\ dy\ dx = \int_0^e \int_1^x (\log(x\,y))\ dy\ dx$$

$[a,\ b] = [0,\ e]$ $\quad c(x) = 1$ $\quad d(x) = x,$

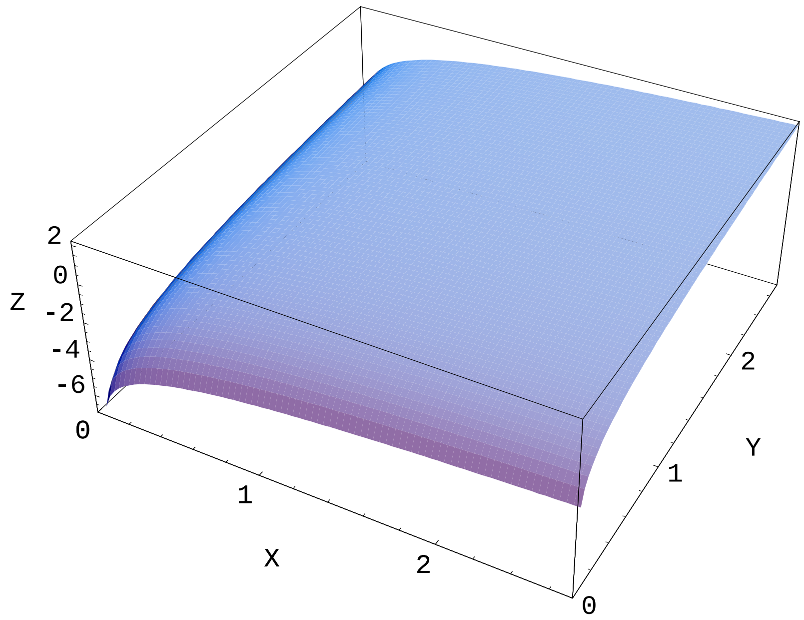
$n = 4$ $\quad m = 4$

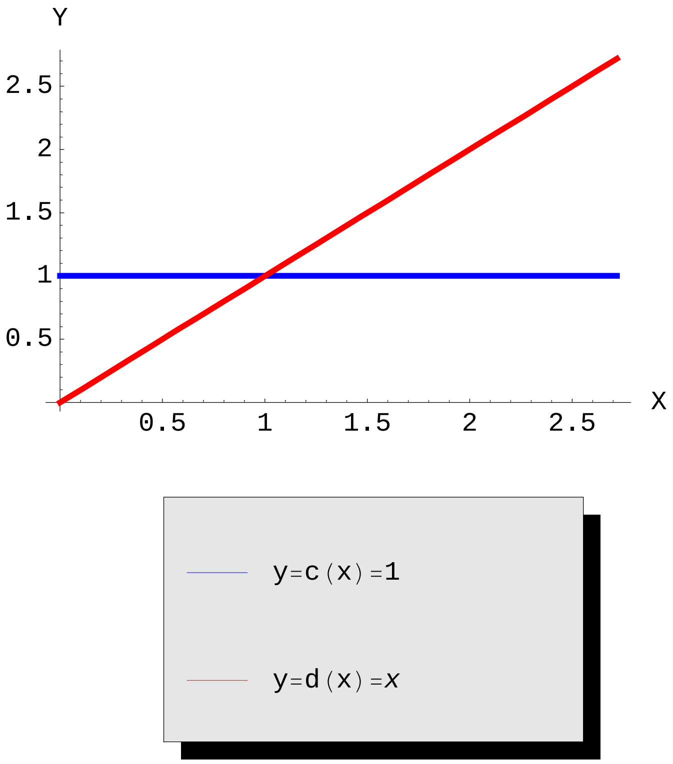
empleando la *integral doble de Gauss*.

$$I = \int_0^e \int_1^x (\log(x\,y))\ dy\ dx \approx 2.6231253107$$

| $n$ | $m$ | $I$ | $\overline{I}$ | $\lvert I-\overline{I}\rvert$ |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 3 | 2.7182818285 | 2.5487234967 | 0.1695583317 |
| 3 | 4 | 2.7182818285 | 2.6228820472 | 0.0953997813 |
| 4 | 3 | 2.7182818285 | 2.5487612567 | 0.1695205717 |
| 4 | 4 | 2.7182818285 | 2.6231253107 | 0.0951565178 |

Gráfica de la función $z = f(x,\ y) = \log(x\,y)$


2
0
Z
-2
-4
-6
0
1
X
2
0
1
Y
2


Y
2.5
2
1.5
1
0.5
0.5
1
1.5
2
2.5
X
y=c(x)=1
y=d(x)=x

■ **Problema 42.** Calcúlese el valor aproximado de la integral

$$\int_a^b \int_c^d (x^2 + y^3)\, d\,y\, d\,x$$

con $[a, b] = [0, 1]$, $c(x) = x$, $d(x) = 2\,x$ empleando la integral doble de *Gauss* para los valores $\{(n, m)\} = \{(3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}$ y hallar el error absoluto sabiendo que el valor de la integral es

$I = 1.0000000000\ldots$

**Solución**

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy\, dx = \int_0^1 \int_x^{2\,x} (\, y^3 + x^2\,)\, dy\, dx$$

$[a, b] = [0, 1]$ $\quad c(x) = x$ $\quad d(x) = 2\,x,$

$n = 3$ $\quad m = 3$

empleando la *integral doble de Gauss*.

$$I = \int_0^1 \int_x^{2\,x} (\, y^3 + x^2\,)\, dy\, dx \approx 1.0000000000$$

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy\, dx = \int_0^1 \int_x^{2\,x} (\, y^3 + x^2\,)\, dy\, dx$$

$[a, b] = [0, 1]$ $\quad c(x) = x$ $\quad d(x) = 2\,x,$

$n = 3$ $\quad m = 4$

empleando la *integral doble de Gauss*.

$$I = \int_0^1 \int_x^{2\,x} (\, y^3 + x^2\,)\, dy\, dx \approx 1.0000000000$$

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy\, dx = \int_0^1 \int_x^{2\,x} (\, y^3 + x^2\,)\, dy\, dx$$

$[a, b] = [0, 1]$ $\quad c(x) = x$ $\quad d(x) = 2\,x,$

$n = 4$ $\quad m = 3$

empleando la *integral doble de Gauss*.

$$I = \int_0^1 \int_x^{2\,x} (\, y^3 + x^2\,)\, dy\, dx \approx 1.0000000000$$

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy\, dx = \int_0^1 \int_x^{2x} (y^3 + x^2)\, dy\, dx$$

$[a, b] = [0, 1]$ $\quad c(x) = x$ $\quad d(x) = 2x,$

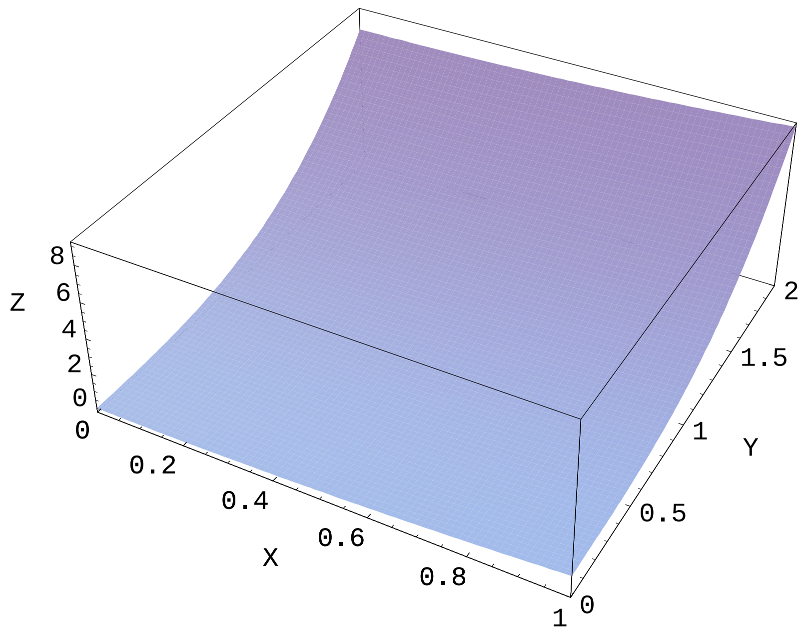
$n = 4$ $\quad m = 4$

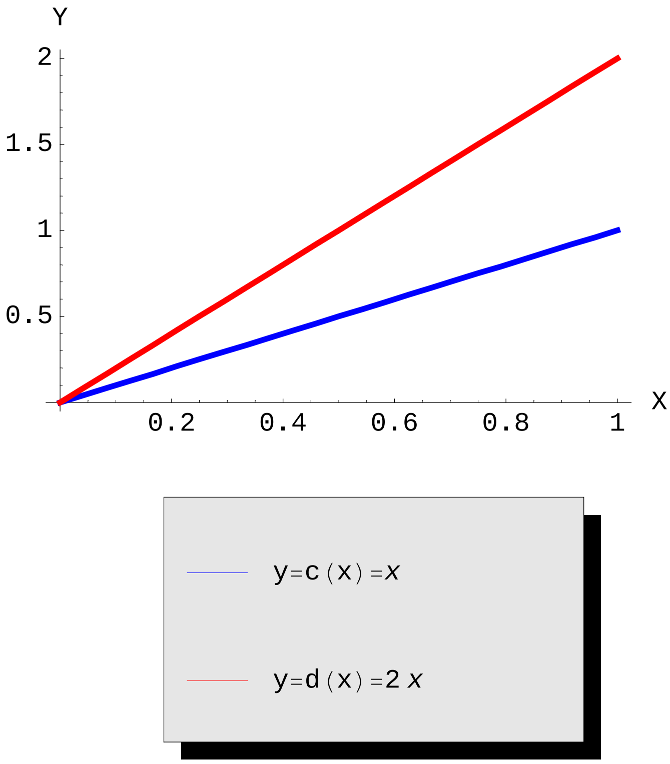
empleando la *integral doble de Gauss*.

$$I = \int_0^1 \int_x^{2x} (y^3 + x^2)\, dy\, dx \approx 1.0000000000$$

| $n$ | $m$ | $I$ | $\bar{I}$ | $\lvert I - \bar{I}\rvert$ |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 3 | 1.0000000000 | 1.0000000000 | 0.0000000000 |
| 3 | 4 | 1.0000000000 | 1.0000000000 | $1.1102230246 \times 10^{-16}$ |
| 4 | 3 | 1.0000000000 | 1.0000000000 | 0.0000000000 |
| 4 | 4 | 1.0000000000 | 1.0000000000 | $1.1102230246 \times 10^{-16}$ |

Gráfica de la función $z = f(x, y) = y^3 + x^2$






■ **Problema 43.** Calcúlese el valor aproximado de la integral

$$\int_a^b \int_c^d (y^2 + x^3)\, d\, y\, d\, x$$

con $[a, b] = [0, 1]$, $c(x) = x$, $d(x) = 2\,x$ empleando la integral doble de *Gauss* para los valores $\{(n, m)\} = \{(3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}$ y hallar el error absoluto sabiendo que el valor de la integral es

$I = 0.7833333333\ldots$

---

**Solución**

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy\, dx = \int_0^1 \int_x^{2x} (x^3 + y^2)\, dy\, dx$$

$[a, b] = [0, 1]$ $\quad c(x) = x$ $\quad d(x) = 2\,x,$

$n = 3$ $\quad m = 3$

empleando la *integral doble de Gauss*.

$$I = \int_0^1 \int_x^{2x} (x^3 + y^2)\, dy\, dx \approx 0.7833333333$$

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy\, dx = \int_0^1 \int_x^{2x} ( x^3 + y^2 )\, dy\, dx$$

$[a, b] = [0, 1]$ $c(x) = x$ $d(x) = 2x,$

$n = 3$ $m = 4$

empleando la *integral doble de Gauss.*

$$I = \int_0^1 \int_x^{2x} ( x^3 + y^2 )\, dy\, dx \approx 0.7833333333$$

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy\, dx = \int_0^1 \int_x^{2x} ( x^3 + y^2 )\, dy\, dx$$

$[a, b] = [0, 1]$ $c(x) = x$ $d(x) = 2x,$

$n = 4$ $m = 3$

empleando la *integral doble de Gauss.*

$$I = \int_0^1 \int_x^{2x} ( x^3 + y^2 )\, dy\, dx \approx 0.7833333333$$

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy\, dx = \int_0^1 \int_x^{2x} ( x^3 + y^2 )\, dy\, dx$$

$[a, b] = [0, 1]$ $c(x) = x$ $d(x) = 2x,$

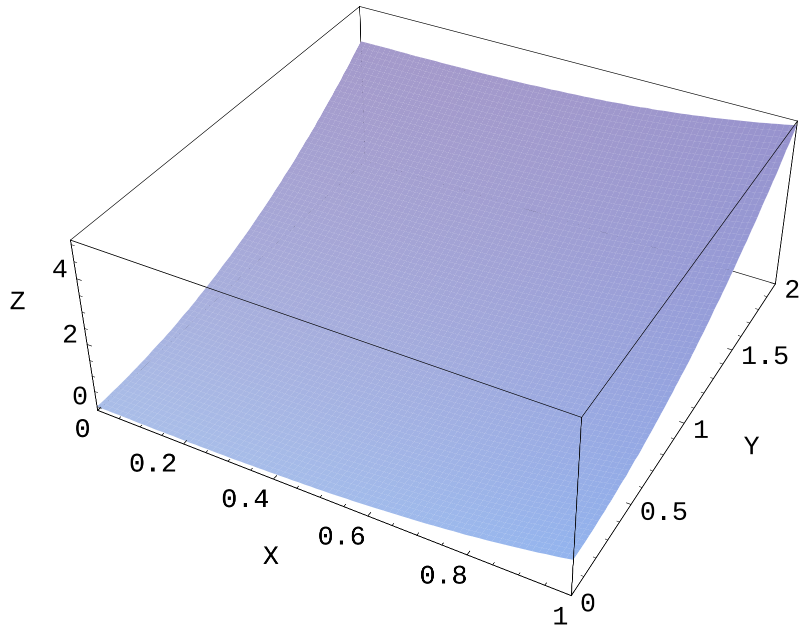
$n = 4$ $m = 4$

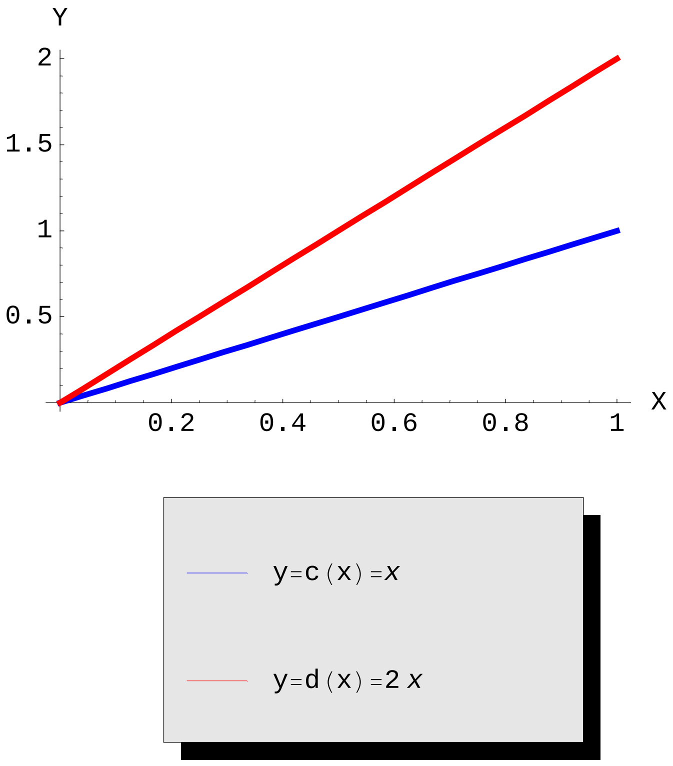
empleando la *integral doble de Gauss.*

$$I = \int_0^1 \int_x^{2x} ( x^3 + y^2 )\, dy\, dx \approx 0.7833333333$$

| $n$ | $m$ | $I$ | $\bar{I}$ | $\lvert I-\bar{I}\rvert$ |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 3 | 0.7833333333 | 0.7833333333 | $1.1102230246\times 10^{-16}$ |
| 3 | 4 | 0.7833333333 | 0.7833333333 | $1.1102230246\times 10^{-16}$ |
| 4 | 3 | 0.7833333333 | 0.7833333333 | $1.1102230246\times 10^{-16}$ |
| 4 | 4 | 0.7833333333 | 0.7833333333 | $1.1102230246\times 10^{-16}$ |

Gráfica de la función $z = f(x, y) = x^3 + y^2$


Z
4
2
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
X
0
0.5
1
1.5
2
Y


Y
2
1.5
1
0.5
0.2
0.4
0.6
0.8
1
X
y=c(x)=x
y=d(x)=2 x

■ **Problema 44.** Calcúlese el valor aproximado de la integral

$$\int_a^b \int_c^d (\cos(x))\, d\, y\, d\, x$$

con $[a, b] = [0, \pi]$, $c(x) = 0$, $d(x) = x$ empleando la integral doble de Gauss para los valores $\{(n, m)\} = \{(3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}$ y hallar el error absoluto sabiendo que el valor de la integral es

$$I = -2.0000000000\ldots$$

---

**Solución**

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy\, dx = \int_{0.}^{\pi} \int_{0.}^{x} (\cos(x))\, dy\, dx$$

$[a, b] = [0., \pi]$ $c(x) = 0.$ $d(x) = x,$

$n = 3$ $m = 3$

empleando la *integral doble de Gauss.*

$$I = \int_{0.}^{\pi} \int_{0.}^{x} (\cos(x))\, dy\, dx \approx -1.99187775495$$

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy\, dx = \int_{0.}^{\pi} \int_{0.}^{x} (\cos(x))\, dy\, dx$$

$[a, b] = [0., \pi]$ $c(x) = 0.$ $d(x) = x,$

$n = 3$ $m = 4$

empleando la *integral doble de Gauss.*

$$I = \int_{0.}^{\pi} \int_{0.}^{x} (\cos(x))\, dy\, dx \approx -2.00012424108$$

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy\, dx = \int_{0.}^{\pi} \int_{0.}^{x} (\cos(x))\, dy\, dx$$

$[a, b] = [0., \pi]$ $c(x) = 0.$ $d(x) = x,$

$n = 4$ $m = 3$

empleando la *integral doble de Gauss.*

$$I = \int_{0.}^{\pi} \int_{0.}^{x} (\cos(x))\, dy\, dx \approx -1.99187775495$$

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,\ y)\ dy\ dx = \int_{0.}^{\pi} \int_{0.}^{x} (\cos(x))\ dy\ dx$$

$[a,\ b] = [0.,\ \pi]$ $\qquad c(x) = 0.$ $\qquad d(x) = x,$

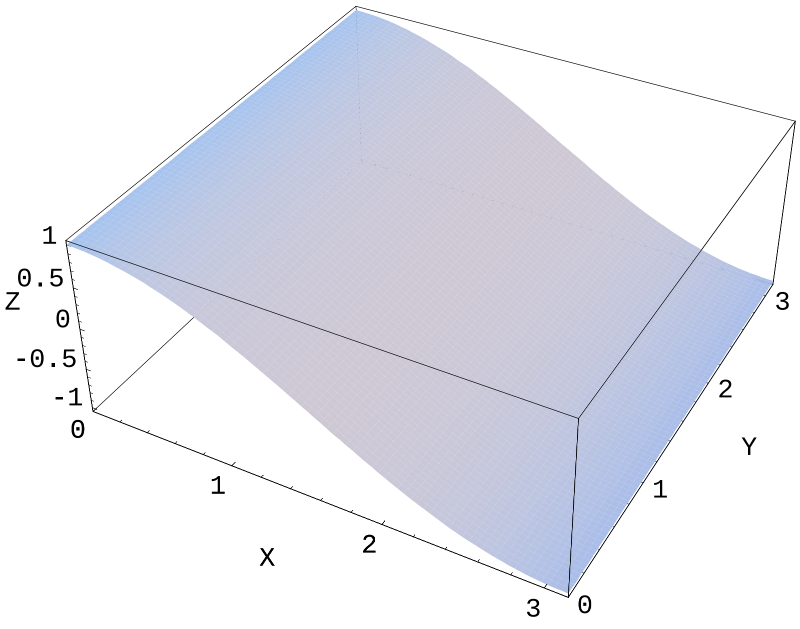
$n = 4$ $\qquad m = 4$

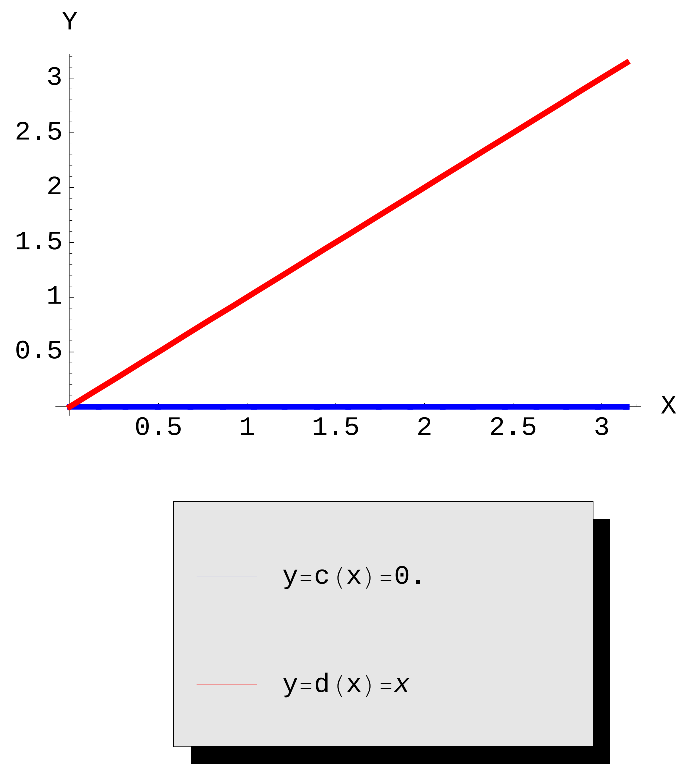
empleando la *integral doble de Gauss*.

$$I = \int_{0.}^{\pi} \int_{0.}^{x} (\cos(x))\ dy\ dx \approx -2.00012424108$$

| $n$ | $m$ | $I$ | $\overline{I}$ | $\lvert I-\overline{I}\rvert$ |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 3 | −2.0000000000 | −1.9918777550 | 0.0081222450 |
| 3 | 4 | −2.0000000000 | −2.0001242411 | 0.0001242411 |
| 4 | 3 | −2.0000000000 | −1.9918777550 | 0.0081222450 |
| 4 | 4 | −2.0000000000 | −2.0001242411 | 0.0001242411 |

Gráfica de la función $z = f(x,\ y) = \cos(x)$






■ **Problema 45.** Calcúlese el valor aproximado de la integral

$$\int_a^b \int_c^d (\cos(y))\, d\,y\, d\,x$$

con $[a, b] = [0, \pi]$, $c(x) = 0$, $d(x) = x$ empleando la integral doble de *Gauss* para los valores $\{(n, m)\} = \{(3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}$ y hallar el error absoluto sabiendo que el valor de la integral es

$I = 2.0000000000\ldots$

---

**Solución**

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy\, dx = \int_{0.}^{\pi} \int_{0.}^{x} (\cos(y))\, dy\, dx$$

$[a, b] = [0., \pi]$ $\quad c(x) = 0.$ $\quad d(x) = x,$

$n = 3$ $\quad m = 3$

empleando la *integral doble de Gauss.*

$$I = \int_{0.}^{\pi} \int_{0.}^{x} (\cos(y))\, dy\, dx \approx 2.00149418447$$

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,\, y)\, dy\, dx = \int_{0.}^{\pi} \int_{0.}^{x} (\cos(y))\, dy\, dx$$

$[a,\, b] = [0.,\, \pi]$ $\quad c(x) = 0.$ $\quad d(x) = x,$

$n = 3$ $\quad m = 4$

empleando la *integral doble de Gauss*.

$$I = \int_{0.}^{\pi} \int_{0.}^{x} (\cos(y))\, dy\, dx \approx 2.00007976480$$

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,\, y)\, dy\, dx = \int_{0.}^{\pi} \int_{0.}^{x} (\cos(y))\, dy\, dx$$

$[a,\, b] = [0.,\, \pi]$ $\quad c(x) = 0.$ $\quad d(x) = x,$

$n = 4$ $\quad m = 3$

empleando la *integral doble de Gauss*.

$$I = \int_{0.}^{\pi} \int_{0.}^{x} (\cos(y))\, dy\, dx \approx 2.00138804466$$

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,\, y)\, dy\, dx = \int_{0.}^{\pi} \int_{0.}^{x} (\cos(y))\, dy\, dx$$

$[a,\, b] = [0.,\, \pi]$ $\quad c(x) = 0.$ $\quad d(x) = x,$

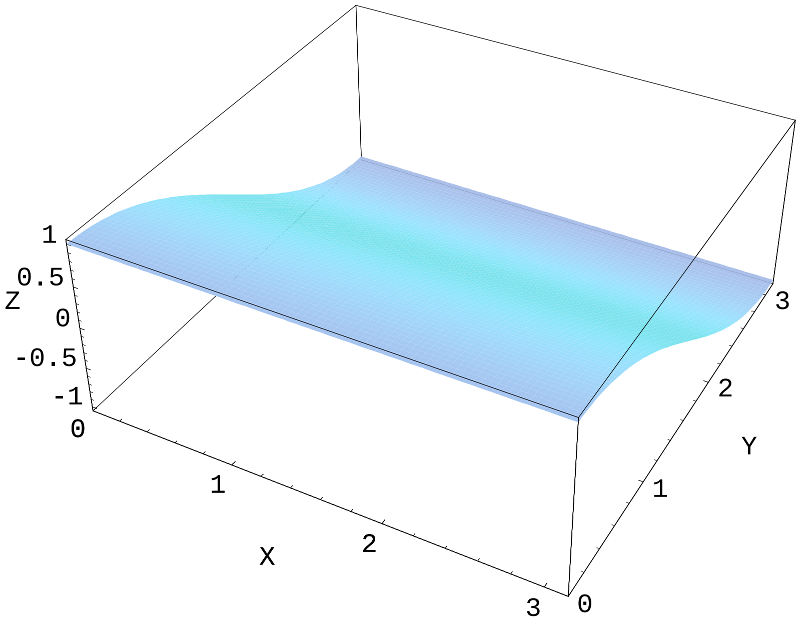
$n = 4$ $\quad m = 4$

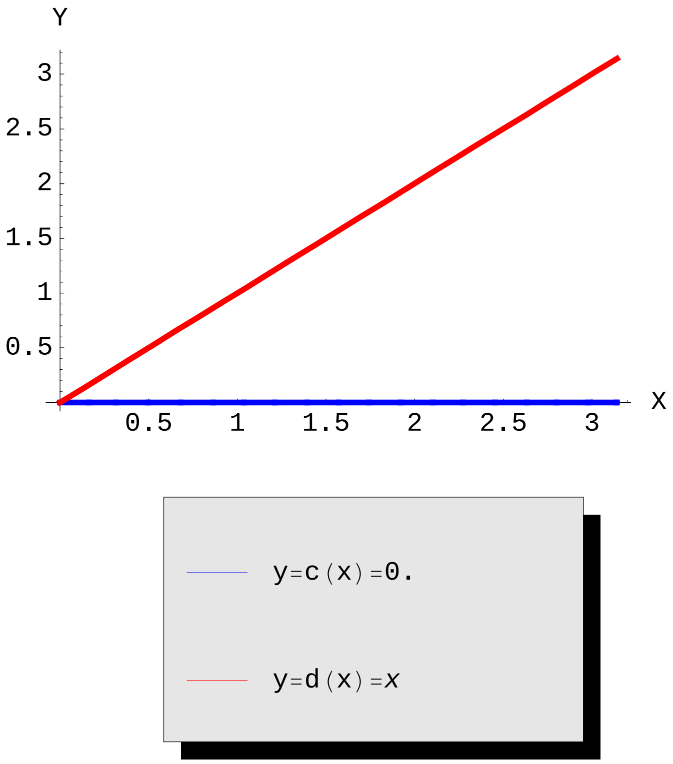
empleando la *integral doble de Gauss*.

$$I = \int_{0.}^{\pi} \int_{0.}^{x} (\cos(y))\, dy\, dx \approx 1.99998350766$$

| $n$ | $m$ | $I$ | $\overline{I}$ | $\lvert I-\overline{I}\rvert$ |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 3 | 2.0000000000 | 2.0014941845 | 0.0014941845 |
| 3 | 4 | 2.0000000000 | 2.0000797648 | 0.0000797648 |
| 4 | 3 | 2.0000000000 | 2.0013880447 | 0.0013880447 |
| 4 | 4 | 2.0000000000 | 1.9999835077 | 0.0000164923 |

Gráfica de la función $z = f(x,\, y) = \cos(y)$


Z
X
Y
1
0.5
0
-0.5
-1
0
1
2
3
0
1
2
3


Y
X
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0.5
1
1.5
2
2.5
3
y=c(x)=0.
y=d(x)=x

■ **Problema 46.** Calcúlese el valor aproximado de la integral

$$\int_a^b \int_c^d \left(\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\right) d\,y\,d\,x$$

con $[a, b] = [0, \frac{\pi}{4}]$, $c(x) = 0$, $d(x) = \operatorname{sen}(x)$ empleando la integral doble de *Gauss* para los valores $\{(n, m)\} = \{(3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}$ y hallar el error absoluto sabiendo que el valor de la integral es

$I = 0.3084251375\ldots$

---

**Solución**

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sin(x)} \left(\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\right) dy\, dx$$

$[a, b] = [0, \frac{\pi}{4}]$ $\quad c(x) = 0$ $\quad d(x) = \sin(x)$,

$n = 3$ $\quad m = 3$

empleando la *integral doble de Gauss*.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sin(x)} \left(\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\right) dy\, dx \approx 0.30841514892$$

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sin(x)} \left(\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\right) dy\, dx$$

$[a, b] = [0, \frac{\pi}{4}]$ $\quad c(x) = 0$ $\quad d(x) = \sin(x)$,

$n = 3$ $\quad m = 4$

empleando la *integral doble de Gauss*.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sin(x)} \left(\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\right) dy\, dx \approx 0.30841453324$$

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sin(x)} \left(\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\right) dy\, dx$$

$[a, b] = [0, \frac{\pi}{4}]$ $\quad c(x) = 0$ $\quad d(x) = \sin(x)$,

$n = 4$ $\quad m = 3$

empleando la *integral doble de Gauss*.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sin(x)} \left( \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \right) dy\, dx \approx 0.30842458667$$

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sin(x)} \left( \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \right) dy\, dx$$

$[a, b] = [0, \frac{\pi}{4}]$ $c(x) = 0$ $d(x) = \sin(x)$,

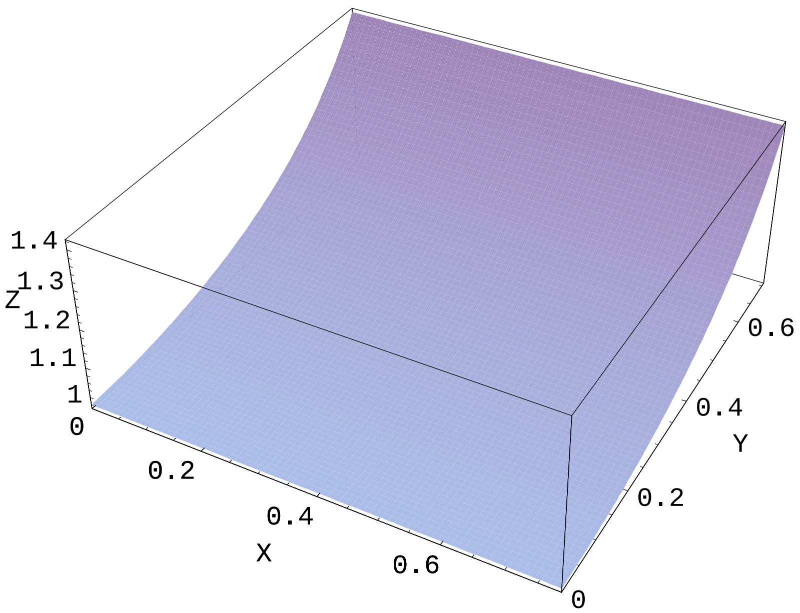
$n = 4$ $m = 4$

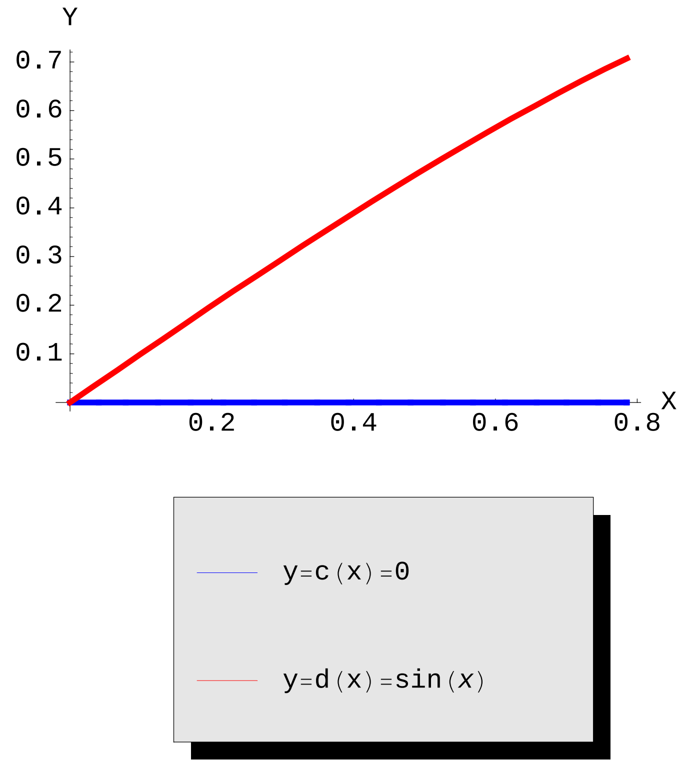
empleando la *integral doble de Gauss*.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sin(x)} \left( \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \right) dy\, dx \approx 0.30842449774$$

| $n$ | $m$ | $I$ | $\overline{I}$ | $\lvert I-\overline{I}\rvert$ |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 3 | 0.3084251375 | 0.3084151489 | $9.9886160319\times 10^{-6}$ |
| 3 | 4 | 0.3084251375 | 0.3084145332 | 0.0000106043 |
| 4 | 3 | 0.3084251375 | 0.3084245867 | $5.5086402062\times 10^{-7}$ |
| 4 | 4 | 0.3084251375 | 0.3084244977 | $6.3979512077\times 10^{-7}$ |

Gráfica de la función $z = f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$






■ **Problema 47.** Calcúlese el valor aproximado de la integral

$$\int_a^b \int_c^d (y\,\text{sen}(x) + x\cos(y))\,d\,y\,d\,x$$

con $[a, b] = [-\pi, \frac{3\pi}{2}]$, $c(x) = 0$, $d(x) = 2\pi$ empleando la integral doble de *Gauss* para los valores $\{(n, m)\} = \{(3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}$ y hallar el error absoluto sabiendo que el valor de la integral es

$I = -19.739208802178715985\ldots$

## Solución

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\,dy\,dx = \int_{-\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \int_{0.}^{2\pi} (x\cos(y) + y\sin(x))\,dy\,dx$$

$[a, b] = [-\pi, \frac{3\pi}{2}]$ $\quad c(x) = 0.$ $\quad d(x) = 2\pi,$

$n = 3$ $\quad m = 3$

empleando la *integral doble de Gauss*.

$$I = \int_{-\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \int_{0.}^{2\pi} (x\cos(y) + y\sin(x))\,dy\,dx \approx -12.7479012309$$

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,\ y)\ dy\ dx = \int_{-\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \int_{0.}^{2\pi} (\ x\cos(y) + y\sin(x)\ )\ dy\ dx$$

$[a,\ b] = [-\pi,\ \frac{3\pi}{2}]$ $\qquad c(x) = 0.$ $\qquad d(x) = 2\pi,$

$n = 3$ $\qquad m = 4$

empleando la *integral doble de Gauss*.

$$I = \int_{-\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \int_{0.}^{2\pi} (\ x\cos(y) + y\sin(x)\ )\ dy\ dx \approx -21.2153899426$$

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,\ y)\ dy\ dx = \int_{-\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \int_{0.}^{2\pi} (\ x\cos(y) + y\sin(x)\ )\ dy\ dx$$

$[a,\ b] = [-\pi,\ \frac{3\pi}{2}]$ $\qquad c(x) = 0.$ $\qquad d(x) = 2\pi,$

$n = 4$ $\qquad m = 3$

empleando la *integral doble de Gauss*.

$$I = \int_{-\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \int_{0.}^{2\pi} (\ x\cos(y) + y\sin(x)\ )\ dy\ dx \approx -11.8362377944$$

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,\ y)\ dy\ dx = \int_{-\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \int_{0.}^{2\pi} (\ x\cos(y) + y\sin(x)\ )\ dy\ dx$$

$[a,\ b] = [-\pi,\ \frac{3\pi}{2}]$ $\qquad c(x) = 0.$ $\qquad d(x) = 2\pi,$

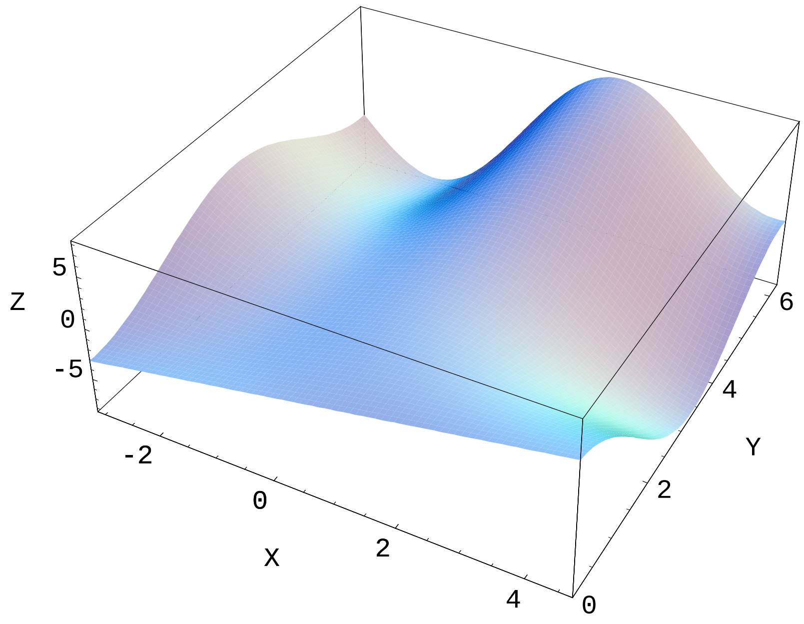
$n = 4$ $\qquad m = 4$

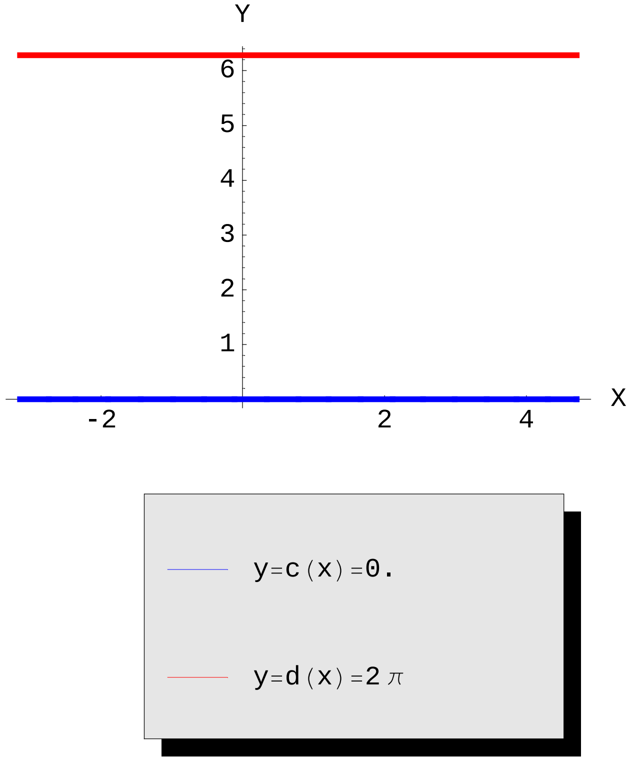
empleando la *integral doble de Gauss*.

$$I = \int_{-\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \int_{0.}^{2\pi} (\ x\cos(y) + y\sin(x)\ )\ dy\ dx \approx -20.3037265061$$

| $n$ | $m$ | $I$ | $\overline{I}$ | $\lvert I-\overline{I}\rvert$ |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 3 | −19.7392088022 | −12.7479012309 | 6.9913075712 |
| 3 | 4 | −19.7392088022 | −21.2153899426 | 1.4761811404 |
| 4 | 3 | −19.7392088022 | −11.8362377944 | 7.9029710077 |
| 4 | 4 | −19.7392088022 | −20.3037265061 | 0.5645177039 |

Gráfica de la función $z = f(x,\ y) = x\cos(y) + y\sin(x)$


Z
5
0
-5
-2
0
2
4
X
0
2
4
6
Y


Y
6
5
4
3
2
1
-2
2
4
X
y=c(x)=0.
y=d(x)=2π

## 4.7 Descripción de la integral triple de Gauss

Las integrales triples de *Gauss* se aproximan de forma similar a las anteriores (integral doble de *Gauss*). La forma de las integrales triples que se van a resolver es la siguiente:

$$\int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,\ y,\ z)\, d\,y\, d\,x\, d\,z \tag{35}$$

Para realizar este tipo de integrales hay que realizar una gran cantidad de cálculos, por ello el método que se utiliza es la cuadratura gaussiana.

## 4.8 Pseudocódigo de la regla de la Integral triple de Gauss

Este algoritmo aplica la regla de la integral triple de *Gauss* a una integral de la forma:

$$\int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,\ y,\ z)\, d\,z\, d\,y\, d\,x \tag{36}$$

- **Algoritmo 4. Método de la integral triple de Gauss.**

**Input** $(f(x,\ y,\ z),\ [a,\ b],\ c(x),\ d(x),\ \beta(x,\ y),\ \alpha(x,\ y),\ m,\ n,\ p)$

(* Las raíces $r_{i,j}$ y los coeficientes $c_{i,j}$ deben estar disponibles para $i = \text{máx}\{m,\ n\}$ y para $1 \leq j \leq i$ siendo ambos conocidos *)

$h_1 \leftarrow \frac{b-a}{2}$
$h_2 \leftarrow \frac{b-a}{2}$
$J \leftarrow 0$

**For** $i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ m$ **do**
JX ← 0
$x \leftarrow h_1\ r_{m,i} + h_2$
$d_1 \leftarrow d(x)$
$c_1 \leftarrow c(x)$
$k_1 \leftarrow \frac{(d_1 - c_1)}{2}$
$k_2 \leftarrow \frac{(d_1 + c_1)}{2}$

```
            For j = 1, 2, 3, ..., n do
                JY ← 0
                y ← k_1 r_{n,j} + k_2
                β_1 ← β(x, y)
                α_1 ← α(x, y)
                l_1 ← (β_1−α_1)/2
                l_2 ← (β_1+α_1)/2

                For k = 1, 2, 3, ..., p do
                    z ← l_1 r_{p,k} + l_2
                    Q ← f(x, y, z)
                    JY ← JY + c_{p,k} Q
                End For
                JX ← JX + c_{n,j} l_1 JY
            End For
            J ← J + c_{m,i} k_1 JX
        End For

        J ← h_1 J
        Return (J)
Output
```

## 4.9 Problemas

■ **Problema 48.** Calcúlese el valor aproximado de la integral

$$\int_a^b \int_c^d \int_\alpha^\beta \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) d\,z\,d\,y\,d\,z$$

con $[a, b] = [-2, 2]$, $[c, d] = \left[-\sqrt{4 - x^2}, \sqrt{4 - x^2}\right]$, $[\alpha, \beta] = \left[\sqrt{x^2 + y^2}, 2\right]$ empleando la integral triple de *Gauss* con $n = m = p = 5$.

---

**Solución**

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

$$I = \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) dz\, dy\, dx$$

$[a, b] = [-2, 2]$ $\quad c(x) = -\sqrt{4 - x^2}$ $\quad d(x) = \sqrt{4 - x^2}$

$\alpha(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\quad \beta(x, y) = 2,$

$n = 5$ $\quad m = 5$ $\quad p = 5$

empleando la *integral triple de Gauss*.

$$I = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) dx\, dy\, dz \approx 7.67299433075$$

```
8.37758
```

■ **Problema 49.** Calcúlese el valor aproximado de la integral

$$\int_a^b \int_c^d \int_\alpha^\beta (e^{x+y+z})\, d\,z\, d\,y\, d\,x$$

con $[a, b] = [0, 1]$, $[c, d] = [1, 2]$, $[\alpha, \beta] = [0, 0.5]$ empleando la integral triple de *Gauss* con los siguientes valores

a) $n = m = p = 2.$

b) $n = m = p = 3.$

d) $n = m = p = 4.$

e) $n = m = p = 5.$

f) Hallar el error absoluto en cada caso si el valor de la integral es $I = 5.2064465538\ldots$

---

**Solución**

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

$$I = \int_0^1 \int_1^2 \int_0^{0.5} (e^{x+y+z})\, dz\, dy\, dx$$

$[a, b] = [0, 1]$ $c(x) = 1$ $d(x) = 2$

$\alpha(x, y) = 0$ $\beta(x, y) = 0.5,$

$n = 2$ $m = 2$ $p = 2$

empleando la *integral triple de Gauss.*

$$I = \int_0^1 \int_1^2 \int_0^{0.5} (e^{x+y+z})\, dx\, dy\, dz \approx 5.20403626514$$

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

$$I = \int_0^1 \int_1^2 \int_0^{0.5} (e^{x+y+z})\, dz\, dy\, dx$$

$[a, b] = [0, 1]$ $c(x) = 1$ $d(x) = 2$

$\alpha(x, y) = 0 \qquad \beta(x, y) = 0.5,$

$n = 3 \qquad m = 3 \qquad p = 3$

empleando la *integral triple de Gauss.*

$$I = \int_0^1 \int_1^2 \int_0^{0.5} (\, e^{x+y+z}\,)\, dx\, dy\, dz \approx 5.20644151981$$

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

$$I = \int_0^1 \int_1^2 \int_0^{0.5} (\, e^{x+y+z}\,)\, dz\, dy\, dx$$

$[a, b] = [0, 1] \qquad c(x) = 1 \qquad d(x) = 2$

$\alpha(x, y) = 0 \qquad \beta(x, y) = 0.5,$

$n = 4 \qquad m = 4 \qquad p = 4$

empleando la *integral triple de Gauss.*

$$I = \int_0^1 \int_1^2 \int_0^{0.5} (\, e^{x+y+z}\,)\, dx\, dy\, dz \approx 5.20644654817$$

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

$$I = \int_0^1 \int_1^2 \int_0^{0.5} (\, e^{x+y+z}\,)\, dz\, dy\, dx$$

$[a, b] = [0, 1] \qquad c(x) = 1 \qquad d(x) = 2$

$\alpha(x, y) = 0 \qquad \beta(x, y) = 0.5,$

$n = 5 \qquad m = 5 \qquad p = 5$

empleando la *integral triple de Gauss.*

$$I = \int_0^1 \int_1^2 \int_0^{0.5} (\, e^{x+y+z}\,)\, dx\, dy\, dz \approx 5.20644655383$$

| $n$ | $m$ | $p$ | $I$ | $\bar{I}$ | $\lvert I-\bar{I}\rvert$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 2 | 2 | 5.2064465538 | 5.2040362651 | 0.0024102887 |
| 3 | 3 | 3 | 5.2064465538 | 5.2064415198 | $5.0340251407\times 10^{-6}$ |
| 4 | 4 | 4 | 5.2064465538 | 5.2064465482 | $5.6651767721\times 10^{-9}$ |
| 5 | 5 | 5 | 5.2064465538 | 5.2064465538 | $3.9683811792\times 10^{-12}$ |

■ **Problema 50.** Calcúlese el valor aproximado de la integral

$$\int_a^b \int_c^d \int_\alpha^\beta \left(\frac{1}{y}\ \mathrm{sen}\left(\frac{z}{y}\right)\right) d\,z\, d\,y\, d\,x$$

con $[a, b] = [0, \pi]$, $[c, d] = [0, x]$, $[\alpha, \beta] = [0, x\,y]$ empleando la integral triple de *Gauss* con los siguientes valores

a) $n = m = p = 2$.
b) $n = m = p = 3$.
d) $n = m = p = 4$.
e) $n = m = p = 5$.
f) Hallar el error absoluto en cada caso si el valor de la integral es $I = 6.9348022005\ldots$

## Solución

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

$$I = \int_0^\pi \int_0^x \int_0^{x\,y} \left(\frac{\sin\left(\frac{z}{y}\right)}{y}\right) dz\, dy\, dx$$

$[a, b] = [0, \pi]$ $\quad c(x) = 0$ $\quad d(x) = x$
$\alpha(x, y) = 0$ $\quad \beta(x, y) = x\,y,$
$n = 2$ $\quad m = 2$ $\quad p = 2$
empleando la *integral triple de Gauss*.

$$I = \int_0^\pi \int_0^x \int_0^{x\,y} \left(\frac{\sin\left(\frac{z}{y}\right)}{y}\right) dx\, dy\, dz \approx 7.103931768$$

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

$$I = \int_0^\pi \int_0^x \int_0^{x\,y} \left(\frac{\sin\left(\frac{z}{y}\right)}{y}\right) dz\, dy\, dx$$

$[a, b] = [0, \pi]$ $\quad c(x) = 0$ $\quad d(x) = x$
$\alpha(x, y) = 0$ $\quad \beta(x, y) = x\,y,$
$n = 3$ $\quad m = 3$ $\quad p = 3$
empleando la *integral triple de Gauss*.

$$I = \int_0^\pi \int_0^x \int_0^{x\,y} \left(\frac{\sin\left(\frac{z}{y}\right)}{y}\right) dx\, dy\, dz \approx 6.928161315$$

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

$$I = \int_0^{\pi} \int_0^{x} \int_0^{x\,y} \left( \frac{\sin\left(\frac{z}{y}\right)}{y} \right) dz\, dy\, dx$$

$[a, b] = [0, \pi]$ $c(x) = 0$ $d(x) = x$

$\alpha(x, y) = 0$ $\beta(x, y) = x\,y,$

$n = 4$ $m = 4$ $p = 4$

empleando la *integral triple de Gauss*.

$$I = \int_0^{\pi} \int_0^{x} \int_0^{x\,y} \left( \frac{\sin\left(\frac{z}{y}\right)}{y} \right) dx\, dy\, dz \approx 6.934912397$$

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

$$I = \int_0^{\pi} \int_0^{x} \int_0^{x\,y} \left( \frac{\sin\left(\frac{z}{y}\right)}{y} \right) dz\, dy\, dx$$

$[a, b] = [0, \pi]$ $c(x) = 0$ $d(x) = x$

$\alpha(x, y) = 0$ $\beta(x, y) = x\,y,$

$n = 5$ $m = 5$ $p = 5$

empleando la *integral triple de Gauss*.

$$I = \int_0^{\pi} \int_0^{x} \int_0^{x\,y} \left( \frac{\sin\left(\frac{z}{y}\right)}{y} \right) dx\, dy\, dz \approx 6.93480119230$$

| $n$ | $m$ | $p$ | $I$ | $\overline{I}$ | $\lvert I-\overline{I}\rvert$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 2 | 2 | 6.9348022005 | 7.1039317679 | 0.1691295674 |
| 3 | 3 | 3 | 6.9348022005 | 6.9281613149 | 0.0066408856 |
| 4 | 4 | 4 | 6.9348022005 | 6.9349123972 | 0.0001101967 |
| 5 | 5 | 5 | 6.9348022005 | 6.9348011923 | $1.0082410249\times 10^{-6}$ |

# 5. Integrales Impropias

## 5.1 Descripción de las integrales Impropias

Las integrales impropias se producen cuando se extiende el concepto de integración a un intervalo donde la función no está acotada, o a un intervalo con uno o más extremos infinitos. En ambos casos, es preciso realizar modificaciones a las reglas normales de aproximación de la integral.

Primero se considerará la situación en que el integrando no está acotado en el extremo izquierdo del intervalo de la integración .

A continuación se demostrará que, con un manejo adecuado, es posible reducir las otras integrales apropiadas a problemas de esta índole.

En el cálculo se demuestra que la integral impropia con una singularidad en el extremo izquierdo:

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p} \tag{37}$$

converge si y sólo si $0 < p < 1$ y en este caso definimos:

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p} = \frac{(b-a)^{1-p}}{1-p}. \tag{38}$$

Si $f$ es una función que puede escribirse en la forma:

$$f(x) = \frac{g(x)}{(x-a)^p} \tag{39}$$

donde $0 < p < 1$ y $g$ es continua en el intervalo $[a, b]$, entonces la integral impropia

$$\int_a^b f(x)\, dx \tag{40}$$

también existirá.

Aproximaremos esta integral por medio de la regla *compuesta de Simpson*. Si $g \in C^5[a, b]$ podremos construir el cuarto polinomio de *Taylor* $P_4(x)$, para $g$ alrededor de $a$:

$$P_4(x) = g(a) + g'(a)(x-a) + \frac{g''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{g'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \frac{g^{(4)}(a)}{2!}(x-a)^4. \tag{41}$$

Siendo:

$$\int_a^b \frac{P_4(x)}{(x-a)^p}\, dx = \sum_{k=0}^{4} \int_a^b \frac{g^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^{k-p}\, dx = \sum_{k=0}^{4} \frac{g^{(k)}(a)}{k!\,(k+1-p)}(b-a)^{k+1-p}\, dx. \tag{42}$$

Por lo general ésta es la parte dominante de la aproximación, especialmente cuando el polinomio de *Taylor* $P_4(x)$ concuerda de forma muy similar con $g(x)$ en todo el intervalo $[a, b]$.

De forma que para aproximar la integral de $f$ tenemos que agregar este valor a la aproximación de :

$$\int_a^b \frac{g(x) - P_4(x)}{(x-a)^p}\, dx. \tag{43}$$

Definimos para ello:

$$G(x) = \begin{cases} \int_a^b \frac{g(x)-P_4(x)}{(x-a)^p}\, dx & \text{si } a < x \le b \\ 0 & \text{si } x = a \end{cases}. \tag{44}$$

Como $0 < p < 1$ y como $P_4^{(k)}(a)$ concuerdan con $g^{(k)}(a)$ para cada $k =$ 0, 1, 2, 3, 4 tenemos $G \in C^4[a, b]$. Lo que significa que podemos aplicar la regla *compuesta de Simpson* para aproximar la integral de $G$ en $[a, b]$ y el término de error de esta regla será válido.

Al agregrar esta aproximación al valor de la ecuación (XXX), obtenemos unaaproximación a la integral impropia de $f$ en $[a, b]$ con la exactitud de la aproximación de la regla *compuesta de Simpson*.

Para aproximar la integral impropia con una singularidad en el extremo derecho, se aplicará el método con el que anteriormente se expandieron los términos del extremo derecho de $b$ en lugar del extremo izquierdo de $a$.

También se puede realizar la sustitución:

$$z = -x, \; dz = -dx. \tag{45}$$

Para que la integral impropia adquiera la forma:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{-a}^{-b} f(-z)\, dx \tag{46}$$

que es su singularidad en el extremo izquierdo.

Las integrales impropias interiores con singularidades, donde $a < c < b$ se tratan como la suma de integrales impropias con singularidades de extremos, puesto que:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx. \tag{47}$$

El otro tipo de integrales impropias contiene límites de integración infinitos. La integral básica de esta clase presenta la forma:

$$\int_a^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx. \tag{48}$$

Que se convierte en una integral con la singularidad de extremo izquierdo al realizar la sustitución de integración:

$$t = x^{-1},\ dt = -x^{-2}\, dx. \tag{49}$$

Con lo que se consigue:

$$dx = -x^{-2},\ \ dt = -t^{-2}\, dt. \tag{50}$$

Por lo tanto:

$$\int_a^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx = \int_{\frac{1}{a}}^{\infty} -\frac{t^p}{t^2}\, dt = \int_0^{\frac{1}{a}} -\frac{1}{t^{2-p}}\, dt. \tag{51}$$

De modo similar, el cambio de variable $t = x^{-1}$ convierte la integral impropia $\int_a^{\infty} f(x)\, dx$ en otra que tiene una singularidad de extremo izquierdo en cero:

$$\int_a^{\infty} f(x)\, dx = \int_0^{\frac{1}{a}} t^{-2}\, f\left(\frac{1}{t}\right) dt. \tag{52}$$

Se puede aproximar utilizando la fórmula de la cuadratura ya descrita anteriormente.

## 5.2 Pseudocódigo de la regla de las integrales impropias

- **Algoritmo 5. Método de integración adaptativa aplicada a integrales impropias**

**Input** $(f(x),\ f_2(x),\ g(x),\ [a,\ b],\ p,\ n)$

  **For** $i = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n-1$ **do**
    (* Inicializacion de los arrays *)
    $x_i \leftarrow 0$

$y_i \leftarrow 0$
**End**

app $\leftarrow 0$
$i \leftarrow 1$
$a_i \leftarrow a$
$h_i \leftarrow \frac{b-a}{n}$

(* Desarrollo del polinomio de Taylor de g(x) para x = a *)
pol $\leftarrow$ **Taylor** $(g(x),\ a,\ n)$

(* Cálculo de la integral $\int_a^b \frac{P_n(x)}{(x-a)^p} dx$ *)
$I_1 \leftarrow \int_a^b (\text{f2} * \text{pol})\, dx$

(* Definición de la función G (x)*)
**If** $x = a$ **Then**
$G(x) \leftarrow 0$
**else**
**If** $(x > a)$ **and** $(x \le b)$ **Then**

$G(x) \leftarrow \frac{G(x)-\text{pol}}{(x-a)^p}$
**End**
**End**

(* Evaluación de G (x), se guardan sus valores en los arrays *)
**For** $i = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$ **do**
$x_i \leftarrow a + i * h$
$y_i \leftarrow G(x_i)$
**End**

(*Aproximación a partir de la regla de Simpson Compuesta para los diferentes intervalos*)

$$I_2 \leftarrow \frac{h}{3} * \left( y_0 + 2 \sum_{i=2}^{n/2} y_{2i-2} + 4 \sum_{i=1}^{n/2} y_{2i-1} + y_n \right)$$

(* Se suman los valores obtenidos con la aproximación de las integrales al utilizar Taylor($I_1$) y Simpson ($I_2$) *)

app $\leftarrow I_1 + I_2$

(* La variable app contendrá el valor final resultante del cálculo de la integral impropia *)

**Return** (app)
**Output**

## 5.3 Problemas

■ **Problema 51.** Calcúlese el valor aproximado de la integral

$$\int_a^b \frac{e^x}{\sqrt{x}}\, d\, x$$

empleando el método para el cálculo con integrales impropias en el intervalo $x \in [0, 1]$.

---

**Solución**

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b f(x)\; dx = \int_{0.}^{1.} \left( \frac{e^x}{\sqrt{x}} \right) dx$$

$[a, b] = [0., 1.]$ $\qquad n = 4$

empleando la integracion para integrales impropias.

Desarrollo en serie de *Taylor* de

$g(x) = e^x \qquad x = 0.$

$$g(x) = P_4(x) = \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x + 1$$

Cálculo de la integral utilizando la aproximación por el polinomio de Taylor:

$$I_1 = \int_a^b \frac{P_n(x)}{(x - a)^p} dx \simeq \int_{0.}^{1.} \frac{P_4(x)}{(x - 0.)^{\frac{1}{2}}} dx \simeq 2.92354497184$$

Se define la función $G(x)$

$$G(x) = \begin{cases} \frac{g(x) - P_n(x)}{(x-a)^p} & a < x \le b \\ 0 & x = a \end{cases}$$

$$G(x) = \begin{cases} \frac{e^x - P_4(x)}{(x-0.)^{\frac{1}{2}}} & 0. < x \le 1. \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Evaluación de $G(x)$.

| $x$ | $G(x)$ |
|---|---|
| 0. | 0.0000000000 |
| 0.25 | 0.0000169792 |
| 0.5 | 0.0004013124 |
| 0.75 | 0.0026026059 |
| 1. | 0.0099484951 |

Se aplica la regla *compuesta de Simpson* para calcular la integral de $G(x)$

$$I_2 = \int_a^b G(x)\, dx$$

$$I_2 = \int_{0.}^{1.} G(x)\; dx \approx 0.00176912170653$$

Se suman las integrales $I_1 + I_2$ y se obtiene la integral impropia.

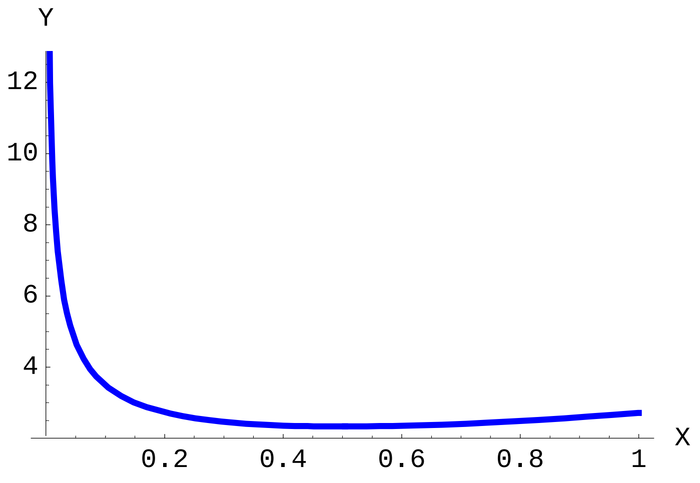
$$I = \int_{0.}^{1.} \left( \frac{e^x}{\sqrt{x}} \right) dx \simeq I_1 + I_2$$

$$I \simeq I_1 + I_2 \simeq 2.92354497184 + 0.00176912170653$$

$$I \simeq 2.92531409354$$

Representación de la función

$$f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x}}$$



■ **Problema 52.** Calcúlese el valor aproximado de la integral

$$\int_a^b \frac{\text{sen}(x)}{\sqrt[4]{x}}\, d\, x$$

empleando el método para el cálculo con integrales impropias en el intervalo $x \in [0, 1]$ con $n = 4$.

---

**Solución**

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b f(x)\, dx = \int_{0.}^{1.} \left( \frac{\sin(x)}{\sqrt[4]{x}} \right) dx$$

$[a, b] = [0., 1.] \qquad n = 4$

empleando la integracion para integrales impropias.

Desarrollo en serie de *Taylor* de

$g(x) = \sin(x) \qquad x = 0.$

$$g(x) = P_4(x) = x - \frac{x^3}{6}$$

Cálculo de la integral utilizando la aproximación por el polinomio de Taylor:

$$I_1 = \int_a^b \frac{P_n(x)}{(x - a)^p} d\mathrm{x} \simeq \int_{0.}^{1.} \frac{P_4(x)}{(x - 0.)^{\frac{1}{4}}} dx \simeq 0.526984126151$$

Se define la función $G(x)$

$$G(x) = \begin{cases} \frac{g(x) - P_n(x)}{(x - a)^p} & a < x \leq b \\ 0 & x = a \end{cases}$$

$$G(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x) - P_4(x)}{(x - 0.)^{\frac{1}{4}}} & 0. < x \leq 1. \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Evaluación de $G(x)$.

| $x$ | $G(x)$ |
|---|---|
| 0. | 0.0000000000 |
| 0.25 | 0.0000114918 |
| 0.5 | 0.0003078523 |
| 0.75 | 0.0020967654 |
| 1. | 0.0081376515 |

Se aplica la regla *compuesta de Simpson* para calcular la integral de $G(x)$

$$\mathrm{I}_2 = \int_a^b G(x)\, dx$$

$$I_2 = \int_{0.}^{1.} G(x)\; dx \approx 0.00143219872728$$

Se suman las integrales $I_1 + I_2$ y se obtiene la integral impropia.

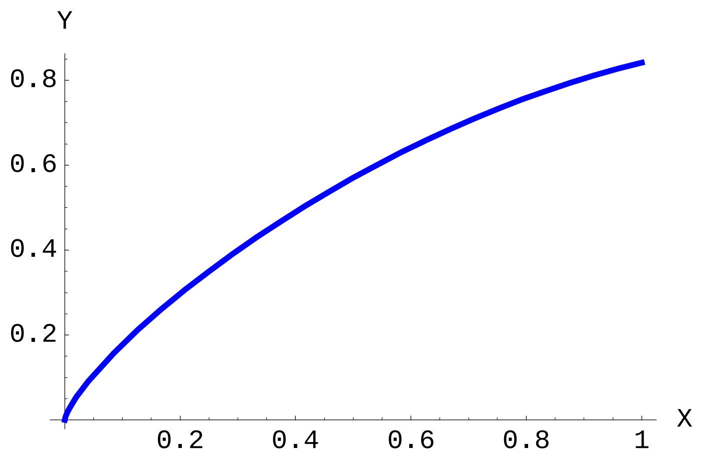
$$I = \int_{0.}^{1.} \left( \frac{\sin(x)}{\sqrt[4]{x}} \right) dx \simeq I_1 + I_2$$

$$I \simeq I_1 + I_2 \simeq 0.526984126151 + 0.00143219872728$$

$$I \simeq 0.528416324878$$

Representación de la función

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt[4]{x}}$$



■ **Problema 53.** Calcúlese el valor aproximado de la integral

$$\int_a^b \frac{e^{2x}}{\sqrt[5]{x^2}}\, d\,x$$

empleando el método para el cálculo con integrales impropias en el intervalo $x \in [0, 1]$ con $n = 6$.

---

**Solución**

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b f(x)\, dx = \int_{0.}^{1.} \left( \frac{e^{2x}}{\sqrt[5]{x^2}} \right) dx$$

$[a, b] = [0., 1.]$ $\qquad n = 6$

empleando la integracion para integrales impropias.

Desarrollo en serie de *Taylor* de

$g(x) = e^{2x}$ $\qquad x = 0.$

$$g(x) = P_6(x) = \frac{4x^6}{45} + \frac{4x^5}{15} + \frac{2x^4}{3} + \frac{4x^3}{3} + 2x^2 + 2x + 1$$

Cálculo de la integral utilizando la aproximación por el polinomio de Taylor:

$$I_1 = \int_a^b \frac{P_n(x)}{(x-a)^p} dx \simeq \int_{0.}^{1.} \frac{P_6(x)}{(x-0.)^{\frac{2}{5}}} dx \simeq 4.26228240359$$

Se define la función $G(x)$

$$G(x) = \begin{cases} \frac{g(x)-P_n(x)}{(x-a)^p} & a < x \le b \\ 0 & x = a \end{cases}$$

$$G(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x}-P_6(x)}{(x-0.)^{\frac{2}{5}}} & 0. < x \le 1. \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Evaluación de $G(x)$.

| $x$ | $G(x)$ |
|---|---|
| 0. | 0.0000000000 |
| 0.166667 | $1.9380945115\times 10^{-7}$ |
| 0.333333 | 0.0000196419 |
| 0.5 | 0.0002985689 |
| 0.666667 | 0.0020892041 |
| 0.833333 | 0.0095641081 |
| 1. | 0.0335005434 |

Se aplica la regla *compuesta de Simpson* para calcular la integral de $G(x)$

$$\mathrm{I}_2 = \int_a^b G(x)\, dx$$

$$I_2 = \int_{0.}^{1.} G(x)\ dx \approx 0.00428720658566$$

Se suman las integrales $I_1 + I_2$ y se obtiene la integral impropia.

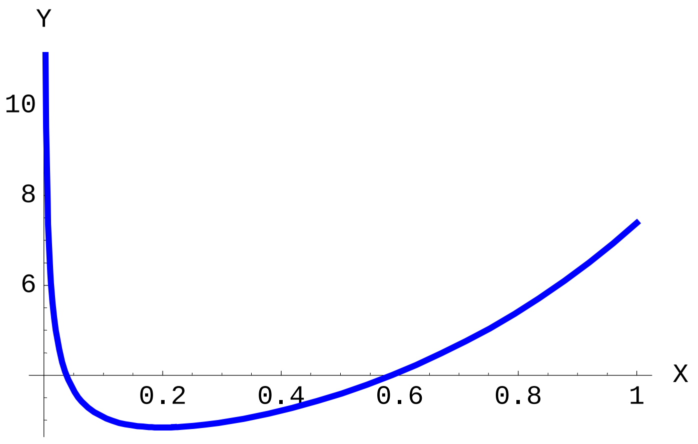
$$I = \int_{0.}^{1.} \left( \frac{e^{2x}}{\sqrt[5]{x^2}} \right) dx \simeq I_1 + I_2$$

$$I \simeq I_1 + I_2 \simeq 4.26228240359 + 0.00428720658566$$

$$I \simeq 4.26656961017$$

Representación de la función

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{\sqrt[5]{x^2}}$$




■ **Problema 54.** Calcúlese el valor aproximado de la integral

$$\int_a^b \frac{\ln(x)}{(x-1)^{\left(\frac{1}{5}\right)}}\,d\,x$$

empleando el método para el cálculo con integrales impropias en el intervalo $x \in [1, 2]$ con $n = 8$.

---

**Solución**

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_{1.}^{2.} \left( \frac{\log(x)}{\sqrt[5]{x-1}} \right) dx$$

$[a, b] = [1., 2.]$ $\qquad n = 8$

empleando la integracion para integrales impropias.

Desarrollo en serie de *Taylor* de

$g(x) = \log(x) \qquad x = 1.$

$$g(x) = P_8(x) = -\frac{1}{8}(x-1.)^8 + \frac{1}{7}(x-1.)^7 - \frac{1}{6}(x-1.)^6 + \frac{1}{5}(x-1.)^5 - \frac{1}{4}(x-1.)^4 + \frac{1}{3}(x-1.)^3 - \frac{1}{2}(x-1.)^2 + x - 1.$$

Cálculo de la integral utilizando la aproximación por el polinomio de Taylor:

$$I_1 = \int_a^b \frac{P_n(x)}{(x-a)^p} dx \simeq \int_{1.}^{2.} \frac{P_8(x)}{(x-1.)^{\frac{1}{5}}} dx \simeq 0.426703519456$$

Se define la función $G(x)$

$$G(x) = \begin{cases} \frac{g(x)-P_n(x)}{(x-a)^p} & a < x \leq b \\ 0 & x = a \end{cases}$$

$$G(x) = \begin{cases} \frac{\log(x)-P_8(x)}{(x-1.)^{\frac{1}{5}}} & 1. < x \leq 2. \\ 0 & x = 1. \end{cases}$$

Evaluación de $G(x)$.

| $x$ | $G(x)$ |
|---|---|
| 1. | 0.0000000000 |
| 1.125 | $1.1280055350 \times 10^{-9}$ |
| 1.25 | $4.5671552037 \times 10^{-7}$ |
| 1.375 | 0.0000148330 |
| 1.5 | 0.0001720956 |
| 1.625 | 0.0011383735 |
| 1.75 | 0.0052849831 |
| 1.875 | 0.0192353150 |
| 2. | 0.0586233710 |

Se aplica la regla *compuesta de Simpson* para calcular la integral de $G(x)$

$$I_2 = \int_a^b G(x)\, dx$$

$$I_2 = \int_{1.}^{2.} G(x)\, dx \approx 0.00629552218658$$

Se suman las integrales $I_1 + I_2$ y se obtiene la integral impropia.

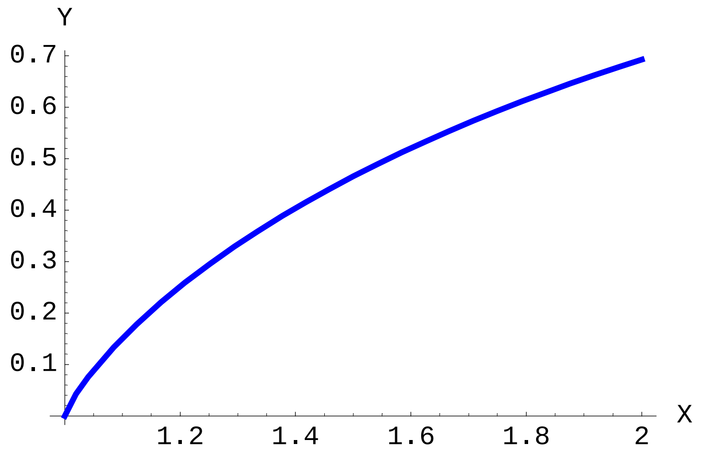
$$I = \int_{1.}^{2.} \left( \frac{\log(x)}{\sqrt[5]{x-1}} \right) dx \simeq I_1 + I_2$$

$$I \simeq I_1 + I_2 \simeq 0.426703519456 + 0.00629552218658$$

$$I \simeq 0.432999041643$$

Representación de la función

$$f(x) = \frac{\log(x)}{\sqrt[5]{x-1}}$$




■ **Problema 55.** Calcúlese el valor aproximado de la integral

$$\int_a^b \frac{\cos(2\,x)}{(x)^{\left(\frac{1}{3}\right)}}\,d\,x$$

empleando el método para el cálculo con integrales impropias en el intervalo $x \in [0, 1]$ con $n = 6$.

---

**Solución**

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_{0.}^{1.} \left(\frac{\cos(2\,x)}{\sqrt[3]{x}}\right) dx$$

$[a, b] = [0., 1.]$ $\quad n = 6$

empleando la integracion para integrales impropias.

Desarrollo en serie de *Taylor* de

$g(x) = \cos(2\,x)$ $\quad x = 0.$

$$g(x) = P_6(x) = -\frac{4\,x^6}{45} + \frac{2\,x^4}{3} - 2\,x^2 + 1$$

Cálculo de la integral utilizando la aproximación por el polinomio de Taylor:

$$I_1 = \int_a^b \frac{P_n(x)}{(x-a)^p} dx \simeq \int_{0.}^{1.} \frac{P_6(x)}{(x-0.)^{\frac{1}{3}}} dx \simeq 0.879523810946$$

Se define la función $G(x)$

$$G(x) = \begin{cases} \frac{g(x) - P_n(x)}{(x-a)^p} & a < x \le b \\ 0 & x = a \end{cases}$$

$$G(x) = \begin{cases} \frac{\cos(2x) - P_6(x)}{(x-0.)^{\frac{1}{3}}} & 0. < x \le 1. \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Evaluación de $G(x)$.

| $x$ | $G(x)$ |
|---|---|
| 0. | 0.0000000000 |
| 0.166667 | $6.8605216934 \times 10^{-9}$ |
| 0.333333 | $1.3888235895 \times 10^{-6}$ |
| 0.5 | 0.0000309035 |
| 0.666667 | 0.0002780601 |
| 0.833333 | 0.0015217189 |
| 1. | 0.0060753857 |

Se aplica la regla *compuesta de Simpson* para calcular la integral de $G(x)$

$$\mathrm{I}_2 = \int_a^b G(x)\, dx$$

$$I_2 = \int_{0.}^{1.} G(x)\, dx \approx 0.000713600017248$$

Se suman las integrales $I_1 + I_2$ y se obtiene la integral impropia.

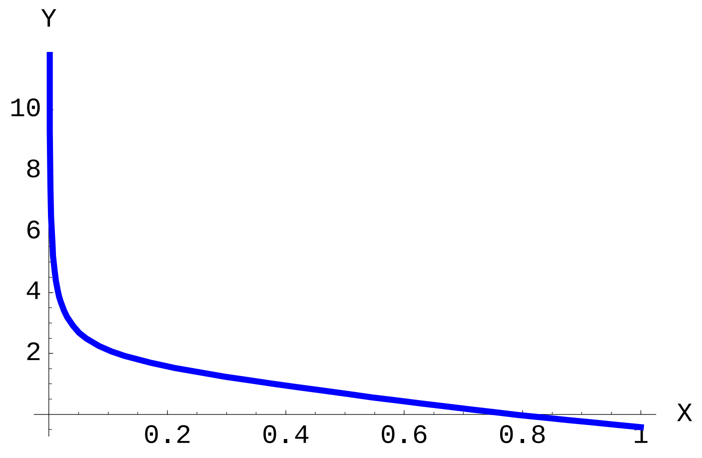
$$I = \int_{0.}^{1.} \left( \frac{\cos(2x)}{\sqrt[3]{x}} \right) dx \simeq I_1 + I_2$$

$$I \simeq I_1 + I_2 \simeq 0.879523810946 + 0.000713600017248$$

$$I \simeq 0.880237410963$$

Representación de la función

$$f(x) = \frac{\cos(2x)}{\sqrt[3]{x}}$$




■ **Problema 56.** Calcúlese el valor aproximado de la integral

$$\int_a^b \frac{e^{-x}}{\left(\sqrt{1-x}\right)}\, d\, x$$

empleando el método para el cálculo con integrales impropias en el intervalo $x \in [0, 1]$ con $n = 6$.

---

**Solución**

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b f(x)\, dx = \int_{0.}^{1.} \left( \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-x}} \right) dx$$

$[a, b] = [0., 1.]$ $\quad n = 4$

empleando la integracion para integrales impropias.

Desarrollo en serie de *Taylor* de

$g(x) = e^{-x}$ $\quad x = 0.$

$$g(x) = P_4(x) = \frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} - x + 1$$

Cálculo de la integral utilizando la aproximación por el polinomio de Taylor:

$$I_1 = \int_a^b \frac{P_n(x)}{(x-a)^p} dx \simeq \int_{0.}^{1.} \frac{P_4(x)}{(x-0.)^{\frac{1}{2}}} dx \simeq 1.08148148148$$

Se define la función $G(x)$

$$G(x) = \begin{cases} \frac{g(x)-P_n(x)}{(x-a)^p} & a < x \leq b \\ 0 & x = a \end{cases}$$

$$G(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x}-P_4(x)}{(x-0.)^{\frac{1}{2}}} & 0. < x \leq 1. \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Evaluación de $G(x)$.

| $x$ | $G(x)$ |
|---|---|
| 0. | 0.0000000000 |
| 0.25 | −0.0000156214 |
| 0.5 | −0.0003396568 |
| 0.75 | −0.0020259694 |
| 1. | −0.0071205588 |

Se aplica la regla *compuesta de Simpson* para calcular la integral de $G(x)$

$$I_2 = \int_a^b G(x)\, dx$$

$$I_2 = \int_{0.}^{1.} G(x)\, dx \approx -0.00133051963596$$

Se suman las integrales $I_1 + I_2$ y se obtiene la integral impropia.

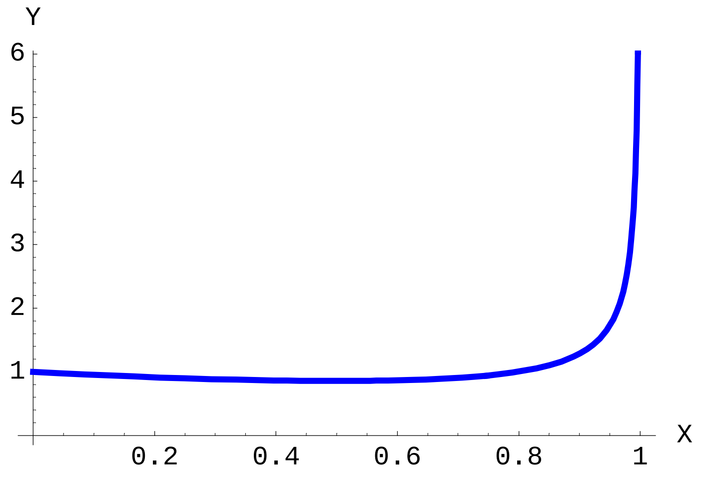
$$I = \int_{0.}^{1.} \left( \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-x}} \right) dx \simeq I_1 + I_2$$

$$I \simeq I_1 + I_2 \simeq 1.08148148148 + -0.00133051963596$$

$$I \simeq 1.08015096185$$

Representación de la función

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-x}}$$




■ **Problema 57.** Calcúlese el valor aproximado de la integral

$$\int_a^b \frac{x\, e^x}{\left(\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)}\, d\,x$$

empleando el método para el cálculo con integrales impropias en el intervalo $x \in [0, 1]$ con $n = 8$.

## Solución

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b f(x)\ dx = \int_{0.}^{1.} \left( \frac{e^x\, x}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} \right) dx$$

$[a, b] = [0., 1.]$ $\qquad n = 8$

empleando la integracion para integrales impropias.

Desarrollo en serie de *Taylor* de

$g(x) = e^x\, x \qquad x = 0.$

$$g(x) = P_8(x) = \frac{x^8}{5040} + \frac{x^7}{720} + \frac{x^6}{120} + \frac{x^5}{24} + \frac{x^4}{6} + \frac{x^3}{2} + x^2 + x$$

Cálculo de la integral utilizando la aproximación por el polinomio de Taylor:

$$I_1 = \int_a^b \frac{P_n(x)}{(x-a)^p} dx \simeq \int_{0.}^{1.} \frac{P_8(x)}{(x-0.)^{\frac{2}{3}}} dx \simeq 5.39005104928$$

Se define la función $G(x)$

$$G(x) = \begin{cases} \frac{g(x)-P_n(x)}{(x-a)^p} & a < x \leq b \\ 0 & x = a \end{cases}$$

$$G(x) = \begin{cases} \frac{e^x x - P_8(x)}{(x-0.)^{\frac{2}{3}}} & 0. < x \leq 1. \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Evaluación de $G(x)$.

| $x$ | $G(x)$ |
|---|---|
| 0. | 0.0000000000 |
| 0.125 | $7.4962258623 \times 10^{-13}$ |
| 0.25 | $2.4519518726 \times 10^{-10}$ |
| 0.375 | $7.2969712915 \times 10^{-9}$ |
| 0.5 | $8.1390311265 \times 10^{-8}$ |
| 0.625 | $5.3027606584 \times 10^{-7}$ |
| 0.75 | $2.4590358903 \times 10^{-6}$ |
| 0.875 | $9.0187941600 \times 10^{-6}$ |
| 1. | 0.0000278602 |

Se aplica la regla *compuesta de Simpson* para calcular la integral de $G(x)$

$$I_2 = \int_a^b G(x)\, dx$$

$$I_2 = \int_{0.}^{1.} G(x)\, dx \approx 2.96529248571 \times 10^{-6}$$

Se suman las integrales $I_1 + I_2$ y se obtiene la integral impropia.

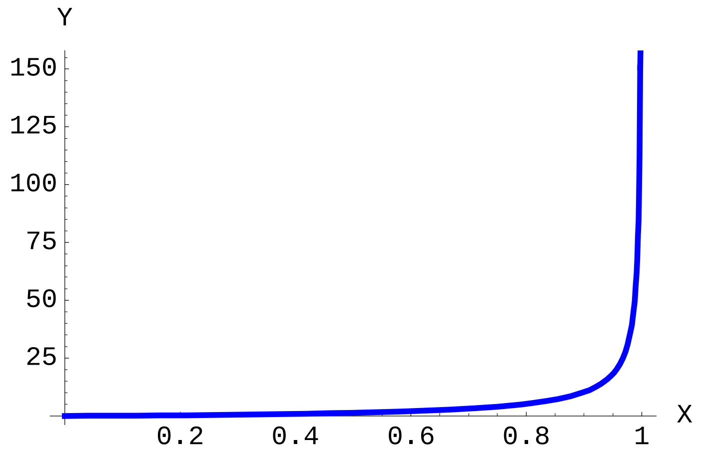
$$I = \int_{0.}^{1.} \left( \frac{e^x x}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} \right) dx \simeq I_1 + I_2$$

$$I \simeq I_1 + I_2 \simeq 5.39005104928 + 2.96529248571 \times 10^{-6}$$

$$I \simeq 5.39005401457$$

Representación de la función

$$f(x) = \frac{e^x x}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$




■ **Problema 58.** Calcúlese el valor aproximado de la integral

$$\int_a^b \frac{\cos(x)}{x^3}\, d\,x$$

empleando el método para el cálculo con integrales impropias en el intervalo $x \in [1, \infty]$ con $n = 6$.

---

Sustitución a realizar en este problema :

$$t = x^{-1},\ d\,t = -x^{-2}\, d\,x \qquad \Rightarrow d\,x = -x^2\, d\,t = -t^{-2}\, d\,t$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{Cos}(x)}{x^3}\, d\,x = \int_1^0 \frac{\operatorname{Cos}(\frac{1}{t})\,(-t^{-2})\, d\,t}{(\frac{1}{t^3})} = \int_0^1 \frac{t^{-2}\operatorname{Cos}(\frac{1}{t})\, d\,t}{(\frac{1}{t^3})} = \int_0^1 \frac{\operatorname{Cos}(\frac{1}{t})\, d\,t}{(\frac{1}{t})} \tag{53}$$

**Solución**

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b f(x)\, dx = \int_{0.}^{1.} \left(x\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) dx$$

$[a, b] = [0., 1.] \qquad n = 6$

empleando la integracion para integrales impropias.

Desarrollo en serie de *Taylor* de

$$g(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right) \qquad x = 0.$$

$$g(x) = P_6(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Cálculo de la integral utilizando la aproximación por el polinomio de Taylor:

$$I_1 = \int_a^b \frac{P_n(x)}{(x-a)^p} dx \simeq \int_{0.}^{1.} \frac{P_6(x)}{(x-0.)^{-1}} dx \simeq 0.0181176219806$$

Se define la función $G(x)$

$$G(x) = \begin{cases} \frac{g(x) - P_n(x)}{(x-a)^p} & a < x \leq b \\ 0 & x = a \end{cases}$$

$$G(x) = \begin{cases} \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right) - P_6(x)}{(x-0.)^{-1}} & 0. < x \leq 1. \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Evaluación de $G(x)$.

| $x$ | $G(x)$ |
|---|---|
| 0. | 0.0000000000 |
| 0.166667 | 0.0000000000 |
| 0.333333 | 0.0000000000 |
| 0.5 | 0.0000000000 |
| 0.666667 | 0.0000000000 |
| 0.833333 | 0.0000000000 |
| 1. | 0.0000000000 |

Se aplica la regla *compuesta de Simpson* para calcular la integral de $G(x)$

$$\mathrm{I}_2 = \int_a^b G(x)\, dx$$

$$I_2 = \int_{0.}^{1.} G(x)\, dx \approx 0$$

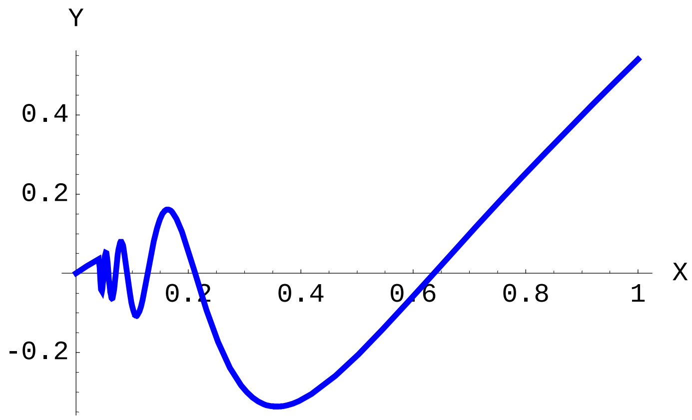
Se suman las integrales $I_1 + I_2$ y se obtiene la integral impropia.

$$I = \int_{0.}^{1.} \left(x \cos\left(\tfrac{1}{x}\right)\right) dx \simeq I_1 + I_2$$

$$I \simeq I_1 + I_2 \simeq 0.0181176219806 + 0$$

$$I \simeq 0.0181176219806$$

Representación de la función
$$f(x) = x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$




■ **Problema 59.** Calcúlese el valor aproximado de la integral

$$\int_a^b x^{-4}\,\text{sen}(x)\,d\,x$$

empleando el método para el cálculo con integrales impropias en el intervalo $x \in [1, \infty]$ con $n = 6$.

---

Sustitución a realizar en este problema :

$$t = x^{-1},\ dt = -x^{-2}\,dx \qquad \Rightarrow dx = -x^2\,dt = -t^{-2}\,dt$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\text{Sen}(x)}{x^4}\,d\,x = \int_1^0 \frac{\text{Sen}(\frac{1}{t})\,(-t^{-2})\,dt}{(\frac{1}{t^4})} = \int_0^1 \frac{t^{-2}\,\text{Sen}(\frac{1}{t})\,dt}{(\frac{1}{t^4})} = \int_0^1 \frac{\text{Sen}(\frac{1}{t})\,dt}{(\frac{1}{t^2})} \tag{54}$$

## Solución

Cálculo de la integral

$$I = \int_a^b f(x)\ dx = \int_{0.}^{1.} (\ x^2 \sin(x)\ )\ dx$$

$[a,\ b] = [0.,\ 1.]$ $\qquad n = 4$

empleando la integracion para integrales impropias.

Desarrollo en serie de *Taylor* de

$$g(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad x = 0.$$

$$g(x) = P_4(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Cálculo de la integral utilizando la aproximación por el polinomio de Taylor:

$$I_1 = \int_a^b \frac{P_n(x)}{(x - a)^p} dx \simeq \int_{0.}^{1.} \frac{P_4(x)}{(x - 0.)^{-2}} dx \simeq 0.286529535596$$

Se define la función $G(x)$

$$G(x) = \begin{cases} \frac{g(x) - P_n(x)}{(x-a)^p} & a < x \le b \\ 0 & x = a \end{cases}$$

$$G(x) = \begin{cases} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right) - P_4(x)}{(x-0.)^{-2}} & 0. < x \le 1. \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Evaluación de $G(x)$.

| $x$ | $G(x)$ |
|---|---|
| 0. | 0.0000000000 |
| 0.25 | 0.0000000000 |
| 0.5 | 0.0000000000 |
| 0.75 | 0.0000000000 |
| 1. | 0.0000000000 |

Se aplica la regla *compuesta de Simpson* para calcular la integral de $G(x)$

$$I_2 = \int_a^b G(x)\, dx$$

$$I_2 = \int_{0.}^{1.} G(x)\ dx \approx 0$$

Se suman las integrales $I_1 + I_2$ y se obtiene la integral impropia.

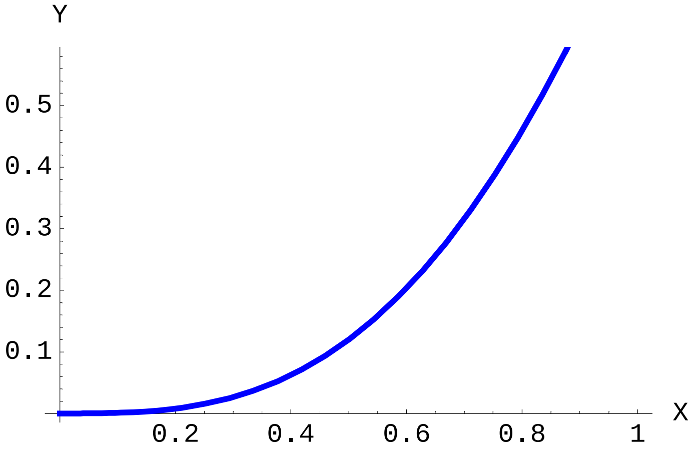
$$I = \int_{0.}^{1.} (x^2 \sin(x))\, dx \simeq I_1 + I_2$$

$$I \simeq I_1 + I_2 \simeq 0.286529535596 + 0$$

$$I \simeq 0.286529535596$$

Representación de la función

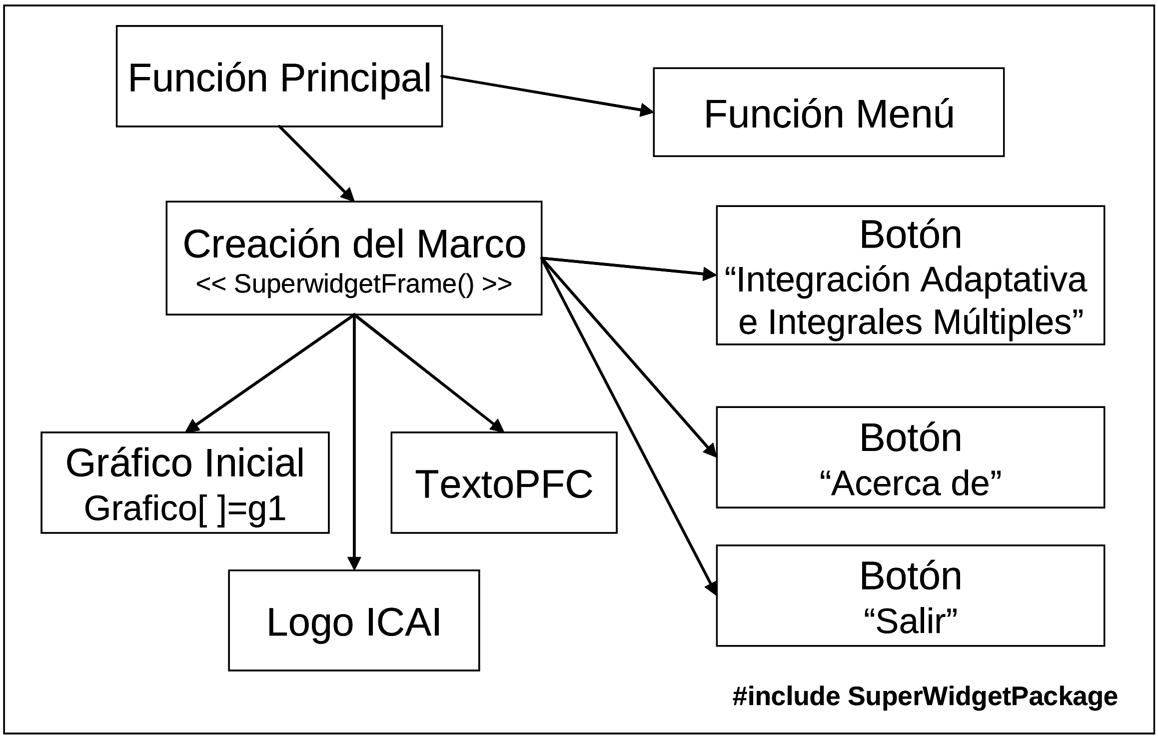
$$f(x) = x^2 \sin(x)$$



# 6. Interfaz de Usuario

## 6.1 Ventana inicial

La ventana inicial del programa realiza la creación del marco inicial donde se van a alojar los botones, el gráfico, logo y los menús de ventana con los respectivos textos relativos al nombre de aplicación y botón.




Creación de la ventana inicial del programa

Creación de la ventana inicial de la aplicación.

**Figura 1**

Para el correcto funcionamiento de la aplicación es necesario incluir el paquete *SuperWidgetPackage* que da soporte a las ventanas y marcos utilizados.

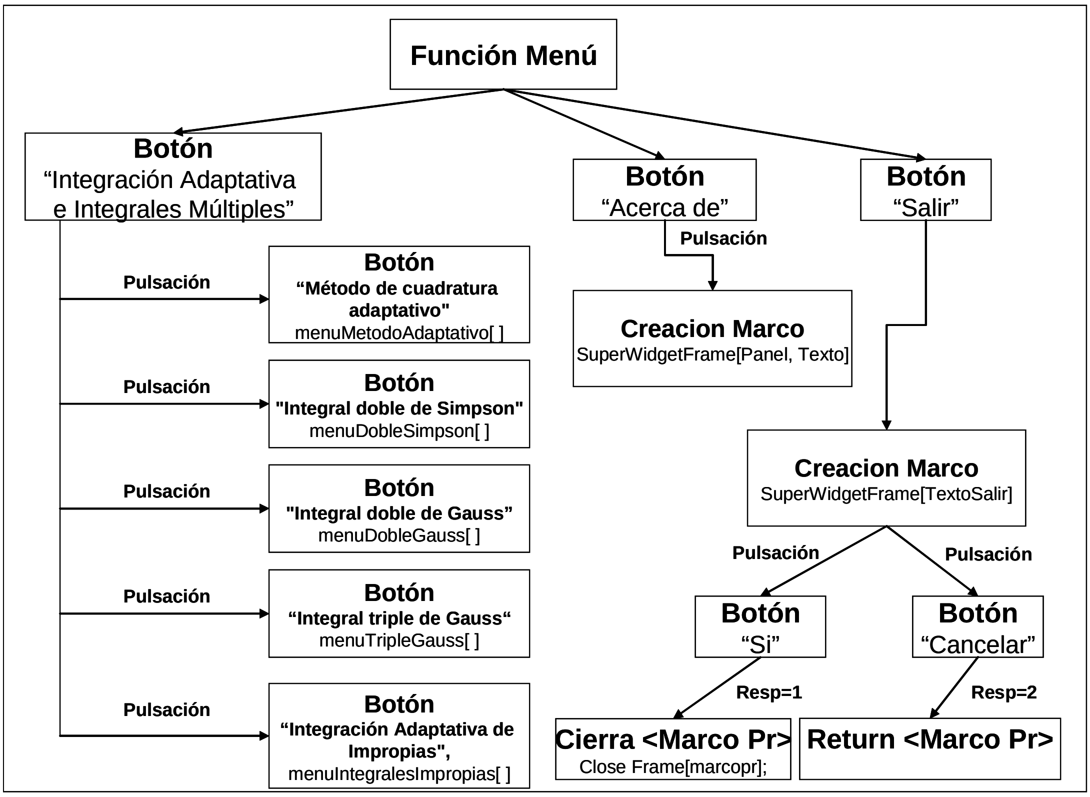
La pantalla inicial se presenta a continuación:


Pantalla inicial de la aplicación.

**Figura 2**

En el menú que se presenta se pueden pulsar tres botones; "Integración Adaptativa e Integrales Múltiples", "Acerca de" y "Salir" que están incluidos en la función Menú.

Si se pulsa en cada uno de ellos se desplegarán las opciones que cada uno tiene. Las opciones se muestran en el diagrama siguiente:




**Creación del menú desplegable**

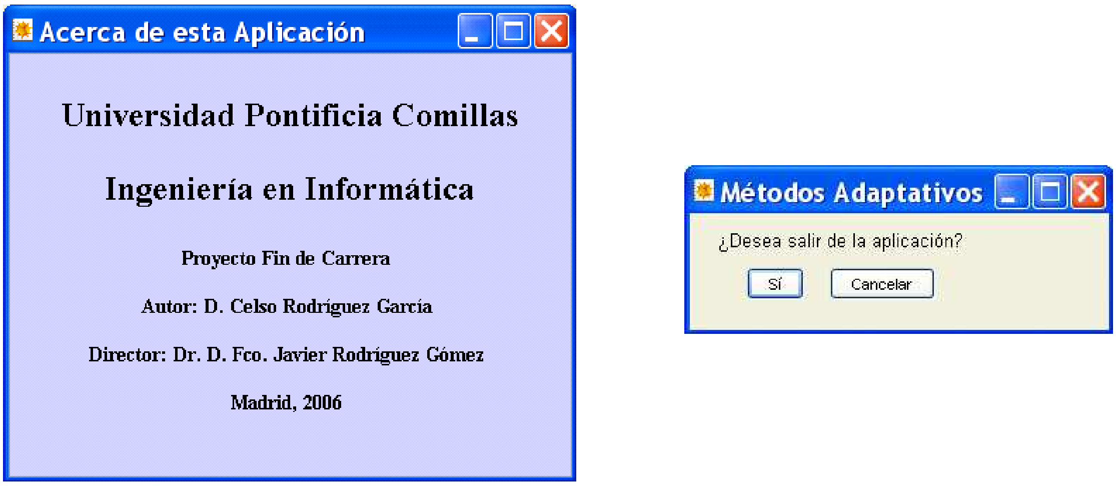
Creación del menú desplegable.

**Figura 3**

En cuanto al botón "Acerca de" crea un marco en el que se crea un panel con el texto relativo al proyecto, aparecen la Universidad, Especialidad, tipo de trabajo, autor y director del mismo.

El botón Salir da a elegir mostrando dos botones. Con el botón "Sí" se cierra el marco principal y se para la ejecución del programa. Con el boton "Cancelar" regresamos al marco principal.

Las ventanas resultantes se muestran a continuación:




Ventanas de la aplicación.

**Figura 4**

Por último, el botón "Integración Adaptativa e Integrales Múltiples" al ser pulsado despliega varias opciones de ejecución, de las que podemos seleccionar una cada vez.

Los métodos que pueden usarse en esta aplicación se muestran en detalle a continuación:


Opciones de Integración Adaptativa e Integrales Múltiples.

**Figura 5**

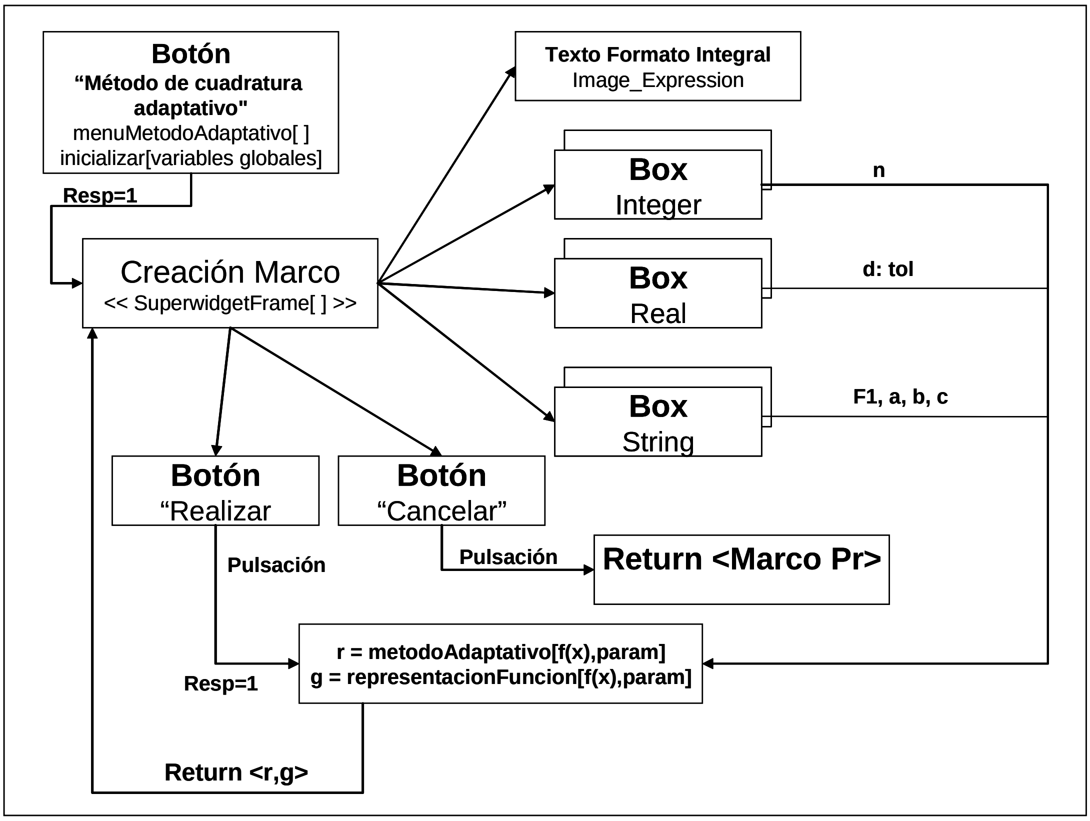
## 6.2 Ventana método adaptativo de cuadratura

Al pulsar el botón "Método de cuadratura Adaptativo" se llama a la función menuMétodoAdaptativo() que inicializa las variables globales con la función inicializar() y a continuación crea el marco respectivo del método.

Dentro del marco se tienen varios elementos que lo constituyen. Primero el texto que indica el formato de las integrales que pueden utilizarse con este método. En segundo lugar, una serie de cajas de captura de datos, según el tipo. En este caso, $n$ entero, $d$ que es la tolerancia y es de tipo real y la función $f(x)$ y los puntos $a$ y $b$ que son de tipo *string*.

Por último, se crean dos botones, uno es el botón "Cancelar" que si es pulsado devuelve a la ventana inicial del programa y el otro que es el botón "Realizar". Al ser pulsado por el usuario el programa recoge los datos introducidos en las cajas de parámetros (el usuario previamente los ha debido introducir) y se envían a la función del método adaptativo. Todo esto se realiza a la vez que se llama a las funciones metodoAdaptativo() y representaciónFuncion().

Con la función metodoAdaptativo() se calcula la integral y con representaciónFuncion() se crea la representación gráfica de la funcion introducida. Del mismo modo estas funciones devuelven al marco los elementos resultantes de dichas llamadas, $r$ que contiene el valor de la integral y $g$ que contiene el gráfico creado.

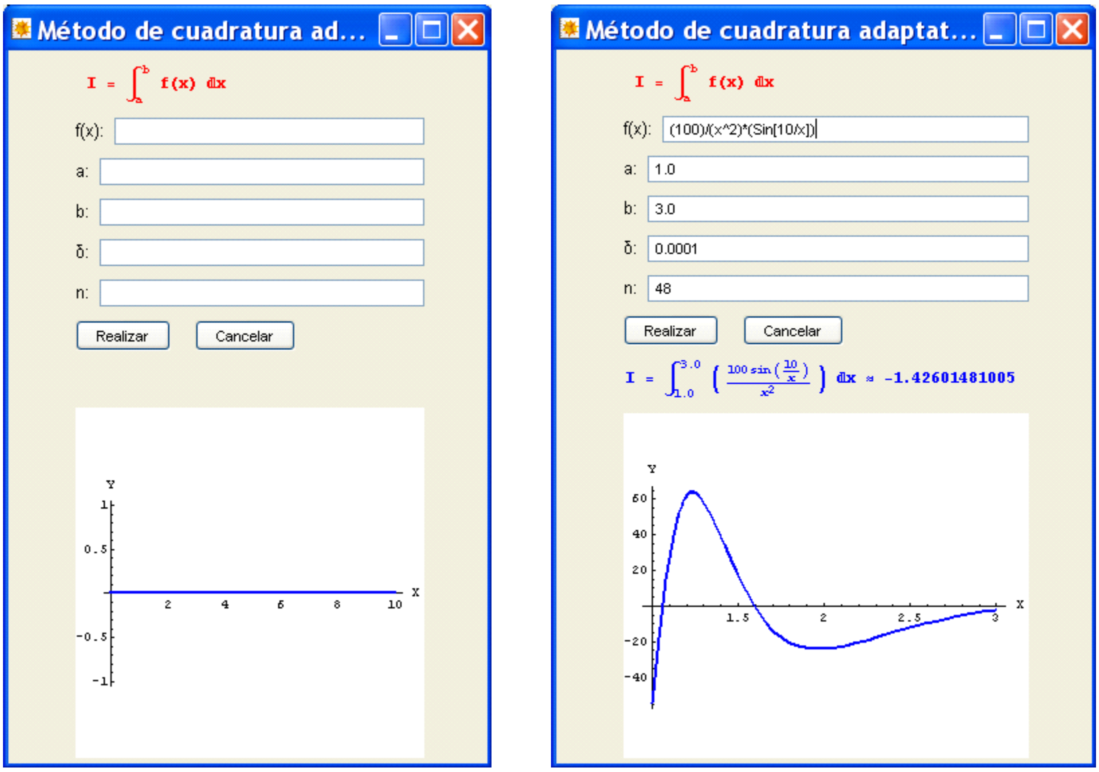



**Ventana Método Adaptativo de Cuadratura**

Diagrama con el método Adaptativo de Cuadratura.

**Figura 6**

Las ventanas se muestra a continuación. Se puede ver que el evento que se produce al pulsar el botón realizar lanza las llamadas a las funciones creando el gráfico e imprimiendo los resultados.




Ventanas para calcular la integral con el método Adaptativo de Cuadratura.

**Figura 7**

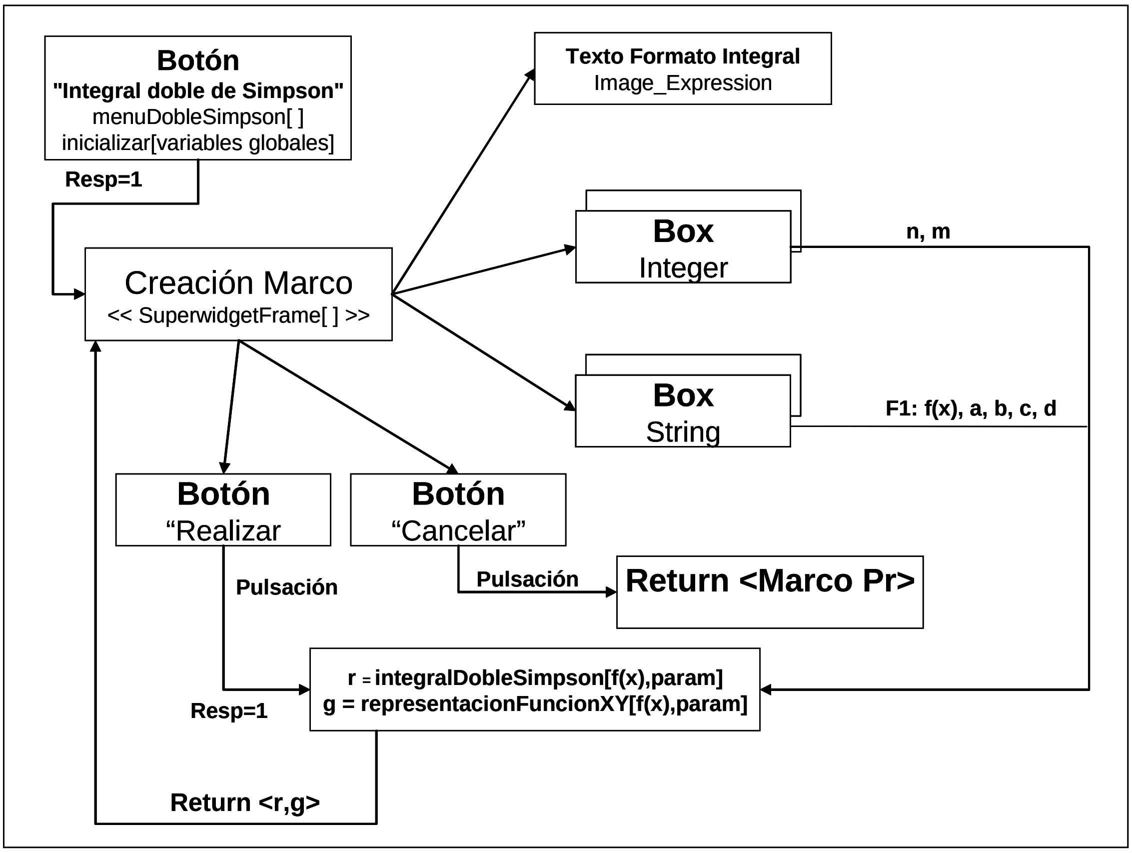
## 6.3 Ventana método de la integral doble de Simpson

Al pulsar el botón "método de la integral doble de Simpson" se llama a la función menuDobleSimpson que inicializa las variables globales con la función inicializar() y a continuación crea el marco respectivo del método.

Dentro del marco existen varios elementos que lo constituyen. Primero el texto que indica el formato de las integrales que pueden utilizarse con este método. En segundo lugar, una serie de cajas de captura de datos, según el tipo. En este caso, *n* y *m* enteros, y la función $f(x)$ y los puntos *a* y *b*, *c*, y *d* que son de tipo *string*.

Por último, se crean dos botones, uno es el botón "Cancelar" que si es pulsado devuelve a la ventana inicial del programa y el otro que es el botón "Realizar". Al ser pulsado por el usuario el programa recoge los datos introducidos en las cajas de parámetros (el usuario previamente los ha debido de introducir) y los manda junto con la propia función. En el mismo momento se llama a las funciones integralDobleSimpson() y representaciónFuncionXY().

Con la función integralDobleSimpson() se calcula la integral y con representaciónFuncionXY() se crea la representación gráfica de la funcion introducida. Del mismo modo estas funciones devuelven al marco los elementos resultantes de dichas llamadas, *r* que contiene el valor de la integral y *g* que contiene los gráficos creados en 2D y 3D.

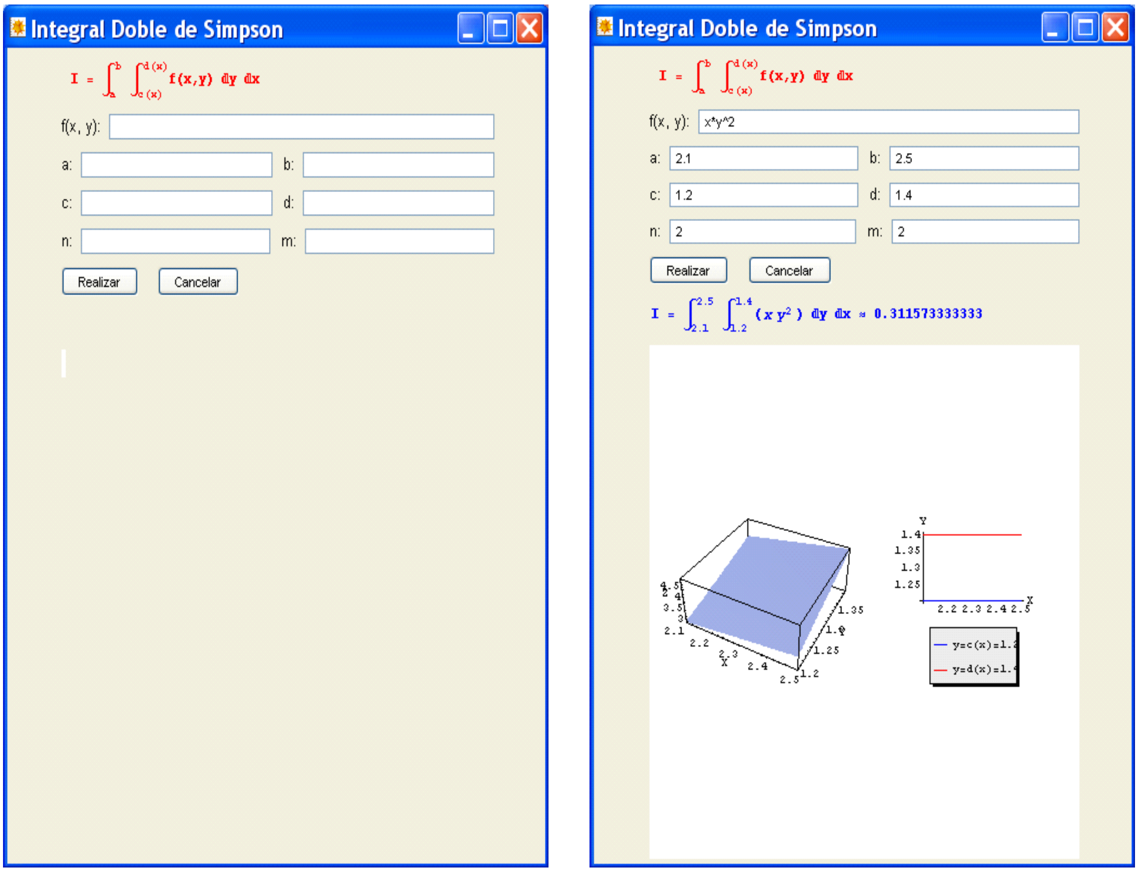



**Ventana Integral doble de Simpson"**

Diagrama con el método doble de Simpson.

**Figura 8**

Las ventanas resultantes se muestra a continuación. Se puede ver que el evento resultado de pulsar el botón realizar lanza las llamadas a las funciones creando los gráficos e imprimiendo los resultados.




Ventanas para calcular la integral doble con el método de Simpson.

**Figura 9**

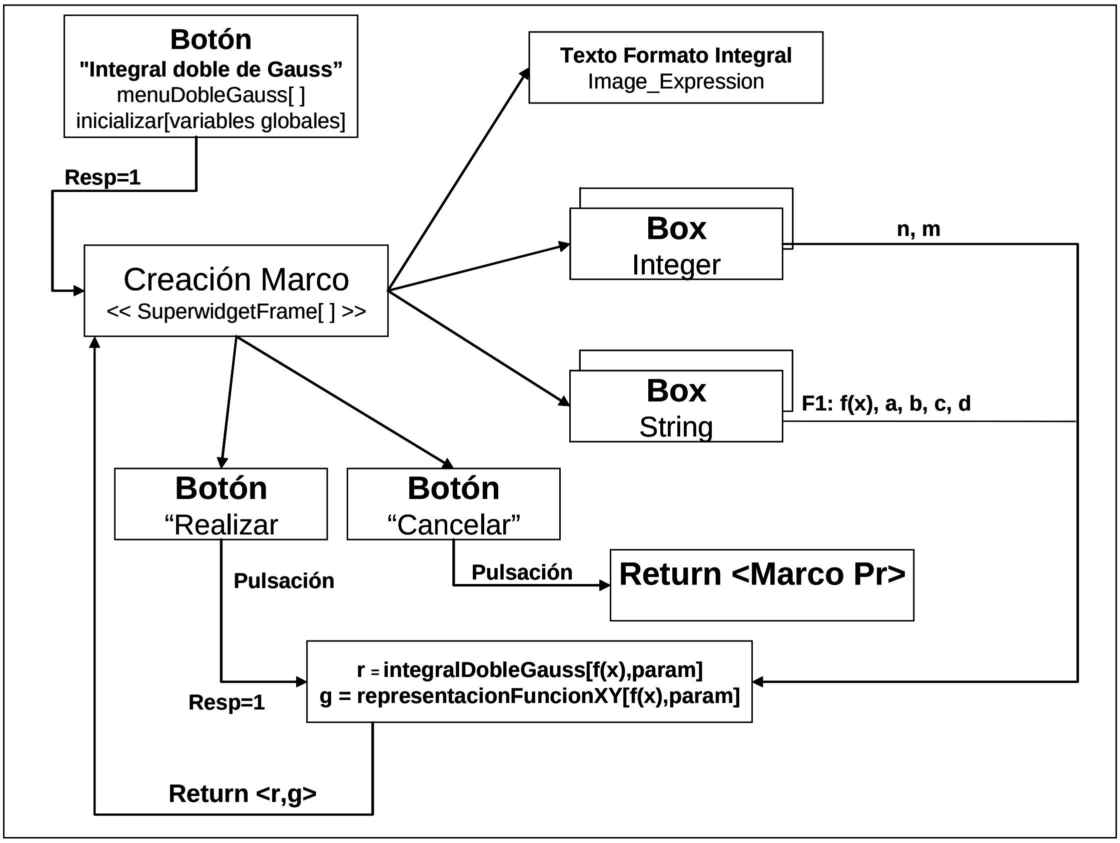
# 6.4 Ventana método de la integral doble de Gauss

Al pulsar el botón "método de la integral doble de Gauss"" se llama a la función menuDobleGauss que inicializa las variables globales con la función inicializar() y a continuación crea el marco respectivo del método.

Dentro del marco hay varios elementos que lo constituyen. Primero el texto que indica el formato de las integrales que pueden utilizarse con este método. En segundo lugar, una serie de cajas de captura de datos, según el tipo. En este caso, $n$ y $m$ enteros, y la función $f(x)$ y los puntos $a$ y $b$, $c$, y $d$ que son de tipo *string*.

Por último, se crean dos botones, uno es el botón "Cancelar" que si es pulsado nos devuelve a la ventana inicial del programa y el otro que es el botón "Realizar". Al ser pulsado por el usuario el programa recoge los datos introducidos en las cajas de parámetros (el usuario previamente los ha debido de introducir) y los manda junto con la propia función. Es en este momento cuando se llama a las funciones integralDobleGauss() y representaciónFuncionXY().

Con la función integralDobleGauss() se calcula la integral y con representaciónFuncionXY() se crea la representación gráfica de la función introducida. Del mismo modo estas funciones devuelven al marco los elementos resultantes de dichas llamadas, $r$ que contiene el valor de la integral y $g$ que contiene los gráficos creados en 2D y 3D.

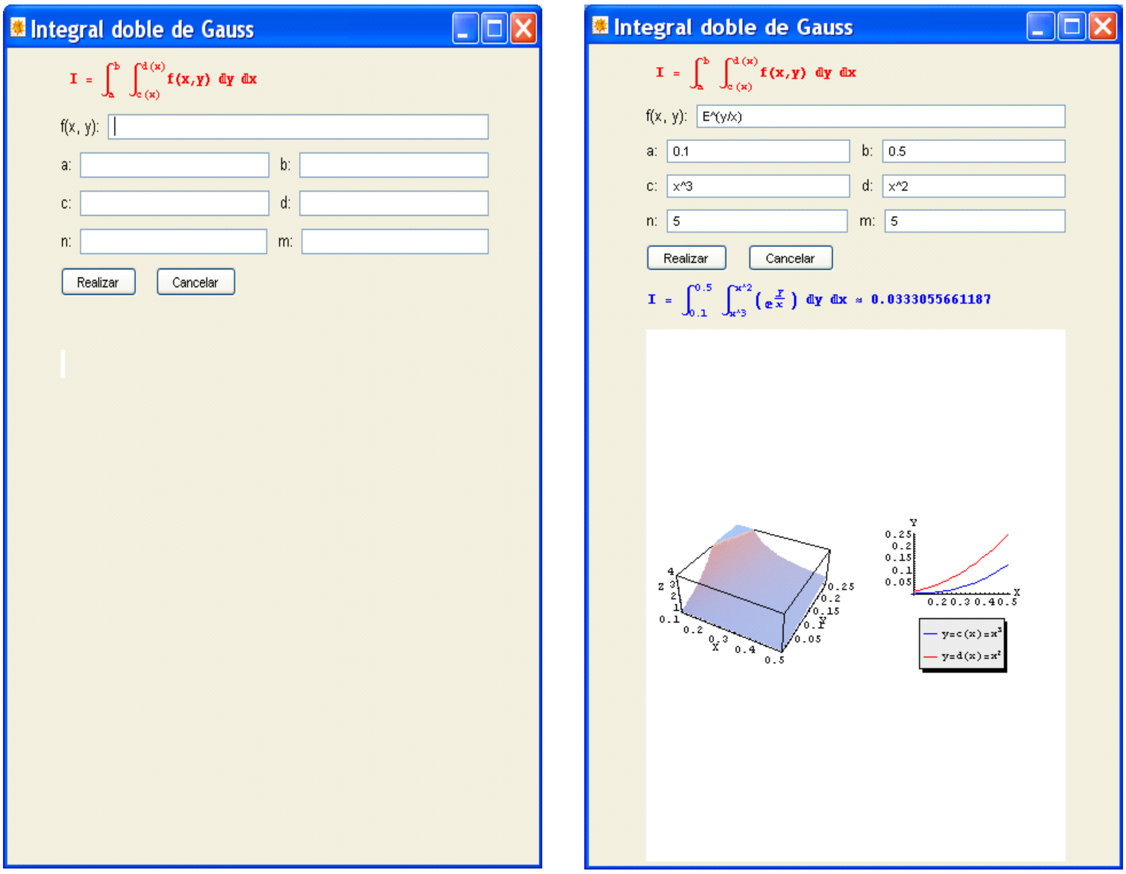



**Ventana Integral doble de Gauss"**

Diagrama con el método doble de Gauss.

**Figura 10**

Las ventanas se muestra a continuación. Se puede apreciar que el evento resultado de pulsar el botón realizar lanza las llamadas a las funciones creando los gráficos e imprimiendo los resultados.




Ventanas para calcular la integral doble con el método de Gauss.

**Figura 11**

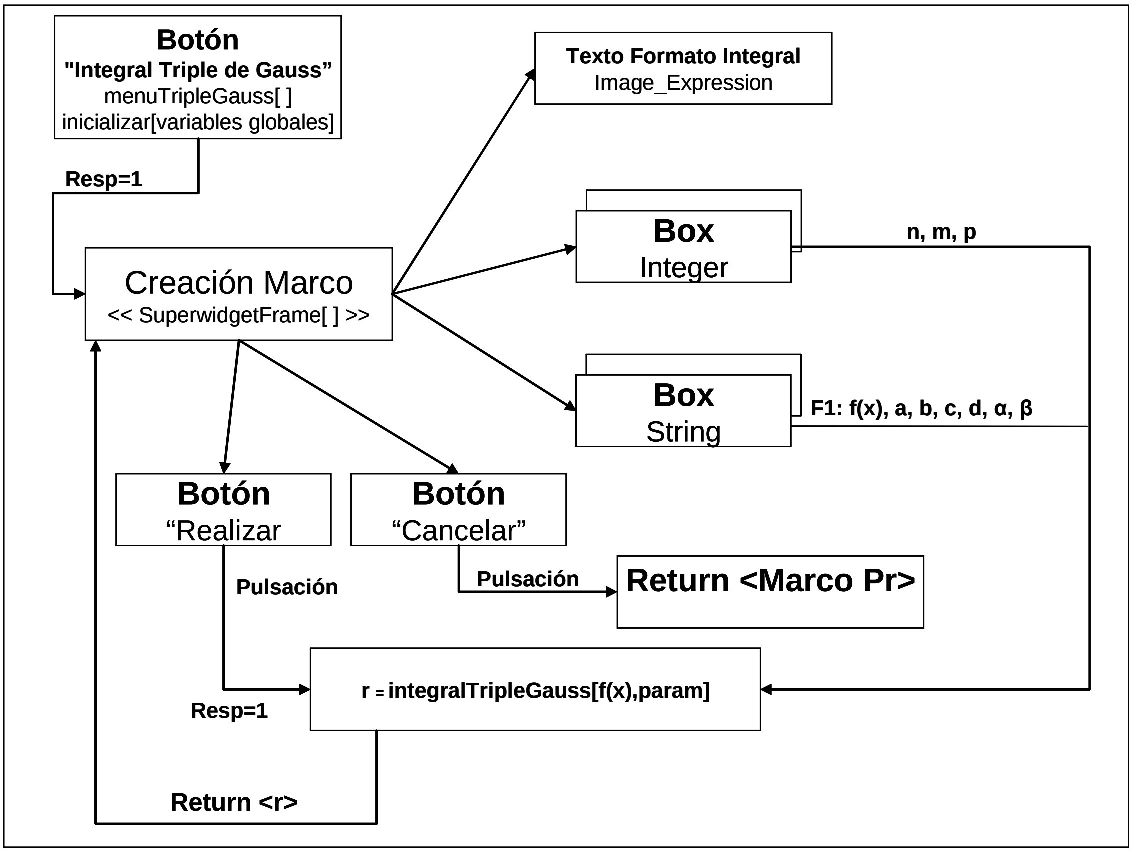
# 6.5 Ventana método de la integral Triple de Gauss

Al pulsar el botón "método de la integral triple de Gauss"" se llama a la función menuTripleGauss que inicializa las variables globales con la función inicializar() y a continuación crea el marco respectivo del método.

Dentro del marco se alojan varios elementos que lo constituyen. Primero, el texto que indica el formato de las integrales que pueden utilizarse con este método. En segundo lugar, una serie de cajas de captura de datos, según el tipo. En este caso, $n$ y $m$ y $p$ enteros, y la función $f(x)$ y los puntos $a$ y $b$, $c$, $d$, $\alpha$ y $\beta$ que son de tipo *string*.

Por último, se crean dos botones, uno es el botón "Cancelar" que si es pulsado devuelve a la ventana inicial del programa y el otro que es el botón "Realizar". Al ser pulsado por el usuario el programa recoge los datos introducidos en las cajas de parámetros (el usuario previamente los ha debido de introducir) y los manda junto con la propia función, en ese momento se llama también a la función integralTripleGauss().

Con la función integralTripleGauss() se calcula la integral. Del mismo modo esta función devuelve al marco el elemento resultante de dicha llamada; $r$ que contiene el valor de la integral.

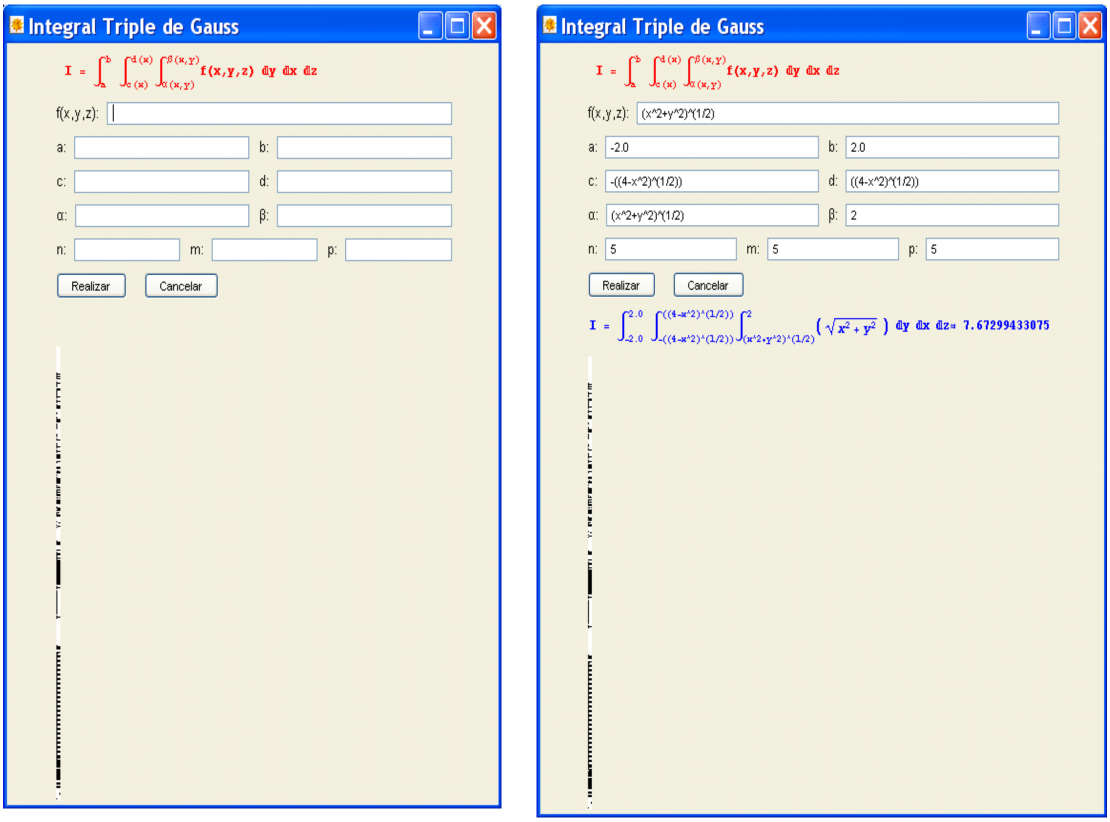



**Ventana Integral triple de Gauss"**

Diagrama con el método triple de Gauss.

**Figura 12**

Las ventanas se muestra a continuación. Se puede ver que el evento que ocurre con la pulsación del botón realizar lanza la llamada a la función creando e imprimiendo los resultados.




Ventanas para calcular la integral triple con el método de Gauss.

**Figura 13**

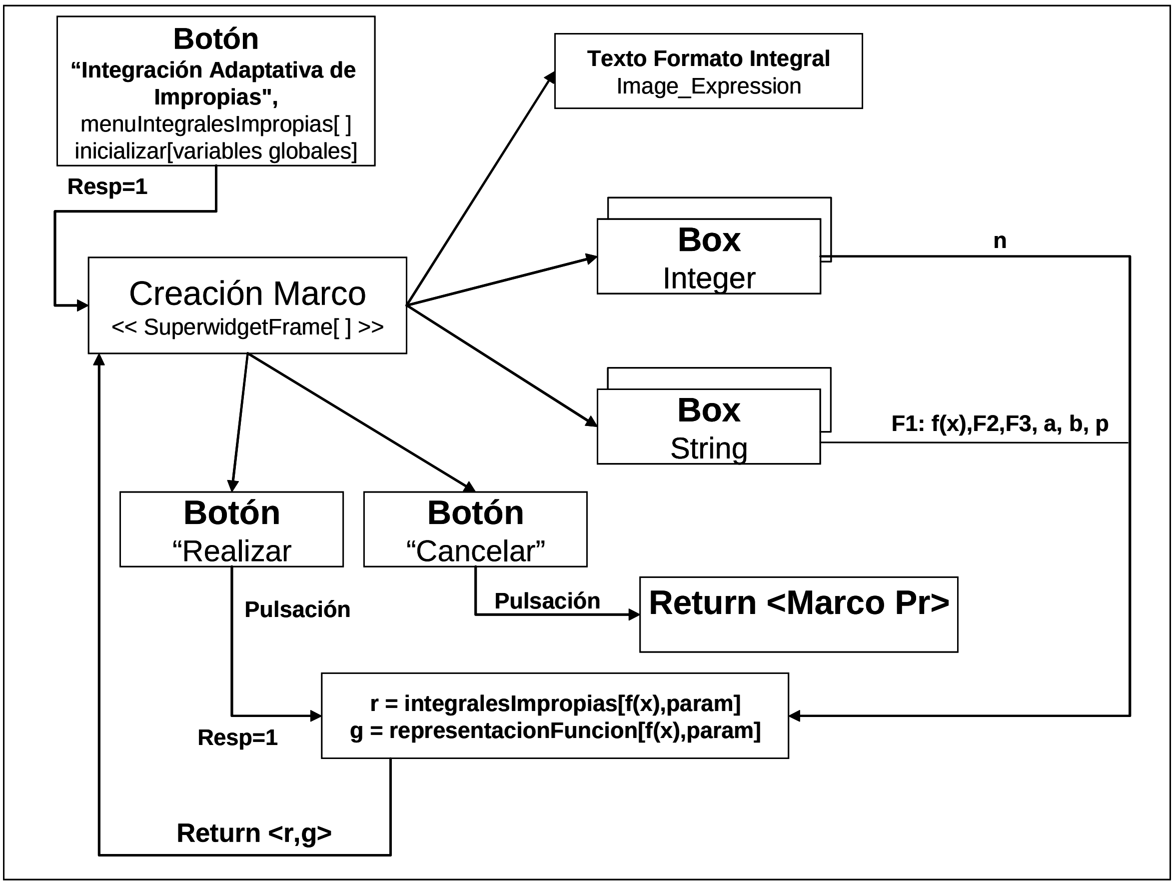
# 6.6 Ventana método integración adaptativa de impropias

Al pulsar el botón "Integracion Adaptativa de Impropias" se llama a la función menuIntegralesImpropias que inicializa las variables globales con la función inicializar() y a continuación crea el marco respectivo del método.

Dentro del marco tenemos varios elementos que lo constituyen. Primero el texto que indica el formato de las integrales que pueden utilizarse con este método. En segundo lugar una serie de cajas de captura de datos, según el tipo. En este caso, $n$ entero, y las funciónes $f(x)$,F1 y F2, que son las funciones axuliares para el cálculo, junto con los puntos $a$ ,$b$, y $p$ que son de tipo string.

Por último, se crean dos botones, uno es el botón "Cancelar" que si es pulsado nos devuelve a la ventana inicial del programa y el otro que es el botón "Realizar". Al ser pulsado por el usuario el programa recoge los datos introducidos en las cajas de parámetros (el usuario previamente los ha debido de introducir) y los manda junto con la propia función, en ese momento se llama a las funciones integralesImpropias() y representaciónFuncion().

Con la función integralesImpropias() se calcula la integral y con representaciónFuncion() se crea la representación gráfica de la función introducida. Del mismo modo estas funciones devuelven al marco los elementos resultantes de dichas llamadas, $r$ que contiene el valor de la integral y $g$ que contiene el gráfico creado en 2D.

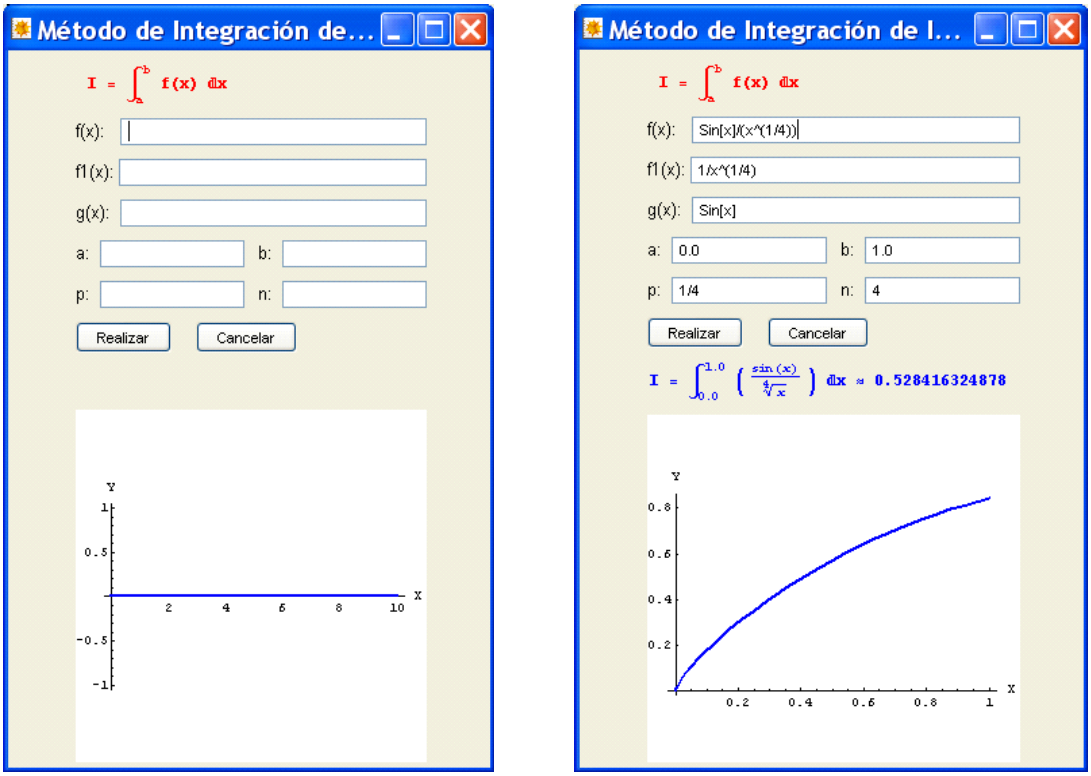



**Ventana Método Adaptativo para Impropias"**

Diagrama con el método de integrales impropias.

**Figura 14**

Las ventanas se muestra a continuación. Se puede ver que el evento resultante de pulsar el botón "Realizar" lanza las llamadas a las funciones creando los gráficos e imprimiendo los resultados.




Ventanas para calcular las integrales impropias.

**Figura 15**

## 6.7 Función de Representacion Gráfica

Para la representación gráfica se han creado dos funciones que son llamadas al pulsar el botón "Realizar". Como argumentos, se le pasan a la función representacionFuncion() las propia función y los puntos *a* y *b*, y a la función representacionFuncionXY() los mismos parametros más *c* y *d*.

La primera realiza una impresion de un gráfico; g1 con la función Plot( ) y la segunda crea dos gráficos, g1 correspondiente a 3D con Plot3D( ) y g2 que lo crea en 2D de nuevo con Plot( ). De manera que los gráficos respectivos son devueltos al marco del método que los llamó.

A continuación se puede observar el diagrama de las funciones:

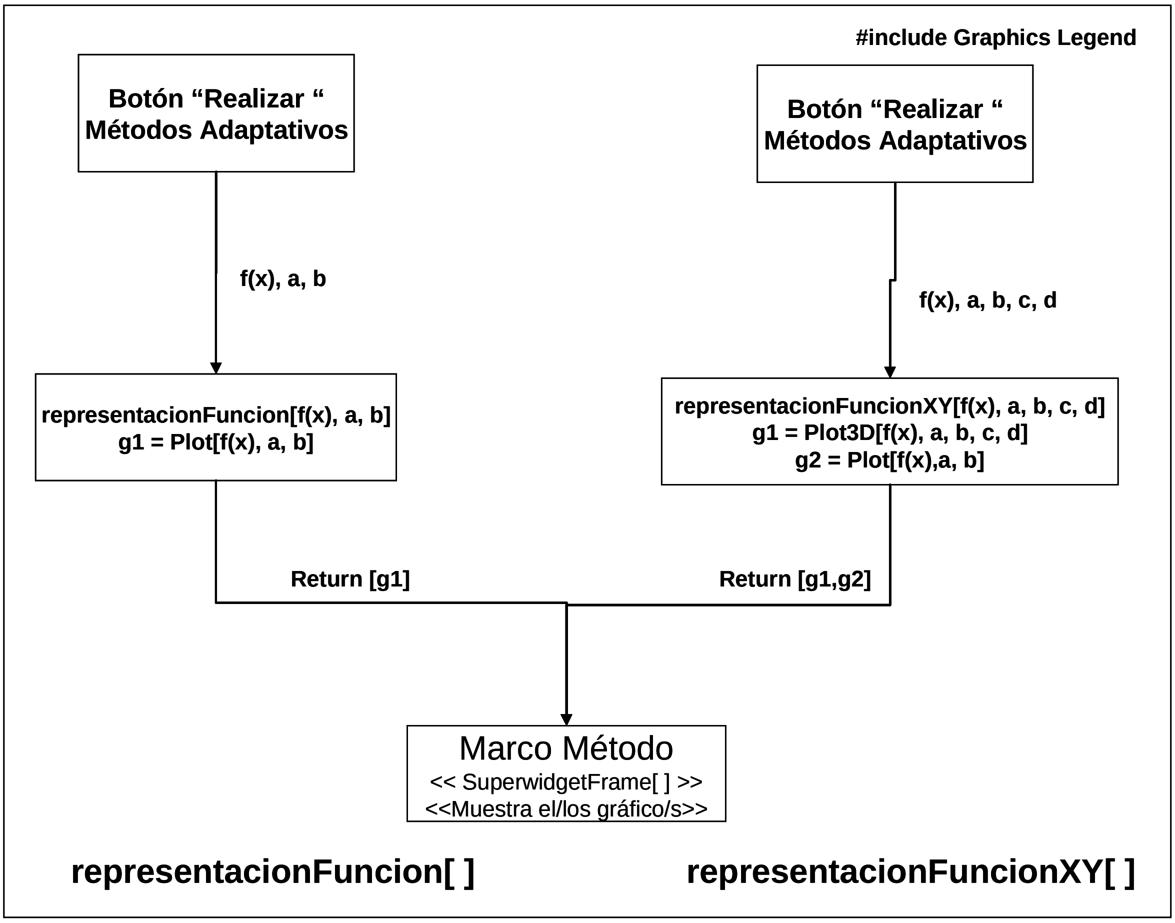



Diagrama para representar funciones en 2 *D* y 3 *D*.

**Figura 16**

# 7. Aplicaciones Prácticas

La integración numérica es una operación frecuente en computación científica. Obtener la primitiva de una función puede ser complicado, incluso imposible. De hecho muchas funciones se definen a partir de integrales que no pueden calcularse de manera exacta, como pueden ser la función de error, las funciones logaritmo y seno integral o la función gamma de *Euler*, por citar algunos ejemplos.

Por otro lado, cuando únicamente se conoce el valor de la función en un conjunto de puntos, como ocurre con los resultados de un experimento o de simulaciones numéricas, sus integrales sólo se pueden obtener numéricamente, lo cual motiva aún más la necesidad de poder obtener derivadas e integrales a partir de conjuntos discretos de datos.

El término integración numérica cubre varios aspectos distintos en el campo del cálculo numérico, como la evaluación de integrales, también conocido como cuadratura numérica, o la solución de ecuaciones diferenciales. Los algoritmos de cuadratura modernos son muy avanzados, modificando adaptativamente el paso de integración durante la evaluación de la integral.

Entre los numerosos campos de aplicación práctica de la integración numérica se puden destacar aquellas aplicaciones que requieran del cálculo del área de una figura plana, cálculo de volumen de un cuerpo, volúmenes de revolución o límites de sumas.

Las integrales dobles y triples tienen multitud de aplicaciones en las diferentes ramas:

- Física y matemática: cálculo de áreas y volúmenes. Obtención de integrales indefinidas de funciones algebraicas, logarítmicas y exponenciales.

- Economía: optimización, aproximación de funciones que representan variables económicas. Calcular áreas bajo una curva y entre curvas y aplicar estos conceptos en problemas de aplicación relacionados con Administración y Economía.

- Ingeniería: en todas las carreras de ingeniería está presente la integración simple y doble para el cálculo de área entre curvas, volúmenes de sólidos de revolución, longitud de curva y áreas de sólidos de revolución.

- Los resultados numéricos de estos algoritmos se emplean en numerosas aplicaciones software: lenguajes simbólicos, bibliotecas de funciones empleadas en lenguajes de programación como FORTRAN o MAPLE.

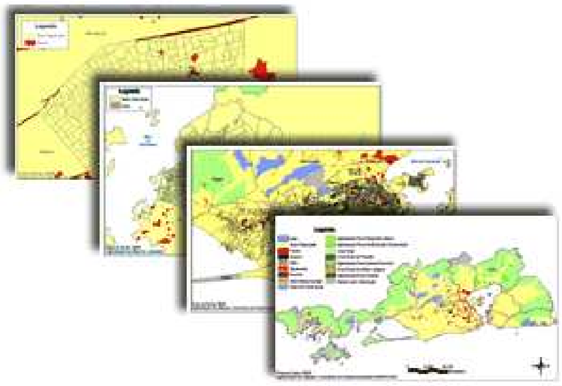
- Docencia: Facilitar al profesorado una vía de interacción con los alumnos en el estudio de la integración numérica. De una manera intuitiva se puede obtener una primera idea de la funcionalidad de los algoritmos.

Primero con el uso de la interfaz de usuario, y a continuación presentando el código de los mismos, para un estudio detallado del funcionamiento interno. Se pueden tratar problemas inabarcables de manera manual, de forma efectiva y rápida pudiendo comparar resultados según los diferentes tipos de problemas existentes en la resolución de integrales simples y múltiples.

- Informática: aplicación en un SIG (Sistema de Información Geográfica).

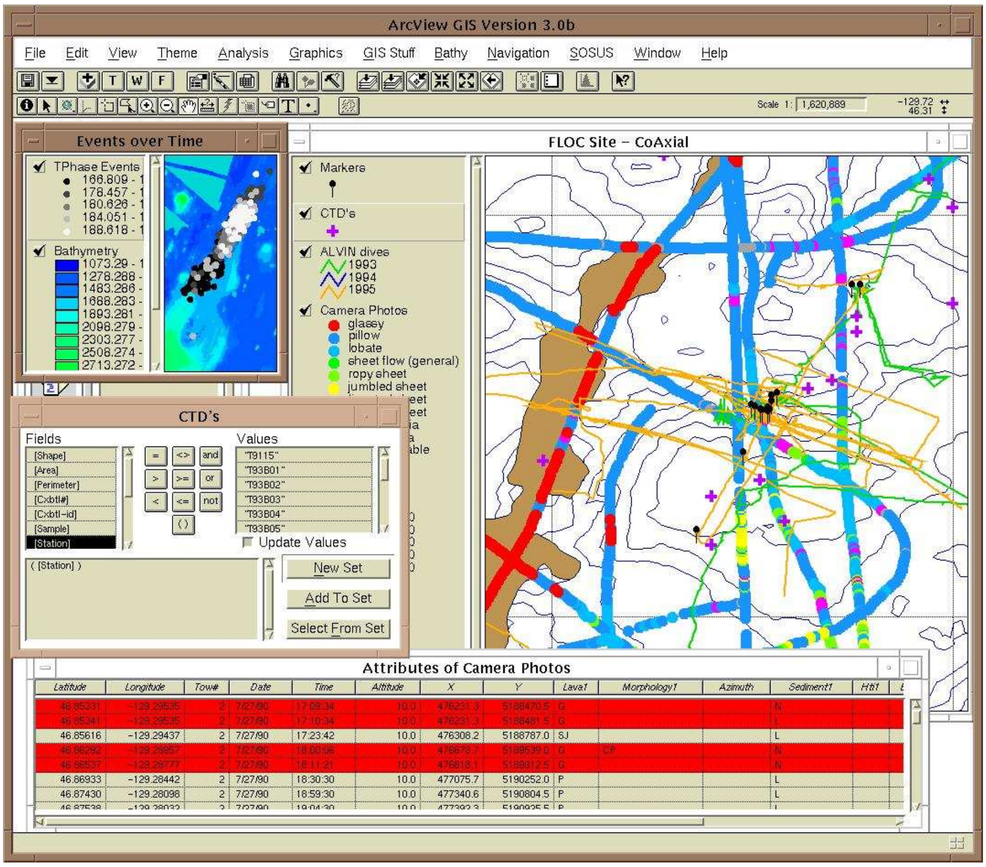
Una posible aplicación de los algoritmos programados, dentro del campo de la informática y de gran utilidad es en los Sistemas de Información Geográfico.

Un SIG es un sistema integrado compuesto por hardware, software, personal, información espacial y procedimientos computarizados, que permite y facilita la recolección, el análisis, gestión o representación de datos espaciales.



El SIG funciona como una base de datos con información geográfica (datos alfanuméricos) que se encuentra asociada por un identificador común a los objetos gráficos de un mapa digital. De esta forma, señalando un objeto se conocen sus atributos e, inversamente, preguntando por un registro de la base de datos se puede saber su localización en la cartografía.

El SIG separa la información en diferentes capas temáticas y la almacena independientemente, permitiendo trabajar con ellas de manera rápida y sencilla, y facilitando la posibilidad de relacionar la información existente a través de la topología de los objetos, con el fin de generar otra nueva que no se podría obtener de otra forma.



La aplicación de los distintos algoritmos programados en este proyecto a un SIG conseguiría realizar el procesado de los datos provenientes de las diferentes capas para el cálculo nuevos datos requeridos en la interacción del usuario. Por ejemplo, definir funciones que actuarían como selectores de espacios en los distintos planos para recopilar diferentes medidas, como distancias, áreas, volúmenes, etc., que con los diferentes algoritmos propuestos gozarían de mayor aproximación y detalle.

De especial interés de cara a la aplicación en de la integración, serían los modelos de SIG vectorial, cuyo principal interés de representación se centra en la precisión de localización de los elementos sobre el espacio. Para modelar digitalmente las entidades del mundo real se utilizan tres objetos espaciales: el punto, la línea y el polígono. Por ello la definición de funciones que limiten los espacios definidos por estos elementos, podrían ser procesables por los algoritmos adaptativos.

Los métodos de integración programados consiguen una disminución del error en cuanto al cálculo de regiones de integración muy clara. Ayudando en la precisión al sistema SIG, que, por ejemplo, trate con las curvas de nivel del un territorio en un mapa digital.

Dependiendo de los requerimientos a la hora de seleccionar los datos se implantaría uno u otro algoritmo, si se seleccionan muchos o pocos intervalos en el cálculo o dependen más del número de puntos a tratar, o las funciones utilizadas varían en gran medida o al contrario.

Los SIG's se utilizan en multitud de sectores tan dispares como en el agrícola en el que es muy importante el cálculo de áreas, o en el Industrial o tecnológico, por ejemplo en su aplicación en los GPS, o en los callejeros que son muy utilizados en Internet. Podría implantarse en un sistema SIG para el sector inmobiliario en el que se trata muy a menudo con el cálculo de superficies.

En resumen, ayudar a conseguir una mayor cohesión entre la cartografía tradicional y la digital, facilitando el proceso de los datos, el cálculo de resultados y aproximaciones más exactas mediante los algoritmos adaptativos aplicados en un Sistema de Información Geográfico (SIG).

# 8. Conclusiones

Las fórmulas de Integración Numérica, también denominadas fórmulas de cuadratura, aproximan el valor de la integral de una función en un intervalo dado, de la que sólo se conoce los valores funcionales en algunos puntos, o la función primitiva es difícil de calcular o bien esta función primitiva no se puede expresar en términos de funciones elementales.

Se han desarrollado a lo largo de este proyecto distintos métodos numéricos basados en la cuadratura adaptativa para la resolución aproximada de una integral, extendiendo también el concepto de integración para su uso con integrales múltiples.

Habiendo analizado y programado los algoritmos numéricos para la *Integración Numérica*, se pueden establecer las siguientes conclusiones teóricas y prácticas:

**1.** Si la región donde se quiere calcular la integral es grande o la función tiene un comportamiento complicado, las aproximaciones obtenidas con las fórmulas simples adaptativas como la regla de *Simpson simple*, no son lo suficientemente precisas.

Para calcular la integral en esos casos es más conveniente subdividir el intervalo de integración en otros más pequeños e ir aplicando sucesivamente las fórmulas de integración que se denominan compuestas.

**2.** La utilización de la regla de *Simpson compuesta* añadiendo puntos en el interior y calculando las integrales de los intervalos en los que se subdivide la función original, de forma recursiva, aumenta la precisión de la integración y disminuyen el error.

La fórmula de *Simpson compuesta* requiere que $n$ sea un número par (el número de puntos en los que se evalúa la función, que es igual a $n+1$, es entonces impar). El término de error mejora bastante el resultado obtenido por la regla de *Simpson simple*.

**3.** La *cuadratura adaptativa* involucra la selección cuidadosa de los puntos donde la función va a ser evaluada, de manera que se pueda calcular la integral con una precisión especificada realizando el mínimo número posible de evaluaciones de la función.

El algoritmo se adapta automáticamente al integrando, partiendo el intervalo en subintervalos con un espaciado fino en las partes donde el integrando varía rápidamente y con espaciados mayores donde el integrando varía lentamente.

**4.** Analizando los resultados se concluye que el error se divide por dieciséis cuando $h$ se divide por dos en la aplicación de la *fórmula de Simpson*, frente a las reglas del trapecio y del punto medio en las que se divide únicamente por cuatro. La convergencia es orden 4 para la *regla de Simpson*.

**5.** Cuando se aumenta el esfuerzo computacional, se aprecia la mejora de la aproximación del algoritmo. No obstante, la *regla de Simpson* necesita que la función tenga una cuarta derivada continua (de hecho basta con que la cuarta derivada sea integrable) por lo que es más exigente con la función sobre la que se aplica.

Los *algoritmos adaptativos* programados con la regla *compuesta de Simpson* reconocen aquellas zonas que requieren mayor trabajo, mayor número de intervalos, y aquéllas otras donde basta unas pocas evaluaciones para obtener una aproximación suficientemente buena.

**6.** Si en vez de seleccionar el tamaño idóneo de intervalo se elijen los puntos con unos pesos para cada punto, se reduce la cantidad de evaluaciones funcionales necesarias para la aproximación. El método de *cuadratura Gaussiana* realiza esta reducción y su uso con integrales dobles y triples constituye un medio muy útil para llegar al cálculo del valor final de las integrales.

**7.** El cálculo de integrales dobles, con los algoritmos detallados en el Proyecto no se limitan a aquéllas que tienen regiones rectangulares, pues son modificables y adaptables en el propio código o realizando particiones adecuadas en las regiones de integración.

**8.** La utilización de los algoritmos adaptativos es aplicable a la integración de *integrales impropias*. Para resolverlo se realiza la construcción del *polinomio de Taylor* de la función junto con la adaptación de la regla *compuesta de Simpson* al cálculo de impropias.

# 9. Valoración económica

## 9.1. Introducción

En este apartado se detalla la valoración económica o análisis de costes de cada una de las tareas/actividades que comprende la realización y puesta en funcionamiento del presente Proyecto.

El Proyecto se ha descompuesto en actividades y tareas, indicadas en la valoración económica como ítems.

## 9.2. Técnicas de estimación de costes

Los costes de las diferentes partidas o ítems que componen el Proyecto se detallan a continuación.

**1. Especificaciones y Desarrollo Software**

En cada una de las fases en que se ha dividido la ejecución del Proyecto, Especificación, Desarrollo, Integración y Pruebas, y Formación, se reseñan los costes directos expresados en mese/hombre necesarios para acometer cada una de las fases, indicándose la categoría: Jefe de Proyecto, Analista, Programador, etc.

**2. Instalación, Pruebas e Integración del Software**

En este apartado se recogen los costes directos de las actividades de integración y las pruebas del software en el entorno de desarrollo y en el de explotación, incluidos los gastos adicionales, tales como los desplazamientos y las dietas.

### 3. Equipamiento y Licencias Software

Costes de todo el equipamiento e infraestructura (PC,s, impresoras, RAL, comunicaciones), si fuera necesario. Así mismo, se especifican las licencias necesarias para el entorno de explotación.

### 4. Apoyo logístico (Formación)

En este concepto se ampara la formación a impartir a los posibles operadores y administradores del sistema a implantar. Se incluye en la formación la entrega de toda la documentación necesaria para el curso de formación.

### 5. Incrementos e IVA

Se parte de la suma de las partidas (1), (2), (3), y (4) formando el Coste Directo del Proyecto. A este Coste Directo se le aplican los Gastos Generales (13 %) y el Beneficio Industrial (6 %). La suma de los conceptos de Coste Directo, Gastos Generales y Beneficio Industrial constituyen el Total Importe sin IVA.

A este importe se le sumarán los impuestos correspondientes como IVA (16 %), para la Península y Baleares, IGIC (5 %) para las islas Canarias o IPSI (0 %) para Ceuta y Melilla.

**Total Proyecto**

La suma del Total Importe sin IVA más la partida de Incrementos e IVA determinan el importe total del desarrollo, implantación y puesta en servicio del Proyecto.

## 9.3. Costes del Proyecto

El importe total del Proyecto asciende a **21.562, 73** Euros (**VEINTIÚN MIL QUINIENTOS SESENTA Y DOS CON SETENTA Y TRES CÉNTIMOS**), impuestos incluidos.

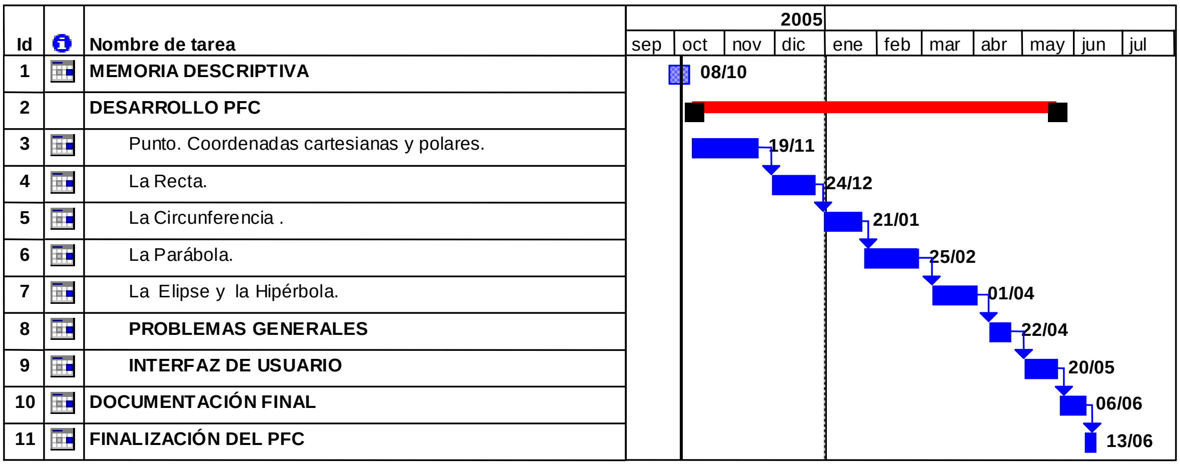
El detalle de cada una de las partidas se expresa en la tabla siguiente.

| TÍTULO DEL PROYECTO FIN DE CARRERA | P.1 |
|---|---|

| Ítem | Concepto | Empresa | Unidad (Meses/ Hombre) | Coste Unitario € | Coste Total € | Total por partidas € |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | **Especificaciones y Desarrollo Software** | | | | | |
| | **a) Especificaciones** | | | | | |
| P.1.1.1 | Especificación de Requisitos y Análisis Funcional | | | | | |
| | Jefe de Proyecto | Desarrollo Inf. | 0,04 | 7.847,53 | 274,66 | |
| | Analista/Programador | Desarrollo Inf. | 0,25 | 5.762,31 | 1.440,58 | |
| P.1.1.2 | Plan de pruebas | | | | | |
| | Jefe de Proyecto | Desarrollo Inf. | 0,04 | 7.847,53 | 274,66 | |
| | Analista/Programador | Desarrollo Inf. | 0,25 | 5.762,31 | 1.440,58 | |
| | | | | | | |
| | **b) Desarrollo software** | | | | | |
| P.1.1.3 | Ajuste de Curvas Lineal.<br>Recta de Mínimos Cuadrados.<br>Parábola de Mínimos Cuadrados.<br>Polinomio de Mínimos Cuadrados.<br>Linealización de Datos. | | | | | |
| | Jefe de Proyecto | Desarrollo Inf. | 0,07 | 7.847,53 | 549,33 | |
| | Analista/Programador | Desarrollo Inf. | 0,50 | 5.762,31 | 2.881,16 | |
| P.1.1.4 | Ajuste de Curvas no Lineal.<br>Sistemas Superdeterminados.<br>Método de Mínimos Cuadrados. | | | | | |
| | Jefe de Proyecto | Desarrollo Inf. | 0,04 | 7.847,53 | 274,66 | |
| | Analista/Programador | Desarrollo Inf. | 0,25 | 5.762,31 | 1.440,58 | |
| | | | | | **Subtotal 1** | **8.576,21** |
| **2** | **Instalación, Pruebas e Integración del Software** | | | | | |
| P.1.2.1 | Pruebas de integración en fábrica<br>(Entorno de Desarrollo) | | | | | |
| | Jefe de Proyecto | Desarrollo Inf. | 0,01 | 7.847,53 | 109,87 | |
| | Analista/Programador | Desarrollo Inf. | 0,10 | 5.762,31 | 576,23 | |
| P.1.2.2 | Instalación y pruebas de aceptación en las instalaciones del cliente<br>(Entorno de Explotación) | | | | | |
| | Jefe de Proyecto | Desarrollo Inf. | 0,01 | 7.847,53 | 109,87 | |
| | Analista/Programador | Desarrollo Inf. | 0,10 | 5.762,31 | 576,23 | |
| | | | | | **Subtotal 2** | **1.372,19** |
| **3** | **Equipamiento y Licencias** | | | | | |
| P.1.3.1 | Licencia de Mathematica V. 5.0 para Windows | AddLink Sw. Científico | 1 | 1.419,64 | 1.419,64 | |
| P.1.3.2 | Licencia de Mathematica for Active X | DigiBuy | 1 | 75,99 | 75,99 | |
| P.1.3.3 | Microsoft Visual Studio Enterprise 6.0 Upgrade | Microsoft Ibérica | 1 | 268,70 | 268,70 | |
| | | | | | **Subtotal 3** | **1.764,33** |
| **4** | **Apoyo Logístico (Formación)** | | | | | |
| P.1.4.1 | Formación Aplicación Software y documentación<br>(Curso de 6 horas a 8 personas) | Desarrollo Inf. | 1 | 3.907,91 | 3.907,91 | |
| | | | | | **Subtotal 4** | **3.907,91** |
| | | | | | **TOTAL COSTE DIRECTO** | **15.620,64** |
| **5** | **Incrementos e IVA** | | | | | |
| P.1.5.1 | Gastos Generales | Desarrollo Inf. | 13% | 15.620,64 | 2.030,68 | |
| P.1.5.2 | Beneficio Industrial | Desarrollo Inf. | 6% | 15.620,64 | 937,24 | |
| | | | | | **TOTAL IMPORTE SIN IVA** | **18.588,56** |
| | IVA (Península y Baleares) | | 16% | 18.588,56 | 2.974,17 | |
| | | | | | **TOTAL PROYECTO (EUROS)** | **21.562,73** |

# 9.4. Planificación temporal del proyecto

En el siguiente diagrama de *Gantt* de actividades se muestran los hitos y tareas más significativos para el desarrollo y ejecución de este Proyecto Fin de Carrera.



# Bibliografía

[BUFA98] Burden, Richard. L.; Faires, J. Douglas.
*Análisis Numérico. 6º Edición.* International Thomson Editores, México, 1998.

[CHCA87] Chapra, Steven C.; Canale, Raymond P.
*Métodos Numéricos para Ingenieros. Con aplicaciones en Computadoras Personales.* McGraw-Hill. México, 1987.

[DEMI85] Demidovich, B.P. *"Problemas y ejercicios de Análisis Matemático"*. Paraninfo. 1985.

[DEMI88] Demidovich, B.P.; MARON, I.A.
*Cálculo Numérico Fundamental*. Paraninfo, 1988.

[GANE97] García Merayo, Félix; Nevot Luna, Antonio.
*Métodos Numéricos en forma de Problemas Resueltos*.
UPCO. Madrid, 1997.

[GASC93] Gasca González, Mariano.

*Cálculo Numérico I. 6ª Edición.*

Ed. UNED. Madrid, 1993.

[INRE99] Infante del Río, Juan Antonio; Rey Cabezas, José María.

*Métodos Numéricos. Teoría, Problemas y Prácticas con MATLAB.*

Ediciones Pirámide. Madrid, 1999.

[MAFI92] Mathews, John H.; Fink, Kurtis D.

*Numerical Methods for Mathematics, Science and Enginnering*. 2ª Edición.

Second Edition. Prentice-Hall, Inc. London, 1992.

[MAFI00] Mathews, John H.; Fink, Kurtis D.

*Métodos Numéricos con MATLAB.* 3ª edición. Prentice Hall, Madrid, 2000.

[MORE99] Moreno González, Carlos.

*Cálculo Numérico II. 1ª Edición.*

Ed. UNED. Madrid, 1999.

[MODU88] Moursund, David G.; Duris, Charles S.

*Elementary Theory and Application Analysis*.

Dover Publications, Inc. New York, 1988.

[MUTO98] MUTO, V.. *Curso de Métodos Numéricos*.

Servicio Editorial Universidad del País Vasco, 1998.

[NAKA91] Nakamura, S. *Applied Numerical Methods whit Software*.

Editorial Prentice-Hall, 1991.

[PISK78] Piskunov, N. *Cálculo Diferencial e Integral.*

Montaner y Simón, S. A. Barcelona, 1978.

[PORT] Portaencasa, R.; Vega, C.; Fdez. Baizán, C.; Morant, J. L.; Ribagorda, A.

*Análisis Numérico*. Facultad de Informática. Madrid.

[REY62] Rey Pastor, Julio. *Curso de Cálculo Infinitesimal. 4º Edición.*

Buenos Aires, 1962.

[RINC01] Rincón, F.

*Análisis Matemático y Métodos Numéricos para Informática*.

Ed. Dpto. Publicaciones de la E.U.I. Madrid, 2001.

[RODR03] Rodríguez Gómez, Francisco Javier.

*Cálculo y Métodos Numéricos. Teoría, Algoritmos y Problemas Resueltos.*

Universidad Pontificia Comillas. Madrid, 2003.

[ROGA98] Rodríguez Gómez, Fco. Javier; García Merayo, Félix.

*Fundamentos y Aplicaciones con Mathematica.* Paraninfo. Madrid, 1998.

[SCHE72] Scheid, Francis.

*Análisis Numéricos. Teoría y 775 Problemas Resueltos.*

Serie Schaum, McGraw-Hill. Madrid, 1972.

[SCHE91] Scheid, F.; di Costanzo, R. E.

*Métodos Numéricos. Segunda Edición*. McGraw-Hill, 1991.

[VIILL94] De la Villa Cuenca, Agustín.

*Cálculo I. Teoría y Problemas de Análisis Matemático*

*de una Variable*. 2ª Edición.

Ed. CLAGSA. Madrid, 1994.

[VILL96] De la Villa Cuenca, Agustín.

*Problemas de Álgebra con Esquemas Teóricos*. 3ª Edición.

[WOL91] Wolfram, Stephen.

*Mathematica*. *A System for Doing Mathematics by Computer*.

*Second Edition.*

Addison-Wesley. Redwood City, California, 1991.