

Departamento de Mecánica Estructural y Construcciones Industriales - ETS Ingenieros Industriales Madrid

Teoría General del Método de los Elementos Finitos

Francisco Beltrán

Notas de Clase / Curso de Doctorado 1998-99

Presentación

Estas notas se han concebido como material de apoyo didáctico dentro del curso de doctorado “Teoría General del Método de los Elementos Finitos”, que imparte el Departamento de Mecánica Estructural y Construcciones Industriales de la ETS de Ingenieros Industriales de Madrid. Se pretende dar al alumno la posibilidad de contrastar con ellas sus apuntes de clase y, de esta manera, ayudarle a comprender mejor las ideas transmitidas por el profesor.

De acuerdo con los objetivos del curso de doctorado, se proporciona una panorámica general de los aspectos del método de los elementos finitos (MEF) necesarios para iniciar al alumno en su aplicación industrial práctica. En este sentido, el documento puede resultar útil también para aquellos que, al margen del curso, busquen una formación básica que les permita utilizar programas basados en el MEF conociendo las líneas generales de la tecnología numérica y sus limitaciones.

No se trata de remplazar los muchos libros de texto que, desde diferentes ópticas, abordan el MEF. Por el contrario, la idea ha sido componer un resumen introductorio, escrito en un lenguaje asequible, que sirva de punto de partida para la consulta de esos libros. Así, para facilitar esta labor, en las páginas finales se incluye una lista de referencias bibliográficas donde el alumno interesado puede ampliar los conceptos expuestos.

Collado-Villalba, septiembre de 1999

Para Alba y Héctor

Índice General

1	Introducción	1
1.1	Perspectiva histórica	1
1.1.1	Orígenes	1
1.1.2	Evolución	3
1.1.3	Presente	4
1.2	Panorámica de aplicaciones industriales actuales	5
2	Fundamentos matemáticos (I)	8
2.1	Introducción	8
2.2	Métodos de residuos ponderados	9
2.3	Método de Galerkin	11
2.4	Formulación débil	12
2.5	Analogía mecánica: el principio de los trabajos virtuales	14
2.6	Soluciones débiles aproximadas	16
2.7	Teorema de Lax-Milgram	16
2.8	Propiedad de aproximación óptima	17
3	Fundamentos matemáticos (II)	19
3.1	Introducción	19
3.2	Principios variacionales	19
3.3	Método de Rayleigh-Ritz	20
3.4	El problema elástico: notación	22
3.5	Principios variacionales en Elasticidad	24
3.6	Ecuaciones de Euler y tipos de condiciones de contorno	25
4	Programación del MEF (I)	27
4.1	Introducción	27
4.2	La “receta” del MEF	27
4.3	Cálculos por el MEF: datos y resultados	30
4.4	Flujo general en un programa de EF para cálculo lineal	32
5	Tecnología de elementos (I)	35
5.1	Introducción	35
5.2	Formulación convencional en desplazamientos	36

5.3	Ejemplo: elemento cuadrilátero	37
5.4	La transformación isoparamétrica	39
5.5	Integración numérica	42
5.6	Algunas familias corrientes de funciones de forma	43
6	Tecnología de elementos (II)	46
6.1	Introducción	46
6.2	Formulación C^1 en elementos viga	47
6.3	Formulación C^1 en elementos placa	50
6.4	Dificultad de la formulación C^1 en elementos placa	53
6.5	Ejemplo: elemento triangular de 3 nodos	54
6.6	Formulación C^0 en elementos viga	56
6.7	Formulación C^0 en elementos placa	60
7	Tecnología de elementos (III)	62
7.1	Introducción	62
7.2	Elementos no conformes	64
7.2.1	Elasticidad bidimensional	64
7.2.2	Flexión de placas	65
7.3	Bloqueo por deformación isocórica	66
7.4	Bloqueo del elemento cuadrilátero convencional	67
7.5	Soluciones heurísticas a los problemas de bloqueo	72
7.5.1	Integración reducida	72
7.5.2	Formulación $\overline{\mathbf{B}}$	73
7.6	La prueba de la parcela	74
8	Tecnología de elementos (IV)	77
8.1	Introducción	77
8.2	Principio variacional multicampo	78
8.3	Discretización por el MEF	79
8.4	Las condiciones de Babuška-Brezzi	82
9	Procedimientos de cálculo (I)	83
9.1	Introducción	83
9.2	Resolución de sistemas de ecuaciones lineales	83
9.3	Eliminación de Gauss	85
9.4	Factorizaciones de Crout y Cholesky	87
9.4.1	Factorización de Crout	87
9.4.2	Factorización de Cholesky	88
9.5	Método de resolución frontal	89
9.6	Métodos iterativos	92
9.7	Iteración de Jacobi y sus variantes	94
9.8	Método del gradiente conjugado	96
9.9	Relajación dinámica	99

10 Procedimientos de cálculo (II)	101
10.1 Introducción	101
10.2 El problema de la elasticidad dinámica	101
10.3 Discretización por el MEF	103
10.4 Procedimientos tipo Newmark	106
10.5 Operador α de Hilber-Hughes-Taylor	109
11 Estimación a posteriori del error	110
11.1 Introducción	110
11.2 Conceptos básicos	111
11.3 Indicadores y estimadores de error	112
11.3.1 Densidad de energía de deformación (SED)	112
11.3.2 Normas de residuos	113
11.3.3 Estimadores del tipo Z^2	113
11.3.4 Estimadores basados en diferencias entre funcionales	114
11.4 Procesos adaptables	115
12 Conceptos básicos de la Mecánica de Sólidos	117
12.1 Introducción	117
12.2 Fuentes de no linealidad en Mecánica de Sólidos	118
12.3 Tensor gradiente de deformación	118
12.4 Teorema de descomposición polar	120
12.5 Medidas de la deformación	123
12.6 Tasa o velocidad de deformación	126
12.7 Equilibrio y trabajo virtual	127
12.8 Medidas de tensión	128
12.9 Tasa o velocidad de cambio de la tensión	129
12.10 Partición aditiva de la velocidad de deformación	131
13 Procedimientos de cálculo (III)	133
13.1 Introducción	133
13.2 La “receta” del MEF en problemas no lineales	133
13.3 El método de Newton y sus variantes	135
13.4 Problemas no estacionarios	137
13.5 Procedimientos de integración explícita	140
13.5.1 Ideas generales	140
13.5.2 Flujo general	141
13.5.3 Ventajas e inconvenientes	142
13.5.4 Medidas de calidad de la solución	142
13.5.5 Campo de aplicaciones industriales	143
13.5.6 Técnicas de aceleración del cálculo	143
Bibliografía	145

Capítulo 1

Introducción

1.1 Perspectiva histórica

Los métodos de elementos finitos constituyen hoy en día el procedimiento habitual de cálculo en Mecánica Estructural y Mecánica de Sólidos en general. Su uso está también muy extendido en la resolución de problemas de Transferencia de Calor, y empieza a cobrar importancia en otras áreas, como la Mecánica de Fluidos o el Electromagnetismo.

El conocimiento de estas técnicas numéricas resulta actualmente casi imprescindible para aquellos que se desenvuelven en el ámbito de la Ingeniería Civil y la Ingeniería Mecánica, ya que la mayor parte de los análisis de tensiones que se llevan a cabo en la industria están basados en ellas.

A pesar de su gran difusión actual, los procedimientos de elementos finitos tal y como los entendemos hoy en día son relativamente modernos. Su nacimiento y desarrollo es una consecuencia de la disponibilidad de herramientas electrónicas de cálculo cada vez más potentes. Puede decirse, por tanto, que estas técnicas son un resultado más de la revolución informática de finales del siglo XX.

1.1.1 Orígenes

La reseña histórica del método de los elementos finitos (MEF) hay que iniciarla en la década de los cincuenta, cuando el recién nacido ordenador digital hacía por fin posible el cálculo automático de estructuras de barras sin recurrir a tediosos procedimientos de relajación, como el de Cross o el de Kani. Se concibió entonces una nueva técnica de cálculo, inabordable sin la ayuda del ordenador, que fue bautizada con el nombre de “cálculo matricial de estructuras”, en reconocimiento del papel que desempeña el álgebra matricial en su formalismo matemático.

Recordemos que el cálculo matricial de estructuras¹ se basa en la idea de dividir la estructura en barras, dentro de las cuales se conoce la solución *exacta* en función de ciertos coeficientes que se hacen coincidir con los movimientos de los nodos extremos. Dichos coeficientes se obtienen planteando el equilibrio de todos los nodos de la estructura y

¹Ver, por ejemplo, Alarcón, Álvarez y Gómez-Lera. *Cálculo Matricial de Estructuras*, Reverté, 1986.

resolviendo el sistema de ecuaciones que resulta. De esta manera, conocidos los coeficientes o movimientos nodales, se desciende de nuevo al nivel local de cada barra y se obtiene la solución de esfuerzos y movimientos en el conjunto de la estructura por agregación de soluciones locales.

El MEF nació como una generalización de esta idea básica del cálculo matricial. Alguien que trabajaba con sistemas estructurales complejos, que no se idealizaban bien mediante entramados de barras, pensó que podía dividir su estructura en zonas o “elementos” más complejos que una simple barra. Estos elementos estarían conectados entre sí también en nodos pero, a diferencia con el cálculo matricial, dentro de ellos sólo conocía la solución de manera *aproximada* en función de los movimientos nodales. Al igual que en el cálculo matricial, a partir de las soluciones locales se podía plantear el equilibrio de los nodos y obtener los movimientos nodales resolviendo un sistema de ecuaciones. Estos movimientos nodales definían la solución dentro de cada uno de los “elementos” en que se había dividido la estructura y, por agregación, la solución en toda ella. Lo que ocurría es que, ahora, esta solución no era la exacta, sino una aproximación.

La partida de nacimiento del MEF, en la que se publica por primera vez la idea anterior, está fechada en 1956. Se trata de un artículo histórico aparecido en una revista relacionada con la industria aeronáutica².

Así pues, el MEF nació en el ámbito del cálculo de estructuras y esto ha impregnado toda la terminología asociada al mismo. En un principio se presentó como un procedimiento de cálculo más, entre los muchos desarrollados por ingenieros ocupados en resolver problemas prácticos. Sin embargo, durante los años sesenta los investigadores descubrieron que la esencia de lo que había sido una mera generalización del cálculo matricial podía utilizarse, no sólo para resolver problemas de cálculo de estructuras, sino también problemas de campo en general, tales como problemas de elasticidad o de conducción de calor. La idea básica seguía siendo la misma: la división del dominio de cálculo en pequeños subdominios y la aproximación en ellos de la variable de campo en función de su valor en puntos privilegiados llamados nodos. Aparecía así el MEF moderno.

Por otro lado, tras el éxito en las primeras aplicaciones, se comprobó que a pesar de haber sido desarrollado con mentalidad práctica (ingenieril), el método tenía hondas raíces matemáticas, en la línea del procedimiento de Ritz para obtener soluciones aproximadas de ecuaciones diferenciales³ o dentro de los llamados métodos de residuos ponderados. En su aplicación a la elasticidad, el método podía interpretarse también como una forma aproximada de resolver las condiciones de equilibrio derivadas del clásico principio de los trabajos virtuales.

Esta generalidad empezó a atraer el interés de los matemáticos, los cuales contribuyeron decisivamente a explicar con rigor las bases del MEF. Sin embargo, debe hacerse notar que la contribución de los matemáticos al MEF ha ido siempre muy por detrás de las aplicaciones prácticas. El MEF nació como una herramienta ingenieril y sus líneas básicas de desarrollo han estado siempre muy vinculadas a la presión de la industria por resolver problemas. En muchas etapas de su evolución se ha concebido y aplicado con éxito una

²M.J. Turner, R.W. Clough, H.C. Martin y L.J. Topp. Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures. *Journal of Aeronautical Sciences*, vol.23, 9. 1956.

³El método de Ritz data de 1909.

determinada técnica numérica antes de encontrar su justificación matemática rigurosa. De hecho, es sintomático que el primer libro importante en que se analiza el MEF desde el punto de vista matemático se publicara en 1973⁴, cuando el método llevaba al menos quince años empleándose en la industria y había alcanzado una gran madurez en su aplicación a problemas lineales.

1.1.2 Evolución

El MEF alcanza su mayoría de edad hacia finales de los sesenta, con la aparición de los primeros programas comerciales⁵. En ese momento entra en franca competencia con el único método de cálculo numérico disponible hasta entonces para problemas de campo: el método de diferencias finitas. En el ámbito del análisis de tensiones en sólidos, el MEF se impuso rápidamente, ya que está libre de las restricciones de tipo geométrico que dificultan el uso de los procedimientos clásicos de diferencias finitas en este campo.

Al final de la década de los sesenta el MEF había demostrado ya su potencia y su versatilidad, pero su empleo estaba todavía muy restringido dentro de la industria aerospacial y de defensa, debido al altísimo precio de los ordenadores de entonces.

Empiezan a aparecer en aquel momento los llamados “centros de cálculo”, compañías que vendían tiempo de ordenador a usuarios que carecían de los “grandes” ordenadores necesarios para resolver problemas industriales. Los centros de cálculo se organizaban alrededor de un ordenador en el que se encontraban instalados, entre otros, los programas de elementos finitos. Los ingenieros del centro proporcionaban al usuario la documentación necesaria para preparar la entrada de datos a los programas e interpretar los resultados que se producían. El usuario preparaba sus datos y los remitía al centro de cálculo, inicialmente mediante paquetes de tarjetas perforadas y, más tarde, mediante ficheros que se enviaban a través de una línea telefónica. Los datos se procesaban en el ordenador del centro de cálculo y los resultados le llegaban al usuario al cabo de unos días, normalmente en forma de tremendos listados de números que tardaban también varios días en ser comprobados e interpretados.

Los centros de cálculo tuvieron su auge en la década de los setenta. Contribuyeron de manera muy importante a la popularización del MEF en industrias como la del automóvil, la nuclear y la de grandes obras civiles. Por otro lado, los centros de cálculo universitarios pusieron la infraestructura necesaria para el enorme esfuerzo investigador que se llevó a cabo en esta década. Si los años sesenta fueron la época de los pioneros, los años setenta son los de los grandes desarrollos del MEF, tanto en tecnología de elementos como en procedimientos de cálculo y aumento de prestaciones. El número de publicaciones sobre el método creció exponencialmente y el MEF se aplicó progresivamente a problemas cada vez más complejos, como el cálculo de transitorios o el estudio de respuestas no lineales. Puede decirse que al final de la década el desarrollo de las técnicas numéricas casi se pone por delante de la potencia de cálculo que son capaces de proporcionar los ordenadores.

Los centros de cálculo inician su declive con la aparición de los llamados “mini” ordenadores, a principios de los ochenta. Los avances tecnológicos permitieron poner en el

⁴Strang y Fix. *An Analysis of the Finite Element Method*, Prentice-Hall, 1973.

⁵El primer programa comercial de elementos finitos aparece en 1968.

mercado máquinas comparables a aquellas de que disponían los centros de cálculo, pero a precios mucho más bajos y con unos costes de mantenimiento y explotación muy inferiores. El avance se hizo vertiginoso hacia el final de la década, con la aparición de las primeras “estaciones de trabajo”, ordenadores pensados para un solo usuario, con una potencia de cálculo nada despreciable, dotadas de capacidades gráficas y con un precio pequeño. Como consecuencia, los ordenadores se trasladan desde los centros de cálculo a las oficinas de los ingenieros y éstos ganan autonomía para usar el MEF y experimentar con él.

Durante la década de los ochenta el desarrollo de las técnicas de elementos finitos no fue tan espectacular como en los setenta, se empezó a alcanzar un cierto grado de madurez. El esfuerzo investigador puntero se concentró más en estos años en aplicaciones dentro del ámbito no lineal, las cuales podían empezar a ser utilizadas de manera rutinaria gracias a los avances en la potencia de cálculo.

Donde sí hubo un avance importante fue en la popularización del MEF y en su facilidad de uso, tanto por el abaratamiento espectacular de los ordenadores, como por las capacidades gráficas que proporcionaban. En la década de los ochenta empiezan a comercializarse pre y post-procesadores gráficos para los cálculos de elementos finitos, siendo éste un paso muy importante de cara a poder abordar de manera rutinaria y con un mínimo de garantía cálculos tridimensionales con geometrías complejas, como las que aparecen en el diseño mecánico.

1.1.3 Presente

La década de los noventa corresponde al momento que vivimos. Se caracteriza por un abaratamiento de los ordenadores impensable hace sólo unos años. Desde el punto de vista de lo que hace falta para el cálculo por elementos finitos, puede decirse que hoy en día resulta normalmente más caro el programa de cálculo que el ordenador que se necesita para ejecutarlo. Todo lo contrario de lo que sucedía hace apenas una década, cuando el vendedor de ordenadores (el “hardware”) prácticamente regalaba los programas (el “software”) al hacer una venta. Además, con mucho, los mayores gastos asociados a un análisis por elementos finitos no son ya los correspondientes al análisis mismo (amortización del ordenador y licencia de uso del programa) sino los de preparación del modelo e interpretación de resultados.

El abaratamiento de ordenadores y programas ha contribuido a que la difusión de las herramientas de elementos finitos sea tremenda. Cualquier oficina técnica, por pequeña que sea, las tiene a su alcance. Hay que decir a este respecto que la difusión de las herramientas no siempre se corresponde con la adecuada formación para su uso. Hoy en día resulta relativamente frecuente que se lleven a cabo cálculos por personal que desconoce casi absolutamente los fundamentos del MEF y sus limitaciones y que, por tanto, es incapaz de evaluar la bondad de los resultados que está obteniendo.

Otro aspecto importante del momento actual es la integración del cálculo por elementos finitos con otras ramas de lo que se ha dado en llamar Ingeniería Asistida por Ordenador (“Computer Aided Engineering” - CAE). En la actualidad es normal la integración del cálculo por elementos finitos (“Finite Element Analysis” - FEA) y el dibujo asistido por ordenador (“Computer Aided Design” - CAD), con el objetivo, siempre, de reducir los

tiempos de proyecto o de puesta de producto en el mercado.

Las técnicas de cálculo no lineal han alcanzado una madurez suficiente como para poder ser empleadas por la industria de forma rutinaria. No tienen aún la difusión alcanzada por los métodos de cálculo lineal y requieren de ordenadores más potentes, pero se emplean ya ampliamente en campos tales como el estudio de la resistencia a impacto de vehículos (“crashworthiness”), el diseño de procesos de conformado de piezas metálicas (forja, estampación, extrusión, laminación) y el proyecto de componentes elastoméricos. El objetivo es también el mismo, reducir al máximo el número de pruebas con prototipos reales para acortar los plazos de diseño o de puesta en el mercado.

No se está viviendo una época de grandes avances en cuanto a las técnicas de cálculo por el método de los elementos finitos. Se sigue investigando, pero el MEF ha alcanzado ya un grado de madurez que no se presta a progresos espectaculares como los vividos en las décadas anteriores. Desde el punto de vista del que redacta estas notas son cuatro las líneas de investigación a lo largo de las cuales se está desarrollando el MEF en la actualidad:

- Adaptación de algoritmos de cálculo a las nuevas arquitecturas de ordenadores, con objeto de aumentar la velocidad de cálculo y, por tanto, el tamaño máximo de los problemas abordables.
- Desarrollo de medidas error, mallados autoadaptativos y elementos de altas prestaciones, con objeto de aumentar la precisión y fiabilidad de los resultados obtenidos por usuarios inexpertos en entornos de cálculo integrados con el CAD.
- Desarrollo de nuevos elementos y técnicas de solución encaminados a aumentar la eficiencia, robustez y fiabilidad de los cálculos en el ámbito no lineal.
- Modelos numéricos de leyes de comportamiento de materiales, sobre todo para la predicción del fallo y para la representación del comportamiento de nuevos materiales.

1.2 Panorámica de aplicaciones industriales actuales

Hoy en día la aplicación industrial mayoritaria del MEF es el cálculo de tensiones en sólidos y estructuras. En esta parcela prácticamente no se usa otro procedimiento numérico. Para problemas muy concretos, tales como los relacionados con dominios infinitos (acústica, suelos) o el estudio de fracturas, es posible que en un futuro el Método de los Elementos de Contorno (MEC) pueda desplazar al MEF, por ser intrínsecamente más adecuado. Sin embargo, el conocimiento y el uso del MEC, no ya en la industria, sino incluso dentro de los ambientes docentes, son mínimos. No parece, ni siquiera a medio plazo, que el MEC pueda jugar un papel significativo en la práctica industrial⁶.

⁶Frente al gran número de programas basados en el MEF que existen hoy en día en el mercado, varias decenas, el autor sólo conoce dos programas comerciales basados en el MEC. Esto da idea de la desproporción actual entre el uso que hace la industria de una y otra técnica numérica.

Dentro del cálculo de tensiones hay que distinguir entre dos tipos generales de aplicaciones: el cálculo lineal y el no lineal. La gran mayoría de los usuarios del MEF en la actualidad, en torno al 80%, realiza cálculos lineales. Las técnicas de cálculo lineal están lo suficientemente maduras y probadas como para que puedan emplearse de modo generalizado sin apenas incertidumbres en cuanto a los recursos necesarios para llegar al resultado⁷.

El cálculo lineal de tensiones, tanto estático como dinámico, se utiliza sobre todo en la fase de diseño o de proyecto, donde se busca hacer un uso eficiente del material y, en ocasiones, justificar el cumplimiento de una normativa o código de buena práctica. Su uso está muy difundido en el proyecto de elementos mecánicos y estructuras complejas. Se utiliza mucho también en el estudio de vibraciones (p.ej. acústica o ingeniería sísmica). Por otro lado, los cálculos lineales por elementos finitos juegan un papel destacado en los procesos de licenciamiento o certificación de componentes en la industria nuclear, “off-shore” o aeronáutica.

El cálculo y la visualización de los resultados permite al ingeniero entender mejor el funcionamiento de sus diseños y, en consecuencia, optimizarlos. En este sentido, el cálculo lineal ha sustituido casi completamente a los ensayos y pruebas de prototipos en que se basaba buena parte del diseño mecánico hace sólo unas décadas. No porque el cálculo sea más barato, que muchas veces no lo es, sino porque es mucho más rápido e interactivo. Permite realizar muchas pruebas del tipo “¿qué pasaría si...?” en poco tiempo, lo que facilita enormemente la compenetración entre el proyectista y su diseño.

El cálculo no lineal de tensiones comienza a tener un peso específico grande dentro de las aplicaciones prácticas del MEF. La industria ha impulsado mucho la investigación en esta línea con el objetivo de que, a medio plazo, se puedan llegar a eliminar las incertidumbres que afectan hoy en día a los cálculos no lineales. Aunque se ha avanzado bastante en la última década, todavía existen áreas en las que abordar un cálculo no lineal tiene una cierta componente de investigación, ya que no se conocen a priori los recursos que serán necesarios para alcanzar el resultado. Esto, junto con los mayores requisitos de formación y de infraestructura informática que se imponen al usuario, ha retrasado la difusión de los cálculos no lineales.

Sin embargo, en determinados sectores industriales la no linealidad de los cálculos no puede evitarse, ya que es parte intrínseca del comportamiento que intenta simularse. Es el caso normalmente de la industria de defensa (balística terminal), la ingeniería de determinados procesos de fabricación (conformado de metales y vidrio), la industria de componentes elastoméricos (juntas de goma, soportes de caucho-metal), las aplicaciones geotécnicas o el estudio de la seguridad a impacto de vehículos (“crashworthiness”). Es en estas áreas donde se encuentra más difundido el cálculo no lineal de tensiones utilizando el MEF.

En círculos más minoritarios, el cálculo no lineal de tensiones se utiliza también en la investigación de causas de accidentes (ingeniería forense) y en la obtención de las cargas últimas o límites resistentes de las estructuras. Esta clase de estudios contrasta con los de proyecto en el sentido de que se busca una descripción lo más ajustada posible del

⁷El único recurso significativo hoy en día es el tiempo del calculista.

comportamiento real, mientras que en los cálculos de dimensionamiento de estructuras lo que se busca es, simplemente, garantizar la seguridad.

Fuera del ámbito del cálculo de tensiones, el MEF está muy difundido asimismo en el estudio de problemas de transferencia de calor, sobre todo en ingeniería mecánica (motores y sistemas de refrigeración). En este campo es también el MEF prácticamente la única herramienta numérica que se utiliza. Habría que distinguir igualmente entre cálculos lineales y no lineales y, en general, aplican los mismos comentarios hechos para el caso del cálculo de tensiones. Quizá en los problemas de transferencia de calor son menos las incertidumbres cuando se aborda un cálculo no lineal.

La herramienta de cálculo tradicional dentro de la Mecánica de Fluidos ha sido el Método de Diferencias Finitas (MDF). El MEF se encuentra menos difundido aquí porque la representación de la geometría no tiene tanta importancia como en Mecánica de Sólidos y porque en muchas de las aplicaciones de interés industrial los problemas tienen carácter no lineal⁸. En aplicaciones que requieren únicamente cálculos lineales, tales como el estudio del flujo en medios porosos (aguas subterráneas), la difusión de contaminantes, o la propagación de ondas de gravedad (oleaje), el MEF se encuentra bastante extendido; mientras que los avances en las técnicas de cálculo no lineal han hecho que el MEF sea cada vez más competitivo con el MDF en otras aplicaciones. Parece que las técnicas de elementos finitos ganan progresivamente terreno, aunque sea disfrazadas de otros nombres, como “dominios finitos” o “volúmenes finitos”.

La utilización del MEF en problemas de Electromagnetismo a escala industrial es relativamente reciente, aunque existen ya numerosos programas comerciales disponibles. Las aplicaciones incluyen el proyecto de máquinas eléctricas (motores, generadores, transformadores) y el estudio de componentes (aisladores, interruptores).

⁸En los problemas clásicos de Mecánica de Fluidos la variable de campo es el vector de velocidades. La no linealidad aparece en las ecuaciones del movimiento por el término convectivo de la derivada total de la velocidad.

Capítulo 2

Fundamentos matemáticos (I)

2.1 Introducción

Desde el punto de vista matemático, el Método de los Elementos finitos (MEF) puede entenderse como un procedimiento para resolver numéricamente problemas planteados mediante ecuaciones diferenciales. En esto es similar a otros procedimientos, como el Método de Diferencias Finitas (MDF) o el Método de los Elementos de Contorno (MEC).

La forma más elegante de explicar los fundamentos matemáticos del MEF parte de la teoría de espacios normados y utiliza los conceptos del análisis funcional¹. Este es el marco en el que hay que situarse si se quieren estudiar con rigor las bases del MEF e investigar sobre sus propiedades matemáticas.

Sin embargo, desde el punto de vista pedagógico, iniciar el estudio del MEF situándose en este marco puramente matemático tiene serios inconvenientes para los técnicos. Entre ellos se pueden mencionar los siguientes:

- Para la mayoría de los ingenieros la teoría de espacios normados y el análisis funcional resultan demasiado generales, abstractas y alejadas de las aplicaciones prácticas en las que están interesados.
- Se requiere un tiempo y esfuerzo considerable para manejar con soltura los conceptos del análisis funcional. Se corre el riesgo de desanimar a los estudiantes que se acercan por primera vez al MEF y de fomentar entre ellos la idea de que el método es sólo una gran teoría matemática, difícil de entender, y sin relación aparente con la forma en que luego se resuelven los problemas reales.
- El iniciar el estudio del MEF desde un marco puramente matemático no se corresponde con la evolución histórica del método, el cual fue concebido por ingenieros con la idea de resolver problemas concretos, y en cuyo desarrollo las aplicaciones han ido siempre por delante de las justificaciones matemáticas generales y elegantes.

Por otro lado, la mayoría de los estudiantes no tienen necesidad de conocer con toda generalidad las bases matemáticas del MEF, ya que en su vida profesional se limitarán

¹Ver las referencias 6 y 7 de la bibliografía complementaria.

a ser usuarios de programas comerciales de cálculo. Estos alumnos sólo necesitan tener claros los conceptos matemáticos indispensables para hacer un uso práctico correcto de las técnicas numéricas, ya probadas, que incorporan los programas comerciales.

Por las razones anteriores, y por limitaciones de espacio, se ha decidido buscar una solución de compromiso para explicar los fundamentos matemáticos del MEF, sin cargar el peso en la generalidad y la elegancia matemática. Se ha elegido una aproximación que muestre la base matemática del MEF en un lenguaje lo menos oscuro posible para el estudiante medio y poniendo énfasis en la línea ingenieril de desarrollo del método.

El objetivo es transmitir ideas y conceptos, más que desarrollos y formulaciones. Las ideas permitirán luego al estudioso penetrar en aparatos matemáticos más complicados, que lo único que hacen es generalizar estas ideas y presentarlas de manera más elegante.

En este capítulo va a introducirse el MEF desde el punto de vista matemático como un caso particular del método de residuos ponderados de Galerkin y, también, como un procedimiento de obtener una solución aproximada a un problema planteado de forma “débil”.

2.2 Métodos de residuos ponderados

Sea el siguiente problema modelo².

Encontrar una función $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \Re$, con $\overline{\Omega} = [0, 1]$, tal que:

$$u_{,xx} + f = 0 \quad \text{en } \Omega =]0, 1[\quad (2.1)$$

siendo $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \Re$ una función lisa o “suave”, y de manera que se cumplan las siguientes condiciones de contorno:

$$u_{,x}(0) = -h \quad h \in \Re \quad (2.2)$$

$$u(1) = g \quad g \in \Re \quad (2.3)$$

La aproximación clásica por diferencias finitas a la resolución numérica de este problema es muy directa, no requiere apenas elaboración. La “receta” podría ser la siguiente:

1. Tomar n puntos de $\Omega =]0, 1[$.
2. Aproximar el valor de $u_{,xx}$ en los n puntos en función del valor de u en esos puntos y de las condiciones de contorno.
3. Particularizar la ecuación de campo $u_{,xx} + f = 0$ en cada uno de los n puntos seleccionados. Se obtiene así un sistema de n ecuaciones lineales cuyas n incógnitas son los valores de u en los puntos seleccionados.

²Este problema corresponde, desde el punto de vista mecánico, al equilibrio de una barra sometida a sollicitación axil.

4. La aproximación a la solución u en Ω se obtiene interpolando entre los valores de u calculados para los puntos seleccionados. La solución puede refinarse aumentando el número n de puntos.

Puede verse que el procedimiento de solución anterior se basa en una aproximación por puntos a la función incógnita. La aproximación se extiende luego a todo el dominio de cálculo por interpolación entre los valores obtenidos para esos puntos.

Podría pensarse en utilizar directamente una función extendida a todo el dominio de cálculo y definida a partir de ciertos coeficientes incógnita. La receta sería entonces:

1. Aproximar la solución u en todo el dominio de cálculo mediante, por ejemplo:

$$u^h = N_0 + \sum_{j=1}^n c_j N_j \quad (2.4)$$

donde $c_j \in \mathbb{R}$ son coeficientes incógnita, $N_0 : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función conocida que cumple las condiciones de contorno 2.2 y 2.3 y $N_j : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones también conocidas pero que cumplen las condiciones de contorno homogéneas³.

2. Determinar los coeficientes incógnita c_j de modo que la ecuación diferencial 2.1 se cumpla “en promedio” o de forma ponderada en todo el dominio Ω .
3. Una forma de realizar lo anterior es tomar n funciones $w_k, k = 1, \dots, n$ y plantear las n ecuaciones:

$$\int_0^1 w_k(u_{,xx}^h + f) dx = 0 \quad k = 1, \dots, n \quad (2.5)$$

Este sistema proporciona un medio para determinar los coeficientes incógnita $c_j, j = 1, \dots, n$.

El procedimiento anterior es una muestra de lo que se conoce con el nombre de método de los residuos ponderados, ya que el segundo factor de la cantidad subintegral de 2.5 recibe el nombre de función residuo⁴.

El método de los residuos ponderados es muy general y muy potente. Se trata de una técnica que engloba procedimientos tan dispares a primera vista como el MEF, el MEC o el ajuste por mínimos cuadrados. La generalidad estriba en que hay muchas posibilidades para elegir las funciones de aproximación N_j y las funciones de ponderación w_k . El criterio de que la función N_0 cumpla las dos condiciones de contorno 2.2 y 2.3 se ha fijado arbitrariamente y esta función podría seleccionarse también con otro criterio.

³Las N_j pueden interpretarse como una base de un cierto espacio de funciones.

⁴El significado matemático de la ecuación 2.5 es el de hacer ortogonal la función residuo a un espacio de funciones cuya base son las funciones w_k .

2.3 Método de Galerkin

El método de (Bubnov)Galerkin es el método de residuos ponderados que corresponde a la formulación más clásica del MEF. Según este método, siguiendo el razonamiento de la sección anterior, la aproximación u^h se construye como:

$$u^h = g^h + \sum_{j=1}^n c_j N_j \quad (2.6)$$

donde:

$c_j \in \mathfrak{R}$ son coeficientes incógnita,

$g^h : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathfrak{R}$ es una función que cumple la condición de contorno 2.3, $g^h(1) = g$,

$N_j : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathfrak{R}$ son funciones que cumplen $N_j(1) = 0$.

Además, las funciones de ponderación $w_k : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathfrak{R}$, se eligen iguales a las N_j : $w_j = N_j$, $j = 1, \dots, n$.

Nótese que 2.6 puede interpretarse como que u^h pertenece a un espacio de funciones \mathcal{S}^h , el espacio de las funciones de aproximación, construido por traslación de otro espacio \mathcal{V}^h cuya base son las funciones N_j . Entonces, el método de Galerkin se caracteriza porque utiliza como espacio de funciones de ponderación el mismo espacio \mathcal{V}^h .

Las ecuaciones 2.5 de residuos ponderados quedan entonces:

$$\underbrace{\int_0^1 N_k (u_{,xx}^h + f) dx}_{\text{ponderación en el dominio}} + \underbrace{N_k (u_{,x}^h + h)|_{x=0}}_{\text{ponderación en el contorno}} = 0 \quad k = 1, \dots, n \quad (2.7)$$

las cuales, integrando por partes y teniendo en cuenta que $N_k(1) = 0$, dan lugar a:

$$\int_0^1 N_{k,x} u_{,x}^h dx = \int_0^1 N_k f dx + N_k h|_{x=0} \quad k = 1, \dots, n \quad (2.8)$$

y, sustituyendo 2.6:

$$\int_0^1 N_{k,x} \left(\sum_{j=1}^n c_j N_{j,x} \right) dx = \int_0^1 N_k f dx + N_k h|_{x=0} - \int_0^1 N_{k,x} g_{,x}^h dx \quad k = 1, \dots, n \quad (2.9)$$

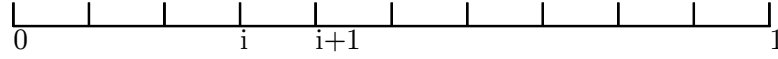
donde los segundos miembros son conocidos.

Es decir, se obtiene un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas que permite determinar los coeficientes c_j de 2.6.

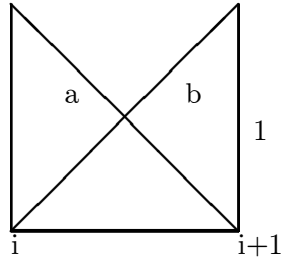
El método de Galerkin data de 1915 y constituye una primera manera de justificar el MEF desde el punto de vista matemático. La aportación del MEF moderno al método de Galerkin consiste en una forma sistemática, fácilmente automatizable, de construir las funciones N_j y g^h a partir de funciones definidas localmente.

A modo de ejemplo, la sistemática anterior se aplica a continuación a la resolución aproximada del problema modelo. El proceso sería el siguiente:

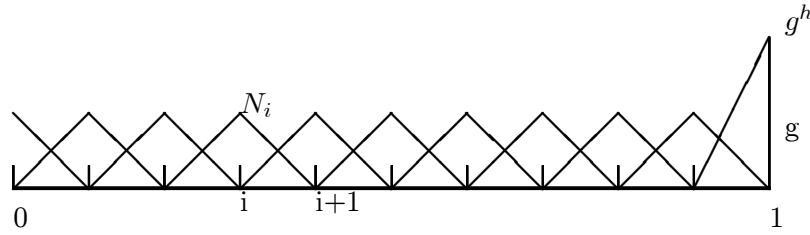
1. Se divide el dominio $]0,1[$ en subintervalos o “elementos”:



2. Dentro de cada elemento se definen dos funciones locales a y b , por ejemplo:



3. Las funciones N_j se definen combinando estas dos funciones elementales:



Nótese que $N_j(1) = 0 \quad \forall j$ y que los coeficientes c_j cobran el sentido del valor de u^h en los puntos o “nodos” que se han utilizado para definir los subdominios o “elementos”. Una vez definidas las funciones elementales, las funciones de aproximación quedan definidas automáticamente.

4. Las integrales que aparecen en 2.9 se hacen elemento a elemento, lo cual facilita también la automatización. Los dominios de definición de las funciones N_j son locales. En este caso se extienden, como mucho, a dos elementos.
5. Los coeficientes c_j , que definen la solución aproximada, se obtienen resolviendo el sistema 2.9.

2.4 Formulación débil

El problema modelo planteado en forma de ecuación diferencial 2.1 con condiciones de contorno 2.2 y 2.3 recibe el nombre de forma “fuerte” del problema, porque impone las condiciones más exigentes a la función que se trata de obtener, en cuanto al orden de derivabilidad y en cuanto al cumplimiento de la ecuación y de las condiciones de contorno *punto a punto* dentro del dominio de cálculo.

Puede pensarse en plantear el problema de modo que se exija a la función incógnita un orden menor de derivabilidad y, en vez del cumplimiento punto a punto, un cumplimiento

en promedio de la ecuación diferencial y de las condiciones de contorno. Por contraste con lo anterior, esta sería una formulación “débil” del mismo problema.

Una formulación débil de nuestro problema modelo sería la siguiente. Se definen dos espacios o conjuntos de funciones,

$$\mathcal{S} = \{u \mid u \in H^1, u(1) = g\} \quad \text{y} \quad \mathcal{V} = \{w \mid w \in H^1, w(1) = 0\}$$

donde H^1 es el conjunto de funciones con derivada de cuadrado integrable en $\overline{\Omega} = [0, 1]$, esto es:

$$H^1 = \{u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R} \mid \int_0^1 (u_{,x})^2 dx < \infty\}$$

A partir de estos dos espacios, el problema se formula como, dados $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g \in \mathbb{R}$ y $h \in \mathbb{R}$ como antes, encontrar una función $u \in \mathcal{S}$ tal que $\forall w \in \mathcal{V}$ se cumpla:

$$\int_0^1 w_{,x} u_{,x} dx = \int_0^1 w f dx + w(0)h \quad (2.10)$$

A primera vista puede parecer que el problema planteado así tiene poco que ver con el planteado en 2.1 a 2.3. Sin embargo, cuando las funciones que intervienen son suficientemente lisas o “suaves”, en el sentido de que están definidas las derivadas necesarias, resulta que la formulación débil es equivalente a la formulación fuerte. En efecto:

1. Si u es solución de la forma fuerte, también lo es de la débil, ya que se cumplirá:

$$\int_0^1 w(u_{,xx}^h + f) dx = 0 \quad \forall w \in \mathcal{V}$$

e integrando por partes:

$$0 = \int_0^1 w_{,x} u_{,x} dx - \int_0^1 w f dx - [w u_{,x}]_0^1 \quad \forall w \in \mathcal{V}$$

y como $-u_{,x}(0) = h$, por ser u solución de la forma fuerte, y $w(1) = 0$, por ser $w \in \mathcal{V}$, resulta:

$$\int_0^1 w_{,x} u_{,x} dx = \int_0^1 w f dx + w(0)h \quad \forall w \in \mathcal{V}$$

y como además $u(1) = g$, por ser u solución de la forma fuerte, se tiene que $u \in \mathcal{S}$, luego u es solución de la forma débil.

2. Si u es solución de la forma débil, también lo es de la fuerte, ya que se cumplirá:

$$\int_0^1 w_{,x} u_{,x} dx = \int_0^1 w f dx + w(0)h \quad \forall w \in \mathcal{V}$$

Integrando por partes y teniendo en cuenta que $w(1) = 0 \quad \forall w \in \mathcal{V}$, resulta:

$$0 = \int_0^1 w(u_{,xx} + f) dx + w(0)[u_{,x}(0) + h] \quad \forall w \in \mathcal{V} \quad (2.11)$$

Como $u(1) = g$, por ser $u \in \mathcal{S}$, bastará con probar que la relación anterior implica necesariamente que:

$$u_{,xx} + f = 0 \quad \text{en } \Omega$$

y

$$u_{,x}(0) + h = 0$$

En efecto, se puede tomar $w = (u_{,xx} + f) x (x - 1) \in \mathcal{V}$ y entonces, por 2.11:

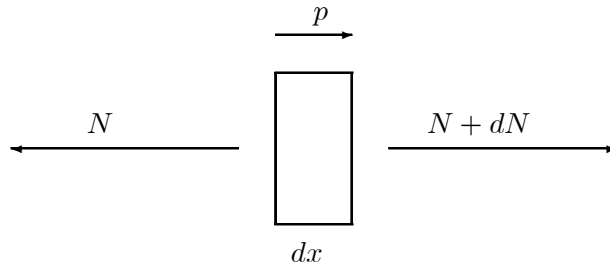
$$0 = \int_0^1 \underbrace{x(1-x)}_{\geq 0} \underbrace{(u_{,xx} + f)^2}_{\geq 0} dx \quad \Rightarrow \quad u_{,xx} + f = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (2.12)$$

Como la pertenencia de w a \mathcal{V} no impone ningún requisito sobre el valor $w(0)$, 2.12 implica también, por 2.11, que $u_{,x}(0) = -h$. Luego u es solución de la forma fuerte.

Entonces, si la solución de la forma fuerte es única y la solución de la forma débil es también única, los dos resultados anteriores implican que ambas soluciones serán iguales y que, por tanto es indiferente plantear el problema de una u otra manera.

2.5 Analogía mecánica: el principio de los trabajos virtuales

Para concretar las ideas anteriores sobre formas fuertes y débiles, estudiemos el equilibrio de una barra sometida a sollicitación axil.



La forma fuerte del problema se obtiene planteando directamente el equilibrio de la rebanada. Si N es el esfuerzo axil; u , el desplazamiento a lo largo de la directriz; E , el módulo de elasticidad; A la sección de la barra y p las fuerzas distribuidas por unidad de longitud, se tiene:

$$N = A\sigma = AE\epsilon = AEu_{,x}$$

$$dN = AEu_{,xx}dx$$

$$dN + pdx = 0 \quad (\text{equilibrio de la rebanada})$$

$$u_{,xx} + \frac{p}{AE} = 0 \quad (\text{ecuación diferencial})$$

Suponiendo una barra de longitud unidad, las condiciones de contorno podrían ser:

$$u_{,x}(0) = -h \quad (\text{axil impuesto})$$

$$u(1) = g \quad (\text{desplazamiento impuesto})$$

La forma débil del problema se obtiene planteando el equilibrio mediante el principio de los trabajos virtuales. La aplicación de dicho principio a este caso dice que en un campo virtual de desplazamientos w definido a lo largo de la barra, el trabajo de las fuerzas exteriores (las fuerzas distribuidas p y el axil impuesto en uno de los extremos) es igual al trabajo de las fuerzas interiores (tensiones σ).

Campo “virtual” de desplazamientos significa que el campo debe de ser continuo a lo largo de la barra, para respetar la compatibilidad interna (no “romper” la barra), y debe anularse en los contornos (extremos) donde se han impuesto desplazamientos, para respetar la compatibilidad externa. En este caso, debe ser $w(1) = 0$. Nótese que precisamente estas dos condiciones son las que se necesitan para que $w \in \mathcal{V}$, ya que la continuidad implica la pertenencia a H^1 .

El trabajo de las fuerzas exteriores para los desplazamientos virtuales w es:

$$\int_0^1 w f dx + hAEw(0)$$

Y el trabajo de las fuerzas interiores:

$$\int_0^1 \underbrace{w_{,x}}_{\epsilon_{virtual}} \underbrace{u_{,x}E}_{\sigma_{real}} A dx$$

Igualando ambos trabajos para cualquier campo virtual w de desplazamientos se obtiene la forma débil que se ha dado en la sección anterior.

2.6 Soluciones débiles aproximadas

El MEF puede entenderse también desde el punto de vista matemático como un procedimiento de obtener soluciones aproximadas al problema planteado de forma débil.

La idea es aproximar los espacios \mathcal{S} y \mathcal{V} , que son de dimensión infinita, por espacios \mathcal{S}^h y \mathcal{V}^h de dimensión finita:

$$\mathcal{S}^h \subset \mathcal{S} \quad \text{y} \quad \mathcal{V}^h \subset \mathcal{V}$$

Esta es la forma matemática de interpretar el proceso de discretización.

Una vez definidos estos dos espacios \mathcal{S}^h y \mathcal{V}^h mediante sus correspondientes bases de funciones, se resuelve la forma débil del problema dentro ellos. Es decir, se busca una función $u^h \in \mathcal{S}^h$ que haga que se cumpla:

$$\int_0^1 w_{,x}^h u_{,x}^h dx = \int_0^1 w^h f dx + w^h(0) h \quad \forall w^h \in \mathcal{V}^h \quad (2.13)$$

Como en el caso del método de Galerkin, la aportación del MEF moderno dentro de esta interpretación matemática del mismo consiste en una forma sistemática de construir los espacios \mathcal{S}^h y \mathcal{V}^h .

La relación con el método de Galerkin es clara, ya que 2.6 puede interpretarse como que las funciones N_j , $j = 1, \dots, n$ forman la base del espacio \mathcal{V}^h y que el espacio \mathcal{S}^h se construye por traslación de \mathcal{V}^h mediante la función g^h . Las incógnitas son los coeficientes c_j que definen la función u^h en términos de la base del espacio de funciones.

Desde el punto de vista mecánico que proporciona el principio de los trabajos virtuales, 2.13 se interpreta como que la solución aproximada u^h es la que satisface las condiciones de equilibrio correspondientes a un conjunto restringido, \mathcal{V}^h , de desplazamientos virtuales.

2.7 Teorema de Lax-Milgram

El teorema de Lax-Milgram es un resultado básico de la teoría de problemas de contorno formulados variacionalmente. Desde el punto de vista que nos interesa, es un teorema de existencia y unicidad de la solución de problemas planteados de forma débil.

Se menciona aquí el teorema simplemente como muestra de otros resultados similares. Estos resultados prueban que tiene sentido desde el punto de vista matemático buscar la solución de problemas planteados de forma débil, tal y como hace el MEF, ya que si se dan determinadas condiciones, esta solución existe y es única.

Con objeto de dar más generalidad al enunciado del teorema, se cambiará la notación empleada en el enunciado del problema modelo 2.1 de la manera siguiente:

$$a(w, u) \equiv \int_0^1 w_{,x} u_{,x} dx$$

$$l(w) \equiv \int_0^1 w f dx + w(0) h$$

Con esta notación, la forma débil del problema es: encontrar una función $u \in \mathcal{S}$ tal que $\forall w \in \mathcal{V}$ se cumpla:

$$a(w, u) = l(w)$$

El teorema de Lax-Milgram aplica a problemas con condiciones de contorno esenciales homogéneas, es decir, cuando $\mathcal{S} \equiv \mathcal{V}$.

El teorema establece que si la aplicación $a : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R}$:

1. Es bilineal: $a(c_1 u + c_2 v, w) = c_1 a(u, w) + c_2 a(v, w) \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
2. Es simétrica: $a(u, w) = a(w, u)$
3. Es continua: $|a(u, w)| \leq m \|u\| \|w\| \quad 0 < m < \infty$
4. Es definida positiva (elíptica): $a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2 \quad \alpha > 0$

y la aplicación $l : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R}$ es lineal, entonces existe solución para la forma débil del problema y esta solución es única.

En el enunciado del teorema $\|\cdot\|$ representa una norma, por ejemplo: $\|\cdot\| = \sqrt{a(\cdot, \cdot)}$.

2.8 Propiedad de aproximación óptima

La solución u^h del problema aproximado 2.13 y, por tanto, las soluciones que proporciona el MEF, tienen una propiedad importante. Resulta que la solución u^h es óptima en el sentido de que es la mejor solución posible dentro del nivel de aproximación utilizado, es decir, dentro del espacio \mathcal{S}^h .

Con la notación introducida en la sección anterior, el problema 2.13 puede redefinirse como: encontrar una función $u^h \in \mathcal{S}^h$ tal que $\forall w^h \in \mathcal{V}^h$ se cumpla:

$$a(w^h, u^h) = l(w^h)$$

donde a y l cumplen con las hipótesis del teorema de Lax-Milgram.

Entonces, si se define la función error en la solución aproximada como:

$$e = u^h - u$$

se cumple que:

1. El error e es ortogonal al espacio $\mathcal{V}^h \subset \mathcal{V}$, es decir:

$$a(w^h, e) = 0 \quad \forall w^h \in \mathcal{V}^h$$

2. La aproximación es óptima en términos de la norma definida por a (norma energética):

$$\underbrace{a(e, e)}_{(norma\ del\ error)^2} \leq a(\tilde{u}^h - u, \tilde{u}^h - u) \quad \forall \tilde{u}^h \in \mathcal{S}^h$$

3. Como corolario del punto 1 anterior, cuando $\mathcal{S}^h \equiv \mathcal{V}^h$ (condiciones de contorno esenciales homogéneas), resulta que la norma (energía) del error e es igual al error en la norma $a(u, u) - a(u^h, u^h)$:

$$\underbrace{a(e, e)}_{(norma\ del\ error)^2} = \underbrace{a(u, u) - a(u^h, u^h)}_{error\ en\ la\ (norma)^2}$$

En efecto, por ser $\mathcal{V}^h \subset \mathcal{V}$ se cumple:

$$a(w^h, u) = l(w^h) \quad \forall w^h \in \mathcal{V}^h$$

y como también se cumple:

$$a(w^h, u^h) = l(w^h) \quad \forall w^h \in \mathcal{V}^h$$

resulta que restando y aprovechando la bilinealidad de a :

$$a(w^h, u - u^h) = 0 \quad \forall w^h \in \mathcal{V}^h$$

lo que constituye el primer resultado buscado. Además, $\forall w^h \in \mathcal{V}^h$, se tiene que (por la elipticidad de a):

$$\underbrace{a(e + w^h, e + w^h)}_{\geq 0} = \underbrace{a(e, e)}_{\geq 0} + 2 \underbrace{a(w^h, e)}_{=0} + \underbrace{a(w^h, w^h)}_{\geq 0}$$

luego se cumple:

$$a(e, e) = a(u^h - u, u^h - u) \leq a(e + w^h, e + w^h) = a(\tilde{u}^h - u, \tilde{u}^h - u) \quad \forall \tilde{u}^h \in \mathcal{S}^h$$

que es el segundo resultado buscado. El corolario se obtiene porque cuando $\mathcal{S}^h \equiv \mathcal{V}^h$, resulta que $a(u^h, e) = 0$, por ser $u^h \in \mathcal{V}^h$, y entonces:

$$a(u, u) = a(u^h - e, u^h - e) = a(u^h, u^h) - 2a(u^h, e) + a(e, e) = a(u^h, u^h) + a(e, e)$$

Nótese que esto implica que,

$$a(u^h, u^h) \leq a(u, u)$$

esto es, que la solución aproximada tiene una norma (energía) inferior a la de la solución exacta.

Capítulo 3

Fundamentos matemáticos (II)

3.1 Introducción

En el capítulo anterior se han introducido dos formas de entender el MEF desde el punto de vista matemático. Por un lado, el MEF puede considerarse como un procedimiento de residuos ponderados de tipo Galerkin y, por otro lado, puede ser entendido como un medio de obtener una solución aproximada a un problema de campo formulado de manera débil.

En este capítulo se proporciona una tercera vía para entender el MEF, la vía variacional. El MEF puede también interpretarse como un caso de aplicación del método de Ritz, es decir, como una forma aproximada de obtener la solución de problemas de campo que responden a un principio variacional. Este enfoque es muy importante dentro de las técnicas actuales de desarrollo de elementos finitos.

No se debe perder de vista que la sistemática del MEF, similar a la del cálculo matricial de estructuras, fue previa a sus interpretaciones o justificaciones matemáticas. El objetivo de estos primeros capítulos es proporcionar varias formas diferentes de interpretar una misma cosa, el formalismo del MEF, desde el punto de vista matemático.

3.2 Principios variacionales

Muchos problemas de la Física con aplicación práctica en Ingeniería responden a un principio variacional. Pueden encontrarse ejemplos en la Mecánica Clásica (principio de Hamilton, principio de la mínima acción), en la Elasticidad (principio de la mínima energía potencial) e incluso en la Óptica (principio de Fermat).

Dentro de nuestro ámbito de interés, la formulación variacional, cuando existe, corresponde a un nivel de abstracción superior a la formulación débil introducida en el capítulo anterior. Es equivalente a la formulación débil, pero se presta de forma más directa a la obtención de soluciones aproximadas.

Para el tipo de problemas en que estamos interesados, la formulación variacional se plantea normalmente del modo siguiente:

1. Dado un problema concreto se define un espacio de posibles funciones solución: \mathcal{S} .

2. El principio variacional establece que la solución es la función que, dentro de ese espacio, hace mínimo, máximo o, simplemente, estacionario un funcional.

Un funcional Π es una “función de funciones”, con valores reales: $\Pi : \mathcal{S} \longrightarrow \mathfrak{R}$.

Los funcionales que intervienen en los principios variacionales aplicables a problemas de Elasticidad tienen normalmente un significado energético. En este sentido, el principio variacional introduce un *propósito* para la solución del problema: hacer mínima, máxima o estacionaria una magnitud energética.

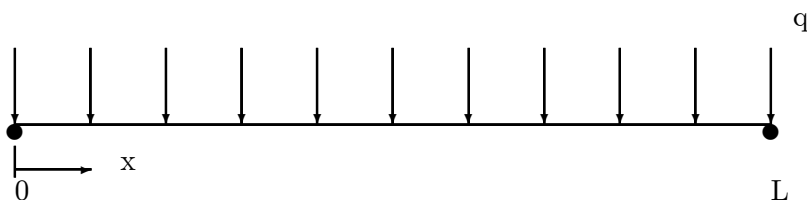
3.3 Método de Rayleigh-Ritz

La utilidad de los principios variacionales desde el punto de vista del cálculo numérico es que proporcionan una forma sencilla de obtener soluciones aproximadas. Una vez establecido el principio variacional aplicable, se procede de la forma siguiente:

1. Se aproxima el espacio \mathcal{S} de posibles soluciones por uno de dimensión finita: $\mathcal{S}^h \subset \mathcal{S}$.
2. Se escribe la solución u^h como combinación lineal de las funciones base del espacio \mathcal{S}^h .
3. Se determinan los coeficientes de esta combinación lineal con la condición de que u^h minimice, maximice o haga estacionario el funcional correspondiente, según establezca el principio variacional aplicable.

Lo anterior constituye en esencia el método de Rayleigh-Ritz. Este método fue introducido hacia 1909, con el objetivo de obtener soluciones numéricas de problemas de contorno utilizando los principios variacionales asociados a los mismos. La mayor dificultad del procedimiento está en la construcción del espacio \mathcal{S}^h de manera adecuada. El MEF no es más que el método de Ritz, pero con una forma sistemática y general de construir el espacio de funciones \mathcal{S}^h .

Veamos un ejemplo de la forma clásica de utilizar el método de Ritz. Sea una viga biapoyada de luz L , con sección transversal de inercia I y módulo de elasticidad E . La viga está sometida a una carga q por unidad de longitud perpendicular a su directriz. Se busca la variación de la flecha u a lo largo de la directriz de la viga.



El espacio \mathcal{S} de soluciones posibles o admisibles está formado por todas las funciones $\tilde{u} : [0, L] \longrightarrow \mathfrak{R}$ tales que cumplan las condiciones de contorno en los dos extremos de la viga: $\tilde{u}(0) = 0$ y $\tilde{u}(L) = 0$ y que, además, no quiebren su directriz (giro $\tilde{u}_{,x}$ continuo en $]0, L[$).

Uno de los principios variacionales aplicables es el principio de la mínima energía potencial, el cual establece que, dentro de \mathcal{S} , la solución del problema es la que hace mínimo el funcional potencial total:

$$\Pi(\tilde{u}) = \frac{1}{2} \int_0^L E I (\tilde{u}_{,xx})^2 dx - \int_0^L \tilde{u} q dx \quad (3.1)$$

Entonces, una solución aproximada del problema puede obtenerse definiendo el espacio \mathcal{S}^h como aquel que tiene por base las funciones:

$$\sin\left(\frac{i \pi x}{L}\right) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

siendo n un número finito.

Así, las funciones $\tilde{u}^h \in \mathcal{S}^h$ se pueden poner como:

$$\tilde{u}^h = \sum_{i=1}^n c_i \sin\left(\frac{i \pi x}{L}\right) \quad c_i \in \mathbb{R}$$

y

$$\tilde{u}_{,xx}^h = - \sum_{i=1}^n c_i \left(\frac{i \pi}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{i \pi x}{L}\right) \quad c_i \in \mathbb{R}$$

Sustituyendo estas expresiones en 3.1 se obtiene una expresión discreta del funcional Π en la que éste sólo depende de los coeficientes c_i . De este modo, el problema de la minimización del funcional se convierte en un problema algebraico. Para obtener los coeficientes c_i que definen la solución aproximada se plantea el sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial c_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

En este problema concreto, tomando $n = 3$, se obtiene:

$$u^h = \frac{4 q L^4}{E I \pi^5} \left[\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{1}{243} \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right) \right]$$

Lo que da una flecha máxima de:

$$u_{max}^h = 0.0130172 \frac{q L^4}{E I}$$

Frente al valor exacto de:

$$u_{max} = 0.0130208 \frac{q L^4}{E I}$$

3.4 El problema elástico: notación

El problema de la Elasticidad es uno de los primeros a los que se aplicaron las técnicas de elementos finitos. En lo que sigue, este problema será utilizado con frecuencia como vehículo concreto para explicar conceptos asociados al MEF. En esta sección se plantea el problema elástico, tanto en su forma fuerte como en una forma débil, y se establece la notación que será utilizada.

Se tiene un cuerpo elástico que ocupa un volumen $\Omega \in \mathbb{R}^3$ y que está limitado por una superficie $S = S_d \bar{\cup} S_t$, de modo que $S_d \cap S_t = \emptyset$.¹ La superficie S tiene una normal $\mathbf{n} \equiv n_i$.²

Sobre la superficie S_d se imponen desplazamientos $\bar{\mathbf{d}} \equiv \bar{d}_i$; mientras que sobre la superficie S_t se imponen tensiones $\bar{\mathbf{t}} \equiv \bar{t}_i$. Además, sobre el volumen Ω , actúa un campo $\mathbf{b} \equiv b_i$ de fuerzas por unidad de volumen.

Las incógnitas del problema son los campos de desplazamientos, $\mathbf{u} \equiv u_i$; de deformaciones, $\mathbf{e} \equiv e_{ij}$; y de tensiones, $\mathbf{s} \equiv s_{ij}$. Todos ellos definidos en el volumen Ω .

La formulación fuerte del problema se hace en base al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

1. Ecuaciones de compatibilidad en Ω .

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u}) \quad \text{ó} \quad e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.2)$$

2. Ecuaciones de compatibilidad en S_d .

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{d}} \quad \text{ó} \quad u_i = \bar{d}_i \quad (3.3)$$

3. Ecuaciones constitutivas (o de respuesta del material) en Ω .

$$\mathbf{s} = \mathbf{D} \mathbf{e} \quad \text{ó} \quad s_{ij} = D_{ijkl} e_{kl} \quad (3.4)$$

4. Ecuaciones de equilibrio en Ω .

$$\text{div } \mathbf{s} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{ó} \quad s_{ij,j} + b_i = 0 \quad (3.5)$$

5. Ecuaciones de equilibrio en S_t .

$$\mathbf{s}_n \equiv \mathbf{s} \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{ó} \quad s_{ij} n_j = \bar{t}_i \quad (3.6)$$

Nótese que las ecuaciones diferenciales requieren que la función vectorial \mathbf{u} sea derivable de orden 2 en Ω , y que las funciones tensoriales \mathbf{s} y \mathbf{e} sean derivables de orden 1 en Ω . Entonces, puede ocurrir que la solución fuerte no exista, en función de los datos \mathbf{b} , $\bar{\mathbf{d}}$ y $\bar{\mathbf{t}}$.

¹Una barra sobre el símbolo de un conjunto denota su clausura, esto es, la unión del conjunto y su frontera: $\bar{\Omega} = \Omega \cup S$.

²Salvo indicación en contra, la notación indicial supone que los índices varían de 1 a 3. Se utiliza también el convenio de suma por índices repetidos.

Una de las posibles formulaciones débiles del problema elástico corresponde a la aplicación del principio de los trabajos virtuales para imponer las condiciones de equilibrio. De esta manera las ecuaciones 3.5 y 3.6 son sustituidas por una ecuación integral que impone menos requisitos de derivabilidad.

Para clarificar el significado de los distintos campos que intervienen en esta formulación débil se introduce la notación siguiente:

1. Los campos independientes o primarios, aquellos que pueden variarse libremente, se representarán con una tilde sobre su símbolo: $\tilde{\mathbf{s}}, \tilde{\mathbf{u}}, \dots$
2. Los campos dependientes o derivados, aquellos que se obtienen a partir de campos primarios, se representarán utilizando como superíndice el símbolo del campo del que derivan: $\mathbf{s}^u = \mathbf{D} \mathbf{e}^u$, $\mathbf{e}^u = \frac{1}{2}(\nabla + \nabla^t)\tilde{\mathbf{u}}$, \dots
3. Los campos solución del problema elástico se representarán sin tilde ni superíndice: $\mathbf{s}, \mathbf{e}, \mathbf{u}$.

Además, para simplificar la escritura de las integrales, se introduce también la siguiente notación:

1. Integrales de volumen:

$$(\mathbf{f})_\Omega \equiv \int_\Omega \mathbf{f} d\Omega$$

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g})_\Omega \equiv \int_\Omega \mathbf{f} : \mathbf{g} d\Omega$$

2. Integrales de superficie:

$$[\mathbf{f}]_{S_t} \equiv \int_{S_t} \mathbf{f} d\Omega$$

$$[\mathbf{f}, g]_{S_t} \equiv \int_{S_t} \mathbf{f} : \mathbf{g} d\Omega$$

Con esta notación, una posible formulación débil del problema elástico queda como sigue. Dados los espacios \mathcal{S} (desplazamientos admisibles) y \mathcal{V} (variaciones o desplazamientos virtuales):

$$\mathcal{S} = \{\tilde{\mathbf{u}} \in H^1 \mid \tilde{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{d}} \text{ en } S_d\}$$

$$\mathcal{V} = \{\delta\tilde{\mathbf{u}} \in H^1 \mid \delta\tilde{\mathbf{u}} = 0 \text{ en } S_d\}$$

encontrar $\mathbf{u} \in \mathcal{S}$, de manera que:

$$(\mathbf{s}^u, \mathbf{e}^{\delta u})_\Omega = (\mathbf{b}, \delta\tilde{\mathbf{u}})_\Omega + [\bar{\mathbf{t}}, \delta\tilde{\mathbf{u}}]_{S_t} \quad \forall \delta\tilde{\mathbf{u}} \in \mathcal{V} \quad (3.7)$$

El conjunto H^1 es el espacio de las funciones que tienen derivadas primeras de cuadrado integrable en Ω .

3.5 Principios variacionales en Elasticidad

A partir de la forma débil 3.7 puede deducirse el principio de la mínima energía potencial. Se define en el espacio \mathcal{S} el funcional $\Pi_p : \mathcal{S} \longrightarrow \Re$, o funcional “potencial total”, como:

$$\Pi_p(\tilde{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2}(\mathbf{s}^u, \mathbf{e}^u)_\Omega - (\mathbf{b}, \tilde{\mathbf{u}})_\Omega - [\bar{\mathbf{t}}, \tilde{\mathbf{u}}]_{S_t}$$

Y entonces, recordando la definición de primera variación de un funcional:

$$\delta\Pi_p(\tilde{\mathbf{u}}) \equiv \frac{d}{d\alpha}\Pi(\tilde{\mathbf{u}} + \alpha\delta\tilde{\mathbf{u}})|_{\alpha=0} \quad \text{con } \delta\tilde{\mathbf{u}} \in \mathcal{V} \text{ y } \alpha \in \Re$$

resulta que:

$$\delta\Pi_p(\tilde{\mathbf{u}}) = (\mathbf{s}^u, \mathbf{e}^{\delta u})_\Omega - (\mathbf{b}, \delta\tilde{\mathbf{u}})_\Omega - [\bar{\mathbf{t}}, \delta\tilde{\mathbf{u}}]_{S_t}$$

Por lo tanto, la solución \mathbf{u} de la forma débil 3.7 o principio de los trabajos virtuales hace que $\delta\Pi_p(\mathbf{u}) = 0$. Es decir, hace estacionario el funcional Π_p dentro del espacio \mathcal{S} .

Así, el principio de los trabajos virtuales, un planteamiento débil del problema elástico, es equivalente a buscar la estacionaridad del funcional Π_p sobre los campos de desplazamiento $\tilde{\mathbf{u}}$ que cumplen la restricción $\tilde{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{d}}$ en S_d . Este es precisamente el principio variacional de la mínima energía potencial: *De entre todos los campos de desplazamiento que satisfacen la restricción $\tilde{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{d}}$ en S_d (campos admisibles), la solución \mathbf{u} del problema elástico es la que hace estacionario (mínimo) el funcional potencial total.*

El principio de la mínima energía potencial proporciona una nueva manera de interpretar la forma débil del problema elástico a que da lugar el principio de los trabajos virtuales. A través del método de Ritz, el principio de la mínima energía potencial puede utilizarse en la obtención de soluciones aproximadas. Se trata de minimizar el funcional potencial total dentro de un espacio $\mathcal{S}^h \subset \mathcal{S}$ de dimensión finita. La solución aproximada \mathbf{u}^h se define a partir de la combinación lineal de ciertas funciones base. Los coeficientes de esta combinación se obtienen haciendo estacionario el funcional potencial total, lo que da lugar a un sistema de ecuaciones idéntico al que proporciona el método de Galerkin.

Como ya se ha apuntado en numerosas ocasiones, esta técnica de aproximación numérica es muy anterior al desarrollo del MEF. La aportación del MEF no es más que una forma sistemática de construir los espacios de aproximación \mathcal{S}^h y las funciones base para la definición de \mathbf{u}^h .

El principio variacional de la mínima energía potencial, basado en un funcional con un solo campo independiente $\tilde{\mathbf{u}}$, es el que se utiliza para justificar la formulación clásica del MEF, también llamada formulación “en desplazamientos”. Sin embargo, existen muchos otros principios variacionales que pueden utilizarse en la resolución del problema elástico. Empleando estos principios variacionales de la misma manera esbozada más arriba se obtienen formulaciones del MEF distintas de la clásica, algunas de las cuales tienen mucha importancia hoy en día en el desarrollo de los llamados elementos finitos de “altas prestaciones”.

Conviene mencionar los siguientes principios variacionales:

1. *Principio de la energía complementaria mínima.* Es el principio variacional conjugado del principio de la mínima energía potencial. El funcional asociado tiene también un solo campo independiente, un campo de tensiones $\tilde{\mathbf{s}}$. Este principio variacional da lugar a la formulación del MEF “en tensiones”. Esta formulación ha tenido un desarrollo muy pequeño porque se requiere que los campos de tensiones $\tilde{\mathbf{s}}$ cumplan las ecuaciones de equilibrio 3.5 y 3.6, lo cual plantea serias dificultades en la práctica.
2. *Principios variacionales mixtos o híbridos.* Corresponden a puntos intermedios entre el principio de la mínima energía potencial y el de la energía complementaria mínima. Se caracterizan porque los funcionales asociados tienen varios campos independientes. Dan lugar a formulaciones del MEF llamadas “mixtas” o “híbridas” por su carácter intermedio entre la formulación en desplazamientos y la formulación en tensiones. Merecen citarse el principio de Hellinger-Reissner, con dos campos independientes $\tilde{\mathbf{u}}$ y $\tilde{\mathbf{s}}$; y el principio de Hu-Washizu, con cuatro campos independientes, $\tilde{\mathbf{u}}$, $\tilde{\mathbf{s}}$, $\tilde{\mathbf{e}}$ y $\tilde{\mathbf{t}}$, siendo este último un campo de tensiones en el contorno.

Los principios variacionales mixtos o multicampo juegan un papel muy importante en la moderna tecnología de desarrollo de elementos finitos. Constituyen la manera de justificar matemáticamente el empleo de determinados artificios numéricos muy eficientes³.

3.6 Ecuaciones de Euler y tipos de condiciones de contorno

En esta sección se muestra cómo el principio de la mínima energía potencial conduce a la forma “fuerte” de las ecuaciones de equilibrio 3.5 y 3.6 si se cumplen los requisitos de derivabilidad necesarios y que, por tanto, el planteamiento variacional y el planteamiento clásico en base a ecuaciones diferenciales son equivalentes.

El principio de la mínima energía potencial establece que la solución \mathbf{u} del problema elástico es la que hace estacionario el funcional potencial total:

$$\Pi_p(\tilde{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2}(\mathbf{s}^u, \mathbf{e}^u)_\Omega - (\mathbf{b}, \tilde{\mathbf{u}})_\Omega - [\tilde{\mathbf{t}}, \tilde{\mathbf{u}}]_{S_t}$$

cuando éste se define sobre los campos de desplazamientos $\tilde{\mathbf{u}}$ que cumplen con la condición:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{d}} \text{ en } S_d \quad (3.8)$$

Las restricciones 3.8 se conocen como condiciones *esenciales* de contorno asociadas al principio variacional. Forman parte de la definición del conjunto de funciones admisibles. Así, cuando se utilizan principios variacionales para la obtención de soluciones aproximadas, éstas cumplen exactamente las condiciones esenciales de contorno del principio variacional utilizado.

Las ecuaciones diferenciales de Euler-Lagrange asociadas a un principio variacional se obtienen igualando a cero la primera variación del funcional asociado. En el caso del principio de la mínima energía potencial la primera variación del funcional es:

³Ver capítulos 7 y 8.

$$\delta\Pi_p(\tilde{\mathbf{u}}) = (\mathbf{s}^u, \mathbf{e}^{\delta u})_\Omega - (\mathbf{b}, \delta\tilde{\mathbf{u}})_\Omega - [\bar{\mathbf{t}}, \delta\tilde{\mathbf{u}}]_{S_t}$$

con $\delta\tilde{\mathbf{u}} = 0$ en S_d .

Utilizando el teorema de la divergencia, la relación anterior puede ponerse como:

$$\delta\Pi_p(\tilde{\mathbf{u}}) = [\mathbf{s}^u \mathbf{n}, \delta\tilde{\mathbf{u}}]_{S_t} - (\operatorname{div} \mathbf{s}^u, \delta\tilde{\mathbf{u}})_\Omega - (\mathbf{b}, \delta\tilde{\mathbf{u}})_\Omega - [\bar{\mathbf{t}}, \delta\tilde{\mathbf{u}}]_{S_t} = [\mathbf{s}^u \mathbf{n} - \bar{\mathbf{t}}, \delta\tilde{\mathbf{u}}]_{S_t} - (\operatorname{div} \mathbf{s}^u + \mathbf{b}, \delta\tilde{\mathbf{u}})_\Omega$$

Y como resulta que $\delta\tilde{\mathbf{u}}$ es arbitrario, salvo que $\delta\tilde{\mathbf{u}} = 0$ en S_d , la condición $\delta\Pi_p = 0$ implica que:

1. Ecuación de Euler (equilibrio en Ω):

$$\operatorname{div} \mathbf{s} + \mathbf{b} = 0 \quad \text{en } \Omega$$

2. Condiciones naturales de contorno (equilibrio en S_t):

$$\mathbf{s} n = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{en } S_t$$

Las dos relaciones anteriores son precisamente las ecuaciones de equilibrio 3.5 y 3.6 del planteamiento fuerte del problema.

Capítulo 4

Programación del MEF (I)

4.1 Introducción

En los capítulos anteriores se ha visto que el MEF moderno no es un procedimiento novedoso desde el punto de vista matemático. Puede asimilarse al procedimiento de residuos ponderados de Galerkin o al método de Ritz, métodos numéricos publicados medio siglo antes de que aparecieran los elementos finitos.

Lo innovador del MEF es la forma sistemática y general que se da a estos procedimientos numéricos, de manera que resultan fácilmente automatizables empleando un ordenador digital.

El uso práctico del MEF es impensable sin la ayuda de los ordenadores. Todos los desarrollos teóricos y sus justificaciones matemáticas acaban convertidos en líneas de un programa de ordenador. Una de las mejores formas de estudiar el MEF es analizar y tratar de entender la estructura interna de un programa de cálculo basado en el mismo. O, mejor todavía, programar de principio a fin un programa que resuelva un problema sencillo. Esto proporciona una visión práctica del método, de cómo se hacen en realidad las cosas, que es casi imposible conseguir de otro modo.

El objetivo del presente capítulo es ver cuáles son los componentes básicos de un programa de cálculo basado en el MEF y, a la vez, analizar una de las posibles arquitecturas internas. Como primer paso, se proporciona la sistemática básica o “receta” del MEF, que fue previa a cualquiera de sus justificaciones matemáticas.

4.2 La “receta” del MEF

La sistemática básica o receta del MEF se explica aquí utilizando como vehículo el problema elástico definido en el capítulo anterior.

El problema elástico se plantea de forma débil como encontrar una función $\mathbf{u} \in \mathcal{S}$ de manera que:

$$(\mathbf{s}^u, \mathbf{e}^{\delta u})_{\Omega} = (\mathbf{b}, \delta \tilde{\mathbf{u}})_{\Omega} + [\bar{\mathbf{t}}, \delta \tilde{\mathbf{u}}]_{S_t} \quad \forall \delta \tilde{\mathbf{u}} \in \mathcal{V} \quad (4.1)$$

siendo:

$$\mathcal{S} = \{\tilde{\mathbf{u}} \in H^1 \mid \tilde{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{d}} \text{ en } S_d\}$$

y

$$\mathcal{V} = \{\delta\tilde{\mathbf{u}} \in H^1 \mid \delta\tilde{\mathbf{u}} = 0 \text{ en } S_d\}$$

La receta es la siguiente:

1. Dividir el dominio de cálculo Ω en subdominios o *elementos*:

$$\Omega = \bigcup_i \Omega_i \quad \bigcap_i \Omega_i = \emptyset$$

2. Dentro de cada elemento Ω_i , aproximar los campos incógnita que intervienen en la ecuación integral 4.1:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}} &= \mathbf{N} \mathbf{a}_e \\ \delta\tilde{\mathbf{u}} &= \mathbf{N} \delta\mathbf{a}_e \\ \mathbf{e}^{\delta u} &= \mathbf{L} \mathbf{N} \delta\mathbf{a}_e = \mathbf{B} \delta\mathbf{a}_e \\ \mathbf{e}^u &= \mathbf{L} \mathbf{N} \mathbf{a}_e = \mathbf{B} \mathbf{a}_e \\ \mathbf{s}^u &= \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{a}_e \end{aligned} \tag{4.2}$$

donde \mathbf{N} es una matriz de funciones conocidas (funciones de forma); $\delta\mathbf{a}_e$ y \mathbf{a}_e son vectores de coeficientes incógnita, cuyo valor se hace coincidir normalmente con el valor de los desplazamientos de ciertos puntos del elemento llamados *nodos*; \mathbf{L} es una matriz de operadores (derivadas) y \mathbf{D} es una matriz de coeficientes elásticos. Cada coeficiente incógnita o movimiento nodal en \mathbf{a}_e es un *grado de libertad* para el campo aproximado $\tilde{\mathbf{u}}$. El número de componentes de \mathbf{a}_e es el número de grados de libertad del elemento.

3. Las integrales que aparecen en 4.1 se hacen sumando las contribuciones de los distintos elementos, es decir, $\forall \delta\tilde{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}$:

$$0 = (\mathbf{s}^u, \mathbf{e}^{\delta u})_\Omega - (\mathbf{b}, \delta\tilde{\mathbf{u}})_\Omega - [\bar{\mathbf{t}}, \delta\tilde{\mathbf{u}}]_{S_t} = \sum_i \{(\mathbf{s}^u, \mathbf{e}^{\delta u})_{\Omega_i} - (\mathbf{b}, \delta\tilde{\mathbf{u}})_{\Omega_i} - [\bar{\mathbf{t}}, \delta\tilde{\mathbf{u}}]_{S_{t_i}}\}$$

4. La contribución de cada elemento a la suma anterior es, sustituyendo 4.2:

$$\delta\mathbf{a}_{e_i}^t (\mathbf{B}^t \mathbf{D} \mathbf{B})_{\Omega_i} \mathbf{a}_{e_i} - \delta\mathbf{a}_{e_i}^t (\mathbf{N}^t \mathbf{b})_{\Omega_i} - \delta\mathbf{a}_{e_i}^t [\mathbf{N}^t \bar{\mathbf{t}}]_{S_{t_i}} = \delta\mathbf{a}_{e_i}^t (\mathbf{K}_{e_i} \mathbf{a}_{e_i} - \mathbf{f}_{e_i})$$

donde $\mathbf{K}_{e_i} \equiv (\mathbf{B}^t \mathbf{D} \mathbf{B})_{\Omega_i}$ es la *matriz de rigidez* del elemento i ; y $\mathbf{f}_{e_i} \equiv (\mathbf{N}^t \mathbf{b})_{\Omega_i} + [\mathbf{N}^t \bar{\mathbf{t}}]_{S_{t_i}}$ es el *vector de cargas* del elemento i .

5. La suma de las contribuciones de los distintos elementos se hace a través del llamado proceso de *ensamblaje*.

Nótese que algunos de los coeficientes incógnita \mathbf{a}_e definidos a nivel de cada elemento serán normalmente compartidos por los elementos adyacentes, ya que existirán nodos comunes. Podrá entonces establecerse una numeración de carácter global para estos coeficientes. Llamaremos \mathbf{a} al vector de los coeficientes incógnita definidos para todos los elementos. Así, un mismo coeficiente tendrá una única numeración global, como componente del vector \mathbf{a} , y una o varias numeraciones locales, como componente de uno o varios vectores locales \mathbf{a}_e .

El proceso de ensamblaje consiste en ir acumulando las contribuciones de cada elemento en matrices y vectores de carácter global, esto es, ordenados según la numeración global de grados de libertad. La forma discreta de 4.1 queda:

$$\sum_{\text{elementos}} \delta \mathbf{a}_{e_i}^t (\mathbf{K}_{e_i} \mathbf{a}_{e_i} - \mathbf{f}_{e_i}) \equiv \delta \mathbf{a}^t (\mathbf{K} \mathbf{a} - \mathbf{f}) = 0 \quad \forall \delta \mathbf{a} \quad (4.3)$$

donde \mathbf{K} es la matriz de rigidez global y \mathbf{f} es el vector global de cargas.

6. Como la relación anterior ha de cumplirse $\forall \delta \mathbf{a}$, se llega finalmente al sistema de ecuaciones lineales:

$$\mathbf{K} \mathbf{a} - \mathbf{f} = 0$$

el cual permite determinar los coeficientes incógnita \mathbf{a} . El número de componentes de \mathbf{a} es el número total de grados de libertad del problema.

7. De acuerdo con el paso 2, los coeficientes \mathbf{a} definen la solución dentro de todos los dominios elementales y, por agregación, definen la solución buscada en todo el dominio de cálculo Ω .

De todos los puntos anteriores, quizá el más difícil de ver para el novicio es el del ensamblaje (paso 5). El concepto se visualiza fácilmente con un ejemplo. Sea un problema unidimensional en el que se utilizan los tres elementos finitos de dos nodos representados en la figura, y supongamos que sólo se tiene un grado de libertad por nodo.



La numeración global de nodos y elementos es la que se muestra en la figura. En el elemento 1 la matriz de rigidez es:

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} K_{111} & K_{112} \\ K_{121} & K_{122} \end{bmatrix}$$

el vector de cargas:

$$\mathbf{f}_1 = \begin{Bmatrix} f_{11} \\ f_{12} \end{Bmatrix}$$

y el vector de grados de libertad o incógnitas nodales:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{Bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{Bmatrix}$$

Y análogamente para los elementos 2 y 3. La relación entre grados de libertad locales y globales es:

$$\begin{aligned} a_{11} &\equiv a_1 & a_{21} &\equiv a_2 & a_{31} &\equiv a_3 \\ a_{12} &\equiv a_2 & a_{22} &\equiv a_3 & a_{32} &\equiv a_4 \end{aligned}$$

La suma de contribuciones de los elementos que se escribe en 4.3 es:

$$\begin{aligned} &(\delta a_{11} \delta a_{12}) \left\{ \begin{bmatrix} K_{111} & K_{112} \\ K_{121} & K_{122} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} f_{11} \\ f_{12} \end{Bmatrix} \right\} + \\ &(\delta a_{21} \delta a_{22}) \left\{ \begin{bmatrix} K_{211} & K_{212} \\ K_{221} & K_{222} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} f_{21} \\ f_{22} \end{Bmatrix} \right\} + \\ &(\delta a_{31} \delta a_{32}) \left\{ \begin{bmatrix} K_{311} & K_{312} \\ K_{321} & K_{322} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_{31} \\ a_{32} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} f_{31} \\ f_{32} \end{Bmatrix} \right\} = 0 \end{aligned}$$

la cual puede ponerse como:

$$(\delta a_1 \delta a_2 \delta a_3 \delta a_4) \left\{ \begin{bmatrix} K_{111} & K_{112} & 0 & 0 \\ K_{121} & K_{122} + K_{211} & K_{212} & 0 \\ 0 & K_{221} & K_{222} + K_{311} & K_{312} \\ 0 & 0 & K_{321} & K_{322} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} f_{11} \\ f_{12} + f_{21} \\ f_{22} + f_{31} \\ f_{32} \end{Bmatrix} \right\} = 0$$

El proceso mediante el cual se construyen directamente la matriz de rigidez global \mathbf{K} y el vector global de cargas \mathbf{f} es el proceso de ensamblaje. La numeración global de grados de libertad sirve para saber en qué posición de la matriz \mathbf{K} y el vector \mathbf{f} hay que acumular los elementos de las matrices y vectores correspondientes a los elementos.

4.3 Cálculos por el MEF: datos y resultados

Los datos básicos que se requieren para llevar a cabo un cálculo por el MEF son los siguientes:

1. Definición de la geometría del dominio de cálculo y discretización del mismo.

Esto se hace dando una lista de nodos y de elementos. Cada nodo es un punto dentro del dominio de cálculo y se define mediante un número de orden o etiqueta identificativa (número de nodo) y sus coordenadas en el sistema de referencia elegido.

Cada elemento corresponde a uno de los subdominios en que se divide el dominio de cálculo. Se define mediante un número de orden o etiqueta identificativa (número de elemento) y una lista de números de nodo, la cual se conoce también con el nombre de *conectividad* del elemento. Como se verá más adelante, la geometría del elemento queda completamente definida a partir de la formulación interna del elemento y de las coordenadas de sus nodos.

El conjunto de nodos y elementos constituye lo que se conoce como *mallado* o *malla* de elementos finitos.

2. Atributos o *propiedades* de los elementos.

Estas propiedades dependen de la clase de elemento finito que se esté utilizando. Así como en todos los casos hay que identificar el material que constituye el subdominio o elemento, existen otros atributos que necesitan o no ser especificados en función del problema y el tipo de elemento. Ejemplos típicos son: el espesor, la sección transversal y su orientación en el espacio, las direcciones de anisotropía, ...

3. Propiedades de los materiales.

Cada material se identifica mediante un número o etiqueta. A cada material se le asocia un modelo matemático para representar su comportamiento (elasticidad, plasticidad, hiperelasticidad, ...) y se definen en cada caso los parámetros numéricos del modelo matemático elegido (p.ej. módulo de elasticidad, coeficiente de Poisson, tensión de fluencia, ...). El modelo matemático de comportamiento del material se conoce muchas veces con el nombre de *modelo constitutivo* o *ley de comportamiento*.

4. Condiciones de contorno.

En problemas mecánicos se distinguen dos clases de condiciones de contorno: las condiciones de contorno *en desplazamientos* y las condiciones de contorno *en fuerzas*. Las primeras son restricciones de tipo cinemático y corresponden normalmente a las condiciones de contorno que hemos llamado *esenciales* en el planteamiento variacional. En los manuales de usuario de los programas de elementos finitos estas restricciones se conocen como *condiciones de contorno* propiamente dichas. Se caracterizan porque afectan directamente a la variable de campo del problema. Ejemplos típicos son los desplazamientos restringidos o los desplazamientos impuestos. Estas condiciones se aplican directamente sobre los nodos, limitando o anulando sus desplazamientos, y se dan mediante una lista de nodos a los que se asocia un código que corresponde a la condición de contorno que se desea aplicar.

Las condiciones de contorno en fuerzas son las que normalmente se conoce como *acciones* en los manuales de usuario de los programas de elementos finitos. Se trata

de fuerzas aplicadas sobre nodos (cargas puntuales), presiones sobre la superficie de los elementos o fuerzas distribuidas por unidad de volumen en los elementos.

En otro tipo de problemas, no mecánicos, también puede hacerse la distinción entre estas dos clases de condiciones de contorno. Por ejemplo, en problemas de transferencia de calor, las condiciones de contorno *en desplazamientos* corresponden a temperaturas impuestas; y las condiciones de contorno *en fuerzas* o *acciones* corresponden a flujos o fuentes de calor.

5. Otros datos.

Los datos que se mencionan en los puntos anteriores son imprescindibles en cualquier cálculo por elementos finitos. Existen otras clases de datos que pueden no ser necesarios en función del tipo de problema que se trate de resolver. Se puede pensar, por ejemplo, en datos de condiciones iniciales del dominio (tensión, velocidad, temperatura, ...), en relaciones impuestas entre el movimiento de diferentes nodos (vínculos cinemáticos) ...

A partir de los datos anteriores, los resultados básicos que proporciona un cálculo por elementos finitos corresponden a dos grandes categorías:

1. Variables nodales.

Son los resultados que definen la variable de campo incógnita básica o sus derivadas con respecto al tiempo. Dependiendo del problema, son los desplazamientos, giros, velocidades, temperaturas, etc. ... Se trata de valores que se obtienen directamente en los nodos del mallado y su orden de aproximación suele ser bastante bueno, aun con discretizaciones muy gruesas. En esta categoría se incluyen también las reacciones en los puntos a los que se aplican condiciones de contorno en desplazamientos.

2. Variables elementales.

Son los resultados que corresponden a campos derivados del campo incógnita básica a través de derivadas espaciales. Son, por ejemplo, los campos de deformaciones, tensiones, flujo de calor, etc. ... Se trata de resultados calculados en puntos internos de los elementos, aunque a veces se extrapolen luego a los nodos. Su orden de aproximación es peor que el de las variables nodales: si se utilizan discretizaciones gruesas pueden cometerse errores importantes.

4.4 Flujo general en un programa de EF para cálculo lineal

Para llegar desde los datos básicos a los resultados básicos descritos en la sección anterior, se pasa por el proceso principal del programa de cálculo. En un cálculo de naturaleza lineal, como el utilizado para explicar la “receta” del MEF que se da en la sección 4.2, el problema de obtener la solución se reduce a resolver un sistema de ecuaciones lineales. Entonces, lo que debe hacer el programa de cálculo es, a partir de los datos, montar la matriz de coeficientes del sistema y su vector de términos independientes (esto es, la

matriz de rigidez global y el vector global de cargas), resolver el sistema de ecuaciones y, finalmente, obtener los resultados necesarios a partir de la solución del sistema de ecuaciones.

El flujo general de un programa de elementos finitos para cálculo lineal podría ser el siguiente:

1. Entrada de datos

En esta etapa se realiza la lectura y/o generación de los datos y su acoplamiento dentro de la estructura de datos del programa. Se realizan también las comprobaciones o chequeos básicos de consistencia de los datos introducidos por el usuario.

2. Tareas preliminares

En esta fase realizan las labores previas al ensamblaje del sistema global de ecuaciones. Por ejemplo, la numeración global de grados de libertad, el cálculo del semiancho de banda, las comprobaciones de que se dispone de espacio suficiente (memoria, disco), etc. ...

3. Construcción de la matriz de rigidez global \mathbf{K} y del vector global de cargas \mathbf{f}

El proceso puede estructurarse en dos etapas: un bucle que recorre los elementos y, luego, la imposición de las acciones nodales directas:

- Para cada elemento:
 - (a) Calcular matriz de rigidez elemental y vector elemental de cargas.
 - (b) Ensamblar los elementos de la matriz y del vector en los lugares correspondientes de la matriz de rigidez global y del vector global de cargas.
- Inclusión en el vector global de cargas de las acciones (cargas) nodales introducidas directamente.

4. Resolver el sistema $\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f}$

5. Salida de resultados nodales: \mathbf{a}

6. Elaboración y salida de resultados elementales

Esta parte se organiza también mediante un bucle que recorre los elementos:

- Para cada elemento:
 - (a) Recuperar resultados nodales correspondientes a sus nodos \mathbf{a}_e .
 - (b) Calcular resultados elementales a partir de los resultados nodales: $\mathbf{s}^u = \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{a}_e$.
 - (c) Salida de resultados elementales.

Nótese que el núcleo del programa es el cálculo de la matriz de rigidez elemental y del vector elemental de cargas. En ese punto intervienen la llamada *tecnología de elementos*, o

técnicas de construcción del espacio de aproximación, y los *modelos matemáticos de leyes de comportamiento* de los materiales.

El otro punto importante es la forma de resolver el sistema de ecuaciones, que es la etapa donde más tiempo de ordenador se gasta en los problemas lineales. La tecnología de elementos, los modelos matemáticos de leyes de comportamiento y los procedimientos de solución forman los tres pilares de las técnicas de elementos finitos.

El resto de las etapas del programa, las de organización y transferencia de información, constituyen lo que se conoce como interfase con el usuario. Son etapas muy importantes, sobre todo desde el punto de vista de la facilidad de uso del programa, y se abordan hoy en día con apoyo gráfico. Sin embargo se han dejado fuera del alcance de estas notas, por no corresponder estrictamente al cálculo con elementos finitos.

Capítulo 5

Tecnología de elementos (I)

5.1 Introducción

En los capítulos anteriores hemos hablado de los fundamentos matemáticos del MEF. Hemos visto cómo, dado un problema de campo definido en un determinado dominio, se puede encontrar una solución aproximada buscándola dentro de un grupo o familia de funciones definidas en el dominio y que cumplan una serie de condiciones.

Hemos visto también que estos procedimientos de aproximación son anteriores al desarrollo del MEF y que lo realmente innovador del MEF es su “receta” para construir de forma suficientemente general y sistemática esas familias de funciones dentro de las cuales se busca luego la solución aproximada.

De acuerdo con la “receta” del MEF, una función dentro de una de esas familias, función definida en el dominio completo, se obtiene agregando funciones definidas en dominios locales, *elementos finitos* o subdominios del dominio completo.

La definición de dichas funciones locales constituye el ingrediente fundamental del MEF, la calidad de la aproximación depende en gran medida de ellas. Las funciones locales se conocen por distintos nombres, el más extendido es quizá el de *funciones de forma*, porque proporcionan las *formas* que puede adoptar localmente el campo incógnita, o porque esas mismas funciones se utilizan muchas veces también para definir la geometría del dominio local. Un nombre más adecuado desde el punto de vista matemático sería el de *funciones de aproximación local*.

Dentro de la teoría general del MEF, la parte que trata sobre cómo definir estas funciones de forma, sobre las condiciones que deben cumplir y sobre cómo obtener a partir de ellas la aproximación extendida al dominio completo, se conoce globalmente como *tecnología de elementos*. Este será el objeto de los próximos capítulos.

Debe decirse que la elección las funciones de forma está condicionada no sólo por la geometría de los dominios locales o elementos finitos, sino también por el tipo de problema de campo que se intenta resolver (p.ej. elasticidad, plasticidad, transferencia de calor, electromagnetismo) y por la manera de abordarlo (número de campos independientes).

Como veremos, el papel fundamental que juegan dentro del esquema general del MEF

estas funciones locales o, abusando del lenguaje, los elementos¹, es un papel de interpolación desde los nodos de la geometría, de las acciones y, sobre todo, de las variables de campo. Por eso a veces estas funciones se conocen también como *funciones de interpolación*.

5.2 Formulación convencional en desplazamientos

La formulación más clásica del MEF recibe el nombre de formulación *en desplazamientos*. La formulación toma el nombre de su aplicación a problemas de elasticidad, que fue una de las primeras áreas en las que se utilizó el MEF y de donde se ha extraído mucho de su lenguaje.

En otros campos de aplicación, habría que llamarla formulación en temperaturas (problemas de transferencia de calor), en velocidades (mecánica de fluidos), etc.

La formulación se basa en la aproximación de un solo campo independiente: los *desplazamientos* en sentido generalizado.

Dentro de cada dominio elemental o elemento finito, el campo independiente se aproxima o interpola mediante funciones de forma que cumplen las condiciones siguientes:

1. Cada función de forma está asociada a un punto dentro del elemento, de manera que vale 1 en ese punto y se anula en los puntos asociados a las otras funciones de forma. Estos puntos *especiales* dentro de cada elemento reciben el nombre de *nodos*.
2. Las funciones de forma correspondientes a cada elemento están definidas de manera que hay continuidad del campo independiente al pasar de un elemento a otro, es decir, al agregar las aproximaciones locales para construir la aproximación extendida al dominio completo se obtiene una función continua.
3. Las funciones de forma son capaces de representar de manera exacta campos con un mínimo orden de variación, el cual depende del tipo de problema. Por ejemplo, en elasticidad las funciones de forma son capaces de representar exactamente campos de desplazamientos con variación lineal en el espacio; en problemas de flexión de placas, campos de flechas con variación cuadrática, etc.
4. Las funciones de forma *dentro* de cada elemento son suficientemente lisas o “suaves” como para permitir el cálculo de las derivadas que sean necesarias para el planteamiento de la forma débil del problema.

La primera condición no es estrictamente necesaria, pero facilita la interpretación de los resultados y se ha convertido en algo que muchas veces se sobrentiende.

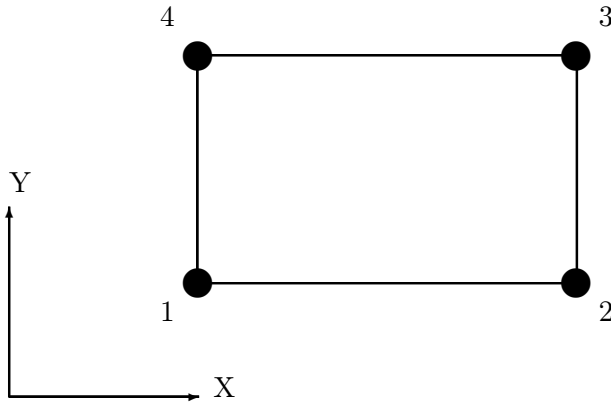
Las otras tres condiciones derivan del fundamento matemático del método y, en conjunto, son una condición *suficiente* para la convergencia hacia la solución exacta del problema al aumentar el número de elementos o grado de discretización.

¹Dentro del MEF las funciones locales son parte tan intrínseca de los elementos que ambos conceptos resultan difíciles de disociar en el lenguaje habitual. Por ejemplo, cuando se habla de un elemento cuadrilátero de ocho nodos, se entiende que se está utilizando un conjunto muy concreto de ocho funciones de forma.

5.3 Ejemplo: elemento cuadrilátero

Cumpliendo las cuatro condiciones que se dan en la sección anterior, hay muchas posibilidades para las funciones de forma. Veamos como ejemplo una que se emplea mucho en la práctica para elementos rectangulares.

Sea el elemento rectangular $\Omega_e \subset \mathbb{R}^2$ representado en la figura:



Parece razonable situar un nodo en cada esquina del rectángulo. Esto dará lugar a cuatro funciones de forma.

Sea $\Phi(x, y)$ el campo independiente que se quiere aproximar dentro del elemento, por ejemplo, el campo de temperaturas. Parece también razonable utilizar una aproximación para Φ basada en polinomios, que son las funciones más sencillas que pueden encontrarse:

$$\Phi \simeq \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy + \alpha_5 x^2 \dots \quad \alpha_i \in \mathbb{R}$$

Si únicamente se dispone de cuatro funciones de forma, sólo se tienen cuatro parámetros independientes para aproximar Φ dentro del elemento: los coeficientes que multipliquen a cada una de las funciones. De este modo, nuestra aproximación a Φ será, como mucho:

$$\Phi \simeq \underbrace{\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y}_{\text{necesarios}} + \underbrace{\alpha_4 xy}_{\text{arbitrario}} \quad (5.1)$$

Los tres primeros términos son necesarios para tener una aproximación lineal completa del campo Φ dentro del elemento, pero el último término puede elegirse arbitrariamente. Se ha seleccionado un término simétrico en x e y , el más simple posible, para no dar más peso en la aproximación a ninguna dirección del plano \mathbb{R}^2 .

De este modo, se puede evaluar la aproximación 5.1 a Φ en los cuatro nodos que hemos elegido para el elemento, ya que se conocen sus coordenadas (x_i, y_i) para $i = 1, \dots, 4$. Resulta entonces:

$$\begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3 y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4 y_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix}$$

donde $\Phi_i = \Phi(x_i, y_i)$, con $i = 1, \dots, 4$. La relación anterior puede escribirse en notación matricial:

$$\mathbf{a}_e = \mathbf{C} \mathbf{q}$$

Salvo configuraciones patológicas del elemento, la matriz \mathbf{C} será regular, con lo que se pueden determinar los coeficientes \mathbf{q} de la interpolación a partir del valor \mathbf{a}_e en los nodos del elemento del campo Φ que se quiere aproximar:

$$\mathbf{q} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{a}_e$$

Entonces, resulta finalmente:

$$\Phi(x, y) \simeq \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x & y & xy \end{bmatrix}}_{\text{modos de la aprox.}} \mathbf{q} = \mathbf{P} \mathbf{q} = \mathbf{P} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{a}_e = \mathbf{N} \mathbf{a}_e$$

Donde $\mathbf{N} \equiv \mathbf{N}(x, y)$ es la matriz de funciones de forma. Cada columna de esta matriz es una función de forma.

Obsérvese que, de este modo, se cumplen las condiciones que se habían exigido en la sección anterior:

1. Cada función de forma vale 1 en su nodo asociado y se anula en los tres restantes.
2. La aproximación global a $\Phi(x, y)$ que se construya por agregación de aproximaciones locales de esta clase será continua a través de las fronteras entre los elementos, ya que la aproximación local a lo largo de uno de los lados del elemento sólo depende de los valores Φ_i en los nodos extremos de ese lado.
3. La aproximación local es “suave” dentro del elemento, en el sentido de que están definidas sus derivadas de cualquier orden.
4. La aproximación es capaz de interpolar exactamente campos $\Phi(x, y)$ con variación lineal en el dominio de cálculo.

En este ejemplo, la matriz \mathbf{N} de funciones de forma es:

$$\mathbf{N}^t = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \left(1 - \frac{x-x_c}{a}\right) \left(1 - \frac{y-y_c}{b}\right) \\ \frac{1}{4} \left(1 + \frac{x-x_c}{a}\right) \left(1 - \frac{y-y_c}{b}\right) \\ \frac{1}{4} \left(1 + \frac{x-x_c}{a}\right) \left(1 + \frac{y-y_c}{b}\right) \\ \frac{1}{4} \left(1 - \frac{x-x_c}{a}\right) \left(1 + \frac{y-y_c}{b}\right) \end{bmatrix}$$

donde:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}(x_2 - x_1) = \frac{1}{2}(x_3 - x_4) & b &= \frac{1}{2}(y_4 - y_1) = \frac{1}{2}(y_3 - y_2) \\ x_c &= \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) & y_c &= \frac{1}{4}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) \end{aligned}$$

Nótese que se podrían haber determinado directamente, más o menos a estima, las funciones de forma que hemos obtenido. De hecho, ésta ha sido la forma más habitual de hacerlo: escribir directamente funciones que cumplan las condiciones que se dan en la sección anterior.

5.4 La transformación isoparamétrica

Como se puede ver en el ejemplo, las funciones de forma dependen de la geometría del elemento. Recordemos además que, dentro de la sistemática del MEF, las funciones de forma y sus derivadas aparecen dentro de integrales extendidas a todo el elemento o a su contorno.

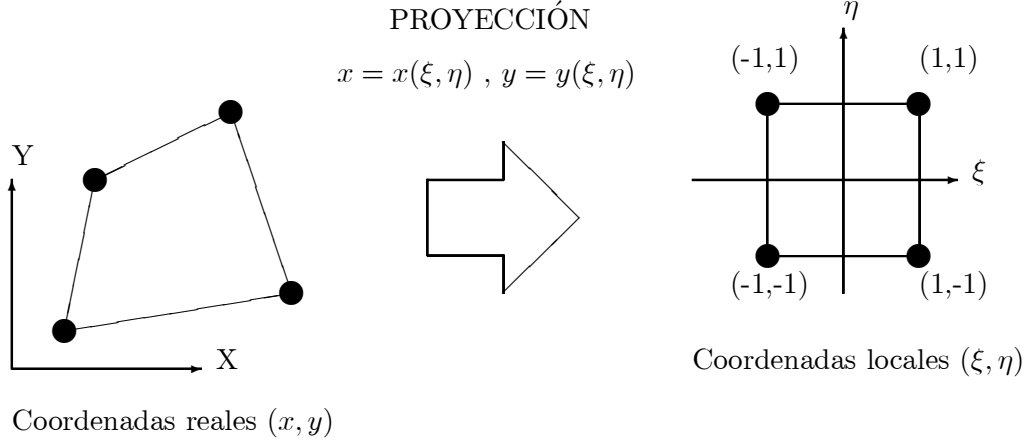
Desde el punto de vista práctico, lo anterior presenta dificultades de cara a la automatización del cálculo ya que, en principio, la geometría de un elemento puede ser diferente de la de los demás, lo que da lugar a funciones de forma distintas de un elemento a otro y a un tratamiento diferente las integrales que hay que efectuar. Nótese, por ejemplo, lo engorroso de invertir la matriz \mathbf{C} en un caso general para determinar las funciones de forma de cada elemento de la malla; o de las dificultades algorítmicas derivadas de que el dominio de integración cambie de unos elementos a otros.

Desde el punto de vista de la automatización sería muy ventajoso trabajar siempre, independientemente del elemento concreto, con el mismo dominio de interpolación y con las mismas funciones de forma. De esta manera se simplificaría la evaluación de estas funciones y de sus derivadas y se conseguiría realizar las integrales siempre sobre el mismo dominio de integración, operación programable mucho más fácilmente.

¿Cómo se compagina entonces la necesaria heterogeneidad geométrica de los elementos que forman el mallado con la automatización sencilla del cálculo? La respuesta está en la llamada *transformación isoparamétrica* de la geometría de los elementos. Veamos la forma en que se trabaja en la práctica con elementos bidimensionales (\mathbb{R}^2) de cuatro lados. El procedimiento es totalmente general, aplicable igualmente a elementos tridimensionales (\mathbb{R}^3) o unidimensionales (\mathbb{R}).

La secuencia de operaciones es la siguiente:

1. Se proyecta el dominio elemental o elemento finito en un dominio estándar, siempre el mismo:



2. La proyección puede interpretarse también como un cambio de variables dentro de cada dominio local:

$$\text{Cambio de variables} \quad \begin{cases} x = x(\xi, \eta) \\ y = y(\xi, \eta) \end{cases} \quad (5.2)$$

3. Las funciones de interpolación o funciones de forma se definen en coordenadas locales, por ejemplo:

$$\mathbf{N}^t = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \\ \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\ \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \\ \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

4. Las derivadas con respecto a las coordenadas reales (x, y) se calculan a partir de la matriz jacobiana del mapeo 5.2. Si Φ es el campo o función incógnita, se tiene:

$$\Phi(x, y) = \Phi(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \simeq \sum_i \Phi_i N_i = \mathbf{N} \mathbf{a}_e$$

con lo que:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \simeq \frac{\partial \xi}{\partial x} \sum_i \Phi_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \sum_i \Phi_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \simeq \frac{\partial \xi}{\partial y} \sum_i \Phi_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \sum_i \Phi_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta}$$

o, en forma matricial:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \simeq \\ &\simeq \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \sum_i \Phi_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \sum_i \Phi_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \eta} \end{bmatrix} \mathbf{a}_e \end{aligned}$$

donde \mathbf{J} es la matriz jacobiana del mapeo 5.2, es decir:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \end{bmatrix}$$

5. Las integrales necesarias dentro de la sistemática o “receta” del MEF se realizan en el dominio o cuadrado estándar utilizando el cambio de variable definido por el mapeo 5.2, es decir, si $f(x, y)$ es la función que debe integrarse en el elemento Ω_e :

$$\int_{\Omega_e} f(x, y) dx dy = \int_{\square} f(\xi, \eta) \det \mathbf{J} d\xi d\eta$$

La proyección 5.2 se conoce como *transformación isoparamétrica* cuando se utilizan las propias funciones de forma para interpolar la geometría, es decir, cuando las coordenadas reales (x, y) se obtienen a partir de las coordenadas locales (ξ, η) como:

$$x = x_1 N_1(\xi, \eta) + x_2 N_2(\xi, \eta) + x_3 N_3(\xi, \eta) + x_4 N_4(\xi, \eta)$$

y

$$y = y_1 N_1(\xi, \eta) + y_2 N_2(\xi, \eta) + y_3 N_3(\xi, \eta) + y_4 N_4(\xi, \eta)$$

Esta es prácticamente la única proyección que se utiliza en las aplicaciones. Desde el punto de vista teórico podrían emplearse también transformaciones *subparamétricas*, cuando el orden de la proyección es inferior al de las funciones de forma, o transformaciones *superparamétricas*, cuando el orden es superior.

Es importante darse cuenta de que, con la forma de operar que se describe más arriba, la geometría real del elemento sólo aparece en la formulación a través de la matriz jacobiana \mathbf{J} .

Un punto asimismo importante es que, al estar las funciones de forma definidas en el cuadrado estándar, si el elemento está muy distorsionado (tiene ángulos muy distintos del recto), la interpolación de la variable de campo Φ en el espacio real (x, y) , puede ser muy distinta de la que tiene lugar en coordenadas locales (ξ, η) . Esto es, las funciones de forma *reales* pueden llegar a ser incluso cualitativamente muy diferentes de los polinomios definidos en coordenadas locales. Una interpolación polinómica lineal en el dominio

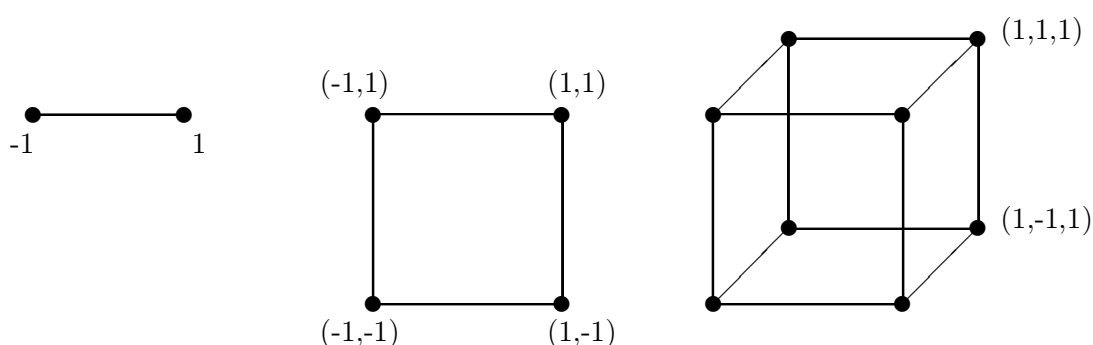
estándar no tiene por qué ser también lineal en el espacio real. Es posible que ni siquiera sea completamente polinómica.

La distorsión de los elementos da lugar así en la práctica a una degradación de la calidad de la solución aproximada. En general, esto se debe a que las funciones de forma en el dominio físico dejan de ser exclusivamente polinomios y aparecen funciones racionales. Dichas funciones racionales dan lugar a un espacio de aproximación en el que algunas de las derivadas espaciales, necesarias por ejemplo para interpolar las tensiones en un problema de elasticidad, ya no pertenecen al propio espacio de aproximación, lo que da lugar a una pérdida en el orden de convergencia.

5.5 Integración numérica

Las integrales que aparecen en la sistemática o “receta” del MEF, que son integrales extendidas a los dominios elementales o elementos finitos, se hacen numéricamente. Lo más corriente es emplear la cuadratura de Gauss, que es muy eficiente para la integración de funciones polinómicas.

Tras el cambio de variables que supone la transformación isoparamétrica, las integrales se extienden a un dominio estándar: una recta, un cuadrado o un hexaedro, según la dimensionalidad del problema.



En el dominio estándar unidimensional, la cuadratura de Gauss se escribe como:

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_1^n w_i f(\xi_i)$$

donde:

n = número de puntos de integración

w_i = peso asociado al punto de integración i

ξ_i = coordenada del punto de integración i

Con n puntos se integra exactamente un polinomio de grado $2n - 1$. Las coordenadas de los puntos de integración y los pesos asociados se tabulan en los textos de cálculo numérico².

Análogamente, en el dominio estándar bidimensional:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n w_j w_i f(\xi_i, \eta_j)$$

y en el dominio tridimensional:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \sum_{m=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n w_m w_j w_i f(\xi_i, \eta_j, \zeta_m)$$

Nótese que en esta clase de integración numérica las integrales se calculan evaluando la función subintegral en una serie de puntos y sumando estos valores tras multiplicarlos por unos coeficientes de peso.

En principio, se debe escoger un número n de puntos en cada dirección estándar suficiente para obtener un valor exacto de la integral. En la práctica, en la mayor parte de los casos, se *subintegra*, esto es, se utilizan menos puntos de los necesarios para el cálculo exacto de la integral. Las razones para proceder así se mostrarán en los capítulos siguientes.

5.6 Algunas familias corrientes de funciones de forma

Se presentan a continuación las dos familias de funciones de forma más corrientes en la práctica. Para su definición se utiliza el dominio bidimensional estándar, en el plano (ξ, η) . Su generalización al dominio estándar tridimensional, o su particularización al dominio unidimensional, son relativamente inmediatas.

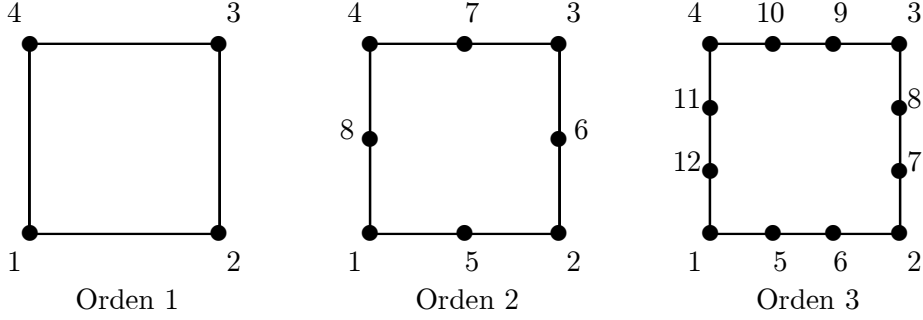
La familia que más se usa en las aplicaciones es la familia *serendípita*, deducida originalmente por mera observación y llamada así por referencia al Príncipe de Serendip³.

Los elementos de orden primero, segundo y tercero dentro de esta familia se representan en la figura. Su principal ventaja es que, salvo excepciones, sólo tienen nodos en el contorno del elemento, que es donde hacen realmente falta para la conexión con otros elementos.

²Ver por ejemplo la referencia 3 de la bibliografía recomendada.

³Personaje de novela célebre por sus descubrimientos fortuitos, creado por Horacio Walpole, novelista inglés del siglo XVIII.

Familia Serendípita



Las funciones de forma serendípitas son las siguientes:

1. Primer orden. Funciones bilineales.

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta) \quad i = 1, \dots, 4$$

donde (ξ_i, η_i) son las coordenadas nodales.

2. Segundo orden. Funciones bicuadráticas.

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)(\xi_i \xi + \eta_i \eta - 1) \quad i = 1, \dots, 4 \text{ (nodos de vértice)}$$

$$N_i = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta_i \eta) \quad i = 5 \text{ y } 7$$

$$N_i = \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 + \xi_i \xi) \quad i = 6 \text{ y } 8$$

3. Tercer orden. Funciones bicúbicas.

$$N_i = \frac{1}{32}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)[9(\xi^2 + \eta^2) - 10] \quad i = 1, \dots, 4 \text{ (nodos de vértice)}$$

$$N_i = \frac{9}{32}(1 - \xi^2)(1 + \eta_i \eta)(1 + 9\xi_i \xi) \quad i = 5, 6, 9, 10$$

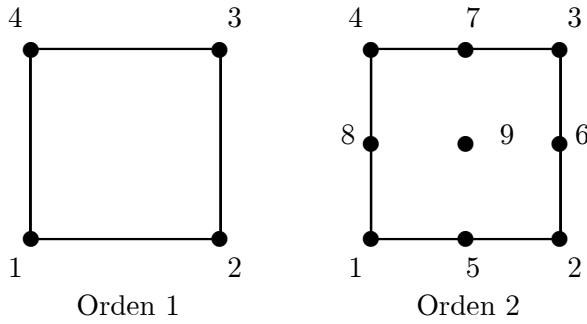
$$N_i = \frac{9}{32}(1 - \eta^2)(1 + \xi_i \xi)(1 + 9\eta_i \eta) \quad i = 7, 8, 11, 12$$

La otra familia que se utiliza en las aplicaciones es la llamada familia *lagrangiana*. En esta familia, las funciones de forma se obtienen por producto de polinomios de Lagrange en una variable. Esta técnica de producción de las funciones de forma conduce, cuando se emplea en elementos de alto orden, a la introducción de muchos términos polinómicos de orden superior. Estos términos no mejoran la calidad de la aproximación, porque no dan lugar a polinomios completos.

Es raro en la práctica encontrar elementos *lagrangianos* de orden superior a 2. Se utilizan cuando los elementos *serendípticos* presentan algún tipo de dificultad de uso, por ejemplo, cuando se requiere una representación precisa de la geometría en el interior del elemento (problemas de inestabilidad de estructuras laminares) o cuando se trabaja en problemas de contacto.

Los elementos de orden primero y segundo dentro de esta familia se representan en la figura. El elemento de primer orden es idéntico al correspondiente a la familia serendípita.

Familia Lagrangiana



Las funciones de forma lagrangianas son las siguientes:

1. Primer orden. Funciones bilineales.

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta) \quad i = 1, \dots, 4$$

donde (ξ_i, η_i) son las coordenadas nodales.

2. Segundo orden. Funciones bicuadráticas.

$$N_i = \frac{1}{4}\xi\eta(\xi_i + \xi)(\eta_i + \eta) \quad i = 1, \dots, 4 \text{ (nodos de vértice)}$$

$$N_i = \frac{1}{2}\eta(1 - \xi^2)(\eta_i + \eta) \quad i = 5 \text{ y } 7$$

$$N_i = \frac{1}{2}\xi(1 - \eta^2)(\xi_i + \xi) \quad i = 6 \text{ y } 8$$

$$N_i = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2) \quad i = 9$$

Capítulo 6

Tecnología de elementos (II)

6.1 Introducción

Dentro de las aplicaciones prácticas del MEF en ingeniería mecánica y en ingeniería de estructuras, tienen mucha importancia los problemas de flexión de placas y los relacionados con estructuras laminares. Se pueden encontrar multitud de ejemplos en el proyecto de vasijas de presión, buques, aeronaves, puentes, cubiertas y otras grandes estructuras.

Los problemas de cálculo de tensiones en placas y láminas son problemas complejos, donde sólo existe solución analítica para geometrías y distribuciones de carga sencillas. Antes de que el MEF estuviera disponible, los proyectistas trabajaban con soluciones aproximadas o recurrían a los ensayos a escala. El MEF, con su potencia para representar geometrías y distribuciones complejas de cargas, es hoy en día la herramienta de cálculo más avanzada con que se cuenta para abordar cálculos de este tipo.

La importancia tecnológica que tiene el cálculo de placas y láminas se pone de manifiesto por el gran esfuerzo de desarrollo de elementos finitos para esta clase de problemas llevado a cabo por los investigadores del MEF durante más de dos décadas. Hoy en día siguen apareciendo periódicamente nuevas formulaciones de elementos lámina, sobre todo para aplicaciones no lineales, lo que es síntoma de la dificultad del problema y de que queda todavía camino por recorrer.

En este capítulo se pretende introducir los conceptos básicos relacionados con una clase particular de elementos finitos: los elementos placa y los elementos lámina. Se hablará fundamentalmente de flexión de placas, introduciendo el tema mediante un problema análogo, pero más sencillo, como es la flexión de vigas.

No se entrará en problemas de cálculo de láminas, debido a la dificultad de las teorías de deformación de estos elementos estructurales. Sin embargo, el tratamiento del problema con el MEF sigue la pauta general. Baste con decir que en el cálculo de láminas se resuelve simultáneamente un problema de flexión y otro de elasticidad bidimensional en las coordenadas locales de la superficie media de la lámina. En este sentido, muchos de los conceptos que se van a introducir en relación con la flexión de placas son directamente transplantables a las láminas, en particular, la diferencia entre las formulaciones C^0 y C^1 .

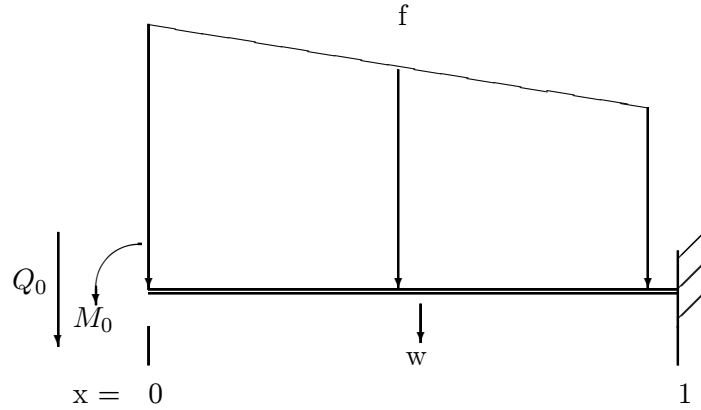
El lector no interesado en problemas de cálculo de esfuerzos en placas y láminas debe

saber que el tratamiento que se da a los problemas de flexión de placas en el MEF es aplicable a otros problemas físicos en cuya formulación fuerte aparezcan ecuaciones diferenciales de cuarto orden.

6.2 Formulación C^1 en elementos viga

La llamada formulación C^1 para elementos finitos tipo viga corresponde a la teoría clásica de flexión de vigas según Euler-Bernoulli. Esta teoría es aplicable a vigas esbeltas¹ y está basada en la hipótesis de que durante la deformación de la viga las secciones transversales permanecen planas y normales a la directriz deformada (hipótesis de Navier-Bernoulli)². A partir de esta hipótesis, la deformación de la viga queda definida por el campo w de flechas o desplazamientos transversales de su directriz.

La hipótesis de Navier-Bernoulli es una suposición sobre la forma en que se produce la deformación de la viga, que permite reducir la dimensionalidad del problema real. Para conocer qué tensiones y deformaciones aparecen en todos los puntos de la viga basta con estudiar los desplazamientos transversales de una línea (directriz) trazada a lo largo de la misma. Se pasa de un problema elástico tridimensional, definido en todo el volumen de la viga, a un problema unidimensional mucho más sencillo, definido sólo en su directriz.



Dada la viga de longitud unidad representada en la figura, con $M_0, Q_0 \in \mathbb{R}$ y $f : \Omega \equiv]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$, la forma fuerte correspondiente a la teoría clásica de flexión se plantea como sigue.

Encontrar la función de flechas o desplazamientos transversales $w : \overline{\Omega} \equiv [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, de modo que se cumplan las ecuaciones siguientes:

1. Ecuaciones de compatibilidad. En el contorno:

$$w(1) = 0$$

¹En la práctica, vigas con una relación canto/luz inferior a 1/5, aproximadamente.

²Esta hipótesis equivale a despreciar la deformación por cortante.

$$w_{,x}(1) = 0$$

y en el dominio,

$$\chi \equiv \text{curvatura} = w_{,xx} \quad \text{en } \Omega$$

2. Ecuaciones constitutivas o de comportamiento del material,

$$M \equiv \text{momento} = EI \chi \quad \text{en } \Omega$$

con $E, I \in \Re$

3. Ecuaciones de equilibrio. En el contorno:

$$M(0) = M_0$$

$$Q(0) = Q_0$$

y en el dominio,

$$Q \equiv \text{cortante} = \frac{dM}{dx} \quad \text{en } \Omega$$

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = f \quad \text{en } \Omega$$

Por otro lado, la forma débil del problema puede enunciarse de la manera siguiente. Dados los espacios de funciones:

$$\mathcal{S} = \{\tilde{w} \in H^2(\Omega) \mid \tilde{w}(1) = 0, \tilde{w}_{,x}(1) = 0\}$$

y

$$\mathcal{V} = \{\delta w \in H^2(\Omega) \mid \delta w(1) = 0, \delta w_{,x}(1) = 0\} \equiv \mathcal{S}$$

encontrar una función $w \in \mathcal{S}$ tal que:

$$(M^w, \chi^{\delta w})_{\Omega} = (\delta w, f)_{\Omega} + Q_0 \delta w(0) - M_0 \delta w_{,x}(0) \quad \forall \delta w \in \mathcal{V} \quad (6.1)$$

El desarrollo de elementos finitos de clase C^1 se hace en base a esta forma débil del problema, siguiendo los pasos de la “receta” o sistemática del MEF (sección 4.2). Los dos primeros pasos serían:

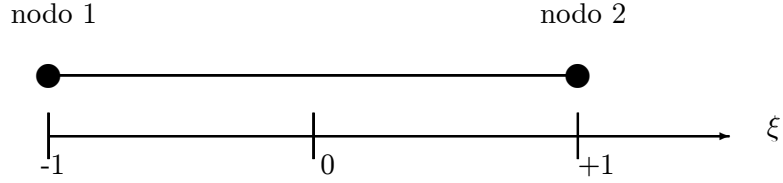
1. Se divide el dominio Ω en subdominios o elementos, $\Omega = \bigcup_i \Omega_i$.

- Dentro de cada subdominio Ω_i se define un sistema local de coordenadas, con coordenada local ξ :

$$x = x_1 \frac{1}{2}(1 - \xi) + x_2 \frac{1}{2}(1 + \xi)$$

o

$$\xi = \frac{2}{x_2 - x_1}(x - x_1) - 1$$



- La transformación de coordenadas anterior resulta en que:

$$J = \frac{dx}{d\xi} = -\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} = \frac{L}{2}$$

donde L es la longitud del elemento.

2. Se aproxima la flecha o función w dentro de cada elemento como:

$$w^h = A + B\xi + C\xi^2 + D\xi^3 \quad (6.2)$$

Nótese que se utiliza una aproximación cúbica ya que, para que sea $w^h \in H^2(\Omega)$ (derivada segunda de cuadrado integrable en Ω), se requiere que la primera derivada de w^h (giro) sea continua a través de las fronteras de los elementos³. Esto se consigue tomando como grados de libertad no sólo las flechas de los nodos, sino también los giros. Como los nodos son compartidos por los elementos adyacentes, se obtiene así la continuidad de giros al pasar de elemento a elemento. Se tienen entonces cuatro grados de libertad por elemento, una flecha y un giro por nodo, lo que da lugar a una función cúbica (cuatro coeficientes) para la aproximación de la flecha dentro de cada elemento.

- La aproximación anterior para la flecha, corresponde a la siguiente aproximación para el giro:

$$w_{,x}^h = \frac{2}{L}B + \frac{4C}{L}\xi + \frac{6D}{L}\xi^2$$

- La particularización en los nodos de las expresiones anteriores para la flecha y el giro proporciona las ecuaciones necesarias para determinar los coeficientes A , B , C y D en función de los grados de libertad o movimientos nodales:

$$\begin{aligned} A - B + C - D &= w_1 \quad (\text{flecha en nodo 1}) \\ \frac{2B}{L} - \frac{4C}{L} + \frac{6D}{L} &= \theta_1 \quad (\text{giro en nodo 1}) \\ A + B + C + D &= w_2 \quad (\text{flecha en nodo 2}) \\ \frac{2B}{L} + \frac{4C}{L} + \frac{6D}{L} &= \theta_2 \quad (\text{giro en nodo 2}) \end{aligned}$$

³La continuidad de la primera derivada de la variable de campo es lo que se conoce como continuidad C^1 en el lenguaje del MEF.

Lo que da:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2 + \frac{L}{8}\theta_1 - \frac{L}{8}\theta_2 \\ B &= -\frac{3}{4}w_1 + \frac{3}{4}w_2 - \frac{L}{8}\theta_1 - \frac{L}{8}\theta_2 \\ C &= -\frac{L}{8}\theta_1 + \frac{L}{8}\theta_2 \\ D &= \frac{1}{4}w_1 - \frac{1}{4}w_2 + \frac{L}{8}\theta_1 + \frac{L}{8}\theta_2 \end{aligned}$$

- La sustitución de los coeficientes A , B , C y D en 6.2 proporciona las funciones de forma del elemento, que resultan ser polinomios de Hermite:

$$\begin{aligned} w^h &= \left[\begin{array}{cccc} \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{4}\xi^3 & \frac{L}{8}(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3) & \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\xi - \frac{1}{4}\xi^3 & \frac{L}{8}(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3) \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{array} \right\} \\ &= \mathbf{N} \mathbf{a}_e \end{aligned}$$

- Para entrar en las integrales de la forma débil 6.1 y obtener la matriz de rigidez del elemento hay que calcular también las curvaturas y los momentos:

$$\chi^h = \mathbf{L} \mathbf{N} \mathbf{a}_e = \left[\frac{d^2}{dx^2} \right] \mathbf{N} \mathbf{a}_e = \left[\begin{array}{cccc} \frac{6}{L^2}\xi & -\frac{6}{L^2}\xi & -\frac{1}{L} + \frac{3}{L}\xi & \frac{1}{L} + \frac{3}{L}\xi \end{array} \right] \mathbf{a}_e = \mathbf{B} \mathbf{a}_e$$

$$M^h = EI \chi = EI \mathbf{B} \mathbf{a}_e = \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{a}_e$$

De acuerdo con los puntos siguientes de la sistemática del MEF⁴, la sustitución de las aproximaciones locales a w , χ y M en 6.1 permite construir la matriz de rigidez y el vector de cargas de cada elemento. Nótese que las funciones $w^h \in \mathcal{S}^h$, obtenidas por agregación de las aproximaciones locales, son funciones cúbicas a trozos.

6.3 Formulación C^1 en elementos placa

La formulación C^1 para elementos finitos tipo placa puede entenderse como una generalización de la formulación C^1 para elementos viga. Corresponde a la teoría clásica de flexión de placas de Love-Kirchhoff. Esta teoría es aplicable a placas delgadas⁵ y está basada en la hipótesis de que durante la deformación las secciones transversales al plano medio de la placa permanecen planas y normales al plano medio deformado (hipótesis de Love-Kirchhoff)⁶. Con esta hipótesis, la deformación de la placa queda definida por el campo w de flechas o desplazamientos transversales del plano medio.

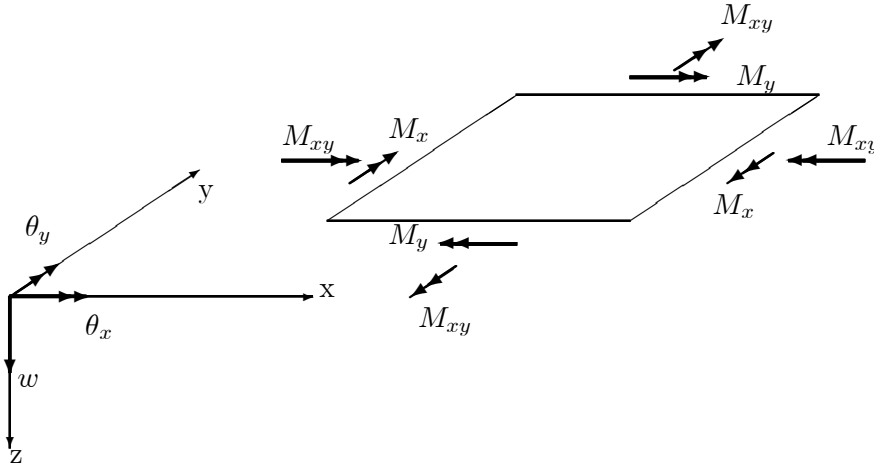
⁴Ver sección 4.2.

⁵En la práctica, placas con una relación canto/luz inferior a 1/15 ó 1/20, aproximadamente.

⁶Esta hipótesis equivale a despreciar la deformación por cortante.

La hipótesis de Love-Kirchhoff es un supuesto sobre la cinemática de la deformación de la placa, que permite reducir la dimensionalidad del problema real. Para conocer qué tensiones y deformaciones aparecen en todos los puntos de la placa basta con estudiar los desplazamientos transversales de un plano. Se pasa de un problema elástico tridimensional, definido en todo el volumen de la placa, a un problema bidimensional más sencillo, definido sólo en el plano medio Ω de la placa. La variable de campo es pues el campo de flechas $w : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

La notación más corriente en las aplicaciones del MEF a problemas de flexión de placas es la que se da en la figura:



Las deformaciones generalizadas son las curvaturas:

$$\mathbf{c} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}$$

Las tensiones generalizadas son los momentos por unidad de longitud:

$$\mathbf{M} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}$$

Los desplazamientos generalizados son la flecha y los giros. Los giros son derivadas primeras de la flecha, por la hipótesis de Love-Kirchhoff:

$$\mathbf{w} = \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w \\ -\frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

La forma débil del problema, punto de partida de la sistemática del MEF, es similar a la correspondiente a la de las vigas de Euler-Bernoulli. En este caso, el dominio de cálculo es bidimensional, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, y corresponde al plano medio de la placa. La forma débil puede enunciarse de la manera siguiente:

Dados los espacios de funciones:

$$\mathcal{S} = \{\tilde{w} \in H^2(\Omega) \mid \tilde{\mathbf{w}} = \bar{\mathbf{d}} \text{ en } S_d\}$$

donde $\bar{\mathbf{d}}$ son los movimientos impuestos en la parte S_d del contorno de la placa, y

$$\mathcal{V} = \{\delta\tilde{w} \in H^2(\Omega) \mid \tilde{\mathbf{w}} = 0 \text{ en } S_d\}$$

encontrar una función $w \in \mathcal{S}$ tal que:

$$(\mathbf{M}^w, \mathbf{c}^{\delta w})_\Omega = (\mathbf{q}, \delta\mathbf{w})_\Omega + [\bar{\mathbf{t}}, \delta\mathbf{w}]_{S_t} \quad \forall \delta w \in \mathcal{V} \quad (6.3)$$

donde \mathbf{q} son fuerzas generalizadas por unidad de superficie y $\bar{\mathbf{t}}$ son esfuerzos impuestos sobre la parte S_t del contorno de la placa.

Las aproximaciones locales a los campos que intervienen en 6.3, necesarias para la aplicación de la “receta” del MEF, son las siguientes:

$$\begin{aligned} w^h &= \mathbf{N} \mathbf{a}_e \\ \mathbf{w}^h &= \begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ -\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \end{Bmatrix} \mathbf{a}_e \\ \mathbf{c}^h &= \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \mathbf{N} \mathbf{a}_e = \mathbf{L} \mathbf{N} \mathbf{a}_e = \mathbf{B} \mathbf{a}_e \\ \mathbf{M}^h &= \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{D} \mathbf{c} = \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{a}_e \end{aligned}$$

donde, para placas isótropas:

$$\mathbf{D} = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

siendo $E \in \mathbb{R}$ el módulo de elasticidad; $\nu \in \mathbb{R}$, el coeficiente de Poisson; y $t \in \mathbb{R}$, el espesor.

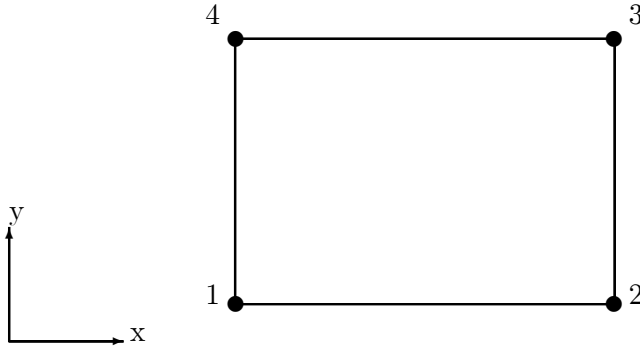
6.4 Dificultad de la formulación C^1 en elementos placa

Como en el caso de los elementos viga, la formulación convencional del MEF para el problema clásico de la flexión de placas exige la continuidad de giros (continuidad C^1) a través de las fronteras de los elementos. Si no existe esta continuidad, entonces se tiene que la flecha $w^h \notin H^2(\Omega)$. Desde el punto de vista de la sistemática del MEF, si no existe la continuidad de giros la integral que aparece en el primer miembro de 6.3 deja de ser la suma de integrales extendidas a los dominios elementales, ya que el integrando tiene un valor singular a lo largo de las fronteras entre elementos⁷.

La dificultad de la formulación C^1 en elementos placa consiste en que, en el caso de un dominio de cálculo Ω bidimensional, como es el plano medio de la placa, es imposible conseguir la continuidad de giros a través de las fronteras de los elementos si se utilizan los tres grados de libertad naturales por nodo (la flecha y los dos giros) y funciones polinómicas para construir la aproximación local al campo de flechas w^h .

Nótese que, para asegurar la continuidad tanto de w^h como de su derivada según la normal a una línea de separación entre dos elementos, $w^h_{,n}$, los valores de w^h y $w^h_{,n}$ tendrían que estar definidos unívocamente a lo largo de esa línea en función de los movimientos nodales, ya que éstos son compartidos por ambos elementos.

Vamos a ver que si se define w^h como un polinomio dentro de un elemento y se supone que tanto la flecha w^h como los giros $w^h_{,x}$ y $-w^h_{,y}$ en la frontera dependen exclusivamente de los movimientos nodales (flecha y dos giros), entonces se llega a una contradicción. En efecto, sea un elemento rectangular como el de la figura y definamos w^h dentro del elemento como un polinomio en x e y .



Sea el lado 4 – 3 del elemento rectangular. La normal a este lado es la dirección y . Entonces, como w^h es un polinomio en x e y dentro del elemento, a lo largo de este lado se tendrá, al ser y constante:

$$\begin{aligned} w^h &= A_1 + A_2x + A_3x^2 + \dots \\ w^h_{,y} &= B_1 + B_2x + B_3x^2 + \dots \end{aligned}$$

⁷La curvatura adopta un valor infinito en las fronteras. Este valor infinito, aunque se produzca en una zona de área nula, da lugar a una contribución infinita a la energía de deformación de la placa representada por el primer miembro de 6.3.

con el número preciso de coeficientes en cada expresión para determinar w^h y $w_{,y}^h$ en función de los parámetros o variables nodales asociadas al lado 4 – 3. Así, si sólo hay dos nodos, está permitido que w^h sea un polinomio de tercer grado a lo largo de 4 – 3, ya que se conocen cuatro parámetros: w^h y $w_{,x}^h$ en los nodos 3 y 4. Del mismo modo, sólo está permitido que $w_{,y}^h$ tenga variación lineal, ya que únicamente se conocen dos parámetros: $w_{,y}^h$ en los nodos 3 y 4.

Se puede realizar un ejercicio similar a lo largo del lado 4 – 1:

$$\begin{aligned} w^h &= C_1 + C_2 y + C_3 y^2 + C_4 y^3 \\ w_{,x}^h &= D_1 + D_2 y \end{aligned}$$

y se tiene entonces que, de acuerdo con nuestra suposición:

1. A lo largo de 4 – 3, $w_{,y}^h$ sólo depende de los parámetros nodales del lado 4 – 3; con lo que $w_{,yx}^h$ únicamente depende de los parámetros nodales del lado 4 – 3.
2. A lo largo de 4 – 1, $w_{,x}^h$ sólo depende de los parámetros nodales del lado 4 – 1; con lo que $w_{,xy}^h$ únicamente depende de los parámetros nodales del lado 4 – 1.
3. En el nodo 4, para valores arbitrarios de los parámetros nodales, no se cumplirá que $w_{,yx}^h = w_{,xy}^h$, lo cual es una contradicción si w^h se define como un polinomio en x e y dentro del elemento.

Es decir, si w^h es un polinomio dentro del elemento, los valores de las derivadas según la dirección normal a los lados (giros según la normal) no pueden depender exclusivamente de los parámetros nodales del lado correspondiente y, por tanto, no está asegurada la continuidad de giros a través de las fronteras entre elementos⁸.

En consecuencia, en problemas de flexión de placas formulados según la teoría clásica es muy difícil construir funciones de forma **N** que cumplan los requisitos de continuidad C^1 que les impone la formulación convencional del MEF.

6.5 Ejemplo: elemento triangular de 3 nodos

Para ilustrar los conceptos anteriores, se presenta en esta sección un elemento sencillo utilizado en problemas de flexión de placas delgadas⁹. Se trata de un elemento *no conforme*, esto es, que no cumple los requisitos de continuidad C^1 . Sin embargo, esto no se consideró obstáculo para que el elemento se emplease en la práctica. La utilización de elementos no conformes en problemas de flexión de placas ha sido bastante habitual, a pesar de que violan una de las condiciones de la formulación convencional del MEF. Una justificación de esta práctica se dará en los capítulos siguientes, al hablar de la *prueba de la parcela*.

El elemento que se presenta como ejemplo tiene 9 grados de libertad, tres por nodo, que se organizan como:

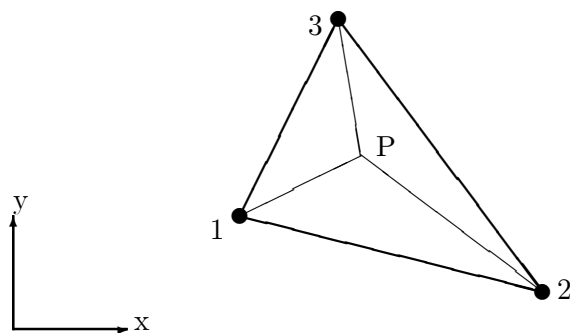
⁸Lo único que comparten dos elementos vecinos es el valor de los parámetros nodales de los nodos comunes.

⁹O.C. Zienkiewicz. *El Método de los Elementos Finitos*, Reverté, 1982.

$$\mathbf{a}_e = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ w_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \\ w_3 \\ \theta_{x3} \\ \theta_{y3} \end{Bmatrix}$$

Las funciones de forma se definen, como es habitual en los elementos finitos triangulares, en coordenadas de área L_1 , L_2 y L_3 . Las coordenadas de área o coordenadas triangulares de un punto interior P son las siguientes:

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{\text{área } \triangle P23}{\text{área } \triangle 123} \\ L_2 &= \frac{\text{área } \triangle P31}{\text{área } \triangle 123} \\ L_3 &= \frac{\text{área } \triangle P12}{\text{área } \triangle 123} \end{aligned}$$



o también se pueden definir como:

$$\begin{aligned} x &= L_1 x_1 + L_2 x_2 + L_3 x_3 \\ y &= L_1 y_1 + L_2 y_2 + L_3 y_3 \\ 1 &= L_1 + L_2 + L_3 \end{aligned}$$

donde (x_i, y_i) , $i = 1, 2, 3$, son las coordenadas cartesianas de los vértices del triángulo.

En este elemento hay nueve funciones de forma para la interpolación de la flecha w^h , correspondientes a los nueve grados de libertad. Estas funciones de forma son:

$$\mathbf{N}^t = \left\{ \begin{array}{c} L_1 + L_1^2 L_2 + L_1^2 L_3 - L_1 L_2^2 - L_1 L_3^2 \\ b_3(L_1^2 L_2 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3) - b_2(L_1^2 L_3 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3) \\ c_3(L_1^2 L_2 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3) - c_2(L_1^2 L_3 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3) \\ L_2 + L_2^2 L_3 + L_2^2 L_1 - L_2 L_3^2 - L_2 L_1^2 \\ b_1(L_2^2 L_3 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3) - b_3(L_2^2 L_1 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3) \\ c_1(L_2^2 L_3 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3) - c_3(L_2^2 L_1 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3) \\ L_3 + L_3^2 L_1 + L_3^2 L_2 - L_3 L_1^2 - L_3 L_2^2 \\ b_2(L_3^2 L_1 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3) - b_1(L_3^2 L_2 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3) \\ c_2(L_3^2 L_1 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3) - c_1(L_3^2 L_2 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3) \end{array} \right\}$$

con $b_1 = y_2 - y_3$, $c_1 = x_3 - x_2$, etc.

Derivando estas nueve funciones de forma con respecto a x e y se obtienen las funciones de interpolación de los giros. Derivando nuevamente se obtienen las funciones de interpolación de las curvaturas (matriz \mathbf{B}). El cálculo de todas estas derivadas se hace teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{1}{2\Delta} (b_1 \frac{\partial}{\partial L_1} + b_2 \frac{\partial}{\partial L_2} + b_3 \frac{\partial}{\partial L_3}) \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{1}{2\Delta} (c_1 \frac{\partial}{\partial L_1} + c_2 \frac{\partial}{\partial L_2} + c_3 \frac{\partial}{\partial L_3}) \end{aligned}$$

donde Δ es el área del triángulo.

6.6 Formulación C^0 en elementos viga

Utilizando la teoría clásica de flexión de placas existen dificultades serias para obtener funciones de forma \mathbf{N} que cumplan los requisitos de la formulación convencional del MEF, esto es, que tengan continuidad C^1 .

En los años 70 y principios de los 80 se concibieron soluciones muy ingeniosas para, sin abandonar la teoría clásica, obtener funciones de forma con continuidad C^1 . Estas soluciones dieron lugar, en general, a elementos de formulación complicada, con prestaciones no muy brillantes y cuyo uso, en general, ha sido abandonado hoy en día.

Al mismo tiempo se empezó a pensar que, si la dificultad nacía de las hipótesis de la teoría clásica de flexión de placas, la dificultad podía sortearse formulando el problema de acuerdo con otra teoría. En consecuencia, se empezaron a utilizar teorías de la flexión que hasta entonces habían tenido sólo una importancia marginal. Se trata de teorías en las que se tiene en cuenta la deformación por corte: la teoría de flexión de vigas de Timoshenko (1921) y la teoría de flexión de placas de Reissner-Mindlin (1944). Cuando se emplea la

formulación convencional del MEF para abordar el problema de la flexión planteado de acuerdo con una de estas teorías, sólo se requiere continuidad C^0 para el campo de flechas. Como contrapartida aparecen los giros como campos independientes y para éstos también se requiere continuidad C^0 . En conjunto, la formulación de elementos finitos se simplifica mucho, lo que ha hecho que sean estos elementos de tipo C^0 los más utilizados hoy en día.

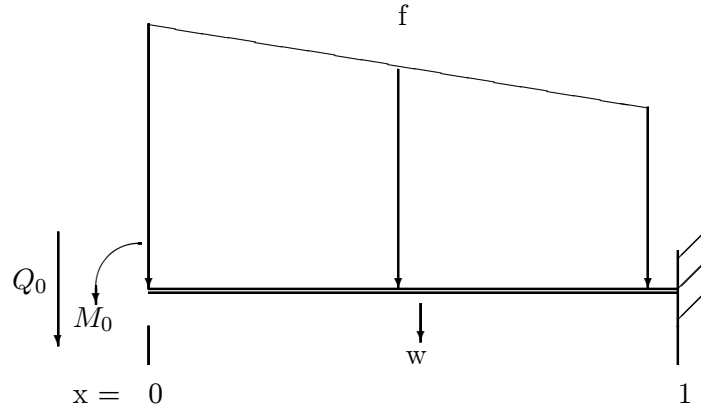
Para introducir los conceptos básicos, en esta sección se plantea la formulación C^0 para elementos viga. Estos mismos conceptos se extienden a placas en la sección siguiente.

La formulación C^0 para elementos finitos tipo viga corresponde a la teoría de flexión de vigas de Timoshenko. Esta teoría fue introducida en 1921 para el estudio de vibraciones transversales de barras prismáticas, con objeto de mejorar las predicciones de la teoría clásica en problemas de impacto o de vibraciones de alta frecuencia.

La teoría está basada en la hipótesis de que durante la deformación de la viga las secciones transversales permanecen planas, pero no normales a la directriz deformada. Con esta hipótesis, se necesitan dos campos independientes para definir la deformación de la viga: el campo w de flechas o desplazamientos transversales de su directriz y el campo θ de rotaciones de la normal a la directriz. La rotación de la directriz se escribe como:

$$\frac{dw}{dx} = \text{rotación de la directriz} = \theta - \gamma$$

donde γ es la distorsión por cortante.



Dada la viga de longitud unidad representada en la figura, con $M_0, Q_0 \in \mathbb{R}$ y $f : \Omega \equiv]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$, la forma fuerte del problema correspondiente a la teoría de Timoshenko se plantea como sigue.

Encontrar las funciones $w : \overline{\Omega} \equiv [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ y $\theta : \overline{\Omega} \equiv [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, de modo que se cumplan las ecuaciones siguientes:

1. Ecuaciones de compatibilidad; en el contorno

$$\begin{aligned} w(1) &= 0 \\ \theta(1) &= 0 \end{aligned}$$

y en el dominio,

$$\begin{aligned}\gamma &\equiv \text{deform. de corte} = \theta - w_{,x} && \text{en } \Omega \\ \chi &\equiv \text{curvatura} = \theta_{,x} && \text{en } \Omega\end{aligned}$$

2. Ecuaciones constitutivas o de comportamiento del material,

$$\begin{aligned}Q &\equiv \text{cortante} = GkA \gamma && \text{en } \Omega \\ M &\equiv \text{momento} = EI \chi && \text{en } \Omega\end{aligned}$$

con $E, I, G, k, A \in \Re$

3. Ecuaciones de equilibrio; en el contorno

$$\begin{aligned}M(0) &= M_0 \\ Q(0) &= Q_0\end{aligned}$$

y en el dominio,

$$\begin{aligned}Q &= \frac{dM}{dx} && \text{en } \Omega \\ \frac{dQ}{dx} &= f && \text{en } \Omega\end{aligned}$$

Por otro lado, la forma débil del problema puede enunciarse ahora de la manera siguiente.

Dados los espacios de funciones:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_w &= \{\tilde{w} \in H^1(\Omega) \mid \tilde{w}(1) = 0\} \\ \mathcal{S}_\theta &= \{\tilde{\theta} \in H^1(\Omega) \mid \tilde{\theta}(1) = 0\} \\ \mathcal{V}_w &= \{\delta w \in H^1(\Omega) \mid \delta w(1) = 0\} \equiv \mathcal{S}_w \\ \mathcal{V}_\theta &= \{\delta \theta \in H^1(\Omega) \mid \delta \theta(1) = 0\} \equiv \mathcal{S}_\theta\end{aligned}$$

encontrar las funciones $(w, \theta) \in \mathcal{S}_w \times \mathcal{S}_\theta$ tales que:

$$(M^\theta, \chi^{\delta\theta})_\Omega + (Q^{w,\theta}, \gamma^{\delta w, \delta\theta})_\Omega = (\delta w, f)_\Omega + Q_0 \delta w(0) - M_0 \delta \theta(0) \quad \forall \delta w \times \delta \theta \in \mathcal{V}_w \times \mathcal{V}_\theta \quad (6.4)$$

El desarrollo de elementos finitos de clase C^0 se hace en base a esta forma débil del problema, siguiendo los pasos de la “receta” del MEF (sección 4.2). Los dos primeros pasos serían:

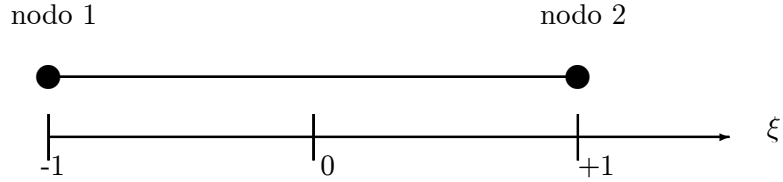
1. Se divide el dominio Ω en subdominios o elementos, $\Omega = \bigcup_i \Omega_i$.

- Dentro de cada subdominio Ω_i se define un sistema local de coordenadas, con coordenada local ξ :

$$x = x_1 \frac{1}{2}(1 - \xi) + x_2 \frac{1}{2}(1 + \xi)$$

o

$$\xi = \frac{2}{x_2 - x_1}(x - x_1) - 1$$



- La transformación de coordenadas anterior resulta en que:

$$J = \frac{dx}{d\xi} = -\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} = \frac{L}{2}$$

donde L es la longitud del elemento.

2. En el caso de un elemento de dos nodos, se aproxima la flecha y el giro dentro de cada elemento como:

$$\mathbf{w} = \begin{Bmatrix} w \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-\xi) & 0 & \frac{1}{2}(1+\xi) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1-\xi) & 0 & \frac{1}{2}(1+\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{a}_e$$

La elección anterior asegura la continuidad de flechas y giros a través de las fronteras de los elementos.

- Para entrar en las integrales de la forma débil 6.4 y obtener la matriz de rigidez del elemento hay que calcular también las deformaciones y tensiones generalizadas:

$$\mathbf{e} = \begin{Bmatrix} \chi \\ \gamma \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial x} & 1 \end{bmatrix} \mathbf{N} \mathbf{a}_e = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} & 0 & \frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} & \frac{1}{2}(1-\xi) & -\frac{1}{L} & \frac{1}{2}(1+\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{a}_e$$

$$\mathbf{s} = \begin{Bmatrix} M \\ Q \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EI & 0 \\ 0 & GkA \end{bmatrix} \mathbf{B} \mathbf{a}_e = \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{a}_e$$

De acuerdo con los puntos siguientes de la sistemática del MEF¹⁰, la sustitución de las aproximaciones locales en 6.4 permite construir la matriz de rigidez y el vector de cargas de cada elemento.

¹⁰Ver sección 4.2.

6.7 Formulación C^0 en elementos placa

La formulación C^0 para elementos finitos tipo placa corresponde a la teoría de flexión de placas de Reissner-Mindlin. Esta teoría es aplicable a placas gruesas o poco esbeltas¹¹ y está basada en la hipótesis de que en el proceso de deformación las secciones transversales al plano medio de la placa permanecen planas, aunque no necesariamente normales al plano medio deformado. Con esta hipótesis, la deformación de la placa queda definida por el campo w de flechas o desplazamientos transversales del plano medio y el campo de giros (θ_x, θ_y) de las fibras inicialmente normales al plano medio.

La variable de campo es pues el campo de desplazamientos generalizado $\mathbf{w} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{pmatrix}$$

Los campos de deformaciones generalizadas y de tensiones generalizadas son, respectivamente:

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} -\theta_{y,x} \\ \theta_{x,y} \\ \theta_{y,y} - \theta_{x,x} \\ w_{,x} - \theta_y \\ w_{,y} + \theta_x \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{pmatrix}$$

siendo $\mathbf{s} = \mathbf{D} \mathbf{e}$, donde \mathbf{D} es una matriz de constantes elásticas.

La forma débil del problema, punto de partida de la “receta” del MEF, es similar a la de las vigas de Timoshenko. Ahora el dominio de cálculo $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es bidimensional y corresponde al plano medio de la placa. La forma débil es la siguiente:

Dados los espacios de funciones:

$$\mathcal{S} = \{\tilde{\mathbf{w}} \in H^1(\Omega) \mid \tilde{\mathbf{w}} = \bar{\mathbf{d}} \text{ en } S_d\}$$

y

$$\mathcal{V} = \{\delta \mathbf{w} \in H^1(\Omega) \mid \delta \mathbf{w} = 0, \text{ en } S_d\}$$

encontrar $\mathbf{w} \in \mathcal{S}$ tal que:

$$(\mathbf{s}^w, \mathbf{e}^{\delta w})_\Omega = (\delta \mathbf{w}, \mathbf{q})_\Omega + [\delta \mathbf{w}, \bar{\mathbf{t}}]_{S_t} \quad \forall \delta \mathbf{w} \in \mathcal{V}$$

¹¹En la práctica, placas con una relación canto/luz inferior a 1/8 ó 1/10, aproximadamente.

con la notación habitual.

El desarrollo de elementos finitos de clase C^0 se hace en base a esta forma débil del problema, siguiendo la sistemática del MEF. La elección de funciones de forma es ahora más sencilla, ya que no tienen que cumplir requisitos de continuidad C^1 . Sin embargo la formulación del elemento debe hacerse con cuidado, para evitar el problema conocido como *bloqueo de cortante*. El mecanismo de este bloqueo se traduce en una respuesta excesivamente rígida de los elementos cuando la relación canto/luz de la placa es pequeña (placas esbeltas). Este y otros problemas que presenta la formulación convencional del MEF, se describen en el capítulo siguiente.

Capítulo 7

Tecnología de elementos (III)

7.1 Introducción

En los capítulos anteriores se han presentado las líneas generales de la formulación convencional del MEF y sus fundamentos matemáticos. La formulación convencional se caracteriza por basarse en la aproximación de una sola variable de campo (escalar, vectorial o tensorial) a partir de la cual se obtienen de forma *fuerte* el resto de campos incógnita del problema.

La formulación convencional impone tres requisitos a las funciones de forma o funciones de aproximación local de la variable de campo incógnita básica:

- *Suavidad* dentro de los elementos o dominios locales.
- *Continuidad* a través de las fronteras entre elementos.
- *Complejidad* de la aproximación hasta un orden que depende del problema de campo que se resuelve.

El cumplimiento de estas tres condiciones y el seguimiento punto por punto de la “receta” o sistemática del MEF introducida en el Capítulo 5, garantiza la convergencia de las soluciones aproximadas hacia la solución exacta del problema de campo. Desde el punto de vista matemático, el método se convierte en un caso particular de los procedimientos de Rayleigh-Ritz-Galerkin y se cumplen las condiciones suficientes para la convergencia.

Sin embargo, en los programas actuales de cálculo basados en el MEF resulta muy corriente encontrar elementos cuya formulación no sigue estrictamente las líneas de la formulación convencional: se viola alguna de las condiciones suficientes de convergencia o se ejecuta de modo irregular alguno de los pasos de la sistemática del MEF.

Los elementos anteriores comenten lo que hacia mediados de los años 70 se bautizó con el nombre de *crímenes variacionales*: la formulación del elemento se aparta heurísticamente de la formulación convencional, pero el elemento funciona muy bien, incluso mejor que los elementos legítimos equivalentes. Desde el punto de vista matemático, el procedimiento deja de ser un método de Rayleigh-Ritz-Galerkin y, en principio, su convergencia no está garantizada.

Hoy en día se conoce en la mayoría de los casos la justificación matemática de aquellos crímenes variacionales. Sin embargo, los elementos *criminales* empezaron a utilizarse sin que hubiera una garantía matemática clara de su aceptabilidad. Simplemente, proporcionaban a juicio de los analistas mejores soluciones con un menor coste de cálculo.

Para concretar las observaciones anteriores, se pueden mencionar dos ejemplos clásicos de este modo de proceder:

- Elementos *no conformes*. En este tipo de elementos el campo incógnita básica no es continuo a través de las fronteras entre los elementos, esto es, se viola la segunda de las condiciones suficientes de convergencia mencionadas más arriba. Como resultado de esta falta de continuidad, alguna de las integrales que aparecen en la forma débil del problema se hace singular en las fronteras entre los elementos¹. A pesar de ello, se opera como si dicha integral, extendida a todo el dominio de cálculo, pudiera todavía descomponerse en suma de integrales extendidas a los distintos elementos.
- Integración reducida. Se sigue puntualmente la sistemática del MEF, pero para evaluar numéricamente las integrales necesarias, se emplean menos puntos de los precisos para integrar exactamente los polinomios que aparecen como funciones subintegrales.

Dentro del desarrollo del MEF, desde mediados de los años 60 los investigadores eran conscientes de que en muchos casos se obtenían mejores soluciones, con menos esfuerzo de cálculo, si se cometía alguno de estos crímenes variacionales.

Al comienzo de los 70 se vio que en determinados problemas era prácticamente imprescindible cometer un “crimen” si se quería llegar a soluciones mínimamente aceptables (p.ej. en problemas de plasticidad o de elasticidad con materiales incompresibles). En esos problemas la formulación convencional proporcionaba malos resultados en muchos casos.

Desde el punto de vista matemático, no se tuvo una forma de explicar por qué los elementos “criminales” funcionaban bien hasta el final de los años 70, cuando empezó a verse que la mayoría de estos elementos respondían a formulaciones variacionales con varios campos independientes. Todavía hoy la convergencia de los elementos que responden a un principio variacional mixto o híbrido de esta clase es motivo de investigación.

Desde el punto de vista de los usuarios del MEF, hasta principios de los años 80, y aun hoy en día en muchos casos, casi la única herramienta disponible para justificar el empleo de los elementos que se apartan de la formulación convencional ha sido la *prueba de la parcela*. Dicha prueba fue introducida por Irons en 1965 y, a lo largo del tiempo, su significado matemático real ha sido objeto de polémica. Sin embargo, durante los años 70 su satisfacción era aceptada como condición necesaria y suficiente para que un elemento diera lugar a soluciones convergentes, independientemente de cómo hubiese sido formulado.

Dentro de este capítulo se va a presentar primero una muestra de los problemas en los que la formulación convencional del MEF proporciona malos resultados. Luego se hablará de los remedios heurísticos o crímenes variacionales que se desarrollaron para sortear estos

¹En un problema de elasticidad, el significado físico de la singularidad es que la densidad de energía de deformación aproximada se hace infinita a lo largo de las fronteras entre los elementos.

problemas y, también, de la prueba de la parcela, como justificación para el empleo de los elementos resultantes. En el capítulo siguiente se introducirá la forma matemática de justificar los remedios heurísticos en base a principios variacionales con varios campos independientes.

7.2 Elementos no conformes

Se muestran en esta sección ejemplos tomados de dos áreas de aplicación del MEF en las que el uso de elementos no conformes resulta corriente.

7.2.1 Elasticidad bidimensional

En problemas de elasticidad plana los elementos cuadriláteros convencionales de cuatro nodos proporcionan una aproximación muy pobre si la flexión es el esfuerzo dominante. Cuando se utilizan estos elementos en problemas de flexión se obtiene una respuesta muy rígida y es necesaria una discretización extraordinariamente fina para que los resultados sean mínimamente aceptables.

Este problema era conocido desde los comienzos de la aplicación del MEF a problemas de elasticidad. En 1973 Wilson mostró que el comportamiento en flexión del elemento convencional cuadrilátero de cuatro nodos podía mejorarse mucho si se introducían dos nuevas funciones de forma asociadas a grados de libertad internos. Es decir, si se obtenía la aproximación local al campo de desplazamientos como:

$$u^h = \sum_{i=1}^4 N_i a_i^e + \sum_{i=1}^2 N_i^* \alpha_i$$

y análogamente para la otra componente v^h del desplazamiento. En la relación anterior N_i son las cuatro funciones de forma bilineales convencionales, a_i^e son los desplazamientos nodales, N_i^* son las dos funciones de forma añadidas y α_i son los dos grados de libertad internos asociados.

Las dos nuevas funciones están pensadas para que, junto con las funciones convencionales, den lugar a modos de deformación aproximados que sean capaces de reproducir un estado tensional de flexión pura. En las coordenadas (ξ, η) del dominio cuadrado estándar las funciones añadidas son:

$$\begin{aligned} N_1^* &= (1 - \xi^2) \\ N_2^* &= (1 - \eta^2) \end{aligned}$$

El inconveniente es que las dos nuevas funciones de forma se asocian a grados de libertad internos del elemento, esto es, a grados de libertad no compartidos con los elementos vecinos, con lo cual no existe necesariamente continuidad del campo de desplazamientos aproximado al pasar de un elemento a otro. Esto da lugar a la violación de una de las condiciones que la formulación convencional impone a las funciones de forma.

A pesar de lo anterior, puede formularse el elemento siguiendo la sistemática del MEF de construcción de la matriz de rigidez elemental y el vector elemental de cargas. Se genera así un elemento no conforme, pero los resultados que se obtienen con él son espectacularmente buenos, mucho mejores que los obtenidos con el elemento legítimo, incluso en mallas relativamente gruesas. En consecuencia, este elemento basado en la idea de Wilson y elaborado un poco más adelante por Taylor, se incorporó rápidamente a la mayoría de los programas comerciales de cálculo².

7.2.2 Flexión de placas

En la teoría clásica de flexión de placas delgadas, el estado de deformación de la placa se representa completamente a partir del campo de flechas o desplazamientos laterales w del plano medio de la placa.

La formulación convencional del MEF aplicada a esta clase de problemas requiere la continuidad a través de las fronteras entre elementos de los giros o primeras derivadas de la aproximación w^h al campo de flechas. Es lo que en el Capítulo 6 se denominó continuidad C^1 del campo aproximado w^h .

Determinar funciones de forma que cumplan las condiciones de continuidad C^1 es relativamente complejo. De hecho, como se vio en el Capítulo 6, esto no es posible si se utilizan funciones polinómicas sencillas y sólo tres grados de libertad por nodo, la flecha y los dos giros.

Debido a la importancia tecnológica de los problemas de cálculo de placas, se ha dedicado un esfuerzo investigador muy importante a resolver esta dificultad. Manteniéndose dentro de la teoría clásica de flexión de placas, se han propuesto distintas soluciones:

- Hiperelementos. Se trata de elementos que cumplen los requisitos de continuidad C^1 en base a la introducción de grados de libertad no físicos en los nodos (p.ej. derivadas de la flecha de orden superior al primero).
- Funciones de forma definidas a trozos. Se hace cumplir la continuidad C^1 a través de las fronteras de los elementos en base a disminuir la suavidad de las funciones de aproximación de la flecha en el interior de los mismos. Para ello se divide cada elemento en subelementos y se impone la continuidad C^1 tanto a través de las fronteras interiores como exteriores de estos subelementos.
- Elementos no conformes. En realidad no es una solución, se trata simplemente de utilizar elementos en los que no se cumple la continuidad de giros a través de las fronteras de los elementos.

Las dos primeras soluciones cumplen los requisitos de la formulación convencional, pero dan lugar a elementos de formulación muy compleja y que no siempre funcionan mejor que

²Este elemento se conoce con el nombre de elemento de Wilson-Taylor o elemento de *modos incompatibles*, y constituye uno de los primeros elementos de *altas prestaciones*. Elementos de altas prestaciones son aquellos capaces de suministrar resultados con un nivel de aproximación suficiente desde el punto de vista ingenieril utilizando mallados relativamente gruesos.

los elementos no conformes. De hecho, los hiperelementos y los elementos con funciones de forma definidas a trozos han sido desterrados de la práctica actual.

7.3 Bloqueo por deformación isocórica

A principios de la década de los 70 se comenzaron a detectar dificultades en la aplicación de la formulación convencional del MEF a problemas de plasticidad o de elasticidad con materiales poco compresibles. Estos problemas tienen en común el que la deformación es isocórica, esto es, tiene lugar manteniendo el volumen del material prácticamente constante³.

Las dificultades eran muy serias. En problemas de plasticidad no se calculaban correctamente las cargas límite, cuya existencia se demostraba teóricamente. Bien se obtenían cargas límite que excedían el nivel superior calculado mediante el teorema cinemático del cálculo plástico, o bien no se obtenía ninguna carga límite, esto es, se podía cargar indefinidamente la estructura o medio continuo sin llegar al colapso. Además, las soluciones apenas mejoraban con el refinamiento de las mallas.

En problemas de elasticidad con materiales poco compresibles se obtenían soluciones muy rígidas, sin apenas deformación o con deformaciones muy inferiores a las teóricas o experimentales. Las soluciones tampoco mejoraban perceptiblemente con el refinamiento de los mallados, esto es, no se producía convergencia a efectos prácticos.

Para designar estas situaciones se acuñó el término de *bloqueo* o *atenazamiento* de malla⁴. Pareció en aquel momento que el MEF no podía proporcionar resultados aceptables en dos áreas con aplicaciones industriales muy importantes.

En 1974, en un artículo histórico que abrió las puertas a muchas aplicaciones no lineales del MEF, Nagtegaal⁵ dio una explicación a estos fenómenos de bloqueo y propuso una solución que pasaba por el abandono de la formulación convencional de los elementos. Desde entonces hasta hoy se han propuesto otras soluciones al problema, que se han utilizado luego con más o menos éxito. Como resultado de este esfuerzo rara vez se emplean hoy en día elementos de formulación convencional en las aplicaciones del MEF dentro del ámbito no lineal.

Con posterioridad se han descubierto nuevos tipos de bloqueo que aparecen en otras clases de problemas. Hay que mencionar los dos siguientes:

- Bloqueo de cortante⁶. Aparece en los elementos placa de tipo C^0 cuando se utilizan para estudiar la flexión de placas muy esbeltas.
- Bloqueo de membrana⁷. Aparece en los elementos lámina cuando se utilizan para

³No todos los modelos de plasticidad dan lugar a deformaciones plásticas isocóricas, pero sí los modelos aplicados habitualmente al estudio de plasticidad de metales o al flujo plástico de suelos arcillosos.

⁴El fenómeno se conoce como “volumetric locking” en la literatura anglosajona.

⁵J.C. Nagtegaal, D.M. Parks y J.R. Rice. On Numerically Accurate Finite Element Solutions in the Fully Plastic Range. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol.4, págs. 153-178, 1974. Este artículo es uno de los más citados de la historia del MEF.

⁶Conocido como “shear locking” en la literatura anglosajona.

⁷Conocido como “membrane locking” en la literatura anglosajona.

estudiar la deformación de láminas de simple o doble curvatura.

Desde el punto de vista matemático, estos dos bloqueos responden a la misma razón que el bloqueo volumétrico o por deformación isocórica.

Lo característico de los bloqueos es que no se produce un cambio perceptible de la solución con el refinamiento de la malla, o el cambio es tan pequeño que es como si no existiera a efectos prácticos.

La razón de que se produzcan los bloqueos está en la elección de las funciones de forma. Una vez elegidas las funciones de forma, están determinadas las formas o modos que puede adoptar el campo de deformaciones aproximado dentro del elemento. Imagínese que dentro de esos modos predeterminados no hay ninguno que permita la deformación del elemento sin cambio de volumen, esto es, que para cualquier combinación de movimientos nodales el campo aproximado de deformación que se obtiene dentro del elemento implica un cambio de volumen. Entonces, si el material es de naturaleza incompresible (resistencia infinita al cambio de volumen), el campo aproximado de deformación dará lugar a la aparición de una resistencia considerable al movimiento de los nodos, lo que origina el bloqueo.

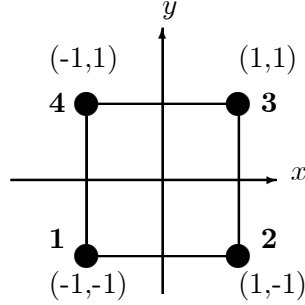
Un razonamiento similar puede hacerse para el caso en que los modos de deformación de un elemento placa de tipo C^0 no incluyan modos sin deformación de cortante (bloqueo de cortante), o para el caso en que los modos de deformación de un elemento lámina no incluyan modos de flexión sin deformación de la superficie media o deformación de membrana (bloqueo de membrana).

En todos esos casos, la elección de las funciones de forma impone, a través del comportamiento del material, restricciones cinemáticas al campo incógnita básica que son superiores a las físicamente razonables.

En los párrafos siguientes se trata de explicar el mecanismo por el que se produce el bloqueo volumétrico en el elemento cuadrilátero convencional de cuatro nodos. El mecanismo es idéntico desde el punto de vista matemático en los casos de bloqueo de cortante y bloqueo de membrana.

7.4 Bloqueo del elemento cuadrilátero convencional

Sea el elemento cuadrilátero isoparamétrico convencional de cuatro nodos. Para simplificar el álgebra, se supondrá que se trata de un elemento cuadrado de dos unidades de lado, esto es, que el elemento ocupa el dominio estándar isoparamétrico.



Se toma el origen de los ejes locales en el centro de áreas del elemento. Entonces, cuando el elemento se utiliza para el estudio de problemas de elasticidad bidimensional, las dos componentes del campo de desplazamientos se aproximan dentro del elemento como:

$$\mathbf{u}^h = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{a}_e$$

donde:

$$\mathbf{N}^t = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(1-x)(1-y) & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}(1-x)(1-y) \\ \frac{1}{4}(1+x)(1-y) & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}(1+x)(1-y) \\ \frac{1}{4}(1+x)(1+y) & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}(1+x)(1+y) \\ \frac{1}{4}(1-x)(1+y) & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}(1-x)(1+y) \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{a}_e = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

Por otro lado, en un problema de deformación plana, las componentes del campo de deformaciones se aproximan como:

$$\mathbf{e}^h = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \mathbf{N} \mathbf{a}_e = \mathbf{L} \mathbf{N} \mathbf{a}_e = \mathbf{B} \mathbf{a}_e$$

donde la matriz \mathbf{B} es:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{4}(1-y) & 0 & \frac{1}{4}(1-y) & 0 & \frac{1}{4}(1+y) & 0 & -\frac{1}{4}(1+y) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4}(1-x) & 0 & -\frac{1}{4}(1+x) & 0 & \frac{1}{4}(1+x) & 0 & \frac{1}{4}(1-x) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{8}(1-x) & -\frac{1}{8}(1-y) & -\frac{1}{8}(1+x) & \frac{1}{8}(1-y) & \frac{1}{8}(1+x) & \frac{1}{8}(1+y) & \frac{1}{8}(1-x) & -\frac{1}{8}(1+y) \end{bmatrix}$$

Cada columna de la matriz anterior representa un posible modo de deformación del elemento. Sin embargo, las ocho columnas de la matriz no son linealmente independientes entre sí, sólo hay cinco columnas linealmente independientes, lo que da lugar únicamente a cinco modos de deformación independientes. Estos modos son:

$$\mathbf{m}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{m}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{m}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{m}_4 = \begin{bmatrix} y \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2}x \end{bmatrix} \quad \mathbf{m}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ x \\ 0 \\ \frac{1}{2}y \end{bmatrix}$$

Es importante darse cuenta de que, una vez seleccionadas las funciones de forma \mathbf{N} , el elemento ya no puede deformarse arbitrariamente. La elección de las funciones de forma que se ha hecho implica que en el interior del elemento el campo de deformaciones aproximado sólo puede obtenerse como combinación lineal de esos cinco modos de deformación.

La matriz \mathbf{B} puede descomponerse en suma de dos matrices \mathbf{B}_v y \mathbf{B}_d , la primera correspondiente a la parte volumétrica de la deformación y la segunda a la parte desviadora. Estas dos matrices son:

$$\mathbf{B}_v = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{B}_{v0}$$

donde \mathbf{B}_{v0} es el vector fila:

$$\left[\frac{-1+y}{4} \quad \frac{-1+x}{4} \quad \frac{1-y}{4} \quad \frac{-1-x}{4} \quad \frac{1+y}{4} \quad \frac{1+x}{4} \quad \frac{-1-y}{4} \quad \frac{1-x}{4} \right]$$

y

$$\mathbf{B}_d = \mathbf{B} - \mathbf{B}_v$$

A partir de esta descomposición, resulta que en un problema de deformación plana se cumple que:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} \mathbf{B}_v &= \frac{E}{(1-2\nu)} \mathbf{B}_v \\ \mathbf{D} \mathbf{B}_d &= \frac{E}{(1+\nu)} \mathbf{B}_d \end{aligned}$$

siendo \mathbf{D} la matriz de coeficientes elásticos:

$$\mathbf{D} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{(1-\nu)} & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 0 \\ \frac{\nu}{(1-\nu)} & 1 & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 0 \\ \frac{\nu}{(1-\nu)} & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{(1-\nu)} \end{bmatrix}$$

y E es el módulo de elasticidad y ν el coeficiente de Poisson.

De esta manera la matriz de rigidez del elemento queda:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_e &= (\mathbf{B}^t \mathbf{D} \mathbf{B})_{\Omega_e} = (\{\mathbf{B}_v^t + \mathbf{B}_d^t\} \mathbf{D} \{\mathbf{B}_v + \mathbf{B}_d\})_{\Omega_e} \\ &= (\mathbf{B}_v^t \mathbf{D} \mathbf{B}_v)_{\Omega_e} + (\mathbf{B}_d^t \mathbf{D} \mathbf{B}_v)_{\Omega_e} + (\mathbf{B}_v^t \mathbf{D} \mathbf{B}_d)_{\Omega_e} + (\mathbf{B}_d^t \mathbf{D} \mathbf{B}_d)_{\Omega_e} \\ &= \frac{E}{(1-2\nu)} (\mathbf{B}_v^t \mathbf{B}_v)_{\Omega_e} + \frac{E}{(1+\nu)} (\mathbf{B}_d^t \mathbf{B}_d)_{\Omega_e} \\ &= \mathbf{K}_{ev} + \mathbf{K}_{ed} \end{aligned}$$

al ser $\mathbf{B}_d^t \mathbf{B}_v = \mathbf{B}_v^t \mathbf{B}_d = 0$, ya que la suma de las tres primeras filas de \mathbf{B}_d es idénticamente nula.

Resulta entonces que la matriz de rigidez elemental puede descomponerse en dos partes, una correspondiente a la parte volumétrica de la deformación y otra a la parte desviadora. Cada una de ellas es el producto de una matriz por un coeficiente derivado de las propiedades elásticas del material. Nótese que el coeficiente correspondiente a la parte volumétrica tiende a infinito cuando el coeficiente de Poisson tiende a $\frac{1}{2}$.

Como consecuencia, si para simplificar imaginamos una malla con un solo elemento, el sistema global de ecuaciones del MEF:

$$\mathbf{K}_e \mathbf{a}_e = (\mathbf{K}_{ev} + \mathbf{K}_{ed}) \mathbf{a}_e = \mathbf{f}_e$$

tenderá a ser:

$$\mathbf{K}_{ev} \mathbf{a}_e = \mathbf{0}$$

cuando el coeficiente de Poisson tiende a $\frac{1}{2}$, ya que \mathbf{f}_e es constante y \mathbf{K}_{ed} tiende a un valor finito.

En consecuencia, las únicas soluciones con desplazamientos nodales \mathbf{a}_e distintos de cero que admitirá el sistema serán los autovectores de valor propio nulo de la matriz \mathbf{K}_{ev} .

Para ver cuáles son estos autovectores se debe profundizar en la estructura de la matriz \mathbf{K}_{ev} . Esta matriz es:

$$\mathbf{K}_{ev} = \frac{E}{(1-2\nu)} (\mathbf{B}_v^t \mathbf{B}_v)_{\Omega_e} \quad (7.1)$$

$$= \frac{E}{3(1-2\nu)} (\mathbf{B}_{v0}^t \mathbf{B}_{v0})_{\Omega_e} \quad (7.2)$$

$$= \frac{E}{3(1-2\nu)} \sum_i \mathbf{B}_{v0}^t \mathbf{B}_{v0} w_i \quad (7.3)$$

donde i varía desde 1 al número de puntos de integración necesarios, y w_i es el peso asignado a cada uno de esos puntos.

Como se tiene que el vector fila \mathbf{B}_{v0} puede descomponerse en:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{v0} &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &+ \frac{y}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ &+ \frac{x}{4} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

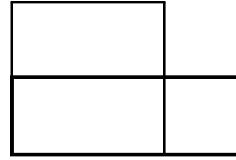
resulta que la matriz \mathbf{K}_{ev} , que es de 8×8 , tiene, como mucho, rango 3, ya que el valor de \mathbf{B}_{v0} en cualquier punto de integración dentro del elemento puede obtenerse siempre como combinación lineal de sólo tres vectores.

Así, resulta que la matriz \mathbf{K}_{ev} tiene al menos cinco autovectores linealmente independientes con autovalor nulo. Una base del espacio de autovectores con autovalor nulo puede ser la siguiente⁸:

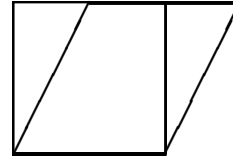
$$\mathbf{a}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{a}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{a}_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{a}_4 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{a}_5 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Los tres primeros vectores corresponden a movimientos de sólido rígido del elemento, es decir, a movimientos de conjunto en los que no hay deformaciones. El cuarto, a un movimiento en el que la deformación ε_{xx} es igual y de signo contrario a la deformación ε_{yy} . Por último, el quinto vector corresponde a una deformación de corte puro.

⁸Puede comprobarse que todos estos vectores son ortogonales a \mathbf{B}_{v0} .



Modo \mathbf{a}_4



Modo \mathbf{a}_5

Cuando el material tienda a ser incompresible, el elemento sólo podrá deformarse según uno de estos dos últimos modos. Cuando las condiciones de contorno y las acciones no se correspondan con una deformación según uno de estos modos, tendrá lugar el bloqueo de la malla.

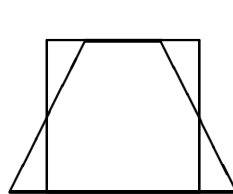
7.5 Soluciones heurísticas a los problemas de bloqueo

7.5.1 Integración reducida

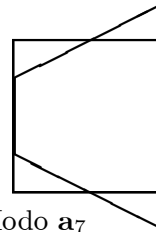
Nótese que si en 7.3 se emplea un solo punto de integración para formar la matriz \mathbf{K}_{ev} , entonces su rango pasa de 3 a 1, es decir, aparecen dos nuevos modos (autovectores) según los cuales el elemento puede deformarse sin cambio de volumen.

Si se utiliza el centro de áreas del elemento como único punto de integración, los dos nuevos modos son:

$$\mathbf{a}_6 = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{a}_7 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}$$



Modo \mathbf{a}_6



Modo \mathbf{a}_7

Esta es una buena solución para el bloqueo de este elemento: subintegrar la parte volumétrica de la matriz de rigidez y mantener la integración correcta o completa de la parte desviadora. Esta técnica se conoce como *integración reducida selectiva*, y da lugar a

un elemento relativamente robusto, potente y de uso general el problemas de plasticidad y elasticidad incompresible.

Desde el punto de vista de la programación y del ahorro de tiempo de cálculo, interesa subintegrar también la parte desviadora de la matriz de rigidez del elemento. Esto da lugar a un elemento completamente subintegrado o de *integración reducida* propiamente dicha.

Se trata de un elemento muy barato, que proporciona tiempos de ejecución significativamente menores que los del elemento convencional, pero que presenta problemas en cierta medida opuestos a los del bloqueo. Ahora existen en el elemento dos modos de deformación, \mathbf{a}_6 y \mathbf{a}_7 a los que no se opone ninguna fuerza interna de respuesta del material. Son los llamados *modos de energía nula* o modos de “hourglassing”. El elemento puede deformarse según esos modos sin producir ninguna tensión, como si se tratase de modos de sólido rígido.

Los modos de energía nula pueden originar dificultades si son excitados por las acciones impuestas y las condiciones de contorno. En esos casos se calculan más o menos bien las tensiones, pero los desplazamientos están completamente mal y las deformadas son impresentables.

A pesar de este problema, los elementos de integración reducida se utilizan mucho, sobre todo en programas de integración explícita⁹, donde es vital reducir el tiempo de ejecución dedicado a los cálculos en los elementos.

Se han desarrollado técnicas de control de “hourglassing”, con un coste computacional intermedio entre el de la integración reducida y el de la integración reducida selectiva. Se trata de técnicas heurísticas que se basan en introducir una *rigidez artificial* que se opone a la deformación de energía nula. A primera vista esto parece una solución sumamente artificiosa, pero afinando con cuidado la rigidez artificial los elementos resultantes funcionan bien para un rango muy amplio de problemas. De hecho, esta clase de elementos se encuentran ampliamente representados en las bibliotecas de los programas comerciales de cálculo y su uso está muy generalizado, aunque no les faltan detractores.

En los programas comerciales, todos los elementos de integración reducida incorporan algún tipo de control de “hourglassing”, sintonizado para el tipo de cálculos que se supone que resuelve el usuario medio del programa. Fuera de este rango, el control de “hourglassing” puede dar lugar a soluciones artificialmente rígidas o flexibles.

7.5.2 Formulación $\overline{\mathbf{B}}$

El bloqueo se debe a que no es adecuada la matriz de interpolación de deformaciones \mathbf{B} que se deriva de las funciones de forma seleccionadas \mathbf{N} , por dar lugar a demasiadas restricciones sobre el movimiento. Puede entonces intentar resolverse la dificultad cambiando la matriz \mathbf{B} por otra matriz $\overline{\mathbf{B}}$ (léase b-barra) que no dé lugar a tantas restricciones.

La solución consistiría en utilizar en el cálculo de la matriz de rigidez elemental una matriz $\overline{\mathbf{B}}$, en lugar de la matriz “correcta” \mathbf{B} .

La idea es que si se tiene:

⁹Veáse el Capítulo 10.

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_v + \mathbf{B}_d$$

entonces, como es la parte \mathbf{B}_v la que produce el bloqueo, el bloqueo podría evitarse trabajando con una matriz $\overline{\mathbf{B}}$ tal que:

$$\overline{\mathbf{B}} = \overline{\mathbf{B}}_v + \mathbf{B}_d$$

El inconveniente es que en este caso se dejará de cumplir estrictamente la sistemática del MEF, ya que, evidentemente, será:

$$\overline{\mathbf{B}} \neq \mathbf{L} \mathbf{N} = \mathbf{B}$$

La clave de este procedimiento está en elegir acertadamente las funciones contenidas en $\overline{\mathbf{B}}_v$. Nagtegaal en su artículo propuso una solución de este estilo. En la referencia 1 de la bibliografía recomendada pueden verse otras propuestas. Nótese que si en el elemento cuadrilátero de la sección anterior se toma para $\overline{\mathbf{B}}_v$ el valor en el centro de áreas de la matriz \mathbf{B}_v , es decir:

$$\overline{\mathbf{B}}_v = \mathbf{B}_v(0,0) = \text{constante}$$

se obtiene el elemento de integración reducida selectiva. De este modo, la formulación $\overline{\mathbf{B}}$ permite generalizar los “trucos” de la integración reducida.

Las formulaciones $\overline{\mathbf{B}}$ se conocen también en la literatura con el nombre de métodos de *proyección de deformaciones*.

7.6 La prueba de la parcela

La prueba de la parcela o “patch test” fue propuesta por Irons a mediados de los años 60 como comprobación de la formulación de los elementos y como test de convergencia aplicable a elementos no conformes.

Durante los años 70 el cumplimiento de la prueba se tomó como condición necesaria y suficiente de convergencia y permitió justificar el uso de elementos que se apartaban de la formulación convencional del MEF. Sin embargo, hacia el final de los 70, una serie de experimentos numéricos sugirieron que la prueba podría no ser una condición necesaria. Además, al poco tiempo, mediante un contraejemplo, alguien vio que la prueba podría no proporcionar tampoco una condición suficiente.

A la vista de esos resultados, Irons y otros notables defensores de la utilidad de la prueba, la repensaron y llegaron a la conclusión de que, salvo en ciertas situaciones patológicas, su cumplimiento sí que era una condición necesaria y suficiente de convergencia para las soluciones aproximadas obtenidas mediante el MEF.

La polémica continuó y el significado matemático real de la prueba sigue siendo objeto de cierta discusión. El lector interesado puede encontrar más detalles en las referencias 1 y 3 de la bibliografía recomendada.

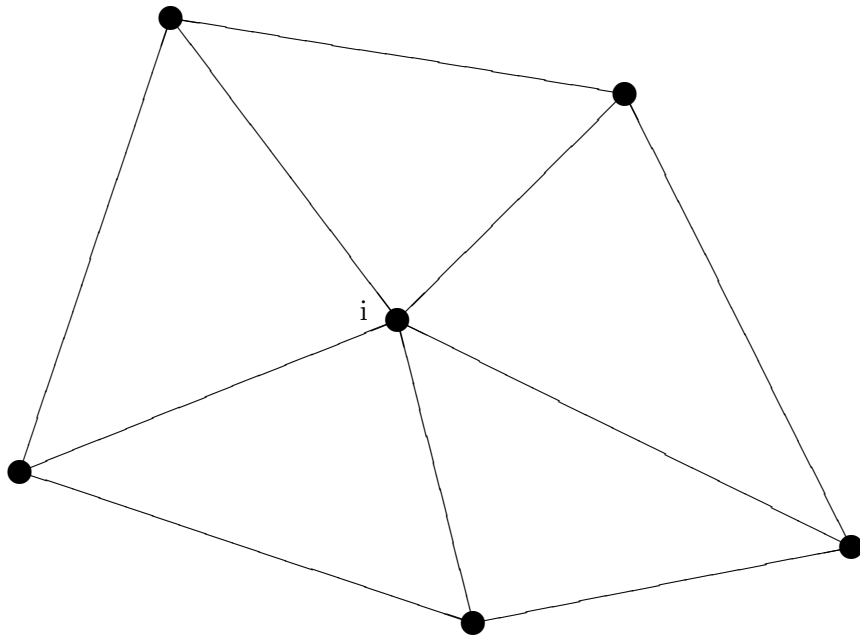
Lo que sí parece claro es que la prueba de la parcela es una forma muy sencilla de comprobar la condición de consistencia o *completitud* de la formulación¹⁰. Y que si la formulación es consistente y estable¹¹, entonces la formulación es convergente.

En cualquier caso, el cumplimiento de la prueba de la parcela ha sido durante muchos años la única justificación al empleo de elementos que comenten *crímenes variacionales* en su formulación.

La idea física de la prueba es muy sencilla. Piénsese por ejemplo en un problema de elasticidad. Si se considera el dominio de cálculo Ω dividido cada vez en un número mayor de subdominios Ω_e , parece lógico pensar que el campo de desplazamientos \mathbf{u} solución exacta del problema podrá aproximarse progresivamente mejor mediante una función que varíe linealmente dentro de cada subdominio.

En una situación que tienda al límite de disminución del tamaño de los subdominios, llegará un momento en que la solución exacta no podrá distinguirse de su aproximación mediante una función lineal. Entonces, si una parcela o grupo de elementos finitos de forma arbitraria es capaz de representar de forma exacta una variación lineal del campo incógnita básica $\tilde{\mathbf{u}}$ dentro de la parcela, resulta razonable pensar que la aproximación obtenida por el MEF tenderá a la solución exacta al aumentar o refinar la discretización.

La realización de la prueba de la parcela es muy sencilla en el contexto de un programa de elementos finitos. Una forma clásica de la misma es la siguiente:



¹⁰El cumplimiento de la condición de consistencia significa que la formulación discreta se aproxima tanto como se quiera a la formulación continua de partida al aumentar el nivel de discretización.

¹¹Una formulación es estable cuando pequeñas perturbaciones en los datos no producen grandes perturbaciones en la solución aproximada.

1. Se toma una parcela arbitraria de elementos, con forma no regular y con, al menos, un punto interior i .
2. Se toma una función polinómica que represente la variable de campo incógnita básica \mathbf{u} en la parcela. El orden del polinomio depende del tipo de problema, y debe ser tal que proporcione un campo de tensiones generalizadas constante dentro de la parcela. En Elasticidad, se toma una función lineal.
3. Se determina el valor de la función anterior en todos los nodos de la parcela.
4. Utilizando el programa de elementos finitos en el que se encuentre implementado el elemento que se prueba, se imponen en los nodos del contorno de la parcela los valores la variable incógnita básica que les correspondan según la función que se haya tomado (esto es, se imponen exclusivamente condiciones esenciales de contorno).
5. Se considera que el elemento cumple la prueba de la parcela si el programa de elementos finitos calcula el valor correcto de la función \mathbf{u} en todos los nodos interiores de la parcela y la tensión generalizada (constante) correcta en todos los elementos de la parcela.

La forma más elaborada de la prueba es similar a la anterior, pero en el contorno de la parcela se imponen no sólo condiciones de contorno esenciales, sino también las condiciones de contorno naturales (tensiones generalizadas) compatibles con la función de campo \mathbf{u} seleccionada.

Capítulo 8

Tecnología de elementos (IV)

8.1 Introducción

Para cerrar los temas dedicados a la tecnología de elementos, se trata en este capítulo de acercarse a las técnicas modernas de desarrollo de elementos finitos.

Ya se ha comentado que los elementos elaborados siguiendo las directrices de la formulación convencional se emplean pocas veces en la práctica industrial diaria. Y ello a pesar de que las soluciones que proporcionan estos elementos tienen garantizada su convergencia, al hacer que la sistemática del MEF se convierta en un procedimiento de Rayleigh-Ritz-Galerkin.

Los elementos que se utilizan en la práctica incorporan casi siempre algún “truco” que los aparta de la formulación convencional. En el capítulo anterior se han introducido algunos de ellos:

- Integración reducida con control de *hourglassing*.
- Integración reducida selectiva.
- Proyección de deformaciones o deformaciones supuestas ($\bar{\mathbf{B}}$).
- Modos incompatibles.

En el capítulo anterior se han mostrado algunas razones por las que estos “trucos” empezaron a utilizarse. La razón última es que en la práctica industrial hacen falta elementos finitos de *altas prestaciones*: elementos simples, en general con funciones de forma de orden bajo, que con mallados relativamente gruesos sean capaces de proporcionar soluciones con una precisión aceptable desde el punto de vista ingenieril. Y el hecho es que la formulación convencional del MEF no proporciona esas prestaciones en muchos casos de alto interés industrial.

Los “trucos” aparecen así para dar respuesta a esa necesidad industrial imperiosa de llevar a cabo cada vez cálculos más complejos en el menor tiempo posible. Pero desde el punto de vista matemático plantean numerosos interrogantes. ¿Por qué funcionan (convergen) los elementos con truco? ¿Por qué parece que funcionen incluso mejor que

los elementos convencionales? ¿Convergen de verdad en todos los casos? ¿Podrían fallar estos elementos en algún caso particular?

El fundamento matemático de los elementos que se apartan de la formulación convencional empezó a vislumbrarse hacia finales de los 70 y principios de los 80. Se descubrió entonces que alguno de los elementos de integración reducida utilizado para problemas de análisis de tensiones podía obtenerse sin ningún artificio si se partía de un principio variacional diferente del principio de la mínima energía potencial que utiliza la formulación convencional.

En problemas de elasticidad la formulación clásica del MEF se basa en el principio de la mínima energía potencial. Habiendo muchos otros principios variacionales para plantear el mismo problema, ¿por qué ha de esperarse que los elementos derivados del principio de la mínima energía potencial sean los mejores?

Los elementos de altas prestaciones pueden derivarse, en general, de principios variacionales con varios campos primarios o independientes. Desde el punto de vista matemático, la tecnología moderna de desarrollo de elementos está basada en esta idea: el empleo de principios variacionales multicampo distintos del principio de la mínima energía potencial.

La convergencia de las soluciones que proporcionan los elementos finitos formulados de este modo es mucho más difícil de estudiar que la de los elementos convencionales. Tanto más difícil cuantos más campos independientes haya en el principio variacional de partida. En general, la solución del problema ya no hace mínimo o máximo un potencial, sino simplemente estacionario.

El estudio de las propiedades de convergencia de esta clase de elementos es un campo de investigación activo dentro de lo que es hoy en día la faceta matemática del MEF.

El objetivo de este capítulo es presentar una muestra de la tecnología moderna de desarrollo y/o justificación de elementos de altas prestaciones. Para ello se va a justificar, a partir de un principio variacional multicampo, el elemento cuadrilátero no conforme de Wilson y Taylor. Recuérdese que este elemento fue introducido en la Sección 7.2.1 de una manera heurística.

Luego se mencionarán las condiciones de Babuška-Brezzi, cuyo cumplimiento permite asegurar la convergencia de las soluciones obtenidas con cierta clase de elementos. Las condiciones de Babuška-Brezzi son un resultado clásico de la investigación sobre la convergencia de elementos finitos con formulación mixta, esto es, con dos campos independientes.

8.2 Principio variacional multicampo

Uno de los principios variacionales que puede utilizarse para plantear el problema elástico es el principio de Hu-Washizu. Según este principio, los campos solución del problema elástico, \mathbf{u} (desplazamientos), \mathbf{e} (deformaciones), \mathbf{s} (tensiones) y \mathbf{t} (presiones en el contorno), son los que hacen estacionario el funcional¹:

$$\Pi_w(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{e}}, \tilde{\mathbf{s}}, \tilde{\mathbf{t}}) = \frac{1}{2}(\mathbf{s}^e, \tilde{\mathbf{e}})_\Omega + (\tilde{\mathbf{s}}, \mathbf{e}^u - \tilde{\mathbf{e}})_\Omega - (\mathbf{b}, \tilde{\mathbf{u}})_\Omega - [\tilde{\mathbf{t}}, \tilde{\mathbf{u}}]_{S_t} + [\tilde{\mathbf{t}}, \bar{\mathbf{d}} - \tilde{\mathbf{u}}]_{S_d} \quad (8.1)$$

¹Se emplea la notación introducida en la sección 3.4 para el problema elástico.

cuando éste se define sobre campos $\tilde{\mathbf{u}}$, $\tilde{\mathbf{e}}$, $\tilde{\mathbf{s}}$ y $\tilde{\mathbf{t}}$ sin ninguna restricción, más que las necesarias para que las integrales tengan sentido.

Puede pensarse en imponer a los campos $\tilde{\mathbf{u}}$ y $\tilde{\mathbf{e}}$ de 8.1 las restricciones:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{d}} \quad \text{en} \quad S_d \quad (8.2)$$

$$\tilde{\mathbf{e}} = \mathbf{e}^u + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \text{en} \quad \Omega \quad (8.3)$$

Entonces se obtiene un nuevo funcional:

$$\begin{aligned} \Pi_s(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}, \tilde{\mathbf{s}}) &= \frac{1}{2}(\mathbf{s}^e, \tilde{\mathbf{e}})_\Omega + (\tilde{\mathbf{s}}, \mathbf{e}^u - \tilde{\mathbf{e}})_\Omega - (\mathbf{b}, \tilde{\mathbf{u}})_\Omega - [\bar{\mathbf{t}}, \tilde{\mathbf{u}}]_{S_t} \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{s}^u, \mathbf{e}^u)_\Omega + (\mathbf{s}^u, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}})_\Omega + \frac{1}{2}(\mathbf{s}^e, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}})_\Omega - (\tilde{\mathbf{s}}, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}})_\Omega - (\mathbf{b}, \tilde{\mathbf{u}})_\Omega - [\bar{\mathbf{t}}, \tilde{\mathbf{u}}]_{S_t} \end{aligned}$$

y la solución del problema elástico hará estacionario este funcional entre los campos que cumplan con las restricciones 8.2 y 8.3.

La primera variación del funcional Π_s da:

$$\delta \Pi_s = (\mathbf{s}^u + \mathbf{s}^e - \tilde{\mathbf{s}}, \delta \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}})_\Omega - (\text{div}(\mathbf{s}^u + \mathbf{s}^e) + \mathbf{b}, \delta \tilde{\mathbf{u}})_\Omega - (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}, \delta \tilde{\mathbf{s}})_\Omega + [(\mathbf{s}^u + \mathbf{s}^e)\mathbf{n} - \bar{\mathbf{t}}, \delta \tilde{\mathbf{u}}]_{S_t}$$

La condición de estacionaridad, $\delta \Pi_s = 0$, proporciona las ecuaciones de Euler correspondientes a este principio variacional:

$$\begin{aligned} \text{div}(\mathbf{s}^u + \mathbf{s}^e) + \mathbf{b} &= 0 \quad \text{en} \quad \Omega \quad (\text{equilibrio en } \Omega) \\ (\mathbf{s}^u + \mathbf{s}^e)\mathbf{n} - \bar{\mathbf{t}} &= 0 \quad \text{en} \quad S_t \quad (\text{equilibrio en } S_t) \\ \mathbf{s}^u + \mathbf{s}^e &= \tilde{\mathbf{s}} \quad \text{en} \quad \Omega \\ \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} &= 0 \quad \text{en} \quad \Omega \end{aligned}$$

8.3 Discretización por el MEF

La discretización por el MEF del principio variacional anterior da lugar a elementos de *deformaciones supuestas*².

La sistemática del MEF es ahora la siguiente:

1. El dominio de cálculo Ω se divide en parcelas o elementos: $\Omega = \bigcup_i \Omega_i$.
2. Dentro de cada elemento Ω_i , se aproximan los campos que intervienen en el funcional Π_s :

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{N} \mathbf{a}_e \quad (8.4)$$

²En la literatura anglosajona estos elementos se conocen como elementos ANS ("Assumed Natural Strain").

$$\mathbf{e}^u = \frac{1}{2}(\nabla + \nabla^t)\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{B} \mathbf{a}_e \quad (8.5)$$

$$\mathbf{s}^u = \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{a}_e \quad (8.6)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{G} \mathbf{c}_e \quad (8.7)$$

$$\tilde{\mathbf{s}} = \mathbf{S} \mathbf{p}_e \quad (8.8)$$

donde \mathbf{N} son las funciones de forma serendípitas habituales, \mathbf{G} es la llamada matriz de modos de deformación mejorada y \mathbf{S} es la matriz de modos de tensión. Para no tropezar con los llamados *principios de limitación*³ y evitar la aparición de matrices singulares, en la elección de las funciones \mathbf{G} y \mathbf{S} se deben respetar las condiciones siguientes:

- Las columnas de \mathbf{G} deben ser linealmente independientes.
- Las columnas de \mathbf{G} deben ser también linealmente independientes de las columnas de \mathbf{B} .
- Las columnas de \mathbf{S} deben incluir los modos de tensión constante en el elemento.
- Las matrices \mathbf{G} y \mathbf{S} han de ser ortogonales en el sentido de que:

$$\int_{\Omega_i} \mathbf{S}^t \mathbf{G} d\Omega = 0$$

3. Las aproximaciones locales 8.4 a 8.8 dan lugar una aproximación global al campo de desplazamientos $\tilde{\mathbf{u}}$ que es continua en el dominio de cálculo Ω ; y a aproximaciones globales a los campos $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ y $\tilde{\mathbf{s}}$ continuas a trozos en Ω . Así, el funcional Π_s puede ponerse como suma de funcionales similares a él pero definidos en cada elemento:

$$\Pi_s(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}, \tilde{\mathbf{s}}) = \sum_i \Pi_{s_i}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}, \tilde{\mathbf{s}})$$

4. El funcional Π_s se hará estacionario cuando todos los funcionales Π_{s_i} se hagan estacionarios. De este modo, basta con estudiar las condiciones de estacionaridad de uno de estos funcionales extendido a un elemento. Para simplificar la notación, a partir de este punto se suprime el subíndice i indicativo del dominio elemental.
5. La sustitución de las expresiones 8.4 a 8.8 en el funcional elemental proporciona su expresión discreta:

$$\Pi_s = \frac{1}{2} \mathbf{a}_e^t (\mathbf{B}^t \mathbf{D} \mathbf{B})_{\Omega} \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_e^t (\mathbf{B}^t \mathbf{D} \mathbf{G})_{\Omega} \mathbf{c}_e + \frac{1}{2} \mathbf{c}_e^t (\mathbf{G}^t \mathbf{D} \mathbf{G})_{\Omega} \mathbf{c}_e - \mathbf{p}_e^t (\mathbf{S}^t \mathbf{G})_{\Omega} \mathbf{c}_e - (\mathbf{b}^t \mathbf{N})_{\Omega} \mathbf{a}_e - [\bar{\mathbf{t}}^t \mathbf{N}]_{S_t} \mathbf{a}_e$$

Nótese que el cuarto sumando es nulo por la condición de ortogonalidad impuesta a las matrices \mathbf{G} y \mathbf{S} . La matriz \mathbf{D} es la matriz de coeficientes elásticos que permite obtener tensiones a partir de las deformaciones.

³Los principios de limitación hacen referencia a que si las funciones de aproximación a los campos independientes de tensiones y de deformaciones son del mismo orden, entonces con estos elementos de formulación mixta se obtienen los mismos resultados que con los elementos de formulación convencional y, por tanto, no merece la pena utilizarlos. Los principios de limitación detuvieron el desarrollo de elementos finitos con varios campos independientes durante las primeras etapas de la evolución del MEF.

6. Las condiciones de estacionaridad del funcional son:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Pi_s}{\partial \mathbf{a}_e} &= (\mathbf{B}^t \mathbf{D} \mathbf{B})_{\Omega} \mathbf{a}_e + (\mathbf{B}^t \mathbf{D} \mathbf{G})_{\Omega} \mathbf{c}_e - (\mathbf{b}^t \mathbf{N})_{\Omega} - [\bar{\mathbf{t}}^t \mathbf{N}]_{S_t} = 0 \\ \frac{\partial \Pi_s}{\partial \mathbf{c}_e} &= (\mathbf{G}^t \mathbf{D} \mathbf{B})_{\Omega} \mathbf{a}_e + (\mathbf{G}^t \mathbf{D} \mathbf{G})_{\Omega} \mathbf{c}_e = 0\end{aligned}$$

Si se definen las matrices:

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_u &\equiv (\mathbf{B}^t \mathbf{D} \mathbf{B})_{\Omega} \\ \mathbf{K}_e &\equiv (\mathbf{G}^t \mathbf{D} \mathbf{G})_{\Omega} \\ \mathbf{Q} &\equiv (\mathbf{B}^t \mathbf{D} \mathbf{G})_{\Omega} \\ \mathbf{f}_b &\equiv (\mathbf{b}^t \mathbf{N})_{\Omega} \\ \mathbf{f}_t &\equiv [\bar{\mathbf{t}}^t \mathbf{N}]_{S_t}\end{aligned}$$

las dos ecuaciones anteriores pueden escribirse:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_u & \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q}^t & \mathbf{K}_e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_e \\ \mathbf{c}_e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_b + \mathbf{f}_t \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (8.9)$$

7. Por las condiciones para la elección de \mathbf{G} , la matriz \mathbf{K}_e es regular. Entonces el sistema de ecuaciones 8.9 se puede condensar a:

$$[\mathbf{K}_u - \mathbf{Q} \mathbf{K}_e^{-1} \mathbf{Q}^t] \mathbf{a}_e = \mathbf{f}_b + \mathbf{f}_t$$

donde la matriz en el primer miembro es la matriz de rigidez elemental en el sentido habitual y el segundo miembro corresponde al vector de cargas. Obsérvese que la matriz de rigidez elemental se construye sumando a la matriz correspondiente a la formulación convencional en desplazamientos un término corrector que depende de los modos de deformaciones supuestas. El vector de cargas es el mismo que en la formulación convencional.

8. Conocidos la matriz de rigidez elemental y el vector elemental de cargas, se procede al ensamblaje del sistema global de ecuaciones como en la formulación convencional.

El desarrollo anterior puede utilizarse para justificar el elemento de Wilson y Taylor en elasticidad bidimensional, ya que la matriz de rigidez correspondiente a este elemento se obtiene si se elige la matriz \mathbf{G} como:

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{G} \mathbf{c}_e \quad ; \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi & \eta \end{bmatrix}$$

donde ξ y η son las coordenadas en el dominio cuadrado estándar.

8.4 Las condiciones de Babuška-Brezzi

La formulación clásica del MEF, basada en la aproximación de un solo campo independiente, exige una serie de condiciones a las funciones de forma o funciones de aproximación local de ese campo independiente. Si se cumplen esas condiciones⁴, entonces la convergencia de las soluciones aproximadas hacia la solución exacta está garantizada.

Cuando se abandona la formulación convencional para trabajar con elementos que responden a principios variacionales multicampo, resulta mucho más difícil determinar las condiciones que deben cumplir las aproximaciones locales a los campos primarios (p.ej. $\tilde{\mathbf{u}}$, $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ ó $\tilde{\mathbf{s}}$) si se quiere tener garantizada la convergencia. Se deben analizar ahora, además de la aproximación en sí a cada campo, las relaciones entre las aproximaciones a uno y a otro campo.

El estudio de las propiedades de convergencia de los elementos formulados a partir de principios variacionales multicampo es un área abierta de investigación que utiliza un lenguaje difícil para los no iniciados en análisis funcional.

En este campo hay un resultado ya clásico que se desarrolló en el estudio del problema de la elasticidad incompresible con dos campos independientes: el campo de desplazamientos $\tilde{\mathbf{u}}$ y el campo de presiones \tilde{p} (primer invariante del tensor de tensiones). Ese resultado son las condiciones de Babuška-Brezzi. Condiciones que, si son cumplidas, garantizan la existencia y unicidad de la solución aproximada y una tasa óptima de convergencia. Se presentan a continuación como muestra de otros resultados similares o de otros resultados que sería deseable tener disponibles.

En el estudio de problemas de elasticidad incompresible, partiendo de un principio variacional con los dos campos independientes citados y siguiendo un proceso análogo al descrito en la sección anterior al estudiar el elemento de Wilson y Taylor, se llega una ecuación similar a la 8.9:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_u & \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q}^t & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_e \\ \mathbf{p}_e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{h} \end{Bmatrix} \quad (8.10)$$

donde \mathbf{p}_e son ahora las n variables nodales asociadas al campo de presiones⁵.

Un elemento finito cumple las condiciones de Babuška-Brezzi cuando se verifica que:

1. Para cualquier conjunto de desplazamientos nodales $\mathbf{a}_e \neq \mathbf{0}$ que cumpla $\mathbf{Q}^t \mathbf{a}_e = \mathbf{0}$, se tiene que:

$$\mathbf{a}_e^t \mathbf{K}_u \mathbf{a}_e > 0$$

2. La matriz \mathbf{Q}^t tiene n filas linealmente independientes.

Si se quiere tener garantizada la convergencia, las funciones de aproximación local del campo de desplazamientos y del campo de presiones deben elegirse de manera que se cumplan estas dos condiciones.

⁴Recordemos que esas condiciones eran tres: suavidad en el interior del elemento, continuidad a través de las fronteras entre elementos y completitud hasta un orden determinado que depende del tipo de problema.

⁵Los nodos asociados al campo de presiones pueden ser diferentes de los asociados al campo de desplazamientos.

Capítulo 9

Procedimientos de cálculo (I)

9.1 Introducción

Dentro del esquema general de la sistemática del MEF para cálculos lineales, una vez construida la matriz de rigidez global y el vector global de cargas por ensamblaje de las contribuciones elementales, el paso siguiente es resolver un sistema de ecuaciones lineales. Ello permite obtener las variables nodales.

Los procedimientos numéricos para la resolución de este sistema son, en principio, los mismos que se utilizan en otras ramas de la técnica. Lo que ocurre es que, al ser el tiempo de ordenador dedicado a esta fase del cálculo una fracción muy importante del tiempo total utilizado para resolver el problema, los investigadores han ido creando una serie de técnicas especiales adaptadas a las características de los sistemas de ecuaciones a que da lugar el MEF.

Así, se ha desarrollado una rama de especialización dentro del estudio de los métodos de elementos finitos: la que trata de la resolución del sistema de ecuaciones y, en problemas con variación de la solución en el tiempo, del acoplamiento con la integración en el tiempo.

En este capítulo y en el siguiente se trata de proporcionar una panorámica de los procedimientos de solución que más se emplean en la práctica. En este capítulo se tratará de los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales, que tienen su aplicación en problemas estacionarios o sin variación de la solución en el tiempo. En el capítulo siguiente se estudiará cómo se acoplan estos métodos con la integración en el tiempo, para resolver problemas no estacionarios o transitorios.

9.2 Resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Dentro de la práctica del MEF se emplean dos grandes familias de procedimientos para resolver los sistemas de ecuaciones lineales a que da lugar el método. Esquemáticamente, estos procedimientos son:

1. Métodos de solución directa, por ejemplo:

- Eliminación de Gauss

- Factorizaciones (Cholesky, Crout)
- Método frontal

2. Métodos iterativos, por ejemplo:

- Método de Jacobi
- Método del gradiente conjugado
- Relajación dinámica

En los métodos de solución directa, dado el sistema de ecuaciones que debe resolverse, se conoce a priori el número de operaciones necesarias para obtener la solución. Son los procedimientos con más tradición dentro de la tecnología del MEF y su rango de aplicación es general, tanto en programas de cálculo lineal como en los de cálculo no lineal. Todos los procedimientos que se utilizan dentro de esta categoría son elaboraciones de la eliminación de Gauss.

En los métodos iterativos, por el contrario, no se conoce a priori el número de operaciones necesarias para llegar a la solución. Son procedimientos que están adquiriendo actualmente mucha difusión porque dan lugar a menos necesidades de almacenamiento en el ordenador (memoria, disco) y, por tanto, permiten abordar problemas más grandes manteniendo los mismos recursos.

La dificultad con que tropiezan los métodos iterativos es que la velocidad con la que llegan a la solución depende de cada problema concreto, en particular, de las características de la matriz de coeficientes del sistema. Entonces, resulta que a veces son mucho más eficientes que los métodos de solución directa pero por contra, en otros casos, pueden llegar requerir un número bastante mayor de operaciones. Esto es especialmente perturbador cuando se abordan cálculos no lineales, en los que las matrices de coeficientes de los diferentes sistemas de ecuaciones que se resuelven en un mismo problema pueden tener características muy diferentes de una fase a otra del cálculo.

De este modo, parece que los métodos iterativos no son procedimientos de propósito tan general como los de solución directa. Es normal que los programas comerciales de cálculo los incorporen como opción.

Sea el sistema de n ecuaciones lineales:

$$\mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{f} \quad (9.1)$$

donde \mathbf{K} es una matriz de coeficientes de $n \times n$, \mathbf{a} es el vector de incógnitas y \mathbf{f} es el vector de términos independientes. Dentro de las aplicaciones del MEF, \mathbf{K} representa la matriz de rigidez global, \mathbf{f} es el vector global de cargas y \mathbf{a} es el vector de movimientos nodales.

A primera vista parece que la resolución del sistema 9.1 es un asunto baladí. Se trata *simplemente* de invertir la matriz de coeficientes, para dar:

$$\mathbf{a} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f}$$

Sin embargo, cuando el orden de \mathbf{K} es de varias decenas de miles, se comprende que hay que prestar mucha atención a esta parte del cálculo para obtener la solución del sistema en

un tiempo de ordenador razonable y con unos recursos de memoria y disco no demasiado grandes. En particular, la inversión de la matriz de coeficientes sería una forma muy ineficiente de resolver este sistema, ya que no se sacaría ningún partido de la estructura interna de la matriz \mathbf{K} derivada de la sistemática del MEF. La sistemática del MEF da lugar a una matriz de rigidez global, en general simétrica, en la que la mayoría de los coeficientes son nulos (matriz *dispersa*), concentrándose los coeficientes no nulos alrededor de la diagonal principal (estructura en banda). Este es el tipo de matriz de coeficientes en el que estamos interesados.

9.3 Eliminación de Gauss

El algoritmo de la eliminación de Gauss para resolver el sistema 9.1 puede esquematizarse de la forma siguiente:

1. Eliminación y sustitución hacia adelante¹:

De $i = 1$ a $i = n - 1$ (recorre columnas)

De $l = i + 1$ a $l = n$ (recorre filas)

De $j = i$ a $j = n$ (dentro de cada fila recorre parte de las columnas)

$$k_{lj} \leftarrow k_{lj} - \frac{k_{li}}{k_{ii}} k_{ij}$$

Otro j

$$f_l \leftarrow f_l - \frac{k_{li}}{k_{ii}} f_i$$

Otro l

Otro i

2. Sustitución hacia detrás²:

De $i = n$ a $i = 1$ (recorre filas)

$$f_i \leftarrow \frac{f_i - \sum_{j=i+1, i \neq n}^n k_{ij} f_j}{k_{ii}}$$

Otro i

El algoritmo anterior se visualiza fácilmente por medio del ejemplo siguiente. Sea el sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

¹En esta fase se reduce la matriz de coeficientes a una matriz triangular superior

²En esta fase se reemplaza el vector de términos independientes por el vector solución del sistema.

La primera fase del algoritmo, la de eliminación y sustitución hacia adelante, transforma progresivamente el sistema del siguiente modo:

$i = 1$

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 5.75 & -2 & 0.5 \\ 0 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 0.5 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2.25 \\ 3 \\ 3.5 \end{bmatrix}$$

$i = 2$

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 5.75 & -2 & 0.5 \\ 0 & 0 & 5.304 & -0.826 \\ 0 & 0 & -0.826 & 2.957 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2.25 \\ 3.783 \\ 3.304 \end{bmatrix}$$

$i = 3$

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 5.75 & -2 & 0.5 \\ 0 & 0 & 5.304 & -0.826 \\ 0 & 0 & 0 & 2.828 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2.25 \\ 3.783 \\ 3.893 \end{bmatrix}$$

Nótese que el algoritmo mantiene la simetría de las ecuaciones activas, con lo que, desde el punto de vista de la programación, no se incrementan durante el proceso las necesidades de almacenamiento. Es decir, el algoritmo se puede programar únicamente a partir del espacio reservado para los datos, que son los coeficientes no repetidos de la matriz \mathbf{K} y el vector \mathbf{f} .

La segunda fase del algoritmo, la sustitución hacia atrás, permite obtener las incógnitas del modo siguiente:

$i = 4$

$$a_4 = \frac{3.893}{2.828}$$

$i = 3$

$$a_3 = \frac{3.783 + 0.826 a_4}{5.304}$$

$i = 2$

$$a_2 = \frac{2.25 - 0.5 a_4 + 2.0 a_3}{5.75}$$

$i = 1$

$$a_1 = \frac{1.0 - 2 a_4 + 1.0 a_2}{4.0}$$

El procedimiento de eliminación de Gauss es numéricamente muy robusto y forma la base de todos los métodos de solución directa que se utilizan en la actualidad en el ámbito del MEF. Lo que cambia de un caso a otro es la estructura de datos (forma de almacenar \mathbf{K} y \mathbf{f} : en banda, en “sky-line”, por bloques, ...) y la organización de las distintas operaciones. Así, en la literatura aparecen multitud de procedimientos, aparentemente distintos (p.ej. resolución por bloques, resolución en “sky-line”, etc. ...), pero cuya esencia matemática es la misma.

9.4 Factorizaciones de Crout y Cholesky

Las factorizaciones de Crout y Cholesky son variantes de la eliminación de Gauss. Su objetivo es separar las operaciones sobre la matriz de coeficientes del sistema de las operaciones sobre el vector de términos independientes. Esto puede resultar interesante cuando, por ejemplo, se quiere calcular una misma estructura (misma matriz de coeficientes) para diferentes hipótesis de carga (distintos vectores de términos independientes). Estas factorizaciones son una manera de tener almacenada la primera parte de la eliminación de Gauss, la más costosa, para usarla repetidas veces.

9.4.1 Factorización de Crout

Se conoce también con el nombre de factorización de Cholesky modificada. Consiste en poner la matriz \mathbf{K} como producto de tres matrices:

$$\mathbf{K} = \mathbf{L} \mathbf{D} \mathbf{L}^t$$

donde \mathbf{L} es una matriz triangular inferior y \mathbf{D} es una matriz diagonal. La matriz \mathbf{D} contiene los términos de la diagonal principal de la matriz de coeficientes reducida tras la primera fase de la eliminación de Gauss o sustitución hacia adelante. Por otro lado, la matriz \mathbf{L}^t contiene las filas de esa matriz de coeficientes reducida tras dividir las por los términos de la diagonal contenidos en \mathbf{D} .

En el ejemplo utilizado en la sección anterior, la factorización de Crout sería:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.25 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.348 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0.087 & -0.156 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5.75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5.304 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.828 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -0.25 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & -0.348 & 0.087 \\ 0 & 0 & 1 & -0.156 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Es decir, las ecuaciones reducidas tras la primera etapa de la eliminación de Gauss se pueden escribir como:

$$\mathbf{D} \mathbf{L}^t \mathbf{a} = \bar{\mathbf{f}}$$

donde $\bar{\mathbf{f}}$ es el vector reducido de términos independientes. Así, el algoritmo de la primera fase de la eliminación de Gauss o sustitución hacia adelante sirve para determinar las matrices \mathbf{D} y \mathbf{L} .

Nótese que, una vez factorizada \mathbf{K} , se tiene que:

$$\mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{L} (\mathbf{D} \mathbf{L}^t) \mathbf{a} = \mathbf{L} \bar{\mathbf{f}} = \mathbf{f}$$

de manera que el proceso de resolución del sistema de ecuaciones puede descomponerse en:

1. Obtener el vector reducido de términos independientes $\bar{\mathbf{f}}$:

$$\bar{\mathbf{f}} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{f}$$

La matriz \mathbf{L}^{-1} no se calcula. El vector $\bar{\mathbf{f}}$ se obtiene por sustitución hacia adelante.

2. Obtener el vector solución \mathbf{a} :

$$\mathbf{a} = \mathbf{L}^{-t} \mathbf{D}^{-1} \bar{\mathbf{f}}$$

Las matrices \mathbf{L}^{-t} y \mathbf{D}^{-1} tampoco se calculan. El vector \mathbf{a} se obtiene por sustitución hacia atrás.

De esta manera, cuando se tiene un mismo modelo sometido a varios conjuntos de acciones diferentes, una vez factorizada la matriz \mathbf{K} , basta con repetir los pasos 1 y 2 anteriores para cada una de los distintos vectores \mathbf{f} que se tengan. El número de operaciones necesario para ejecutar estos dos pasos, sustitución hacia adelante y sustitución hacia atrás, es muy pequeño si se compara con el número de operaciones necesarias para factorizar la matriz.

9.4.2 Factorización de Cholesky

La factorización de Cholesky se desarrolló antes que la factorización de Crout, pero se utiliza menos hoy en día, porque el algoritmo de descomposición de la matriz de coeficientes utiliza raíces cuadradas. Además, no puede utilizarse en problemas con matrices de coeficientes que tengan autovalores negativos, ya que se obtienen entonces raíces cuadradas de números negativos. Sin embargo, se ha empleado mucho esta descomposición en programas de cálculo matricial de estructuras, donde la matriz de rigidez global es definida positiva.

La factorización de Cholesky pone la matriz \mathbf{K} como producto de dos matrices:

$$\mathbf{K} = \mathbf{U}^t \mathbf{U}$$

donde \mathbf{U} es una matriz triangular superior que resulta ser:

$$\mathbf{U} = \mathbf{D}^{1/2} \mathbf{L}^t$$

El algoritmo de obtención de \mathbf{U} puede esquematizarse como:

$$\begin{aligned} u_{11} &= \sqrt{k_{11}} \\ u_{1j} &= \frac{k_{1j}}{u_{11}} \quad j = 2, \dots, n \\ u_{ii} &= \sqrt{k_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki}^2} \quad i = 2, \dots, n \\ u_{ij} &= \frac{1}{u_{ii}} \left(k_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki} u_{kj} \right) \quad i = 2, \dots, n \quad j = i+1, \dots, n \\ u_{ij} &= 0 \quad i > j \end{aligned}$$

En el ejemplo utilizado en la sección anterior, el resultado de la factorización de Cholesky sería:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 2.398 & 0 & 0 \\ 0 & -0.834 & 2.303 & 0 \\ 1.0 & 0.208 & -0.359 & 1.682 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -0.5 & 0 & 1.0 \\ 0 & 2.398 & -0.834 & 0.208 \\ 0 & 0 & 2.303 & -0.359 \\ 0 & 0 & 0 & 1.682 \end{bmatrix}$$

Al igual que en el caso de la factorización de Crout, el proceso de resolución del sistema de ecuaciones puede descomponerse en dos pasos:

1. Obtener el vector reducido de términos independientes $\bar{\mathbf{f}}$:

$$\bar{\mathbf{f}} = \mathbf{U}^{-t} \mathbf{f}$$

La matriz \mathbf{U}^{-t} no se calcula. El vector $\bar{\mathbf{f}}$ se obtiene por sustitución hacia adelante.

2. Obtener el vector solución \mathbf{a} :

$$\mathbf{a} = \mathbf{U}^{-1} \bar{\mathbf{f}}$$

La matriz \mathbf{U}^{-1} tampoco se calculan. El vector \mathbf{a} se obtiene por sustitución hacia atrás.

9.5 Método de resolución frontal

Es un método desarrollado por Irons para resolver las ecuaciones resultantes del MEF (1970) y es el procedimiento más utilizado actualmente por los programas comerciales modernos. Fue pensado para optimizar los requerimientos de almacenamiento en memoria en unas circunstancias en las que la memoria del ordenador era mucho más cara que en la actualidad.

En el fondo, el método de resolución frontal es también un procedimiento de eliminación de Gauss en el que se hace la sustitución hacia adelante al mismo tiempo que se ensambla la matriz de rigidez global. Es decir, no se espera a tener ensamblado el sistema de ecuaciones para empezar a resolverlo, sino que se empieza a resolver el sistema mientras se está todavía ensamblando.

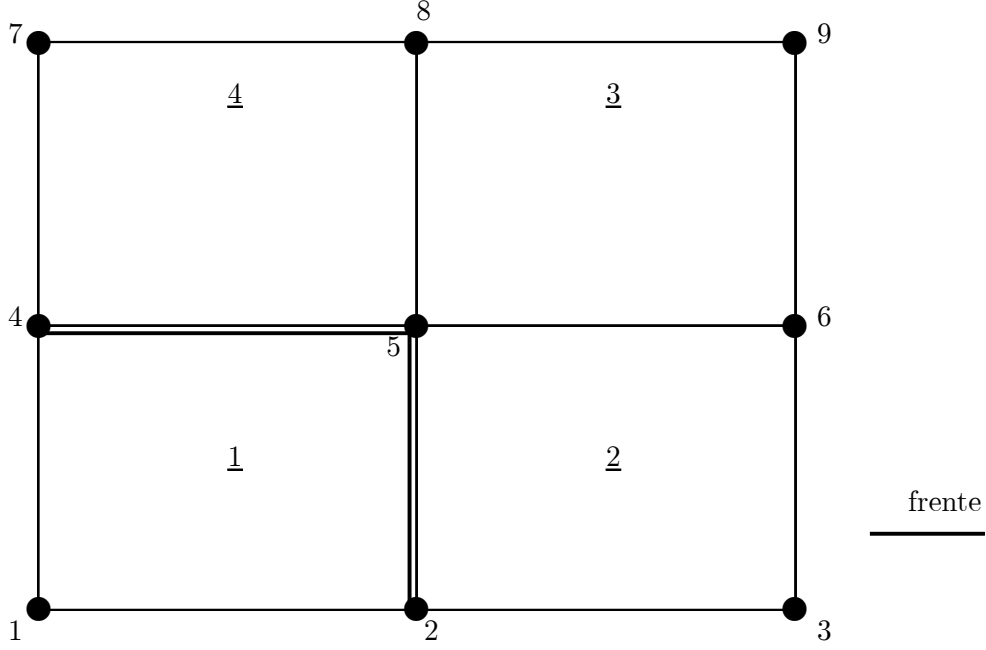
Se gana en eficiencia con respecto a otras implementaciones de la sustitución de Gauss pero, como contrapartida, se pierde modularidad en la programación y se trabaja con una estructura de datos bastante complicada. La mayor ventaja del método es que se minimiza el uso de la memoria.

La mecánica detallada y general del método es muy elaborada. El lector interesado puede consultar la literatura³. En los párrafos que siguen se intenta, mediante un ejemplo, dar una idea intuitiva de cómo funciona el procedimiento.

Sea la malla de cuatro elementos representada en la figura y, para simplificar, supongamos que sólo se tiene un grado de libertad por nodo.

³E. Hinton y D.R. Owen. *Finite Element Programming*. Academic Press. 1977.

El proceso del método de resolución frontal puede esquematizarse como sigue:



1. Se toma el elemento 1 y se hace una partición de los grados de libertad asociados al mismo, \mathbf{a} , en:

$$\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_c \\ \mathbf{a}_b \end{Bmatrix}$$

donde \mathbf{a}_c reúne los grados de libertad no compartidos con otros elementos (nodo 1) y \mathbf{a}_b , los grados de libertad compartidos (nodos 2, 4 y 5). Esto da lugar a una partición de la matriz de rigidez elemental y del vector elemental de cargas del elemento 1:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{cc} & \mathbf{K}_{cb} \\ \mathbf{K}_{bc} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_c \\ \mathbf{a}_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_c \\ \mathbf{f}_b \end{Bmatrix} \quad (9.2)$$

2. Las ecuaciones globales que involucran a los grados de libertad \mathbf{a}_c ya están completas, puesto que el resto de los elementos no les añaden más términos. De este modo, los grados de libertad *internos* \mathbf{a}_c pueden ser eliminados a este nivel:

$$\mathbf{a}_c = \mathbf{K}_{cc}^{-1} \mathbf{f}_c - \mathbf{K}_{cc}^{-1} \mathbf{K}_{cb} \mathbf{a}_b = \mathbf{K}_{cc}^{-1} [\mathbf{f}_c - \mathbf{K}_{cb} \mathbf{a}_b]$$

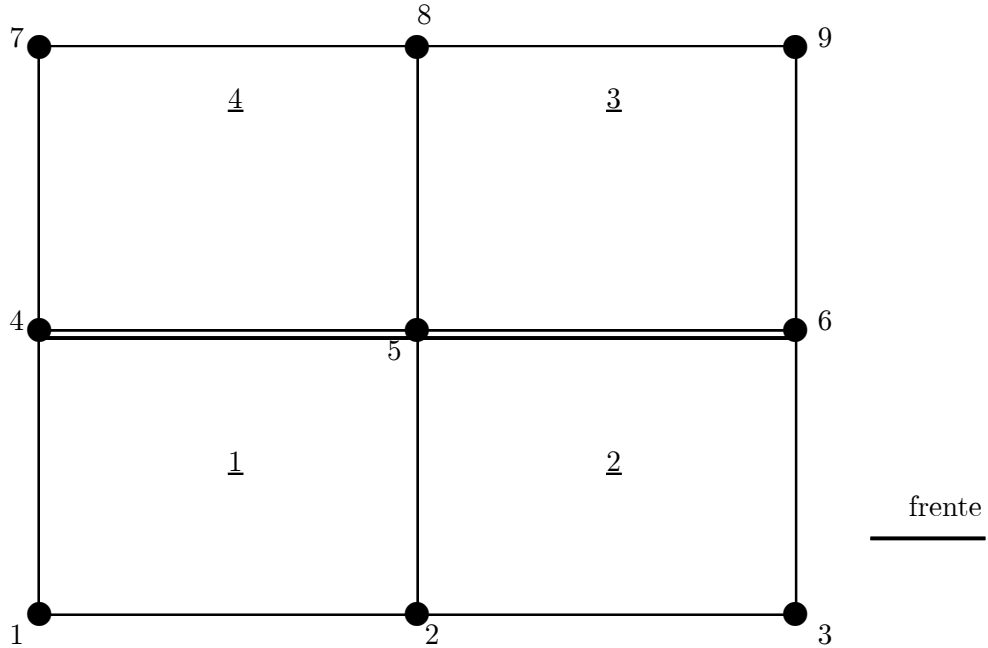
lo que da lugar, sustituyendo en 9.2, al siguiente sistema para los grados de libertad *externos*:

$$(\mathbf{K}_{bb} - \mathbf{K}_{bc} \mathbf{K}_{cc}^{-1} \mathbf{K}_{cb}) \mathbf{a}_b = \mathbf{f}_b - \mathbf{K}_{bc} \mathbf{K}_{cc}^{-1} \mathbf{f}_c$$

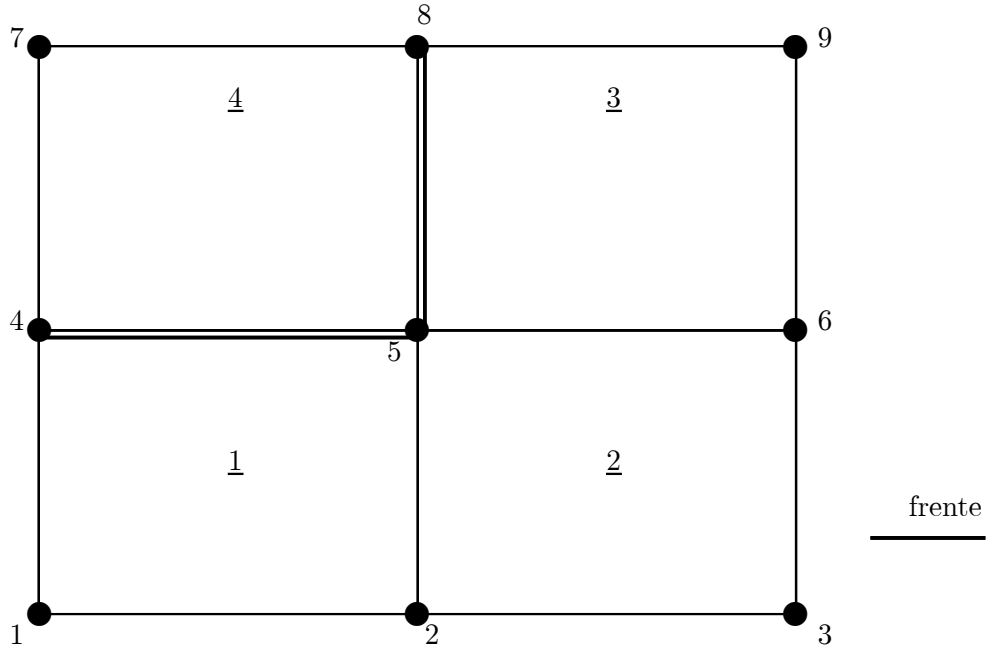
o, escrito de otra manera:

$$\bar{\mathbf{K}}_{bb} \mathbf{a}_b = \bar{\mathbf{f}}_b$$

3. Las matrices y vectores necesarias para obtener \mathbf{a}_c a partir de \mathbf{a}_b (esto es, \mathbf{K}_{cc}^{-1} , \mathbf{f}_c y \mathbf{K}_{bb}) se almacenan en disco para ser utilizados posteriormente en el proceso de sustitución hacia detrás.



4. Se calcula la matriz de rigidez \mathbf{K}' y el vector elemental de cargas \mathbf{f}' del siguiente elemento, el elemento 2.
5. La matriz \mathbf{K}' y el vector \mathbf{f}' se ensamblan en $\bar{\mathbf{K}}_{bb}$ y $\bar{\mathbf{f}}_b$ para obtener una matriz de rigidez y un vector de cargas conjunto \mathbf{K} y \mathbf{f} .
6. Se determinan los nuevos grados de libertad *internos* \mathbf{a}_c y *externos* \mathbf{a}_b del sistema conjunto y se repite el proceso de los puntos 1 a 3 anteriores.
7. Se opera de la misma manera con el elemento 3.
8. Al repetir el proceso para el último elemento, el elemento 4, resulta que se puede resolver el sistema de ecuaciones 9.2 sin pasar adelante ninguna incógnita, esto es, no hay grados de libertad *externos* \mathbf{a}_b . Entonces se inicia la vuelta o sustitución hacia detrás, recuperando de disco la información correspondiente a los distintos elementos en orden inverso, esto es, 3-2-1 y obteniendo en cada caso los grados de libertad que se habían ido eliminando, los grados de libertad \mathbf{a}_c .



En cada paso o incorporación de un nuevo elemento, se llama *frente activo* o *frente de onda* a los grados de libertad *externos* \mathbf{a}_b que resultan de la partición de la matriz del sistema en ese momento.

La cantidad de memoria necesaria para desarrollar el proceso depende de la longitud máxima o número máximo de grados de libertad en el frente activo. Esta longitud máxima, al contrario de lo que sucede en otros procedimientos, no depende de cómo se numeren los nodos, sino del orden o número asignado a los elementos.

En las aplicaciones, resulta útil saber que el tiempo de ordenador que emplea el método frontal es proporcional al número de ecuaciones (número de grados de libertad) y al cuadrado de la media cuadrática de la longitud del frente activo durante el proceso. Es muy importante entonces trabajar con numeraciones de los elementos que minimicen dicha media cuadrática. Los programas comerciales de cálculo, con objeto de dejar libertad al usuario para numerar los elementos, incorporan normalmente un optimizador que renumera internamente los elementos a los efectos de la resolución del sistema mediante este procedimiento.

9.6 Métodos iterativos

El sistema de ecuaciones que se trata de resolver puede escribirse:

$$\mathbf{r} = \mathbf{K} \mathbf{a} - \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (9.3)$$

y puede interpretarse desde el punto de vista mecánico como la búsqueda del equilibrio

entre las fuerzas exteriores, \mathbf{f} , aplicadas sobre los nodos y las fuerzas interiores, $\mathbf{K} \mathbf{a}$, generadas por los movimientos nodales \mathbf{a} .

En este sentido, el vector \mathbf{r} o vector de *residuos* representa el desequilibrio entre fuerzas interiores y fuerzas exteriores para un conjunto de movimientos nodales diferente de la solución del sistema de ecuaciones.

Un procedimiento iterativo general para resolver el sistema 9.3 puede ponerse como:

$$\mathbf{a}^{i+1} = \mathbf{a}^i + \eta^i \boldsymbol{\delta}^i \quad (9.4)$$

$$\boldsymbol{\delta}^i = -\alpha^i \mathbf{K}_a^{-1} \mathbf{r}^i + \beta^i \boldsymbol{\delta}^{i-1} \quad (9.5)$$

donde el índice i corresponde al número de iteración. Los distintos procedimientos iterativos se obtienen particularizando las expresiones 9.4 y 9.5.

El vector $\boldsymbol{\delta}^i$ tiene el sentido de un vector de mejora de la solución en la iteración i . El escalar η^i sería un optimizador de la corrección a lo largo de la *dirección* dada por $\boldsymbol{\delta}^i$.

La matriz \mathbf{K}_a es una aproximación a la matriz de coeficientes del sistema \mathbf{K} . Se conoce con el nombre de *matriz preconditionadora* y puede ser cualquier matriz, normalmente definida positiva, comprendida entre la matriz identidad \mathbf{I} y la matriz de coeficientes del sistema \mathbf{K} . Para que el procedimiento sea en realidad un procedimiento iterativo, la matriz \mathbf{K}_a ha de ser más fácilmente invertible (factorizable) que \mathbf{K} .

El escalar α^i se introduce a veces para intentar acelerar la convergencia y el escalar β^i sirve para introducir en el vector de corrección de la solución $\boldsymbol{\delta}^i$ una corrección relacionada con la corrección en la iteración anterior.

El procedimiento iterativo recogido en las relaciones 9.4 y 9.5 se detiene en cuanto se alcanza el criterio de convergencia elegido. Existen dos categorías de criterios de esta clase:

1. Criterios *en desplazamientos*. Son criterios de la forma:

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\delta}^i\| = \sqrt{\boldsymbol{\delta}^{i^t} \boldsymbol{\delta}^i} &< \varepsilon_1 \|\mathbf{a}^{i+1}\| \quad \text{ó} \\ \sqrt{\boldsymbol{\delta}^{i^t} \mathbf{K}_a \boldsymbol{\delta}^i} &< \varepsilon_2 \sqrt{\mathbf{a}^{i+1^t} \mathbf{K}_a \mathbf{a}^{i+1}} \end{aligned}$$

2. Criterios *en fuerzas*, de la forma:

$$\|\mathbf{r}^i\| = \sqrt{\mathbf{r}^{i^t} \mathbf{r}^i} < \varepsilon_3 \max(\|\mathbf{R}\|, \|\mathbf{f}\|)$$

donde \mathbf{R} es el vector de reacciones.

Los escalares ε_1 , ε_2 y ε_3 se conocen con el nombre de *tolerancias*.

Lo que hace atractivo un procedimiento iterativo como el descrito en los párrafos anteriores es que para calcular el vector de residuos \mathbf{r}^i no es necesario llegar a ensamblar la matriz de coeficientes \mathbf{K} . El vector de residuos puede obtenerse ensamblando las contribuciones de los elementos al equilibrio de cada nodo:

$$\mathbf{r}^i = \bigwedge_e (\mathbf{K}_e \mathbf{a}_e^i - \mathbf{f}_e)$$

Esto hace que un procedimiento iterativo requiera menos recursos de memoria y disco que un procedimiento de solución directa cuando se programa en el ordenador.

9.7 Iteración de Jacobi y sus variantes

El procedimiento iterativo más simple es la iteración de Jacobi. Se obtiene de 9.4 y 9.5 poniendo:

$$\begin{aligned}\eta^i &= 1 \\ \alpha^i &= 1 \\ \beta^i &= 0 \\ \mathbf{K}_a &= \mathbf{I}\end{aligned}$$

El procedimiento queda entonces:

$$\mathbf{a}^{i+1} = \mathbf{a}^i - \mathbf{r}^i = \mathbf{a}^i - (\mathbf{K} \mathbf{a}^i - \mathbf{f}) = \mathbf{f} + (\mathbf{I} - \mathbf{K}) \mathbf{a}^i$$

Este procedimiento tan simple es divergente siempre que los autovalores de \mathbf{K} sean mayores o iguales que 2. En efecto, si \mathbf{a} es la solución exacta, la aproximación \mathbf{a}^i se puede poner como:

$$\mathbf{a}^i = \mathbf{a} + \boldsymbol{\varepsilon}^i$$

donde $\boldsymbol{\varepsilon}^i$ es el error en la iteración i .
entonces se tiene que:

$$\mathbf{a}^{i+1} = \mathbf{f} + (\mathbf{I} - \mathbf{K}) (\mathbf{a} + \boldsymbol{\varepsilon}^i) = \mathbf{f} + \mathbf{a} + \boldsymbol{\varepsilon}^i - \mathbf{K} \boldsymbol{\varepsilon}^i - \mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{a} + (\mathbf{I} - \mathbf{K}) \boldsymbol{\varepsilon}^i$$

esto es,

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{i+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}) \boldsymbol{\varepsilon}^i \quad (9.6)$$

En los sistemas de ecuaciones que se generan en el MEF aplicado a problemas lineales, la matriz de coeficientes \mathbf{K} es simétrica y, generalmente, definida positiva. En este caso, la matriz \mathbf{K} , de orden n , tiene n autovalores reales y positivos, λ_j , $j = 1, \dots, n$.

Sea \mathbf{z}_j , $j = 1, \dots, n$ una base de los autovectores de la matriz \mathbf{K} . El vector error $\boldsymbol{\varepsilon}^i$ se podrá poner como combinación lineal de los vectores de esta base:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^i = \sum_{j=1}^n c_j \mathbf{z}_j \quad (9.7)$$

con:

$$\begin{aligned}\mathbf{K} \mathbf{z}_j &= \lambda_j \mathbf{z}_j \\ \mathbf{z}_k^t \mathbf{z}_j &= 0 \quad k \neq j\end{aligned}$$

De este modo, si se sustituye 9.7 en 9.6, se llega a:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{i+1} = \sum_{j=1}^n c_j \mathbf{z}_j - \sum_{j=1}^n c_j \lambda_j \mathbf{z}_j = \sum_{j=1}^n c_j (1 - \lambda_j) \mathbf{z}_j$$

Entonces, si se quiere que la componente j del vector $\boldsymbol{\varepsilon}^{i+1}$ sea menor que la correspondiente al vector $\boldsymbol{\varepsilon}^i$, debe ser:

$$|1 - \lambda_j| < 1$$

es decir,

$$0 < \lambda_j < 2 \quad j = 1, \dots, n$$

En otro caso, la iteración de Jacobi diverge.

Nótese que la convergencia será tanto más rápida cuanto más agrupados estén los autovalores λ_j en torno a 1. Puede conseguirse agrupar los autovalores en torno a 1 con el escalado o preconditionamiento de la matriz de coeficientes \mathbf{K} .

Los autovalores máximo y mínimo de \mathbf{K} están acotados por:

$$\begin{aligned}\lambda_{\max} &\leq \max_i (K_{ii} + \sum_{j \neq i} |K_{ij}|) \\ \lambda_{\min} &\geq \min_i (K_{ii} - \sum_{j \neq i} |K_{ij}|)\end{aligned}$$

Aprovechando esta propiedad, los autovalores pueden ser agrupados en torno a 1 si se escalan las ecuaciones de modo que los términos de la diagonal principal de la matriz \mathbf{K} sean todos iguales a 1. Esto es equivalente a utilizar como matriz preconditionadora, \mathbf{K}_a , una matriz diagonal con la diagonal principal de \mathbf{K} .

Además, para mejorar la convergencia se puede introducir el acelerador α en 9.5, con un valor:

$$\alpha = \frac{2}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}}$$

También se puede mejorar la convergencia encontrando en cada iteración la longitud óptima de la corrección según $\boldsymbol{\delta}^i$, esto es, introduciendo el escalar η^i en 9.4. El parámetro η

se calcula en cada iteración mediante una búsqueda de la corrección óptima en la dirección definida por δ^i . En la literatura anglosajona esta búsqueda se conoce como “line search”.

Para ver cómo podría calcularse η , resulta útil imaginarse que el sistema de ecuaciones $\mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{f}$ deriva de hacer estacionario el potencial:

$$\Phi = \frac{1}{2} \mathbf{a}^t \mathbf{K} \mathbf{a} - \mathbf{a}^t \mathbf{f} \quad (9.8)$$

ya que:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{a}} = \mathbf{K} \mathbf{a} - \mathbf{f} = \mathbf{r}$$

Nótese que el sentido que tiene el residuo es el de gradiente de Φ . Resolver el sistema de ecuaciones es pues encontrar el vector \mathbf{a} para el cual el potencial Φ se hace estacionario (residuo nulo).

Entonces, si dentro del proceso iterativo se utiliza 9.4 para obtener la solución mejorada y se considera que tanto \mathbf{a}^i como δ^i son fijos, resulta que se puede determinar η^i con la condición de que el potencial Φ se haga estacionario con respecto a η^i . Esto es, sustituyendo 9.4 en 9.8:

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{2} (\mathbf{a}^i + \eta^i \delta^i)^t \mathbf{K} (\mathbf{a}^i + \eta^i \delta^i) - (\mathbf{a}^i + \eta^i \delta^i)^t \mathbf{f} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{a}^{i^t} \mathbf{K} \mathbf{a}^i + \eta^i \mathbf{a}^{i^t} \mathbf{K} \delta^i + \frac{1}{2} \eta^{i^2} \delta^{i^t} \mathbf{K} \delta^i - \mathbf{a}^{i^t} \mathbf{f} - \eta^i \delta^{i^t} \mathbf{f} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} &= \mathbf{a}^{i^t} \mathbf{K} \delta^i + \eta^i \delta^{i^t} \mathbf{K} \delta^i - \delta^{i^t} \mathbf{f} \end{aligned}$$

de donde se obtiene, igualando a cero el gradiente de Φ :

$$\eta^i = \frac{\delta^{i^t} (\mathbf{f} - \mathbf{K} \mathbf{a}^i)}{\delta^{i^t} \mathbf{K} \delta^i} = \frac{-\delta^{i^t} \mathbf{r}^i}{\delta^{i^t} \mathbf{K} \delta^i}$$

Nótese que el denominador del cociente anterior puede obtenerse teniendo en cuenta que: $\mathbf{K} \delta^i = \mathbf{r}^{i+1} - \mathbf{r}^i$ para $\eta^i = 1$.

9.8 Método del gradiente conjugado

El método del gradiente conjugado encaja en el esquema iterativo definido por 9.4 y 9.5 tomando:

$$\begin{aligned} \alpha^i &= 1 \\ \mathbf{K}_a &= \mathbf{I} \end{aligned}$$

el escalar η^i se obtiene mediante “line search” y el coeficiente β^i se escoge de modo que:

$$\boldsymbol{\delta}^{it} \mathbf{K} \boldsymbol{\delta}^j = \mathbf{0} \quad \text{si } i \neq j \quad (9.9)$$

Es decir, cada nuevo vector de corrección ha de ser ortogonal en \mathbf{K} a todos los anteriores. En el método del gradiente conjugado *precondicionado* se utiliza una matriz \mathbf{K}_a diferente de la matriz identidad.

Nótese que, de acuerdo con el esquema iterativo, la solución en la iteración $i + 1$ puede ponerse como:

$$\mathbf{a}^{i+1} = \mathbf{a}^0 + \sum_{j=0}^i \eta^j \boldsymbol{\delta}^j$$

Entonces, si $i + 1 = n$, el procedimiento anterior conduce a una corrección nula para la solución aproximada, ya que al llegar a este punto se habrán tomado n vectores de corrección $\boldsymbol{\delta}^j$ que, por ser \mathbf{K} una matriz regular, dan lugar a una base del espacio de dimensión n en el que se busca la solución \mathbf{a} . Al tener que ser la corrección siguiente ortogonal a todos los vectores de esta base, la corrección no puede ser más que el vector nulo. De este modo, la idea del método del gradiente conjugado es garantizar que se obtiene la solución del sistema en n ciclos como máximo.

La determinación de los coeficientes β^i se hace a partir de los resultados siguientes:

1. La forma en que se determinan los coeficientes η^i mediante “line search” implica la ortogonalidad del residuo a la dirección de corrección, esto es:

$$\boldsymbol{\delta}^{it} \mathbf{r}^{i+1} = 0$$

En efecto, los coeficientes η^i se determinan haciendo estacionario el potencial Φ , luego:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = \mathbf{a}^{it} \mathbf{K} \boldsymbol{\delta}^i + \eta^i \boldsymbol{\delta}^{it} \mathbf{K} \boldsymbol{\delta}^i - \boldsymbol{\delta}^{it} \mathbf{f} = \boldsymbol{\delta}^{it} \mathbf{r}^i + \eta^i \boldsymbol{\delta}^{it} \mathbf{K} \boldsymbol{\delta}^i = 0$$

y se cumple además que:

$$\mathbf{r}^{i+1} - \mathbf{r}^i = \mathbf{K}(\mathbf{a}^i + \eta^i \boldsymbol{\delta}^i) - \mathbf{f} - \mathbf{K} \mathbf{a}^i + \mathbf{f} = \eta^i \mathbf{K} \boldsymbol{\delta}^i$$

Por tanto, la forma en que se determinan los coeficientes η^i implica que:

$$0 = \boldsymbol{\delta}^{it} \mathbf{r}^i + \eta^i \boldsymbol{\delta}^{it} \frac{1}{\eta^i} (\mathbf{r}^{i+1} - \mathbf{r}^i) = \boldsymbol{\delta}^{it} \mathbf{r}^{i+1}$$

2. Cuando se cumple la condición 9.9, entonces los sucesivos vectores de residuos (gradientes) son ortogonales entre sí, esto es⁴:

$$\mathbf{r}^{i+1t} \mathbf{r}^k = 0 \quad k = 0, 1, \dots, i$$

⁴De aquí el nombre de *gradiente conjugado*.

Esta propiedad es la que garantiza la convergencia en, como máximo, n iteraciones.

En efecto, se tiene que:

$$\mathbf{a}^{i+1} = \mathbf{a}^{k+1} + \sum_{j=k+1}^i \eta^j \boldsymbol{\delta}^j \quad k = 0, 1, \dots, i-1$$

y entonces,

$$\mathbf{r}^{i+1^t} \boldsymbol{\delta}^k = (\mathbf{K}(\mathbf{a}^{k+1} + \sum_{j=k+1}^i \eta^j \boldsymbol{\delta}^j) - \mathbf{f})^t \boldsymbol{\delta}^k$$

y por la condición de ortogonalidad entre los distintos vectores de corrección:

$$\mathbf{r}^{i+1^t} \boldsymbol{\delta}^k = \mathbf{r}^{k+1^t} \boldsymbol{\delta}^k = 0$$

Finalmente, por ser $\boldsymbol{\delta}^k = -\mathbf{r}^k + \beta^k \boldsymbol{\delta}^{k-1}$:

$$0 = \mathbf{r}^{i+1^t} \boldsymbol{\delta}^k = -\mathbf{r}^{i+1^t} \mathbf{r}^k + \beta^k \mathbf{r}^{i+1^t} \boldsymbol{\delta}^{k-1} = -\mathbf{r}^{i+1^t} \mathbf{r}^k \quad k = 0, 1, \dots, i-1$$

3. Los coeficientes β se determinan imponiendo el cumplimiento de la condición 9.9, es decir, se tiene que:

$$\boldsymbol{\delta}^i = -\mathbf{r}^i + \beta^i \boldsymbol{\delta}^{i-1}$$

luego

$$\boldsymbol{\delta}^{i^t} \mathbf{K} \boldsymbol{\delta}^{i-1} = -\mathbf{r}^{i^t} \mathbf{K} \boldsymbol{\delta}^{i-1} + \beta^i \boldsymbol{\delta}^{i-1^t} \mathbf{K} \boldsymbol{\delta}^{i-1}$$

y se busca que el primer miembro de la ecuación anterior sea cero, entonces debe ser:

$$\beta^i = \frac{\mathbf{r}^{i^t} \mathbf{K} \boldsymbol{\delta}^{i-1}}{\boldsymbol{\delta}^{i-1^t} \mathbf{K} \boldsymbol{\delta}^{i-1}}$$

La expresión de β^i se puede simplificar teniendo en cuenta que, según el epígrafe 1 anterior, se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^i - \mathbf{r}^{i-1} &= \eta^{i-1} \mathbf{K} \boldsymbol{\delta}^{i-1} \\ \boldsymbol{\delta}^{i-1^t} \mathbf{r}^i &= 0 \end{aligned}$$

Entonces, por la ortogonalidad de los vectores de residuos entre sí y de los vectores de residuos con los vectores $\boldsymbol{\delta}$ de corrección, se llega a:

$$\beta^i = -\frac{\mathbf{r}^{i^t} \mathbf{r}^i}{\mathbf{r}^{i-1^t} \mathbf{r}^{i-1}}$$

Para llegar a la expresión final anterior se ha hecho uso de que:

$$\boldsymbol{\delta}^{i-1^t} = -\mathbf{r}^{i-1^t} + \beta^{i-1} \boldsymbol{\delta}^{i-2^t}$$

De esta forma, en el cálculo de los coeficientes β sólo intervienen los vectores de residuos correspondientes a la iteración actual y a la iteración anterior.

9.9 Relajación dinámica

La solución del sistema de ecuaciones 9.1 puede considerarse que es el límite al que tiende la respuesta del sistema dinámico amortiguado ficticio:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{a}} + \mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f} \quad (9.10)$$

partiendo de unas condiciones iniciales arbitrarias.

De este modo, para resolver el sistema 9.1 pueden emplearse las mismas técnicas numéricas de integración que se utilizan para obtener la respuesta en problemas no estacionarios. Dichas técnicas se interpretan entonces como procedimientos iterativos de resolver 9.1. Desde este punto de vista, cada paso de integración o “salto” en el tiempo es un ciclo de mejora de la solución.

Las matrices de masas, \mathbf{M} , y de amortiguamiento, \mathbf{C} , pueden elegirse de modo que la integración de 9.10 resulte lo más cómoda posible. En particular, si se elige una matriz de masas diagonal, es posible utilizar técnicas de integración explícita, las cuales no requieren el ensamblaje de la matriz \mathbf{K} de coeficientes del sistema. Un ejemplo de ciclo de cálculo sería el siguiente:

1. Inicialización

$$\begin{aligned} i &= 0 \\ \mathbf{a}^0 &= \mathbf{0} \\ \dot{\mathbf{a}}^{-\frac{1}{2}} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

2. Bucle en elementos: cálculo de fuerzas internas \mathbf{p}^i

- Contribución del elemento e :

$$\mathbf{p}_e^i = -\mathbf{K}_e \mathbf{a}_e^i - \mathbf{C}_e \dot{\mathbf{a}}_e^{i-\frac{1}{2}}$$

- Ensamblaje de \mathbf{p}_e^i en \mathbf{p}^i

3. Bucle en nodos: cálculo de aceleraciones e integración en el tiempo (mejora de la solución)

- Cálculo de aceleraciones (residuos):

$$\ddot{\mathbf{a}}^i = \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{f} + \mathbf{p}^i)$$

- Integración en el tiempo (mejora de la solución) por diferencias centrales

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{a}}^{i+\frac{1}{2}} &= \dot{\mathbf{a}}^{i-\frac{1}{2}} + \Delta t \ddot{\mathbf{a}}^i \\ \mathbf{a}^{i+1} &= \mathbf{a}^i + \Delta t \dot{\mathbf{a}}^{i+\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

4. $i \longleftarrow i + 1$

5. Volver a 2

Como se verá en el capítulo siguiente, este esquema de integración explícita se emplea mucho para obtener la respuesta en problemas no estacionarios. El ciclo de cálculo descrito es básicamente el mismo en problemas lineales y no lineales. Se trata de un procedimiento muy robusto, eficiente y que requiere muy pocos recursos de ordenador, al no ensamblar ninguna matriz.

Su único inconveniente es que el ciclo de cálculo es sólo condicionalmente estable. Para que la integración sea estable se requiere que:

$$\Delta t \leq \Delta t_{\text{crit}}$$

y, en problemas lineales, resulta que:

$$\Delta t_{\text{crit}} = \frac{2}{\omega_{\text{max}}}(\sqrt{1 + \xi^2} - \xi)$$

donde, ω_{max} es la máxima frecuencia natural de vibración del modelo de elementos finitos y ξ es la fracción del amortiguamiento crítico a esa frecuencia.

En problemas dinámicos reales esta es una restricción muy fuerte, ya que implica que el paso de integración Δt debe ser inferior al tiempo que tarda la onda de tensión más rápida en atravesar el elemento finito más pequeño⁵. Sin embargo, cuando se usan procedimientos de relajación dinámica, las matrices de masas y de amortiguamiento, \mathbf{M} y \mathbf{C} , pueden ajustarse convenientemente para optimizar el tiempo de cálculo.

⁵En un material como el acero la velocidad de la onda de tensión más rápida es del orden de 5200 m/s. Esto implica que para un tamaño de elemento de 1 cm, el paso crítico de integración es de unos 2 microsegundos.

Capítulo 10

Procedimientos de cálculo (II)

10.1 Introducción

En los capítulos anteriores se ha tratado exclusivamente de problemas en los que las diferentes variables de campo dependen de la posición en el espacio pero no del tiempo. Sin embargo, las ideas que se han introducido y, en particular, la sistemática del MEF, es directamente aplicable también a problemas no estacionarios, en los que el tiempo aparece como variable independiente.

La idea básica es la misma. Dado un dominio de cálculo Ω en el que se busca la solución a lo largo de un intervalo de tiempo, el MEF proporciona la discretización espacial del dominio, esto es, define los campos solución en función de un número finito de parámetros, por ejemplo, los movimientos nodales. La variación en el tiempo de la solución se obtiene entonces estudiando la variación en el tiempo de dichos parámetros. De este modo, el MEF permite en general pasar de un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, en el que aparecen como variables independientes tanto la posición como el tiempo, a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, en el que la única variable independiente es el tiempo. Este último sistema se resuelve utilizando un procedimiento de integración de diferencias finitas.

En las secciones siguientes se pone primero el contexto matemático y luego se comentan los procedimientos de integración en el tiempo más usuales. Al igual que en capítulos anteriores, se utiliza el problema elástico como vehículo para expresar ideas que el lector puede fácilmente generalizar a otros problemas.

10.2 El problema de la elasticidad dinámica

El problema de la elasticidad dinámica o de la dinámica estructural se plantea del modo siguiente.

Se tiene un cuerpo elástico que ocupa un volumen $\Omega \in \mathbb{R}^3$ y que está limitado por una superficie $S = S_d \cup S_t$, de modo que $S_d \cap S_t = \emptyset$. La superficie S tiene una normal $\mathbf{n} \equiv n_i$.

El cuerpo tiene una densidad ρ , definida como función de punto en Ω , y se encuentra en unas condiciones iniciales de posición $\mathbf{u}_0 \equiv u_{0i}$ y velocidad $\dot{\mathbf{u}}_0 \equiv \dot{u}_{0i}$, definidas también

como campos vectoriales en Ω .

Sobre la superficie S_d se imponen desplazamientos $\bar{\mathbf{d}} \equiv \bar{d}_i$; mientras que sobre la superficie S_t se imponen tensiones $\bar{\mathbf{t}} \equiv \bar{t}_i$. Además, sobre el volumen Ω , actúa un campo $\mathbf{b} \equiv b_i$ de fuerzas por unidad de volumen. Estos tres campos son función del tiempo en el intervalo $[0, T]$ dentro del cual se busca la solución:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{d}} : S_d \times]0, T[&\longrightarrow \mathfrak{R}^3 \\ \bar{\mathbf{t}} : S_t \times]0, T[&\longrightarrow \mathfrak{R}^3 \\ \mathbf{b} : \Omega \times]0, T[&\longrightarrow \mathfrak{R}^3\end{aligned}$$

Las incógnitas del problema son los campos de desplazamientos, $\mathbf{u} \equiv u_i$; de deformaciones, $\mathbf{e} \equiv e_{ij}$; y de tensiones, $\mathbf{s} \equiv s_{ij}$. Todos ellos definidos en $\Omega \times]0, T[$.

La formulación fuerte corresponde a un problema de valores iniciales y de contorno, y se hace en base al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales. Un punto sobre el símbolo de una variable indica derivada con respecto al tiempo.

1. Ecuaciones de compatibilidad en $\Omega \times]0, T[$

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u}) \quad \text{ó} \quad e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

2. Ecuaciones de compatibilidad en $S_d \times]0, T[$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{d}} \quad \text{ó} \quad u_i = \bar{d}_i$$

3. Ecuaciones constitutivas (o de respuesta del material) en $\Omega \times]0, T[$

$$\mathbf{s} = D \mathbf{e} \quad \text{ó} \quad s_{ij} = D_{ijkl} e_{kl}$$

4. Ecuaciones del movimiento en $\Omega \times]0, T[$

$$\operatorname{div} \mathbf{s} + \mathbf{b} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad \text{ó} \quad s_{ij,j} + b_i = \rho \ddot{u}_i \quad (10.1)$$

5. Ecuaciones de equilibrio en $S_t \times]0, T[$

$$\mathbf{s}_n \equiv \mathbf{s} \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{ó} \quad s_{ij} n_j = \bar{t}_i \quad (10.2)$$

6. Condiciones iniciales en Ω

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(0) &= \mathbf{u}_0 & \text{ó} & & u_i(0) &= u_{0,i} \\ \dot{\mathbf{u}}(0) &= \dot{\mathbf{u}}_0 & \text{ó} & & \dot{u}_i(0) &= \dot{u}_{0,i}\end{aligned}$$

El punto de partida de los métodos de elementos finitos es la formulación débil del problema anterior. Una de las posibles formulaciones débiles corresponde a la aplicación del principio de D'Alembert y del principio de los trabajos virtuales para imponer las condiciones de equilibrio dinámico. De esta manera las ecuaciones 10.1 y 10.2 son sustituidas por una ecuación integral que impone menos requisitos de derivabilidad.

Así, una posible formulación débil del problema queda como sigue. Dados los espacios \mathcal{S}_t (desplazamientos admisibles) y \mathcal{V} (variaciones o desplazamientos virtuales):

$$\mathcal{S}_t = \{\tilde{\mathbf{u}}(t) \in H^1(\Omega), t \in]0, T[\mid \tilde{\mathbf{u}}(t) = \bar{\mathbf{d}}(t) \text{ en } S_d\}$$

$$\mathcal{V} = \{\delta\tilde{\mathbf{u}} \in H^1(\Omega) \mid \delta\tilde{\mathbf{u}} = 0 \text{ en } S_d\}$$

encontrar $\mathbf{u}(t) \in \mathcal{S}_t$ de manera que:

$$\begin{aligned} (\mathbf{s}^u, \mathbf{e}^{\delta u})_\Omega &= (\mathbf{b}, \delta\tilde{\mathbf{u}})_\Omega - (\rho\ddot{\mathbf{u}}, \delta\tilde{\mathbf{u}})_\Omega + [\bar{\mathbf{t}}, \delta\tilde{\mathbf{u}}]_{S_t} \\ (\mathbf{u}(0) - \mathbf{u}_0, \delta\tilde{\mathbf{u}})_\Omega &= 0 \\ (\dot{\mathbf{u}}(0) - \dot{\mathbf{u}}_0, \delta\tilde{\mathbf{u}})_\Omega &= 0 \\ \forall \delta\tilde{\mathbf{u}} \in \mathcal{V} \quad t \in]0, T[\end{aligned}$$

Nótese que las variaciones $\delta\tilde{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}$ no dependen del tiempo.

10.3 Discretización por el MEF

La discretización por el MEF de la forma débil que se da en la sección anterior sigue la misma sistemática utilizada para los problemas estacionarios.

1. Dividir el dominio de cálculo Ω en subdominios o *elementos*:

$$\Omega = \bigcup_i \Omega_i \quad \bigcap_i \Omega_i = \emptyset$$

2. Dentro de cada elemento Ω_i , aproximar los campos incógnita que intervienen en las ecuaciones integrales de la forma débil:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{N} \mathbf{a}_e(t) \\ \dot{\mathbf{u}} &= \mathbf{N} \dot{\mathbf{a}}_e(t) \\ \ddot{\mathbf{u}} &= \mathbf{N} \ddot{\mathbf{a}}_e(t) \\ \delta\tilde{\mathbf{u}} &= \mathbf{N} \delta\mathbf{a}_e \\ \mathbf{e}^{\delta u} &= \mathbf{L} \mathbf{N} \delta\mathbf{a}_e = \mathbf{B} \delta\mathbf{a}_e \\ \mathbf{e}^u &= \mathbf{L} \mathbf{N} \mathbf{a}_e = \mathbf{B} \mathbf{a}_e(t) \\ \mathbf{s}^u &= \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{a}_e(t) \end{aligned}$$

donde \mathbf{N} es una matriz de funciones conocidas, que dependen del espacio y no del tiempo (funciones de forma); $\delta \mathbf{a}_e$ y \mathbf{a}_e son vectores de coeficientes incógnita, cuyo valor se hace coincidir normalmente con el valor de los desplazamientos en los nodos; \mathbf{L} es una matriz de operadores (derivadas) y \mathbf{D} es una matriz de coeficientes elásticos. Nótese que, a diferencia de lo que ocurría en los problemas estacionarios, los coeficientes \mathbf{a}_e son ahora función del tiempo.

3. Las integrales que aparecen en las ecuaciones de la forma débil se hacen sumando las contribuciones de los distintos elementos, es decir, $\forall \delta \tilde{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}$:

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathbf{s}^u, \mathbf{e}^{\delta u})_\Omega - (\mathbf{b}, \delta \tilde{\mathbf{u}})_\Omega + (\rho \ddot{\mathbf{u}}, \delta \tilde{\mathbf{u}})_\Omega - [\bar{\mathbf{t}}, \delta \tilde{\mathbf{u}}]_{S_t} \\ &= \sum_i \{ (\mathbf{s}^u, \mathbf{e}^{\delta u})_{\Omega_i} - (\mathbf{b}, \delta \tilde{\mathbf{u}})_{\Omega_i} + (\rho \ddot{\mathbf{u}}, \delta \tilde{\mathbf{u}})_{\Omega_i} - [\bar{\mathbf{t}}, \delta \tilde{\mathbf{u}}]_{S_{t_i}} \} \end{aligned}$$

y, para las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathbf{u}(0) - \mathbf{u}_0, \delta \tilde{\mathbf{u}})_\Omega = \sum_i (\mathbf{u}(0) - \mathbf{u}_0, \delta \tilde{\mathbf{u}})_{\Omega_i} \\ 0 &= (\dot{\mathbf{u}}(0) - \dot{\mathbf{u}}_0, \delta \tilde{\mathbf{u}})_\Omega = \sum_i (\dot{\mathbf{u}}(0) - \dot{\mathbf{u}}_0, \delta \tilde{\mathbf{u}})_{\Omega_i} \end{aligned}$$

4. La contribución de cada elemento las sumas anteriores es, sustituyendo las aproximaciones del paso 2:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{a}_{e_i}^t (\mathbf{B}^t \mathbf{D} \mathbf{B})_{\Omega_i} \mathbf{a}_{e_i} - \delta \mathbf{a}_{e_i}^t (\mathbf{N}^t \mathbf{b})_{\Omega_i} + \delta \mathbf{a}_{e_i}^t (\mathbf{N}^t \rho \mathbf{N})_{\Omega_i} \ddot{\mathbf{a}}_{e_i} - \delta \mathbf{a}_{e_i}^t [\mathbf{N}^t \bar{\mathbf{t}}]_{S_{t_i}} &= \\ \delta \mathbf{a}_{e_i}^t (\mathbf{K}_{e_i} \mathbf{a}_{e_i} + \mathbf{M}_{e_i} \ddot{\mathbf{a}}_{e_i} - \mathbf{f}_{e_i}) & \end{aligned}$$

donde $\mathbf{K}_{e_i} \equiv (\mathbf{B}^t \mathbf{D} \mathbf{B})_{\Omega_i}$ es la matriz de rigidez del elemento i ; $\mathbf{f}_{e_i} \equiv (\mathbf{N}^t \mathbf{b})_{\Omega_i} + [\mathbf{N}^t \bar{\mathbf{t}}]_{S_{t_i}}$ es el vector de cargas del elemento i ; y $\mathbf{M}_{e_i} \equiv (\mathbf{N}^t \rho \mathbf{N})_{\Omega_i}$ es la *matriz de masas* del elemento i .

En cuanto a las condiciones iniciales, la contribución de cada elemento es:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{a}_{e_i}^t (\mathbf{N}^t \mathbf{N})_{\Omega_i} \mathbf{a}_{e_{i0}} - \delta \mathbf{a}_{e_i}^t (\mathbf{N}^t \mathbf{u}_0)_{\Omega_i} &= \delta \mathbf{a}_{e_i}^t (\mathbf{U}_{e_i} \mathbf{a}_{e_{i0}} - \mathbf{n}_{u_{ei}}) \\ \delta \mathbf{a}_{e_i}^t (\mathbf{N}^t \mathbf{N})_{\Omega_i} \dot{\mathbf{a}}_{e_{i0}} - \delta \mathbf{a}_{e_i}^t (\mathbf{N}^t \dot{\mathbf{u}}_0)_{\Omega_i} &= \delta \mathbf{a}_{e_i}^t (\mathbf{U}_{e_i} \dot{\mathbf{a}}_{e_{i0}} - \mathbf{n}_{v_{ei}}) \end{aligned}$$

donde $\mathbf{U}_{e_i} \equiv (\mathbf{N}^t \mathbf{N})_{\Omega_i}$, $\mathbf{n}_{u_{ei}} \equiv (\mathbf{N}^t \mathbf{u}_0)_{\Omega_i}$ y $\mathbf{n}_{v_{ei}} \equiv (\mathbf{N}^t \dot{\mathbf{u}}_0)_{\Omega_i}$

5. La suma de las contribuciones de los distintos elementos se hace a través del proceso de ensamblaje.

Como en el caso de los problemas estacionarios, el proceso de ensamblaje consiste en ir acumulando las contribuciones de cada elemento en matrices y vectores de

carácter global, esto es, ordenados según la numeración global de grados de libertad. Las ecuaciones discretas de la forma débil del problema quedan:

$$\begin{aligned} \sum_{\text{elementos}} \delta \mathbf{a}_{e_i}^t (\mathbf{K}_{e_i} \mathbf{a}_{e_i} + \mathbf{M}_{e_i} \ddot{\mathbf{a}}_{e_i} - \mathbf{f}_{e_i}) &\equiv \delta \mathbf{a}^t (\mathbf{K} \mathbf{a} + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{a}} - \mathbf{f}) = 0 \\ \sum_{\text{elementos}} \delta \mathbf{a}_{e_i}^t (\mathbf{U}_{e_i} \mathbf{a}_{e_{i_0}} - \mathbf{n}_{u_{e_i}}) &\equiv \delta \mathbf{a}^t (\mathbf{U} \mathbf{a}_0 - \mathbf{n}_u) = 0 \\ \sum_{\text{elementos}} \delta \mathbf{a}_{e_i}^t (\mathbf{U}_{e_i} \mathbf{a}_{e_{i_0}} - \mathbf{n}_{v_{e_i}}) &\equiv \delta \mathbf{a}^t (\mathbf{U} \dot{\mathbf{a}}_0 - \mathbf{n}_v) = 0 \\ &\quad \forall \delta \mathbf{a} \end{aligned}$$

donde \mathbf{K} es la matriz de rigidez global, \mathbf{f} es el vector global de cargas y \mathbf{M} es la matriz global de masas.

6. Como las relaciones anteriores han de cumplirse $\forall \delta \mathbf{a}$, se llega finalmente al sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{K} \mathbf{a} - \mathbf{f} = 0 \quad (10.3)$$

con las condiciones iniciales:

$$\mathbf{a}(0) \equiv \mathbf{a}_0 = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{n}_u \quad (10.4)$$

$$\dot{\mathbf{a}}(0) \equiv \dot{\mathbf{a}}_0 = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{n}_v \quad (10.5)$$

el cual permite determinar las funciones incógnita $\mathbf{a}(t)$.

7. De acuerdo con el paso 2, las funciones $\mathbf{a}(t)$ definen la solución dentro de todos los dominios elementales y, por agregación, definen la solución buscada en todo el dominio de cálculo Ω .

Así pues, la aplicación de la “receta” o sistemática del MEF conduce al sistema global de ecuaciones diferenciales ordinarias 10.3, que hay que integrar en el tiempo a partir de las condiciones iniciales 10.4 y 10.5¹.

En problemas de dinámica de estructuras aparece normalmente un tercer sumando en el miembro de la izquierda de 10.3, el correspondiente al amortiguamiento viscoso. El sistema de ecuaciones y sus condiciones iniciales quedan:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{a}} + \mathbf{K} \mathbf{a} - \mathbf{f} = 0 \quad (10.6)$$

$$\mathbf{a}(0) = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{n}_u \quad (10.7)$$

$$\dot{\mathbf{a}}(0) = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{n}_v \quad (10.8)$$

¹Nótese que el sistema 10.3 tiene una estructura similar a la del que gobierna el comportamiento de un sistema de masas puntuales conectadas por muelles. El papel de la sistemática del MEF ha sido entonces el de permitir pasar de un sistema continuo (ecuaciones diferenciales en derivadas parciales definidas en Ω) a un sistema discreto (masas y muelles) energéticamente equivalente.

donde \mathbf{C} es la matriz de amortiguamiento.

Una hipótesis corriente es suponer que la matriz de amortiguamiento puede obtenerse como²:

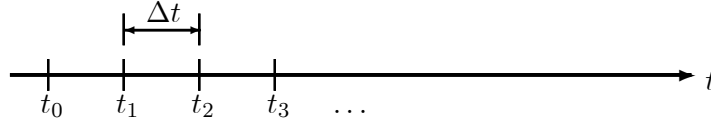
$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \quad \alpha, \beta \in \Re$$

Esta forma de la matriz \mathbf{C} hubiese aparecido en el desarrollo anterior si se sustituyen las fuerzas de inercia $\rho \ddot{\mathbf{u}}$ por la suma $(\rho \ddot{\mathbf{u}} + \alpha \rho \dot{\mathbf{u}})$, y si la relación tensión-deformación, $\mathbf{s} = \mathbf{D} \mathbf{e}$, se sustituye por $\mathbf{s} = \mathbf{D} \mathbf{e} + \beta \mathbf{D} \dot{\mathbf{e}}$, donde $\dot{\mathbf{e}} \equiv \frac{1}{2}(\nabla \dot{\mathbf{u}} + \nabla^t \dot{\mathbf{u}})$.

10.4 Procedimientos tipo Newmark

El sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias 10.6 se conoce con el nombre de sistema de ecuaciones semidiscretas, ya que para llegar a él se ha discretizado el espacio pero no el tiempo.

Para integrar este sistema se utilizan normalmente procedimientos de diferencias finitas, que dan lugar a la discretización en el tiempo. Se obtienen así los valores de las funciones $\mathbf{a}(t)$ en instantes de tiempo separados por lo que se conoce como *paso de integración* Δt .



En general, se utilizan los algoritmos de integración de tipo Newmark, los cuales se pueden poner como:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{a}}_{n+1} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{a}}_{n+1} + \mathbf{K} \mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{f}_{n+1} \quad (10.9)$$

$$\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{a}_n + \Delta t \dot{\mathbf{a}}_n + \frac{\Delta t^2}{2} [(1 - 2\beta) \ddot{\mathbf{a}}_n + 2\beta \ddot{\mathbf{a}}_{n+1}] \quad (10.10)$$

$$\dot{\mathbf{a}}_{n+1} = \dot{\mathbf{a}}_n + \Delta t [(1 - \gamma) \ddot{\mathbf{a}}_n + \gamma \ddot{\mathbf{a}}_{n+1}] \quad (10.11)$$

donde los subíndices indican el instante de tiempo en que se particularizan las diferentes funciones vectoriales (p.ej. $\ddot{\mathbf{a}}_{n+1} \equiv \ddot{\mathbf{a}}(t_{n+1})$). Recuérdese que la función $\mathbf{f}(t)$ es dato.

A partir de las relaciones 10.9 a 10.11 se plantea un procedimiento en el que se progresa paso a paso en el tiempo a partir de las condiciones iniciales. Esquemáticamente, este procedimiento de integración paso a paso podría ser:

1. Calcular las aceleraciones iniciales $\ddot{\mathbf{a}}_0$ a partir de la relación 10.9 y de los desplazamientos y velocidades iniciales:

$$\ddot{\mathbf{a}}_0 = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{f}_0 - \mathbf{C} \dot{\mathbf{a}}_0 - \mathbf{K} \mathbf{a}_0)$$

²Esta forma de la matriz de amortiguamiento se conoce como amortiguamiento de Rayleigh.

2. Inicializar $n \leftarrow 0$
3. Poner \mathbf{a}_{n+1} y $\dot{\mathbf{a}}_{n+1}$ en función de $\ddot{\mathbf{a}}_{n+1}$, utilizando 10.10 y 10.11
4. Sustituir las expresiones \mathbf{a}_{n+1} y $\dot{\mathbf{a}}_{n+1}$ de la etapa anterior en 10.9. Se obtiene así un sistema algebraico de ecuaciones lineales que permite obtener los coeficientes $\ddot{\mathbf{a}}_{n+1}$
5. A partir de $\ddot{\mathbf{a}}_{n+1}$ y de los valores ya conocidos del instante de tiempo anterior, \mathbf{a}_n , $\dot{\mathbf{a}}_n$, $\ddot{\mathbf{a}}_n$, calcular \mathbf{a}_{n+1} y $\dot{\mathbf{a}}_{n+1}$ utilizando 10.10 y 10.11
6. Hacer $n \leftarrow n + 1$
7. Volver a 3

Un procedimiento de integración tipo Newmark, como el esquematizado en los párrafos anteriores, es *estable* para cualquier tamaño del paso de integración Δt si se cumple que:

$$2\beta \geq \gamma \geq \frac{1}{2}$$

Sin embargo, el procedimiento es sólo *condicionalmente estable* cuando:

$$\gamma \geq \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \gamma > 2\beta$$

Que el procedimiento es condicionalmente estable significa que el paso de integración ha de ser inferior a un valor crítico:

$$\Delta t \leq \Delta t_{\text{crit}}$$

para que la integración numérica de las ecuaciones se mantenga estable. El paso crítico de integración es función tanto de los parámetros β y γ del procedimiento de Newmark como del mallado de elementos finitos y de las propiedades físicas de los materiales del modelo.

De la familia de procedimientos tipo Newmark, los dos más populares son el procedimiento de la *aceleración promedio* y el procedimiento de *diferencias centrales*. Sus características se dan en la tabla.

Método	Tipo	β	γ	Estabilidad	Orden precisión
Aceleración promedio	Implícito	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	Incondicional	2
Diferencias centrales	Explícito	0	$\frac{1}{2}$	Condicional	2

En la tabla anterior el orden de precisión indica la potencia de Δt a la cual es proporcional el error del operador de diferencias finitas.

El procedimiento de diferencias centrales es un procedimiento *explícito* en el sentido de que si se escoge una matriz de masas \mathbf{M} y una matriz de amortiguamiento \mathbf{C} que sean diagonales, entonces resulta que el sistema de ecuaciones que se obtiene para progresar con

la solución desde un instante t_n al instante siguiente t_{n+1} , tiene su matriz de coeficientes diagonal. Esto permite obtener la solución de aceleraciones en t_{n+1} de manera *explícita* a partir de las resultantes de fuerzas internas y externas que actúan sobre los nodos en ese instante. En la práctica, la aceleración se obtiene en cada nodo simplemente dividiendo la resultante de las fuerzas que actúan sobre el mismo por la masa nodal.

El algoritmo de integración explícita resulta pues mucho más sencillo de implementar que el algoritmo general o *implícito*, al no tenerse que ensamblar matrices ni resolver sistemas de ecuaciones con matriz de coeficientes llena. Su único, pero gran inconveniente es que da lugar a un procedimiento de integración condicionalmente estable, en el que el paso crítico de integración suele ser muy pequeño. En problemas de dinámica estructural este paso crítico es del orden del tiempo que tarda la onda de tensión más rápida en atravesar el elemento más pequeño de la malla³. En consecuencia, se requiere un número enormemente grande de pasos de integración para completar el estudio de un transitorio largo.

Los procedimientos explícitos tienen su campo natural de aplicación en los problemas de impacto, donde los transitorios de interés suelen ser relativamente cortos y donde la respuesta requiere de por sí utilizar pasos de integración pequeños para definir correctamente su contenido de altas frecuencias. Sin embargo, debido a su robustez para abordar problemas muy no lineales, los algoritmos explícitos se están empleando cada vez más en otras áreas, por ejemplo, en problemas de conformado de metales.

Existen así en el mercado dos grandes familias de programas comerciales de elementos finitos para problemas no estacionarios: los programas *implícitos* y los programas *explícitos*. En la tabla se resumen las características generales de ambos grupos de programas. Debe recordarse siempre que las ecuaciones que resuelven unos y otros son las mismas y que, en principio, cualquier problema puede resolverse empleando ambas clases de programas. La diferencia está en que, según el caso, una técnica puede resultar significativamente más eficiente que la otra.

Implícitos	Explícitos
Estables $\forall \Delta t$ Δt limitado por la precisión requerida	Debe ser $\Delta t \leq \Delta t_{\text{crit}}$
Ensamblan sistema de ecuaciones	No ensamblan (necesitan menos recursos)
Eficientes en dinámica “lenta” (sismos, viento, oleaje ...)	Eficientes en dinámica “rápida” (impactos, explosiones ...)

³En un material como el acero, la onda de tensión más rápida se propaga a una velocidad de unos 5200 m/s. Esto significa que en una malla con elementos de, por ejemplo, 1 cm de lado, el paso crítico de integración es del orden de 2 microsegundos.

10.5 Operador α de Hilber-Hughes-Taylor

En algunos problemas resulta conveniente introducir en el algoritmo de integración en el tiempo un amortiguamiento de naturaleza numérica. Esto ayuda, por ejemplo, a eliminar el “ruido” en la respuesta asociado a las frecuencias más altas del modelo de cálculo, que normalmente son parásitas.

Para ello se utiliza muchas veces una variante del procedimiento de la aceleración promedio que se conoce con el nombre de operador α de Hilber-Hughes-Taylor. En este operador, la ecuación 10.9 del algoritmo general de tipo Newmark se sustituye por:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{a}}_{n+1} + (1 + \alpha)\mathbf{C}\dot{\mathbf{a}}_{n+1} - \alpha\mathbf{C}\dot{\mathbf{a}}_n + (1 + \alpha)\mathbf{K}\mathbf{a}_{n+1} - \alpha\mathbf{K}\mathbf{a}_n = (1 + \alpha)\mathbf{f}_{n+1} - \alpha\mathbf{f}_n$$

donde $\alpha \in \Re$ es un nuevo parámetro tal que:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3} &\leq \alpha \leq 0 \\ \gamma &= \frac{1 - 2\alpha}{2} \\ \beta &= \frac{(1 - \alpha)^2}{4} \end{aligned}$$

Este operador da lugar a un algoritmo implícito incondicionalmente estable y permite introducir una cierta disipación o amortiguamiento numérico sin pérdida de precisión. El parámetro α es el que determina la magnitud de la disipación. La disipación es máxima para $\alpha = -\frac{1}{3}$ y se anula para $\alpha = 0$. Para $\alpha = 0$ el operador de Hilber-Hughes-Taylor se transforma en el operador de la aceleración promedio.

Capítulo 11

Estimación a posteriori del error

11.1 Introducción

El cálculo por el MEF aparece, cada vez más, integrado en aplicaciones llamadas de *ingeniería asistida por ordenador* (CAE), en las que se trata de reunir en un mismo entorno informático todas las herramientas necesarias para el proyecto. De este modo, existen en el mercado paquetes de programas con un módulo de dibujo asistido por ordenador (CAD), que sirve para introducir la geometría, otro módulo de cálculo (FEA), que evalúa el funcionamiento del prototipo y, a veces, hasta un tercer módulo que prepara la salida para las máquinas de control numérico (CAM). La idea es que no tiene mucho sentido generar varios conjuntos de modelos, uno para el dibujo o representación, otro para el cálculo, un tercero para la fabricación, etc. El objetivo es disponer de una base de datos común a la que acceden las distintas aplicaciones. Es lo que se conoce a veces como *ingeniería concurrente*.

En un entorno de trabajo “integrado” de este estilo, resulta posible que proyectistas o ingenieros novicios, con muy poco conocimiento del MEF, construyan modelos de cálculo y produzcan resultados. Resultados enmarcados de tal modo por la impresionante potencia gráfica de los ordenadores actuales, que puede que el usuario no sea consciente siquiera de que sus comprobaciones tensionales, o de otro tipo, se basan en una aproximación y de que la calidad de esta aproximación es, en principio, desconocida para él.

Así, se detecta una cierta tendencia a convertir el MEF en una especie de “caja negra” para la producción de resultados y esto no está exento de peligro, sobre todo en empresas poco tecnificadas u oficinas técnicas pequeñas, donde lo más probable es que no exista ningún especialista capaz de corregir los abusos a los que se prestan los programas comerciales.

Por otro lado, aun utilizando el MEF de forma consciente y conociendo sus limitaciones, muchas veces resulta difícil dar con el mallado más adecuado o estimar la precisión de los resultados obtenidos. Esto es especialmente cierto cuando se aborda por primera vez un problema determinado.

Las situaciones anteriores tienen un denominador común: resulta deseable disponer de medidas *cuantitativas* de la calidad de las soluciones aproximadas calculadas mediante el

MEF. La introducción de esta clase de medidas permitiría establecer un control de calidad sistemático, basado en tolerancias preestablecidas.

El atractivo de esta idea ha hecho que, desde principios de la década de los ochenta, se dedicara un esfuerzo investigador considerable a establecer procedimientos de estimación del error en las soluciones que da el MEF. El objetivo es obtener lo que se vino en llamar *estimadores a posteriori del error* o índices que utilizan los propios resultados del cálculo para proporcionar una medida de la calidad de los mismos.

En la actualidad existen algunos métodos que permiten obtener aproximaciones muy razonables al error cometido. En general, dichos métodos se concentran en el error de discretización que lleva consigo el MEF, ya que se supone que la geometría y las acciones exteriores han sido correctamente representadas y no se tienen en cuenta los errores debidos a la aritmética finita del ordenador.

Los primeros índices de esta clase aparecieron en los programas comerciales de cálculo hacia el comienzo de la década de los noventa. No tienen todavía un uso muy extendido dentro del conjunto de los usuarios, probablemente porque el usuario medio no sabe interpretarlos bien y porque, salvo en muy pocos casos, no van acompañados de procedimientos automáticos de mejora de la solución para cuando la calidad de la misma no sea aceptable. Es decir, el usuario medio no sabe decidir si el índice de calidad calculado corresponde o no a una calidad suficiente y, cuando piensa que la calidad no es suficiente, tampoco sabe cómo utilizar los índices obtenidos para mejorar su solución.

La aplicación más natural de la estimación del error son los llamados procesos de cálculo *adaptables*, en los que, partiéndose de una solución de calidad muy baja, ésta se va enriqueciendo por sucesivos refinamientos hasta que las medidas de calidad cumplen unos requisitos fijados de antemano. Son este tipo de procesos los más apropiados para ser incluidos casi como cajas negras dentro de un paquete integrado de CAE. Su “adaptividad” hace que las soluciones que proporcionan sean relativamente insensibles aun a graves errores en la preparación del modelo inicial. Errores tales que podrían hacer inservibles los resultados de un cálculo convencional.

Se trata en este capítulo de introducir primero ciertos conceptos básicos, para luego presentar alguno de los estimadores de error disponibles y el esquema básico de un proceso de cálculo adaptable.

11.2 Conceptos básicos

El primer concepto que debe introducirse es el de *error de discretización*. Este error se define como:

$$\mathbf{e}_r \equiv \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}} \quad \text{en } \Omega$$

donde \mathbf{u} es la solución exacta para el campo incógnita básica, $\tilde{\mathbf{u}}$ es la aproximación obtenida por el MEF y Ω es el dominio de definición del problema. El error de discretización es pues una función de punto y no es calculable, ya que su conocimiento implicaría el conocimiento de la solución exacta. Las medidas de la calidad se basan entonces en estimaciones de la solución exacta \mathbf{u} o en las manifestaciones del campo de errores \mathbf{e}_r .

La magnitud del error se define habitualmente como una norma del campo \mathbf{e}_r . Ejemplos de normas son la norma L_2 :

$$\|\mathbf{e}_r\|_{L_2}^2 \equiv \int_{\Omega} \mathbf{e}_r^t \mathbf{e}_r d\Omega$$

y la norma *energética* asociada a la forma débil punto de partida de las ecuaciones del MEF. En un problema de elasticidad la norma energética es:

$$\|\mathbf{e}_r\|^2 \equiv \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^{e_r} : \boldsymbol{\varepsilon}^{e_r} d\Omega$$

donde $\boldsymbol{\sigma}^{e_r}$ y $\boldsymbol{\varepsilon}^{e_r}$ son los campos de tensiones y deformaciones derivados del campo de desplazamientos \mathbf{e}_r .

Normalmente, ante una solución aproximada $\tilde{\mathbf{u}}$, se tiene interés en dos aspectos del error de discretización cometido. Por un lado, interesa tener una medida global de la calidad de la solución aproximada. Esto permite decidir sobre si la solución es aceptable o no. Por otro lado, también es importante conocer la distribución del error a lo largo del dominio, ya que esto señala las zonas en que debe incidirse para mejorar la calidad global de la solución.

Así, se suele llamar *estimador* de error a cualquier medida que aproxime la magnitud del campo de errores en el dominio del problema y que, por tanto, proporcione un índice global de la calidad de la misma. Por contraste, se llama *indicador* de error a cualquier medida sobre la distribución del error a lo largo del dominio de cálculo y que, por tanto, proporcione información para refinar la solución de modo eficiente.

Los estimadores de error son expresión directa de la calidad de una solución aproximada, mientras que los indicadores proporcionan un mapa de la distribución relativa del error. Ambas categorías no son excluyentes. Por ejemplo, medidas locales absolutas del error pueden emplearse como indicadores de cara al refinamiento de una malla de elementos finitos.

11.3 Indicadores y estimadores de error

En esta sección se pasa revista a algunos de los indicadores y estimadores de error disponibles actualmente.

11.3.1 Densidad de energía de deformación (SED)

Los gradientes de la densidad de energía de deformación (“Strain Energy Density” - SED), entendiendo este concepto en sentido generalizado, se han utilizado mucho para identificar las zonas del mallado en donde es más conveniente el refinamiento, esto es, como indicadores de error.

La idea es la siguiente. El MEF es un procedimiento óptimo en sentido energético. Tiende a minimizar la diferencia entre la norma energética exacta y la aproximada:

$$\|\mathbf{u}\|^2 - \|\tilde{\mathbf{u}}\|^2 = \underbrace{\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^u : \boldsymbol{\varepsilon}^u d\Omega}_{\text{en elasticidad}}$$

Por lo tanto, se obtendrán mejores soluciones cuanto mejor se represente la norma energética de la solución exacta. Así, la solución aproximada será tanto mejor cuanto mejor se aproxime la función subintegral en el cálculo su norma energética. En problemas de elasticidad esta cantidad subintegral es una densidad de energía de deformación $\boldsymbol{\sigma}^u : \boldsymbol{\varepsilon}^u$. En general, hará falta mayor discretización en una zona cuanto mayor sea el gradiente de densidad de energía de deformación en ella. Por ejemplo, con elementos de deformación constante, esto significa incrementar el número de los mismos en las zonas con mayores saltos en la densidad de energía al pasar de un elemento a otro.

Mediante esta técnica, relativamente sencilla de implementar, se obtiene información sobre dónde resulta más conveniente refinar la discretización, pero no un índice de calidad global de la solución. Es decir, se obtiene un indicador de error, pero no un estimador, en el sentido explicado en la sección anterior.

11.3.2 Normas de residuos

La solución aproximada $\tilde{\mathbf{u}}$ se obtiene por el MEF a partir de la forma débil de las ecuaciones que rigen el problema. Como $\tilde{\mathbf{u}}$ no es la solución exacta, si se introduce en las ecuaciones de la forma fuerte, no las cumplirá y dará lugar a una función de punto o campo de *residuos* \mathbf{r}^u definido en el dominio Ω .

Por ejemplo, en el caso del problema elástico, el campo de residuos se obtiene al sustituir $\tilde{\mathbf{u}}$ en la forma fuerte de las ecuaciones de equilibrio:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^u + \mathbf{b} &= \mathbf{r}^u \neq 0 \\ \mathbf{r}^u : \Omega &\longrightarrow \Re^3 \end{aligned}$$

El campo de residuos es una manifestación o consecuencia de que exista error en la solución aproximada. Se han propuesto entonces diversos estimadores de error que intentan acotar superiormente la norma energética del campo de errores $\|\mathbf{e}_r\|$ utilizando normas del campo de residuos. Dichos estimadores se encuentran entre los mejores de que se dispone actualmente. Su principal inconveniente es el enorme costo en tiempo de cálculo que requiere el cálculo de los residuos, que puede ser del orden del necesario para la construcción de la matriz de rigidez global del problema.

Por otro lado, estos estimadores se construyen en base a la suma de contribuciones locales, que pueden ser empleadas a su vez como indicadores de la distribución del error, para guiar un proceso de refinamiento de la solución aproximada.

11.3.3 Estimadores del tipo Z^2

Los estimadores del tipo Z^2 aparecieron como un intento de reducir los tiempos de cálculo asociados a la estimación del error basada en normas de residuos y, sobre todo, con la idea

de una fácil implementación dentro de la estructura habitual de los programas de cálculo.

Su fundamento es la evaluación de la diferencia entre las tensiones que resultan del cálculo con elementos finitos y una proyección continua o “alisada” de dichas tensiones, la cual se postula que tiene un orden de precisión superior. Entiéndase aquí el concepto de “tensión” en el sentido generalizado de un “gradiente del campo incógnita básica”.

Se han propuesto diversos procedimientos para la obtención de la proyección continua de las tensiones calculadas por el MEF en una solución alisada. El más sencillo consiste en extrapolar el valor de la tensión a los nodos, promediar en cada nodo el valor de la tensión suministrado por los elementos que se conectan al mismo y utilizar estas medias nodales y las funciones de forma \mathbf{N} para definir el campo alisado de tensiones. De este modo, dentro de cada elemento el campo alisado es:

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{N} \boldsymbol{\sigma}_e$$

donde $\boldsymbol{\sigma}_e$ representa el vector de promedios nodales de tensión.

El campo $\boldsymbol{\sigma}^*$ definido de esta manera puede postularse que es una mejor aproximación de la solución exacta en tensiones que el campo $\boldsymbol{\sigma}^u$ que se deriva directamente de la solución calculada en desplazamientos $\tilde{\mathbf{u}}$. Resulta razonable entonces aproximar el error en tensiones como la diferencia:

$$\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^u \approx \boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}^u$$

y entonces estimar la norma energética del error como la energía de deformación asociada a esta diferencia. Esto es:

$$\|\mathbf{e}_r\|^2 \approx \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}^u)^t \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}^u) d\Omega$$

donde \mathbf{D} es una matriz de coeficientes elásticos. La integral anterior se calcula como suma de integrales extendidas a los dominios elementales y entonces cada sumando puede ser utilizado como indicador local del error en el elemento correspondiente.

11.3.4 Estimadores basados en diferencias entre funcionales

Cuando un problema admite una formulación variacional, normalmente pueden utilizarse diferentes principios variacionales para resolverlo. Los funcionales asociados a estos principios se derivan unos de otros utilizando la técnica de los multiplicadores de Lagrange. De un funcional a otro cambia el número de campos independientes y cambian también las restricciones que delimitan los espacios de funciones de los que se toman estos campos.

Sin embargo, los funcionales gozan de la propiedad de que, si se sustituyen en ellos los campos solución exacta, entonces todos adoptan el mismo valor. Esto es, la solución exacta del problema hace que todos los funcionales valgan lo mismo.

Así, las diferencias entre los valores de los funcionales para una solución aproximada constituyen una manifestación del error de discretización y puede ser aprovechada para estimarlo.

Frente a estimadores de otras clases, los estimadores basados en diferencias entre funcionales tienen la ventaja de que se evalúan elemento a elemento de forma independiente,

sin ser necesario el cálculo de promedios nodales ni de saltos interelementales. Desde el punto de vista teórico, no requieren para su aplicación ninguna condición de suavidad o lisura en la solución exacta, la cual puede exhibir discontinuidades.

Por contra, la evaluación de esta clase de estimadores requiere disponer de varios campos independientes, para poder evaluar al menos un funcional multicampo. Esto hace que no puedan utilizarse con facilidad en elementos basados en la formulación convencional, donde sólo existe un campo independiente.

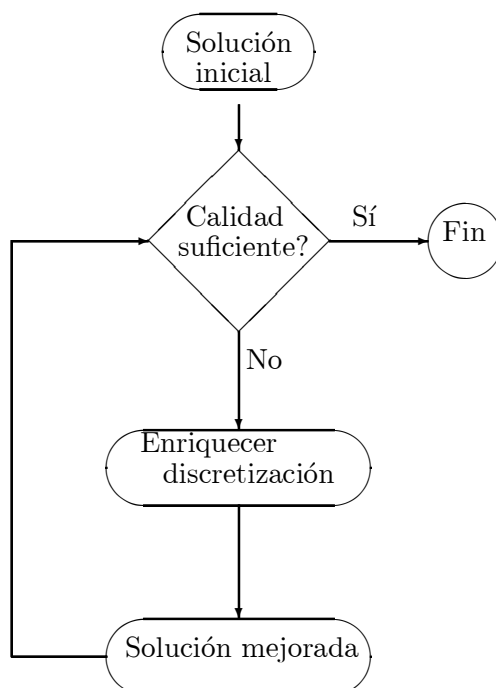
El punto clave de un estimador de esta clase es la elección de los funcionales por cuya diferencia se estima el error. Si estos funcionales se escogen de manera que converjan hacia su valor exacto uno por la derecha y otro por la izquierda, entonces su diferencia será una cota superior del error en la energía y, por tanto, un estimador excelente.

Como los estimadores se calculan elemento a elemento, las contribuciones elementales pueden utilizarse como indicadores de error para guiar el refinamiento de la solución.

11.4 Procesos adaptables

Aun cuando la estimación del error cometido en un análisis determinado y el conocimiento de su distribución a lo largo de la malla empleada son aspectos esenciales, éstos no pueden considerarse más que un primer paso. Conocida la calidad de la solución aproximada, el ingeniero debe poseer las herramientas necesarias para poder refinar esta solución de modo eficiente en el caso de que no se considere aceptable la calidad obtenida. Este es precisamente el papel de los procesos adaptables, los cuales tienen como objetivo proporcionar de modo más o menos automático soluciones acordes con la calidad exigida.

El diagrama de flujo de un proceso adaptable es el siguiente:



El nivel de calidad de la solución se evalúa mediante un estimador del error global. Si el nivel de calidad no se considera suficiente, la discretización se enriquece tratando de uniformizar la distribución del error a lo largo de la malla que dan los indicadores de error.

Existen dos formas básicas de enriquecer una malla de elementos finitos, esto es, de introducir más grados de libertad en aquellas zonas que se identifican como generadoras de más error. En un cálculo convencional, en el que se utiliza un tipo de elemento determinado, el único medio de enriquecer la malla es subdividiendo los elementos en elementos más pequeños. Esta clase de refinamiento se conoce con el nombre de *refinamiento h* .

Hay otra alternativa, que es hacer más rica la discretización incrementando el orden de los polinomios que constituyen las funciones de aproximación o funciones de forma dentro de cada elemento. Es lo que se conoce como *refinamiento p* . De esta manera, la malla permanece siempre con el mismo número de elementos.

Se puede pensar también en formas mixtas de *refinamiento h - p* , las cuales combinan las dos clases de refinamiento anteriores.

Capítulo 12

Conceptos básicos de la Mecánica de Sólidos

12.1 Introducción

Se inician con este capítulo los temas dedicados a la aplicación del MEF a problemas no lineales.

Se dice que un problema es *lineal* cuando existe proporcionalidad entre las acciones y las respuestas, es decir, si la respuesta es una función lineal de las acciones. Un problema es *no lineal* en cualquier otro caso.

La aplicación del MEF a problemas no lineales es una generalización de las ideas desarrolladas para problemas lineales. El principio básico de discretización del dominio de cálculo es el mismo, aunque la naturaleza de los problemas da lugar ahora a sistemas discretos no lineales, más difíciles de tratar numéricamente y para los cuales se han ido desarrollando algoritmos y procedimientos de cálculo mucho más complejos que los utilizados en problemas lineales.

Sin embargo, a la hora de abordar la aplicación del MEF a esta clase de problemas el primer escollo con que se encuentra el estudioso no es la complejidad de los algoritmos de cálculo, sino que la teoría básica de su problema, aquella que es previa a la aplicación del MEF, es también mucho más compleja que la que hay detrás de los problemas lineales convencionales y, además, no le resulta familiar.

El aumento de la potencia de los ordenadores y el desarrollo paralelo del MEF ha permitido utilizar intensivamente conceptos y teorías que, hasta hace pocos años, habían tenido poca aplicación práctica y que, por tanto, habían recibido en general una atención relativamente escasa. De este modo, se da la paradoja de que el MEF pone al alcance del ingeniero la aplicación práctica de herramientas teóricas muy poderosas para describir la realidad física, pero el ingeniero se encuentra con que no ha recibido suficiente formación básica acerca de esas teorías y se siente incómodo utilizándolas.

Intentando sortear esta dificultad, se introducen en este capítulo algunos conceptos básicos de la Mecánica de Sólidos, los cuales resultan necesarios para el estudio de problemas no lineales dentro de esta disciplina. Estos conceptos son previos a la aplicación

del MEF pero, por razones obvias, deben conocerse antes de emplear ésta o cualquier otra técnica numérica, ya que forman parte de la propia definición del problema.

Una vez más se ha elegido la Mecánica de Sólidos como vehículo para explicar la aplicación del MEF, por ser éste el campo de utilización más corriente. Los interesados en otras disciplinas deberán hacer un esfuerzo de abstracción aún mayor que el exigido en los capítulos anteriores.

12.2 Fuentes de no linealidad en Mecánica de Sólidos

En Mecánica de Sólidos y Estructuras existen cuatro fuentes de no linealidad:

1. Comportamiento del material

El comportamiento del material deja de ser lineal cuando las tensiones ya no son proporcionales a las deformaciones. Esto ocurre, por ejemplo, cuando se utilizan modelos de plasticidad, hiperelasticidad o daño para representar la respuesta del material.

2. Magnitud de la deformación

La cinemática del movimiento del sólido o de la estructura puede hacer que las deformaciones dejen de ser una función lineal de los desplazamientos. Esto ocurre cuando las acciones dan lugar a movimientos que ya no son “pequeños” con respecto a las dimensiones del dominio de cálculo. Entonces, además, el propio dominio de cálculo cambia a lo largo del problema.

3. Condiciones de contorno

Las restricciones al movimiento pueden alterarse con la aplicación de las acciones, dando lugar también a una falta de proporcionalidad en la respuesta. Es el caso de los problemas en los que el contacto entre diferentes componentes se establece o se pierde a lo largo de la historia de cargas.

4. Fuerzas aplicadas

Las fuerzas aplicadas pueden ser también una fuente de no linealidad cuando éstas se vinculan a la deformación del dominio. Es por ejemplo el caso de una presión constante aplicada sobre un área creciente con la deformación o el de una fuerza puntual que sigue una dirección que varía con la deformación de la estructura.

Un problema deja de ser lineal cuando en él se manifiesta una o varias de las causas anteriores.

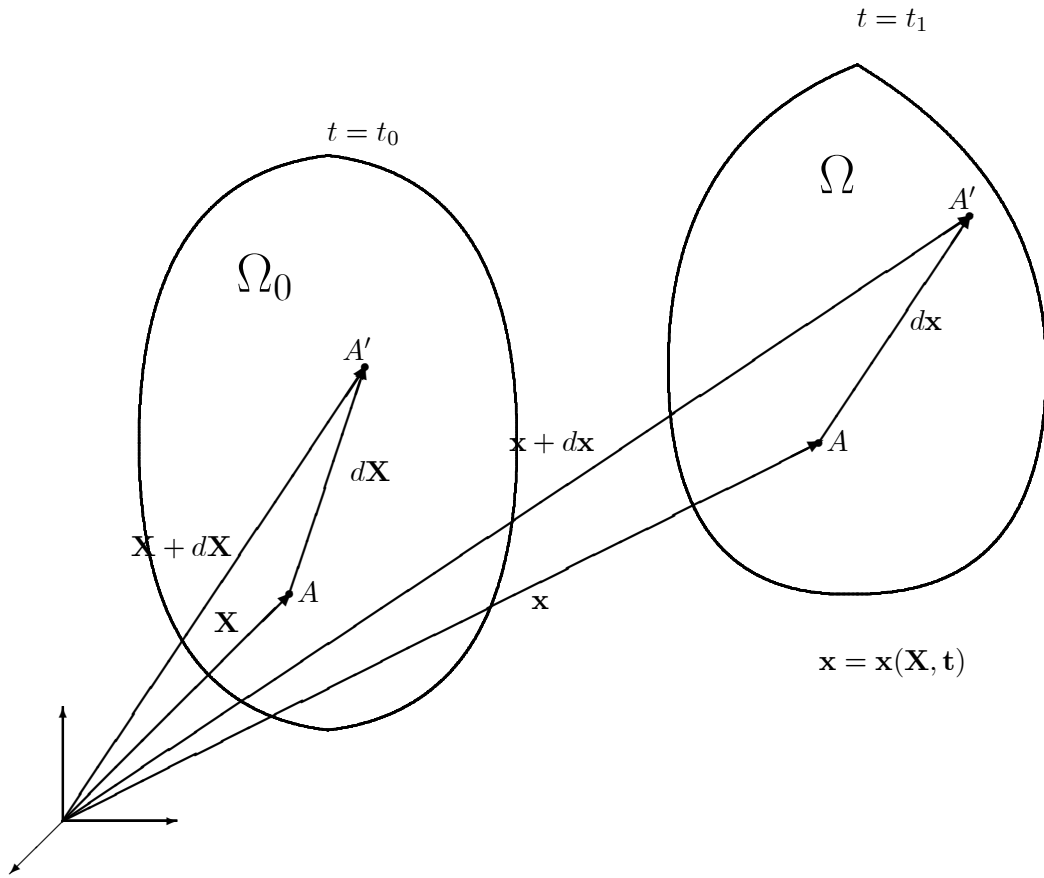
12.3 Tensor gradiente de deformación

En un problema estructural general, el analista describe la configuración inicial de la estructura y busca su movimiento o deformación a lo largo de la historia de cargas. Si

$\mathbf{X} \in \mathbb{R}^3$ representa la configuración inicial y $t \in \mathbb{R}$ es el tiempo o un parámetro de carga, se busca la configuración $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ en el instante definido por t :

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \quad (12.1)$$

Es decir, una partícula A de material inicialmente en la posición \mathbf{X} ocupará una nueva posición \mathbf{x} cuando el parámetro de carga valga t . El problema general consiste en encontrar la definición de \mathbf{x} en función de t .



Si se supone que el material no se crea ni se destruye durante el movimiento y que el movimiento no da lugar tampoco discontinuidades (grietas) dentro del dominio de cálculo, entonces resulta que la correspondencia definida por 12.1 es biunívoca y que la relación 12.1 puede ser invertida. Esto es, que 12.1 define también la posición inicial \mathbf{X} a partir de la posición actual \mathbf{x} y del parámetro de carga t .

En el entorno de la partícula A el movimiento del medio continuo tiene dos componentes, una componente de sólido rígido, que no da lugar a una respuesta tensional del material, y una componente de deformación, a la cual se oponen fuerzas internas derivadas de la estructura del material. En el estudio del movimiento conviene pues separar estas dos componentes, ya que movilizan respuestas muy diferentes. Esto se consigue analizando la evolución de dos partículas próximas A y A' .

En la configuración inicial la diferencia de posición entre ambas partículas vendrá dada por $\overline{AA'} = d\mathbf{X}$. Mientras que en la configuración actual la diferencia de posición será: $\overline{AA'} = d\mathbf{x}$. La relación entre $d\mathbf{X}$ y $d\mathbf{x}$ puede obtenerse a partir de 12.1:

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X} \equiv \mathbf{F} d\mathbf{X} \quad (12.2)$$

donde \mathbf{F} es un tensor de segundo orden que se conoce con el nombre de *tensor gradiente de deformación*. El tensor \mathbf{F} es una función de punto.

12.4 Teorema de descomposición polar

El estudio del tensor gradiente de deformación \mathbf{F} es el que permite separar el movimiento del entorno de un punto en la parte que da lugar a deformación y en la que sólo es un movimiento de sólido rígido.

La longitud inicial dL del segmento $\overline{AA'}$ viene dada por:

$$dL^2 = d\mathbf{X}^t d\mathbf{X}$$

y la longitud actual dl :

$$dl^2 = d\mathbf{x}^t d\mathbf{x}$$

Se define entonces el *cociente de alargamiento* λ como:

$$\lambda \equiv \frac{dl}{dL} = \sqrt{\frac{d\mathbf{x}^t d\mathbf{x}}{d\mathbf{X}^t d\mathbf{X}}}$$

El sentido físico del cociente de alargamiento es claro. Si $\lambda = 1$, entonces no ha habido deformación en torno a A en la dirección marcada por $d\mathbf{X}$ en la configuración inicial, sólo movimiento de sólido rígido.

Como a partir de 12.2 resulta que:

$$dl^2 = d\mathbf{x}^t d\mathbf{x} = d\mathbf{X}^t \mathbf{F}^t \mathbf{F} d\mathbf{X}$$

el cociente de alargamiento se puede poner como:

$$\lambda^2 = \frac{d\mathbf{X}^t \mathbf{F}^t \mathbf{F} d\mathbf{X}}{d\mathbf{X}^t d\mathbf{X}} = \frac{d\mathbf{X}^t}{\sqrt{d\mathbf{X}^t d\mathbf{X}}} \mathbf{F}^t \mathbf{F} \frac{d\mathbf{X}}{\sqrt{d\mathbf{X}^t d\mathbf{X}}} = \mathbf{N}^t \mathbf{F}^t \mathbf{F} \mathbf{N} \quad (12.3)$$

donde \mathbf{N} es un vector unitario en la dirección de $d\mathbf{X}$.

La relación anterior permite, dada una partícula A situada inicialmente en la posición \mathbf{X} , medir el cociente de alargamiento según cualquier dirección \mathbf{N} que salga de ella. En cada punto A el cociente de alargamiento λ es pues una función de la dirección \mathbf{N} . Se puede entonces variar \mathbf{N} buscando puntos estacionarios (máximos o mínimos) de λ . Esto es:

$$\text{Hacer estacionario: } \lambda^2(\mathbf{N}) = \mathbf{N}^t \mathbf{F}^t \mathbf{F} \mathbf{N} \quad \text{con la condición} \quad \mathbf{N}^t \mathbf{N} - 1 = 0$$

Utilizando la técnica de los multiplicadores de Lagrange, los puntos estacionarios para λ se obtienen de:

$$\Phi(\mathbf{N}, p) = \mathbf{N}^t \mathbf{F}^t \mathbf{F} \mathbf{N} - p(\mathbf{N}^t \mathbf{N} - 1) \quad (12.4)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{N}} = \mathbf{F}^t \mathbf{F} \mathbf{N} - p \mathbf{N} = 0 \quad (12.5)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = \mathbf{N}^t \mathbf{N} - 1 = 0 \quad (12.6)$$

donde p es un multiplicador de Lagrange que, premultiplicando 12.5 por \mathbf{N}^t y teniendo en cuenta 12.3, resulta ser igual a λ^2 .

De este modo, según 12.5 los puntos estacionarios de λ cumplen:

$$(\mathbf{F}^t \mathbf{F} - \lambda^2 \mathbf{I}) \mathbf{N} = 0 \quad (12.7)$$

La relación 12.7 define un problema de autovalores que, por ser $\mathbf{F}^t \mathbf{F}$ una matriz simétrica de orden 3, proporciona tres direcciones \mathbf{N}_I , \mathbf{N}_{II} y \mathbf{N}_{III} , ortogonales entre sí, llamadas *direcciones principales de deformación*. Y proporciona también tres cocientes de alargamiento, λ_I , λ_{II} y λ_{III} , según esas direcciones, llamados *alargamientos principales*.

En la configuración actual, definida por \mathbf{x} , a los tres vectores unitarios \mathbf{N}_I , \mathbf{N}_{II} y \mathbf{N}_{III} les corresponden otros tres versores \mathbf{n}_I , \mathbf{n}_{II} y \mathbf{n}_{III} , de modo que:

$$\begin{aligned} \lambda_I \mathbf{n}_I &= \mathbf{F} \mathbf{N}_I \\ \lambda_{II} \mathbf{n}_{II} &= \mathbf{F} \mathbf{N}_{II} \\ \lambda_{III} \mathbf{n}_{III} &= \mathbf{F} \mathbf{N}_{III} \end{aligned}$$

y los tres versores \mathbf{n}_I , \mathbf{n}_{II} y \mathbf{n}_{III} forman también un triedro ortogonal, ya que:

$$\mathbf{n}_I^t \mathbf{n}_{II} = \frac{1}{\lambda_I} \frac{1}{\lambda_{II}} \mathbf{N}_I^t \mathbf{F}^t \mathbf{F} \mathbf{N}_{II} = \frac{\lambda_{II}}{\lambda_I} \mathbf{N}_I^t \mathbf{N}_{II} = 0$$

e igualmente para los productos $\mathbf{n}_I^t \mathbf{n}_{III}$ y $\mathbf{n}_{II}^t \mathbf{n}_{III}$.

De este modo, al formar $(\mathbf{n}_I, \mathbf{n}_{II}, \mathbf{n}_{III})$ un triedro ortogonal, resulta que éste podrá obtenerse mediante una rotación de sólido rígido a partir del triedro $(\mathbf{N}_I, \mathbf{N}_{II}, \mathbf{N}_{III})$. Sea \mathbf{R} la transformación que representa esta rotación, entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_I &= \mathbf{R} \mathbf{N}_I \\ \mathbf{n}_{II} &= \mathbf{R} \mathbf{N}_{II} \\ \mathbf{n}_{III} &= \mathbf{R} \mathbf{N}_{III} \end{aligned}$$

y se cumplirá que $\mathbf{R}^t = \mathbf{R}^{-1}$.

Un vector $d\mathbf{X}_I$ según \mathbf{N}_I en la configuración inicial se transforma en el vector $d\mathbf{x}_I$ en la configuración actual, tal que:

$$d\mathbf{x}_I = \lambda_I \mathbf{R} d\mathbf{X}_I$$

y análogamente:

$$\begin{aligned} d\mathbf{x}_{II} &= \lambda_{II} \mathbf{R} d\mathbf{X}_{II} \\ d\mathbf{x}_{III} &= \lambda_{III} \mathbf{R} d\mathbf{X}_{III} \end{aligned}$$

Cualquier vector $d\mathbf{X}$ en la configuración inicial se puede poner como:

$$d\mathbf{X} = d\mathbf{X}_I + d\mathbf{X}_{II} + d\mathbf{X}_{III} = (\mathbf{N}_I^t d\mathbf{X}) \mathbf{N}_I + (\mathbf{N}_{II}^t d\mathbf{X}) \mathbf{N}_{II} + (\mathbf{N}_{III}^t d\mathbf{X}) \mathbf{N}_{III}$$

por ser $\mathbf{N}_I, \mathbf{N}_{II}, \mathbf{N}_{III}$ un triedro ortonormal, con lo que se tiene:

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} = d\mathbf{x}_I + d\mathbf{x}_{II} + d\mathbf{x}_{III} &= \lambda_I \mathbf{R} d\mathbf{X}_I + \lambda_{II} \mathbf{R} d\mathbf{X}_{II} + \lambda_{III} \mathbf{R} d\mathbf{X}_{III} \\ &= \lambda_I \mathbf{R} (\mathbf{N}_I^t d\mathbf{X}) \mathbf{N}_I + \lambda_{II} \mathbf{R} (\mathbf{N}_{II}^t d\mathbf{X}) \mathbf{N}_{II} + \lambda_{III} \mathbf{R} (\mathbf{N}_{III}^t d\mathbf{X}) \mathbf{N}_{III} \\ &= \lambda_I \mathbf{R} \mathbf{N}_I (\mathbf{N}_I^t d\mathbf{X}) + \lambda_{II} \mathbf{R} \mathbf{N}_{II} (\mathbf{N}_{II}^t d\mathbf{X}) + \lambda_{III} \mathbf{R} \mathbf{N}_{III} (\mathbf{N}_{III}^t d\mathbf{X}) \\ &= \mathbf{R} (\lambda_I \mathbf{N}_I \mathbf{N}_I^t + \lambda_{II} \mathbf{N}_{II} \mathbf{N}_{II}^t + \lambda_{III} \mathbf{N}_{III} \mathbf{N}_{III}^t) d\mathbf{X} \end{aligned}$$

La relación anterior da lo que se conoce como descomposición polar del tensor gradiente de desplazamiento \mathbf{F} . El tensor de segundo orden:

$$\mathbf{U} \equiv \lambda_I \mathbf{N}_I \mathbf{N}_I^t + \lambda_{II} \mathbf{N}_{II} \mathbf{N}_{II}^t + \lambda_{III} \mathbf{N}_{III} \mathbf{N}_{III}^t$$

es el *tensor de alargamiento por la derecha* y, con él, la descomposición polar de \mathbf{F} se escribe:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X} = \mathbf{R} \mathbf{U} d\mathbf{X} \quad (12.8)$$

Mediante un desarrollo similar al anterior puede llegarse también a una descomposición polar de la forma:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X} = \mathbf{V} \mathbf{R} d\mathbf{X} \quad (12.9)$$

donde el tensor \mathbf{V} es el *tensor de alargamiento por la izquierda*:

$$\mathbf{V} \equiv \lambda_I \mathbf{n}_I \mathbf{n}_I^t + \lambda_{II} \mathbf{n}_{II} \mathbf{n}_{II}^t + \lambda_{III} \mathbf{n}_{III} \mathbf{n}_{III}^t$$

El sentido físico que tiene la descomposición polar 12.8 es que el movimiento en el entorno de un punto A dado por \mathbf{F} puede descomponerse en dos transformaciones sucesivas, un alargamiento puro en tres direcciones ortogonales, seguido de una rotación pura de sólido rígido. En la descomposición 12.9 sucede al revés, se produce primero la rotación pura y luego el alargamiento según las tres direcciones ya giradas.

12.5 Medidas de la deformación

Las medidas de deformación utilizadas en problemas generales se entienden mejor si se considera primero el concepto de deformación en una dimensión y luego se generaliza éste a tres dimensiones utilizando el teorema de descomposición polar.

En una dimensión se ha introducido ya una medida de la deformación, el cociente de alargamiento λ . En un problema de estiramiento unidimensional con deformación uniforme resulta que:

$$\lambda = \frac{L}{L_0}$$

donde L es la longitud actual y L_0 la longitud inicial.

Sin embargo, esta medida no es muy útil, por ejemplo, para estudiar la deformación elástica de un componente de acero. En un acero estructural típico el módulo de elasticidad vale aproximadamente 210 GPa y la tensión de fluencia, 260 MPa. Entonces, el valor del cociente de alargamiento al alcanzarse el límite de fluencia será:

$$\lambda = \frac{L_0 + \Delta L}{L_0} = \frac{L_0(1 + \frac{0.260}{210})}{L_0} = 1.0012$$

Es decir, el primer dígito de interés se encuentra en la cuarta cifra significativa y eso no es deseable.

Para evitar este inconveniente, se definen en general medidas de deformación como funciones f del cociente de alargamiento que cumplen las tres condiciones siguientes:

$$\varepsilon = f(\lambda)$$

1. La deformación es nula cuando el cociente de alargamiento es igual a la unidad:

$$f(1) = 0$$

2. La derivada de la deformación es igual a uno cuando el cociente de alargamiento es igual a la unidad:

$$\frac{df}{d\lambda}(1) = 1$$

3. La deformación es creciente con el alargamiento y a cada valor de λ le corresponde estrictamente un valor de la deformación:

$$\frac{df}{d\lambda} > 0 \quad \forall \lambda > 0$$

Las dos primeras condiciones tienen por objeto garantizar que todas las medidas de deformación sean iguales para “pequeñas” deformaciones (λ próximo a 1). En efecto, desarrollando ε en serie de Taylor alrededor de $\lambda = 1$, se tiene:

$$\varepsilon = f(1) + (\lambda - 1)\frac{df}{d\lambda}(1) + \frac{1}{2}(\lambda - 1)^2\frac{d^2f}{d\lambda^2}(1) + \dots$$

que para λ próximo a 1 da, teniendo en cuenta las condiciones impuestas a f :

$$\varepsilon \approx (\lambda - 1)$$

lo cual constituye la definición de deformación a la que estará más habituado el lector.

En cuanto a la tercera condición, ésta es un poco arbitraria, ya que podría elegirse también la condición contraria:

$$\frac{df}{d\lambda} < 0 \quad \forall \lambda > 0$$

lo que daría lugar a deformaciones positivas al acortarse el material. Esto es lo más cómodo en problemas de Mecánica de Suelos.

Cumpliendo las tres condiciones anteriores existen muchas posibilidades para elegir la función f medida de deformaciones. Las tres más corrientes son las que siguen:

1. Deformación nominal o deformación de Biot.

$$f_N(\lambda) = (\lambda - 1)$$

Llamada también deformación ingenieril. Es la más intuitiva. En un problema de estiramiento unidimensional con deformación uniforme vale:

$$f_N = \frac{L - L_0}{L_0}$$

2. Deformación logarítmica.

$$f_L(\lambda) = \ln(\lambda)$$

Esta medida es de uso corriente en problemas de plasticidad de metales ya que, cuando se representan las curvas de tensión-deformación equivalente correspondientes a los ensayos de tracción simple, de compresión simple y de torsión pura, se obtienen curvas casi coincidentes si se emplean medidas de deformación logarítmica para calcular la deformación equivalente. En un problema de estiramiento unidimensional con deformación uniforme la deformación logarítmica vale:

$$f_L = \ln\left(\frac{L}{L_0}\right)$$

3. Deformación de Green.

$$f_G(\lambda) = \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1)$$

La generalización de esta medida a problemas tridimensionales es muy fácil de obtener a partir del tensor gradiente de deformación. Aprovechando la condición de que todas las medidas de deformación adoptan los mismos valores para “pequeñas” deformaciones, esta medida se ha utilizado mucho en problemas de “grandes” desplazamientos pero “pequeñas” deformaciones. En un problema de estiramiento unidimensional con deformación uniforme la deformación de Green vale:

$$f_G = \frac{1}{2}\left(\frac{L^2}{L_0^2} - 1\right)$$

La elección de una medida de deformación u otra es un asunto estrictamente de comodidad de empleo, a partir de dos consideraciones:

1. La facilidad con que la deformación puede ser calculada a partir de los desplazamientos, ya que éstos últimos suelen ser las variables básicas dentro de los modelos de cálculo.
2. Lo apropiado de la medida de deformación para servir de base a un modelo de comportamiento del material, ya que la deformación es el vínculo entre la cinemática o movimiento del continuo y la respuesta del material. En este sentido, por ejemplo, parece que la deformación logarítmica es la más adecuada para modelos de plasticidad de metales.

Habiendo definido la idea básica de *medida de deformación* en una dimensión, ésta se puede generalizar a tres dimensiones haciendo uso del teorema de descomposición polar.

Alrededor del punto material A la parte del movimiento del continuo que da lugar a deformación se caracteriza completamente mediante seis variables: los tres cocientes de alargamiento principal, λ_I , λ_{II} , λ_{III} , y la orientación de las tres direcciones principales de alargamiento en la configuración de referencia, \mathbf{N}_I , \mathbf{N}_{II} , \mathbf{N}_{III} .

Se pueden definir entonces las *deformaciones principales* como:

$$\begin{aligned}\varepsilon_I &= f(\lambda_I) \\ \varepsilon_{II} &= f(\lambda_{II}) \\ \varepsilon_{III} &= f(\lambda_{III})\end{aligned}$$

y el *tensor de deformaciones* como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} \equiv \varepsilon_I \mathbf{N}_I \mathbf{N}_I^t + \varepsilon_{II} \mathbf{N}_{II} \mathbf{N}_{II}^t + \varepsilon_{III} \mathbf{N}_{III} \mathbf{N}_{III}^t$$

Este tensor caracteriza completamente el estado de deformación en el entorno del punto material.

12.6 Tasa o velocidad de deformación

Muchos materiales con interés práctico presentan una respuesta tensional que, en cada instante, depende del camino de deformación que se haya recorrido. En estos casos el modelo matemático de la ley de comportamiento del material suele formularse de forma incremental, es decir, se relaciona un incremento de tensión con el incremento de deformación. Es el caso, en general, de los modelos de plasticidad.

La definición incremental de la deformación se hace a partir del tensor *velocidad de deformación*, también llamado *tasa de deformación*¹.

La velocidad o tasa de cambio de posición \mathbf{v} de un punto material A es:

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}$$

Entonces, la diferencia de velocidad entre dos puntos vecinos A y A' en la configuración actual es:

$$d\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} d\mathbf{x} = \mathbf{L} d\mathbf{x}$$

en donde \mathbf{L} recibe el nombre de *tensor gradiente de velocidades*.

De este modo se tiene, por un lado:

$$d\mathbf{v} = \mathbf{L} d\mathbf{x} = \mathbf{L} \mathbf{F} d\mathbf{X}$$

y, por otro lado:

$$d\mathbf{v} = \frac{\partial(d\mathbf{x})}{\partial t} = \frac{\partial(\mathbf{F} d\mathbf{X})}{\partial t} = \dot{\mathbf{F}} d\mathbf{X}$$

luego el tensor gradiente de velocidades \mathbf{L} cumple que:

$$\mathbf{L} \mathbf{F} = \dot{\mathbf{F}} \quad (12.10)$$

El tensor gradiente de velocidades \mathbf{L} se descompone en la suma del tensor *velocidad de deformación* \mathbf{D} y el tensor *velocidad de giro* $\mathbf{\Omega}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^t) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} + \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}}\right)^t\right) \\ \mathbf{\Omega} &= \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^t) \end{aligned}$$

Es el tensor \mathbf{D} el que se emplea para definir el comportamiento de los materiales según modelos matemáticos de naturaleza incremental.

¹En la terminología anglosajona este tensor se conoce con el nombre de “strain rate tensor”.

12.7 Equilibrio y trabajo virtual

El problema del cálculo de tensiones en sólidos y estructuras se plantea como encontrar la solución de movimientos, deformaciones y tensiones en un dominio de configuración inicial $\Omega_0 \in \mathbb{R}^3$ que es sometido a una cierta historia de carga. En este contexto se entiende como “carga” una serie de sucesos para los cuales se busca la respuesta del sólido o estructura.

Tanto en problemas lineales como no lineales, el punto de partida clásico para la aplicación de las técnicas de elementos finitos es la forma *débil* de las ecuaciones de equilibrio: el principio de los trabajos virtuales.

El principio de los trabajos virtuales tiene una naturaleza muy general y resulta válido como expresión de las condiciones de equilibrio independientemente de la linealidad o no del problema. Simplemente, en problemas geoméricamente no lineales, se debe ser cuidadoso con los dominios de integración. Con la notación empleada en los capítulos anteriores, el principio de los trabajos virtuales puede enunciarse como:

Dados los espacios \mathcal{S} (desplazamientos admisibles) y \mathcal{V} (variaciones o desplazamientos virtuales):

$$\mathcal{S} = \{\tilde{\mathbf{u}} \in H^1(\Omega) \mid \tilde{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{d}} \text{ en } S_d\}$$

$$\mathcal{V} = \{\delta\tilde{\mathbf{u}} \in H^1(\Omega) \mid \delta\tilde{\mathbf{u}} = 0 \text{ en } S_d\}$$

Encontrar $\mathbf{u} \in \mathcal{S}$, de manera que:

$$(\boldsymbol{\sigma}^u, \mathbf{e}^{\delta u})_\Omega = (\mathbf{b}, \delta\tilde{\mathbf{u}})_\Omega + [\bar{\mathbf{t}}, \delta\tilde{\mathbf{u}}]_{S_t} \quad \forall \delta\tilde{\mathbf{u}} \in \mathcal{V} \quad (12.11)$$

En el caso de problemas geoméricamente no lineales hay que ser consciente de que los dominios Ω , S_d y S_t corresponden a la configuración “actual” del sólido o estructura y que $\boldsymbol{\sigma}$ corresponde a la tensión verdadera o de Cauchy. También está implícito en la ecuación del trabajo virtual 12.11 que el desplazamiento $\delta\mathbf{u}$ tiene una magnitud “pequeña”, para no alterar los dominios de integración.

Precisamente, para no dejar lugar a dudas respecto a esto último, se suele trabajar con velocidades virtuales $\delta\mathbf{v}$ en vez de con desplazamientos virtuales $\delta\mathbf{u}$. Si el problema es estático, el tiempo en el que se basa la definición de velocidad virtual es un tiempo ficticio, asociado al avance por el proceso de carga.

Matemáticamente, se trata simplemente de un cambio de notación, desde $\delta\mathbf{u}$ a $\delta\mathbf{v}$. La ecuación 12.11 se escribe ahora:

$$(\boldsymbol{\sigma}^u, \mathbf{D}^{\delta v})_\Omega = (\mathbf{b}, \delta\tilde{\mathbf{v}})_\Omega + [\bar{\mathbf{t}}, \delta\tilde{\mathbf{v}}]_{S_t} \quad \forall \delta\tilde{\mathbf{v}} \in \mathcal{V} \quad (12.12)$$

Desde el punto de vista físico, la ecuación 12.12 se lee como que la potencia desarrollada por las fuerzas interiores con la velocidad de deformación virtual es igual a la potencia desarrollada por las fuerzas exteriores en el campo de velocidad virtual.

12.8 Medidas de tensión

La ecuación de los trabajos virtuales constituye la expresión “débil” de las condiciones de equilibrio y es el punto de partida de la aplicación del MEF.

En la ecuación de los trabajos virtuales 12.12, el término correspondiente a la potencia de las fuerzas interiores se expresa en función del *tensor de tensiones verdaderas* o *tensiones de Cauchy*, $\boldsymbol{\sigma}$, y del tensor de velocidad de deformación virtual, \mathbf{D} , es decir:

$$(\boldsymbol{\sigma}^u, \mathbf{D}^{\delta v})_{\Omega} \equiv \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^u : \mathbf{D}^{\delta v} d\Omega$$

donde $\boldsymbol{\sigma}^u$ representa las tensiones actuales en el sólido y $\mathbf{D}^{\delta v}$ la velocidad de deformación virtual. Ambos campos definidos en el volumen actual Ω .

Resulta a veces conveniente, o más cómodo, realizar la integral anterior sobre el dominio Ω_0 que corresponde al volumen original o de referencia del sólido. Para ello se realiza el cambio de variables definido por la transformación 12.1. Es decir:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^u(\mathbf{x}) : \mathbf{D}^{\delta v}(\mathbf{x}) d\Omega = \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\sigma}^u(\mathbf{X}) : \mathbf{D}^{\delta v}(\mathbf{X}) \det\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}\right) d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} J \boldsymbol{\sigma}^u(\mathbf{X}) : \mathbf{D}^{\delta v}(\mathbf{X}) d\Omega_0$$

donde J es el determinante del jacobiano de la transformación 12.1:

$$J \equiv \det\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}\right) = \det(\mathbf{F}) = \frac{d\Omega}{d\Omega_0}$$

El tensor $J\boldsymbol{\sigma}^u$ es una medida de tensión “ficticia” que se conoce con el nombre de *tensor de tensiones de Kirchhoff*.

Por otro lado, una medida de deformación que se utiliza mucho, por lo fácil que resulta su cálculo, es la deformación de Green. El tensor de deformaciones de Green es:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_g \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{F}^t \mathbf{F} - \mathbf{I})$$

Puede entonces resultar cómodo calcular la integral correspondiente a la potencia de las fuerzas interiores utilizando la tasa o velocidad de deformación de Green:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_g = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{F}}^t \mathbf{F} + \mathbf{F}^t \dot{\mathbf{F}})$$

A partir de 12.10, se tiene que:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_g = \frac{1}{2} \mathbf{F}^t (\mathbf{L}^t + \mathbf{L}) \mathbf{F} = \mathbf{F}^t \mathbf{D} \mathbf{F}$$

o

$$\mathbf{D} = \mathbf{F}^{-t} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_g \mathbf{F}^{-1}$$

Entonces, en la ecuación de los trabajos virtuales, se tendrá:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} d\Omega = \int_{\Omega_0} J \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} J \boldsymbol{\sigma} : (\mathbf{F}^{-t} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_g \mathbf{F}^{-1}) d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} J (\mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-t}) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_g d\Omega_0 \quad (12.13)$$

En donde se ha hecho uso de que si \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{C} son tres matrices cuadradas, se cumple:

$$(\mathbf{A} \mathbf{B}) : \mathbf{C}^t = (\mathbf{C} \mathbf{A}) : \mathbf{B}^t = (\mathbf{B} \mathbf{C}) : \mathbf{A}^t$$

El tensor de tensiones que aparece en el último término de 12.13 es otra medida ficticia de tensión que se conoce con el nombre de *segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff*:

$$\mathbf{S} \equiv J (\mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-t})$$

Nótese que en la ecuación de los trabajos virtuales deben emplearse medidas *conjugadas* de tensión y deformación para el cálculo de la potencia desarrollada por las fuerzas interiores en el campo de velocidades virtual. En este sentido, dependiendo de la medida de velocidad de deformación que se utilice, debe tomarse una u otra medida de tensión. Los casos analizados en esta sección son los más corrientes en la práctica y se resumen en la tabla siguiente.

Deformación	Tensión conjugada	Dominio de integración
Velocidad de deformación \mathbf{D}	Verdadera $\boldsymbol{\sigma}$	Actual Ω
Velocidad de deformación \mathbf{D}	Kirchhoff $J \boldsymbol{\sigma}$	De referencia Ω_0
Tasa de deformación de Green $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_g$	2º Piola-Kirchhoff \mathbf{S}	De referencia Ω_0

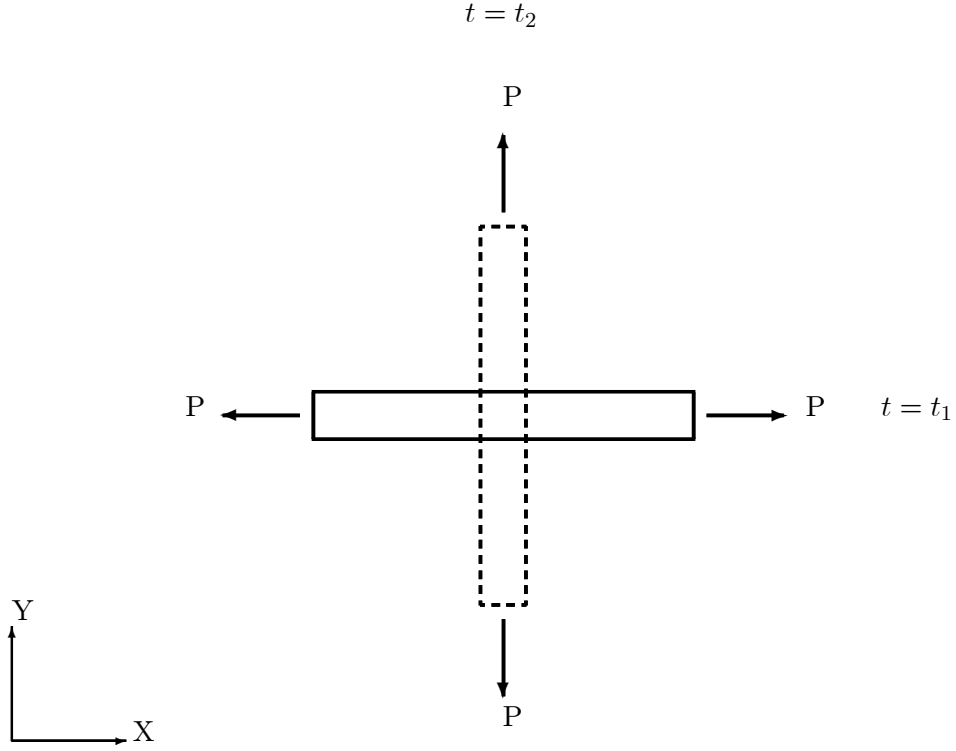
12.9 Tasa o velocidad de cambio de la tensión

Como ya se ha señalado, muchos modelos constitutivos o de comportamiento del material se formulan de manera incremental. En esta clase de modelos se obtiene un incremento de tensión en función de un incremento de deformación.

Algunas medidas de tensión, como el tensor de tensiones verdaderas o el tensor de Kirchhoff, están asociadas a direcciones espaciales dentro de la configuración actual Ω . Entonces resulta necesario separar el incremento de tensión en dos partes, una debida a la variación de las direcciones espaciales (por el movimiento del sólido o cambio en la configuración actual) y otra ocasionada por la respuesta del material al incremento de deformación. La primera se deriva de la cinemática del movimiento y la segunda es la que proporciona el modelo de comportamiento del material.

La diferencia entre ambas componentes del incremento de tensión se visualiza mediante el siguiente ejemplo. Sea una barra de sección A sometida a una fuerza axial P constante de tracción en cada uno de sus extremos. La barra gira alrededor de su punto medio, de manera que en el instante $t = t_1$ se encuentra paralela al eje X y en el instante $t = t_2$ es paralela al eje Y . En el instante $t = t_1$ la tensión verdadera vale $\sigma_{xx} = \frac{P}{A}$ y $\sigma_{yy} = 0$. Mientras que en el instante $t = t_2$ vale $\sigma_{xx} = 0$ y $\sigma_{yy} = \frac{P}{A}$. Resulta entonces que en el

intervalo $[t_1, t_2]$ ha habido un cambio de las componentes del tensor de tensiones: $d\sigma_{xx} \neq 0$ y $d\sigma_{yy} \neq 0$. Sin embargo, esta variación de las tensiones tiene que ver con el movimiento de sólido rígido de la barra y no con la respuesta del material a la deformación.



Sea \mathbf{e}_α , $\alpha = 1, 2, 3$ una base de tres vectores rígidamente unidos a un punto material A del sólido. Los tres vectores forman un triedro rígido que gira igual que lo hace el material en A .

En A se tiene un tensor gradiente de velocidades \mathbf{L} :

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} + \boldsymbol{\Omega}$$

y se cumplirá que:

$$\dot{\mathbf{e}}_\alpha = \boldsymbol{\Omega} \mathbf{e}_\alpha$$

Entonces, si se considera un tensor de segundo orden \mathbf{T} definido en A con arreglo a la configuración actual del sólido (p.ej. el tensor de tensiones verdaderas), éste se podrá poner como:

$$\mathbf{T} = T^{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta^t$$

y su derivada con respecto al tiempo:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{T}} &= \dot{T}^{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta^t + T^{\alpha\beta} \dot{\mathbf{e}}_\alpha \mathbf{e}_\beta^t + T^{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \dot{\mathbf{e}}_\beta^t \\
&= \dot{T}^{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta^t + T^{\alpha\beta} \boldsymbol{\Omega} \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta^t + T^{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta^t \boldsymbol{\Omega}^t \\
&= \overset{\nabla}{\dot{\mathbf{T}}} + \boldsymbol{\Omega} \mathbf{T} + \mathbf{T} \boldsymbol{\Omega}^t
\end{aligned}$$

En la relación anterior, el primer sumando del segundo miembro se conoce con el nombre de *tasa de variación corrotacional* del tensor \mathbf{T} , o *tasa de Jaumann* $\overset{\nabla}{\dot{\mathbf{T}}}$.

En el caso de que \mathbf{T} sea el tensor de tensiones verdaderas, la tasa de Jaumann es la parte de la variación de las tensiones que corresponde a la respuesta del material. Los otros dos sumandos proporcionan la variación de \mathbf{T} debida al giro de sólido rígido del entorno del punto material A .

12.10 Partición aditiva de la velocidad de deformación

En muchos problemas de interés industrial las deformaciones elásticas o recuperables de los materiales son muy pequeñas si se comparan con las deformaciones plásticas o no recuperables. Este hecho permite simplificar la descripción de la deformación del medio continuo.

Se puede suponer que en cualquier instante del proceso de deformación el material tiene un estado natural de referencia. Dicho estado de referencia sería aquel al que tiende el material al descargarlo de todas las acciones exteriores que actúan sobre él. Así, en un instante del proceso de deformación se puede aislar un elemento de volumen y descargarlo de todas las tensiones que se ejercen sobre el mismo. La transformación asociada a este proceso de descarga será \mathbf{F}_{el}^{-1} , la inversa de la deformación recuperable.

La deformación no recuperable será la deformación restante:

$$\mathbf{F}_{pl} = \mathbf{F}_{el}^{-1} \mathbf{F}$$

De la relación anterior se sigue una descomposición de la transformación representada por el tensor gradiente de deformación en una parte recuperable y otra no recuperable:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{el} \mathbf{F}_{pl}$$

Por otro lado, el tensor gradiente de velocidades con respecto a la configuración actual es:

$$\begin{aligned}
\mathbf{L} &= \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \\
&= (\dot{\mathbf{F}}_{el} \mathbf{F}_{pl} + \mathbf{F}_{el} \dot{\mathbf{F}}_{pl}) (\mathbf{F}_{pl}^{-1} \mathbf{F}_{el}^{-1}) \\
&= \dot{\mathbf{F}}_{el} \mathbf{F}_{el}^{-1} + \mathbf{F}_{el} \dot{\mathbf{F}}_{pl} \mathbf{F}_{pl}^{-1} \mathbf{F}_{el}^{-1} \\
&= \mathbf{L}_{el} + \mathbf{F}_{el} \mathbf{L}_{pl} \mathbf{F}_{el}^{-1}
\end{aligned}$$

por analogía con la definición de \mathbf{L} .

El teorema de descomposición polar puede también escribirse, separando la deformación recuperable de la no recuperable, como:

$$\mathbf{F} = \mathbf{V}_{el} \mathbf{V}_{pl} \mathbf{R} = \mathbf{F}_{el} \mathbf{F}_{pl}$$

Y si la deformación recuperable es pequeña, \mathbf{V}_{el} se podrá poner como:

$$\mathbf{V}_{el} = \mathbf{I} + \boldsymbol{\varepsilon}_{el}$$

con deformaciones principales $|\varepsilon_I|, |\varepsilon_{II}|, |\varepsilon_{III}| \ll 1$. Entonces se tendrá:

$$\mathbf{F}_{el} \equiv \mathbf{V}_{el} = (1 + \varepsilon_{el_I}) \mathbf{n}_I \mathbf{n}_I^t + (1 + \varepsilon_{el_{II}}) \mathbf{n}_{II} \mathbf{n}_{II}^t + (1 + \varepsilon_{el_{III}}) \mathbf{n}_{III} \mathbf{n}_{III}^t$$

y

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{el} + (\mathbf{I} + \boldsymbol{\varepsilon}_{el}) \mathbf{L}_{pl} (\mathbf{I} + \boldsymbol{\varepsilon}_{el})^{-1} \approx \mathbf{L}_{el} + \mathbf{L}_{pl}$$

Tomando entonces la parte simétrica de \mathbf{L} , se llega a:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \approx \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{el} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{pl}$$

que es la descomposición aditiva clásica del incremento de deformación en una parte elástica o recuperable y en otra parte no recuperable. Como se ha visto, esta descomposición sólo es estrictamente válida en un problema general cuando la deformación recuperable es pequeña.

Capítulo 13

Procedimientos de cálculo (III)

13.1 Introducción

En este capítulo se presenta la sistemática general del MEF en problemas no lineales. Al igual que en problemas lineales, la sistemática del MEF permite pasar del problema planteado sobre un medio continuo a un problema discreto energéticamente equivalente.

Las ecuaciones que definen el problema discreto no son lineales. Para resolverlas existen en la práctica dos grandes familias de procedimientos, los procedimientos *implícitos*, basados en el método de Newton-Raphson y sus variantes, y los procedimientos *explícitos*, que son una generalización de los algoritmos de integración explícita introducidos en el capítulo 10 para problemas no estacionarios. En este capítulo se presentan también las líneas generales de ambas categorías de procedimientos.

Estas dos familias de procedimientos definen las dos clases de programas de cálculo disponibles hoy en día en el mercado para abordar problemas no lineales.

13.2 La “receta” del MEF en problemas no lineales

La sistemática del MEF en problemas no lineales sigue las mismas etapas que la presentada en el capítulo 4 para problemas lineales. Al igual que entonces, el punto de partida es una forma débil del problema de campo que se trata de resolver.

En el caso de problemas de Mecánica de Sólidos, el punto de partida puede ser el principio de los trabajos virtuales, enunciado como:

Dados los espacios \mathcal{S} (desplazamientos admisibles) y \mathcal{V} (variaciones o velocidades virtuales):

$$\mathcal{S} = \{\tilde{\mathbf{u}} \in H^1(\Omega) \mid \tilde{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{d}} \text{ en } S_d\}$$

$$\mathcal{V} = \{\delta\tilde{\mathbf{v}} \in H^1(\Omega) \mid \delta\tilde{\mathbf{v}} = 0 \text{ en } S_d\}$$

Encontrar $\mathbf{u} \in \mathcal{S}$, de manera que:

$$(\boldsymbol{\sigma}^u, \mathbf{D}^{\delta v})_{\Omega} = (\mathbf{b}, \delta \tilde{\mathbf{v}})_{\Omega} + [\bar{\mathbf{t}}, \delta \tilde{\mathbf{v}}]_{S_t} \quad \forall \delta \tilde{\mathbf{v}} \in \mathcal{V} \quad (13.1)$$

con la notación utilizada en los capítulos anteriores.

A partir de esta forma débil de las condiciones de equilibrio, la receta del MEF es la siguiente:

1. Dividir el dominio de cálculo Ω en subdominios o *elementos*:

$$\Omega = \bigcup_i \Omega_i \quad \bigcap_i \Omega_i = \emptyset$$

2. Dentro de cada elemento Ω_i , aproximar los campos incógnita que intervienen en la ecuación integral 13.1:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}} &= \mathbf{N} \mathbf{a}_e \\ \delta \tilde{\mathbf{v}} &= \mathbf{N} \delta \mathbf{a}_e \\ \mathbf{D}^{\delta v} &= \boldsymbol{\beta} \delta \mathbf{a}_e \\ \boldsymbol{\sigma}^u &= \text{función no lineal de } \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{f}(\mathbf{a}_e) \end{aligned}$$

donde \mathbf{N} es la matriz de funciones de forma; $\delta \mathbf{a}_e$ y \mathbf{a}_e son vectores de coeficientes incógnita, cuyo valor se hace coincidir normalmente con el valor de los desplazamientos o velocidades de los nodos; \mathbf{D} es un vector que almacena las componentes del tensor velocidad de deformación y $\boldsymbol{\beta}$ es una matriz de funciones.

3. Las integrales que aparecen en 13.1 se hacen sumando las contribuciones de los distintos elementos, es decir, $\forall \delta \tilde{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}$:

$$0 = (\boldsymbol{\sigma}^u, \mathbf{D}^{\delta v})_{\Omega} - (\mathbf{b}, \delta \tilde{\mathbf{v}})_{\Omega} - [\bar{\mathbf{t}}, \delta \tilde{\mathbf{v}}]_{S_t} = \sum_i \{ (\boldsymbol{\sigma}^u, \mathbf{D}^{\delta v})_{\Omega_i} - (\mathbf{b}, \delta \tilde{\mathbf{u}})_{\Omega_i} - [\bar{\mathbf{t}}, \delta \tilde{\mathbf{v}}]_{S_{t_i}} \}$$

4. La contribución de cada elemento a la suma anterior es, sustituyendo las aproximaciones del paso 2:

$$(\boldsymbol{\sigma}^u \boldsymbol{\beta})_{\Omega_i} \delta \mathbf{a}_{e_i} - (\mathbf{b}^t \mathbf{N})_{\Omega_i} \delta \mathbf{a}_{e_i} - [\bar{\mathbf{t}}^t \mathbf{N}]_{S_{t_i}} \delta \mathbf{a}_{e_i}$$

Nótese que las tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ no pueden ser linealizadas en función de los desplazamientos nodales \mathbf{a}_{e_i} , como ocurría en los problemas de elasticidad lineal. El primer sumando corresponde a las *fuerzas interiores* del elemento y los dos últimos sumandos, a las *fuerzas exteriores* aplicadas sobre el elemento.

5. La suma de las contribuciones de los distintos elementos se hace a través del proceso de ensamblaje.

El proceso de ensamblaje consiste en este caso en ir acumulando las contribuciones de cada elemento al vector global de fuerzas interiores $\mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{a})$ y al vector global de fuerzas exteriores $\mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{a})$. Como resultado del ensamblaje, se llega a la forma discreta de 13.1:

$$\delta \mathbf{a}^t \{ \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{a}) - \mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{a}) \} \equiv \delta \mathbf{a}^t \mathbf{G}(\mathbf{a}) = \mathbf{0} \quad \forall \delta \mathbf{a}$$

6. Como la relación anterior ha de cumplirse $\forall \delta \mathbf{a}$, se llega finalmente al sistema global de ecuaciones no lineales:

$$\mathbf{G}(\mathbf{a}) \equiv \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{a}) - \mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{a}) = \mathbf{0} \quad (13.2)$$

el cual debe permitir determinar los coeficientes incógnita \mathbf{a} .

7. De acuerdo con el paso 2, los coeficientes \mathbf{a} definen la solución dentro de todos los dominios elementales y, por agregación, definen la solución buscada en todo el dominio de cálculo Ω .

13.3 El método de Newton y sus variantes

Una de las formas más populares de resolver el sistema de ecuaciones no lineales 13.2 es el método de Newton-Raphson o alguna de sus variantes, como el método de Newton modificado o los procedimientos cuasi-Newton.

El procedimiento de Newton es un método iterativo relativamente sencillo de visualizar en una dimensión, esto es, cuando el vector de movimientos nodales, \mathbf{a} , tiene una sola componente.

Sea F_{ext} una acción exterior constante. En este caso el problema representado por 13.2 se reduce a encontrar el movimiento nodal a tal que:

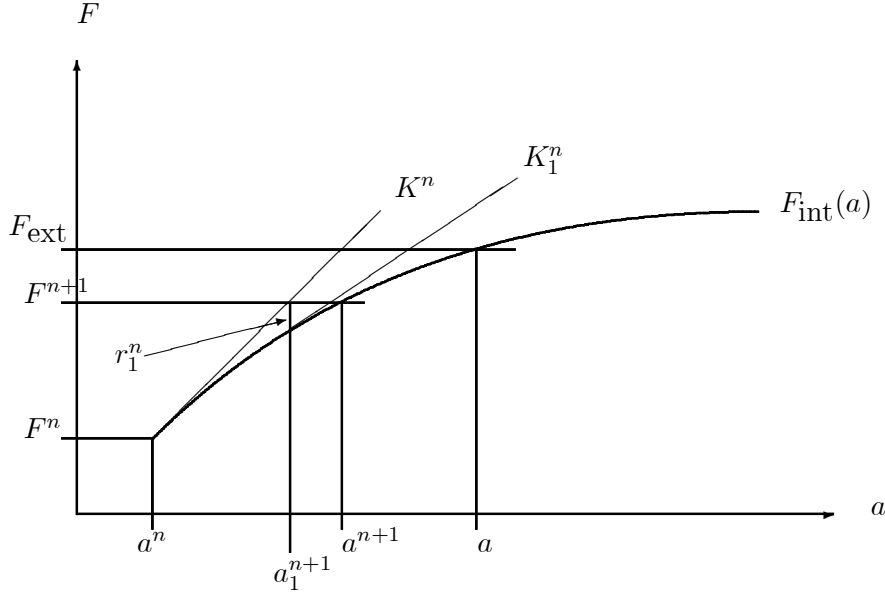
$$F_{\text{int}}(a) = F_{\text{ext}}$$

Es decir, el movimiento nodal a que hace que la fuerza de respuesta del sistema, o fuerza interna, sea igual a la acción exterior aplicada o fuerza externa.

Normalmente se opera de forma incremental, dividiendo la acción total F_{ext} en suma de incrementos:

$$F_{\text{ext}} = \sum_n (F^{n+1} - F^n) = \sum_n \Delta F^n$$

y buscando sucesivos puntos de equilibrio (a^n, F^n) entre acciones externas y fuerzas internas.



Para pasar de un punto de equilibrio (a^n, F^n) al siguiente, se procede iterativamente. Si K^n representa la pendiente de la tangente a la curva $F = F_{\text{int}}(a)$ en el punto (a^n, F^n) , se obtiene una primera aproximación al punto (a^{n+1}, F^{n+1}) mediante:

$$a_1^{n+1} = a^n + \frac{F^{n+1} - F^n}{K^n}$$

La diferencia $F^{n+1} - F_{\text{int}}(a_1^{n+1})$ se conoce con el nombre de *residuo*:

$$r_1^n = F^{n+1} - F_{\text{int}}(a_1^{n+1})$$

La aproximación al punto (a^{n+1}, F^{n+1}) se refina entonces mediante:

$$a_2^{n+1} = a_1^{n+1} + \frac{r_1^n}{K_1^n}$$

donde K_1^n es la pendiente de la tangente a la curva $F = F_{\text{int}}(a)$ en el punto dado por $(a_1^{n+1}, F_{\text{int}}(a_1^{n+1}))$.

Se calcula ahora un nuevo residuo $r_2^n = F^{n+1} - F_{\text{int}}(a_2^{n+1})$ y se sigue refinando la aproximación hasta que el residuo se haga inferior a un umbral de tolerancia preestablecido.

Este esquema iterativo corresponde al procedimiento clásico de Newton o procedimiento de Newton *completo*. En el procedimiento de Newton *modificado* se utiliza en todas las iteraciones la pendiente o *rigidez* inicial K^n correspondiente al incremento. En un procedimiento *cuasi Newton* se emplea en cada iteración una rigidez intermedia entre las dos anteriores. Por ejemplo, la pendiente correspondiente a la secante que resulta de la iteración anterior, es decir, el cociente:

$$\frac{F_{\text{int}}(a_i^{n+1}) - F^n}{a_i^{n+1} - a^n}$$

El procedimiento de Newton completo es, dentro de esta familia, el que tiene un orden de precisión más elevado y una convergencia más rápida, esto es, el que requiere de menos iteraciones para llegar a la solución. Por contra, es también el que requiere más trabajo por iteración ya que el cálculo de las pendientes K_i^n precisa de un esfuerzo de cálculo significativo.

El formalismo básico del procedimiento de Newton, esta vez ya en un problema multidimensional, es el siguiente.

1. En el incremento n , tras la iteración i se tiene una aproximación \mathbf{a}_i^n al vector solución de movimientos nodales. Sea \mathbf{c}_i^n la diferencia entre esta aproximación y la solución exacta.

$$\begin{aligned}\mathbf{G}(\mathbf{a}_i^n) &= \mathbf{r}_i^n \\ \mathbf{G}(\mathbf{a}_i^n + \mathbf{c}_i^n) &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

2. Desarrollando en serie de Taylor el término izquierdo de la última igualdad alrededor de la solución aproximada:

$$\mathbf{G}(\mathbf{a}_i^n) + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{a}_i^n)}{\partial \mathbf{a}} \mathbf{c}_i^n + \dots = \mathbf{0}$$

3. Si se desprecian todos los términos del desarrollo menos los dos primeros se llega a:

$$\frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{a}_i^n)}{\partial \mathbf{a}} \mathbf{c}_i^n \simeq -\mathbf{G}(\mathbf{a}_i^n) \equiv -\mathbf{r}_i^n \quad (13.3)$$

donde $\frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{a}_i^n)}{\partial \mathbf{a}}$ es la matriz de rigidez tangente o matriz jacobiana de \mathbf{G} .

4. La ecuación 13.3 representa un sistema de ecuaciones lineales que proporciona la corrección \mathbf{c}_i^n buscada.

$$\mathbf{a}_{i+1}^n = \mathbf{a}_i^n + \mathbf{c}_i^n$$

5. El proceso dado por los puntos anteriores se repite hasta que en una iteración j una norma del residuo \mathbf{r}_j^n es inferior a una tolerancia preestablecida.

13.4 Problemas no estacionarios

La sistemática del MEF descrita en la sección 13.2 es directamente aplicable a problemas no estacionarios o cuyos campos solución son función del tiempo. En el caso de la Mecánica de Sólidos el principio de los trabajos virtuales puede utilizarse como forma débil de partida si se incluye el trabajo de las fuerzas de inercia. Empleando la notación de capítulos anteriores, dicha forma débil se puede enunciar como:

Dados los espacios \mathcal{S} (desplazamientos admisibles) y \mathcal{V} (variaciones o velocidades virtuales):

$$\mathcal{S}_t = \{\tilde{\mathbf{u}}(t) \in H^1(\Omega), t \in]0, T[\mid \tilde{\mathbf{u}}(t) = \bar{\mathbf{d}}(t) \text{ en } S_d\}$$

$$\mathcal{V} = \{\delta\tilde{\mathbf{v}} \in H^1(\Omega) \mid \delta\tilde{\mathbf{v}} = 0 \text{ en } S_d\}$$

Encontrar $\mathbf{u}(t) \in \mathcal{S}_t$, de manera que:

$$(\boldsymbol{\sigma}^u, \mathbf{D}^{\delta v})_\Omega = (\mathbf{b}, \delta\tilde{\mathbf{v}})_\Omega - (\rho\ddot{\mathbf{u}}, \delta\tilde{\mathbf{v}})_\Omega + [\bar{\mathbf{t}}, \delta\tilde{\mathbf{v}}]_{S_t} \quad \forall \delta\tilde{\mathbf{v}} \in \mathcal{V} \quad (13.4)$$

y

$$(\mathbf{u}(0) - \mathbf{u}_0, \delta\tilde{\mathbf{v}})_\Omega = 0 \quad (13.5)$$

$$(\dot{\mathbf{u}}(0) - \dot{\mathbf{u}}_0, \delta\tilde{\mathbf{v}})_\Omega = 0 \quad (13.6)$$

$$\forall \delta\tilde{\mathbf{v}} \in \mathcal{V} \quad t \in]0, T[$$

donde \mathbf{D} es el tensor velocidad de deformación y \mathbf{u}_0 y $\dot{\mathbf{u}}_0$ representan desplazamientos y velocidades iniciales, respectivamente.

Nótese que las variaciones $\delta\tilde{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}$ no dependen del tiempo.

La aplicación de la “receta” del MEF descrita en la sección 13.2 a la forma débil 13.4 da lugar a la semidiscretización espacial del problema y conduce, al igual que en los problemas lineales¹ a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias cuya variable independiente es el tiempo. Este sistema de ecuaciones es ahora no lineal y puede escribirse como:

$$\mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}) - \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}) = \mathbf{M} \ddot{\mathbf{a}} \quad (13.7)$$

donde las funciones $\mathbf{a}(t)$ representan los movimientos nodales y \mathbf{M} es la matriz de masas del sistema.

El sistema 13.7 se integra, partiendo de las condiciones iniciales que derivan de 13.5 y 13.6, utilizando un procedimiento de diferencias finitas. Esta es la semidiscretización temporal, por la que se obtienen las funciones $\mathbf{a}(t)$ en puntos discretos $t_1, t_2 \dots$ del eje de tiempos separados por un paso de integración Δt : $\mathbf{a}(t_1) \equiv \mathbf{a}_1, \mathbf{a}(t_2) \equiv \mathbf{a}_2, \dots$

Como ya se comentó en el capítulo 10 para problemas lineales, la integración de 13.7 partiendo de las condiciones iniciales se hace normalmente mediante procedimientos de la familia de Newmark. Estos procedimientos relacionan las aceleraciones, velocidades y movimientos nodales en el instante n con los correspondientes al instante $n + 1$ mediante las ecuaciones:

¹Ver capítulo 10.

$$\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{a}_n + \Delta t \dot{\mathbf{a}}_n + \frac{\Delta t^2}{2}[(1 - 2\beta)\ddot{\mathbf{a}}_n + 2\beta\ddot{\mathbf{a}}_{n+1}] \quad (13.8)$$

$$\dot{\mathbf{a}}_{n+1} = \dot{\mathbf{a}}_n + \Delta t[(1 - \gamma)\ddot{\mathbf{a}}_n + \gamma\ddot{\mathbf{a}}_{n+1}] \quad (13.9)$$

donde β y γ son dos parámetros que dependen del procedimiento concreto y los subíndices indican el instante de tiempo en que se particularizan las diferentes funciones vectoriales (p.ej. $\ddot{\mathbf{a}}_{n+1} \equiv \ddot{\mathbf{a}}(t_{n+1})$).

A partir de las relaciones 13.8, 13.9 y de la particularización de 13.7 para el instante t_{n+1} , se plantea un procedimiento en el que se progresa paso a paso en el tiempo a partir de las condiciones iniciales. Esquemáticamente, este procedimiento de integración paso a paso podría ser:

1. Calcular las aceleraciones iniciales $\ddot{\mathbf{a}}_0$ a partir de la relación 13.7 y de los desplazamientos y velocidades iniciales:

$$\ddot{\mathbf{a}}_0 = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{a}_0, \dot{\mathbf{a}}_0) - \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{a}_0, \dot{\mathbf{a}}_0))$$

2. Inicializar $n \leftarrow 0$
3. Poner \mathbf{a}_{n+1} y $\dot{\mathbf{a}}_{n+1}$ en función de $\ddot{\mathbf{a}}_{n+1}$, utilizando 13.8 y 13.9
4. Sustituir las expresiones \mathbf{a}_{n+1} y $\dot{\mathbf{a}}_{n+1}$ de la etapa anterior en la particularización de 13.7 para el instante t_{n+1} :

$$\mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{a}_{n+1}, \dot{\mathbf{a}}_{n+1}) - \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{a}_{n+1}, \dot{\mathbf{a}}_{n+1}) = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{a}}_{n+1} \quad (13.10)$$

Se obtiene así un sistema algebraico de ecuaciones no lineales:

$$\mathbf{F}_{\text{ext}}(\ddot{\mathbf{a}}_{n+1}, \mathbf{a}_n, \dot{\mathbf{a}}_n, \ddot{\mathbf{a}}_n) - \mathbf{F}_{\text{int}}(\ddot{\mathbf{a}}_{n+1}, \mathbf{a}_n, \dot{\mathbf{a}}_n, \ddot{\mathbf{a}}_n) - \mathbf{M}\ddot{\mathbf{a}}_{n+1} = 0 \quad (13.11)$$

que permite obtener los coeficientes $\ddot{\mathbf{a}}_{n+1}$, ya que los valores de desplazamientos, velocidades y aceleraciones en el instante t_n son conocidos

5. A partir de $\ddot{\mathbf{a}}_{n+1}$ y de los valores ya conocidos del instante de tiempo anterior, \mathbf{a}_n , $\dot{\mathbf{a}}_n$, $\ddot{\mathbf{a}}_n$, calcular \mathbf{a}_{n+1} y $\dot{\mathbf{a}}_{n+1}$ utilizando 13.8 y 13.9
6. Hacer $n \leftarrow n + 1$
7. Volver a 3

En la práctica se utilizan fundamentalmente dos procedimientos de la familia de Newmark, el procedimiento de la aceleración promedio ($\gamma = 0.5$ y $2\beta = 0.5$) y el procedimiento de diferencias centrales ($\gamma = 0.5$ y $\beta = 0$). El procedimiento de la aceleración promedio es un procedimiento *implícito*, en el que cada ciclo de cálculo, para pasar del instante de

tiempo t_n al instante t_{n+1} se resuelve un sistema no lineal de ecuaciones 13.10 del mismo tipo que el 13.2 utilizando alguna variante del método de Newton:

$$G^*(\ddot{\mathbf{a}}_{n+1}) \equiv \mathbf{F}_{\text{ext}}(\ddot{\mathbf{a}}_{n+1}, \mathbf{a}_n, \dot{\mathbf{a}}_n, \ddot{\mathbf{a}}_n) - \mathbf{F}_{\text{int}}(\ddot{\mathbf{a}}_{n+1}, \mathbf{a}_n, \dot{\mathbf{a}}_n, \ddot{\mathbf{a}}_n) - \mathbf{M} \ddot{\mathbf{a}}_{n+1} = 0 \quad (13.12)$$

Por el contrario, el procedimiento de diferencias centrales, cuando se utiliza una matriz de masas \mathbf{M} diagonal, da lugar a un procedimiento *explícito* ya que el sistema de ecuaciones 13.10, tras sustituir 13.8 y 13.9, queda en la forma:

$$\ddot{\mathbf{a}}_{n+1} = \mathbf{M}^{-1} \{ \mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{a}_n, \dot{\mathbf{a}}_n, \ddot{\mathbf{a}}_n) - \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{a}_n, \dot{\mathbf{a}}_n, \ddot{\mathbf{a}}_n) \} \quad (13.13)$$

Es decir, puede obtenerse la aceleración $\ddot{\mathbf{a}}_{n+1}$ en el instante t_{n+1} de manera “explícita” a partir de los valores conocidos de desplazamientos, velocidades y aceleraciones en el instante t_n .

Los procedimientos de integración explícita en problemas no lineales se discuten con más detalle en la sección siguiente. Como ya se apuntó en el capítulo 10, su principal inconveniente es que son sólo condicionalmente estables, esto es, requieren que el paso de integración Δt sea inferior a un paso crítico Δt_{crit} . Sin embargo, en problemas no lineales, los esquemas de integración explícita son mucho más robustos que los esquemas implícitos, ya que no sufren de los potenciales problemas de convergencia asociados a los procedimientos de la familia de Newton.

13.5 Procedimientos de integración explícita

13.5.1 Ideas generales

En problemas mecánicos, la idea física que hay detrás de los procedimientos de integración explícita es la de obtener la aceleración de cada nodo dividiendo la resultante de fuerzas sobre el nodo por la masa del mismo. Es decir, la idea física corresponde a la aplicación de la segunda ley de Newton a cada uno de los nodos del mallado. La matriz de masas diagonal se interpreta como que la masa del continuo está concentrada en los nodos.

El procedimiento consigue así el desacoplamiento de las ecuaciones globales del movimiento en ecuaciones locales. Este desacoplamiento sólo resulta válido si el paso de integración Δt es lo suficientemente pequeño como para que dos nodos contiguos no tengan tiempo material de “comunicarse” durante el tiempo Δt . De aquí deriva la existencia de un límite Δt_{crit} para el paso de integración si se quiere que la integración se mantenga estable. Este es el significado físico de la llamada condición de Courant: $\Delta t \leq \Delta t_{\text{crit}}$. El tiempo que necesitan dos nodos para comunicarse está relacionado con el tiempo que tarda la onda de tensión más rápida en recorrer el espacio que los separa. En sistemas no amortiguados, el paso crítico de integración resulta ser el mínimo periodo propio de vibración del sistema discreto² dividido por π .

²El conjunto de masas puntuales conectadas por muelles a que conduce la semidiscretización espacial mediante el MEF.

La resultante de fuerzas sobre cada nodo es función, sobre todo, de la respuesta tensional del material a la deformación. En un procedimiento explícito las ecuaciones constitutivas, o de respuesta del material, deben estar formuladas de forma que al final de cada paso de integración Δt el tensor de tensiones se pueda actualizar de manera explícita, esto es, no iterativa, en función de los incrementos de deformación, de las velocidades de deformación y de otras variables de estado.

Por otro lado, una de las principales ventajas de los procedimientos explícitos en el tratamiento de problemas no lineales es que, al desacoplar las ecuaciones globales del movimiento en ecuaciones locales correspondientes al movimiento de cada nodo, se pueden tratar los contactos también a nivel local. Es decir, no hay que buscar iterativamente en cada paso de integración una configuración global estable de los contactos, como sucede en los procedimientos implícitos, sino que la interacción a través de las potenciales superficies de contacto se obtiene nodo a nodo, con independencia del estado del contacto en otras zonas de la malla. Las fuerzas de interacción se evalúan así también a nivel local y se hacen intervenir en la ecuación del movimiento de cada nodo de la misma manera que las fuerzas internas. Este tratamiento local o desacoplado de los contactos proporciona una gran robustez a los procedimientos explícitos.

13.5.2 Flujo general

El flujo general en el ciclo de cálculo que permite avanzar la solución un paso de integración Δt puede esquematizarse de la manera siguiente:

1. Cálculos nodales (bucle en nodos)

(a) Ecuación del movimiento de los nodos:

$$\ddot{\mathbf{a}}_n = \mathbf{M}^{-1} \{ \mathbf{F}_{\text{ext}} - \mathbf{F}_{\text{int}} \}$$

(b) Integración por diferencias centrales:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{a}}_{n+\frac{1}{2}} &= \dot{\mathbf{a}}_{n-\frac{1}{2}} + \delta t \ddot{\mathbf{a}}_n \\ \mathbf{a}_{n+1} &= \mathbf{a}_n + \delta t \dot{\mathbf{a}}_{n+\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

2. Cálculos en los elementos (bucle en elementos)

(a) Calcular incremento de deformación $\Delta \varepsilon$ en el elemento durante Δt

(b) Calcular las tensiones y variables de estado en el elemento en $t + \Delta t$ a partir del incremento de deformación $\Delta \varepsilon$ y del modelo de comportamiento del material

(c) Calcular y ensamblar la contribución del elemento al vector de fuerzas internas \mathbf{F}_{int} en $t + \Delta t$, por integración alrededor de los nodos a partir de las tensiones

3. $t \leftarrow t + \Delta t$ y volver a 1

13.5.3 Ventajas e inconvenientes

Las principales ventajas del ciclo de cálculo de integración explícita son su sencillez, que lo hace fácilmente paralelizable, y su gran robustez en problemas no lineales, ya que desaparecen los problemas asociados a la falta de convergencia que tanto penalizan a veces los procedimientos implícitos de la familia de Newton.

El inconveniente más importante, y casi único, es que, como se ha señalado, el ciclo de cálculo es sólo condicionalmente estable, requiriéndose un paso de integración Δt relativamente pequeño para progresar en el tiempo. Para que la integración sea estable se requiere que:

$$\Delta t \leq \Delta t_{\text{crit}}$$

y resulta que:

$$\Delta t_{\text{crit}} = \frac{2}{\omega_{\text{max}}}(\sqrt{1 + \xi^2} - \xi)$$

donde, ω_{max} es la máxima frecuencia natural de vibración del modelo de elementos finitos en el instante t en el que se calcula el paso crítico de integración³ y ξ es la fracción del amortiguamiento crítico a esa frecuencia.

Esta es una restricción muy fuerte, ya que implica que el paso de integración Δt debe ser inferior en cada instante al tiempo que tarda la onda de tensión más rápida en atravesar el elemento finito más pequeño. Nótese que un aumento de la rigidez o del amortiguamiento disminuyen el paso crítico, mientras que un aumento de la densidad o del tamaño de los elementos, lo incrementan.

13.5.4 Medidas de calidad de la solución

La restricción que supone el que el paso de integración deba ser inferior al crítico hace que la calidad numérica de la solución esté asegurada siempre que se calcule bien ese paso crítico Δt_{crit} . Un paso de integración inferior al crítico supone que el esquema de integración es capaz de capturar todas las frecuencias posibles en la respuesta dinámica del sistema discreto.

Si el paso crítico se calcula mal y en algún momento se emplea un paso de integración Δt superior a Δt_{crit} , el procedimiento se hace automáticamente inestable. La inestabilidad tiene el efecto de generar energía no física dentro del mallado. Cuando esto ocurre, normalmente la solución “explota”: se obtienen grandes distorsiones en la malla y resultados claramente inaceptables. Sin embargo, otras veces el exceso de energía que se genera se convierte localmente en energía de deformación plástica, la deformación plástica reblandece la respuesta del material y el paso crítico vuelve a ser superior al paso de integración que se está utilizando. En estos casos a simple vista el analista no distingue nada y podría dar por buena su solución.

³En un problema no lineal las frecuencias propias del modelo pueden cambiar a lo largo del tiempo del problema.

El procedimiento de integración explícita no conserva la energía. La calidad de la solución obtenida puede medirse por lo bien o mal que se haya conservado la energía a lo largo del problema. El analista debe vigilar siempre la contabilidad de la energía y verificar que se cumple:

$$E_{\text{deformación}} + E_{\text{cinética}} + E_{\text{disipación}} \cdots - T_{\text{fuerzas exteriores}} = \text{constante}$$

donde E representa energía y T , trabajo.

Un aumento en el primer miembro de la ecuación anterior indica siempre que se ha producido inestabilidad, por lo que no sería admisible a menos que el analista determine que la inestabilidad tiene carácter local y que no influye en los parámetros que le interesan de la solución del problema. Sin embargo, es normal, sobre todo en problemas con muchos ciclos de integración, que se produzca una ligera disminución del primer miembro de la ecuación, a causa de la disipación numérica asociada al procedimiento de integración.

13.5.5 Campo de aplicaciones industriales

El campo natural de aplicación de los procedimientos de integración explícita se encuentra en aquellos problemas en los que necesariamente el paso de integración debe ser pequeño para capturar correctamente la respuesta. Es el caso de los problemas dominados por las altas frecuencias, como los problemas de impacto. En esta clase de problemas la restricción de que el paso de integración deba ser inferior al paso crítico no es un inconveniente demasiado grande porque, en cualquier caso, la naturaleza del problema exigiría ir a pasos de integración pequeños para no filtrar las frecuencias en donde se concentra la respuesta.

Los procedimientos de integración explícita también tienen aplicación, por su robustez, en problemas con una no linealidad muy acusada. Es el caso de los problemas con condiciones de contacto muy complicadas, problemas con inestabilidades locales acusadas, reblandecimiento del material o fuerte dependencia de sus propiedades con respecto a la temperatura. Estas características confluyen muchas veces en los problemas de conformado de metales.

13.5.6 Técnicas de aceleración del cálculo

Las técnicas de aceleración del cálculo se hacen necesarias cuando se trata de resolver un problema cuasiestático o dinámico “lento” con procedimientos de integración explícita. Si no se emplean esta clase de técnicas de aceleración, se obtienen normalmente tiempos de ejecución demasiado largos para ser viables.

Nótese que un problema puede considerarse cuasiestático cuando los tiempos de aplicación de la carga son superiores a unas dos veces el periodo fundamental T_f del sistema discreto. Esto significa que, aproximadamente, se obtiene la misma solución aplicando la carga en un tiempo infinito (problema estático) que en un tiempo $2T_f$.

De este modo, una primera técnica para reducir el tiempo de cálculo en el ordenador correspondiente a un problema cuasiestático consiste en aplicar la carga más rápidamente, hasta aplicarla en un tiempo de entre T_f y $2T_f$. El analista debe comprobar luego que

la energía cinética del problema se mantiene baja (inferior al 5% de la total) cuando las deformaciones empiezan a ser significativas.

Sin embargo, la técnica anterior no es aplicable cuando las propiedades del material dependen de la velocidad de deformación (viscoelasticidad, viscoplasticidad). En este caso, acelerando la aplicación de la carga se falsearía la respuesta del material. Cuando existe dependencia de la respuesta del material de la velocidad de deformación debe recurrirse, para reducir los tiempos de cálculo en el ordenador, a técnicas de escalado de masa. Nótese que el paso crítico de integración es proporcional a la raíz cuadrada de la densidad y que en problemas cuasiestáticos la solución es independiente de la densidad. Entonces, para reducir el número de ciclos de cálculo necesarios para llegar al tiempo final del problema, puede aumentarse artificialmente la densidad o la masa del sistema de manera que el periodo fundamental T_f del sistema discreto llegue a ser 0.5 ó 1 veces el tiempo de aplicación de la carga o el tiempo característico del problema.

Bibliografía recomendada

1. T.J.R. Hughes. *The Finite Element Method*. Prentice Hall. 1987.
2. E. Oñate. *Cálculo de Estructuras por el Método de los Elementos Finitos*. CIMNE. 1992.
3. O.C. Zienkiewicz y R.L.Taylor. *El Método de los Elementos Finitos*. McGraw-Hill. 1994.

Bibliografía complementaria

1. M.A. Crisfield. *Finite Elements and Solution Procedures for Structural Analysis*. Pineridge Press. 1986.
2. M.A. Crisfield. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. John Wiley. 1991.
3. Hibbitt, Karlsson & Sorensen, Inc. *ABAQUS Theory Manual v.5.6*. 1996.
4. T. Mura y T. Koya. *Variational Methods in Mechanics*. Oxford University Press. 1992.
5. NAFEMS. *A Finite Element Primer*. National Agency for Finite Elements and Standards, Reino Unido. 1987.
6. J.T. Oden y G.F. Carey. *Finite Elements - Mathematical Aspects*. Prentice-Hall. 1983.
7. J.N. Reddy. *Applied Functional Analysis and Variational Methods in Engineering*. McGraw-Hill. 1986.
8. I.M. Smith. *Programming the Finite Element Method*. John Wiley. 1982.
9. G. Strang y G.J. Fix. *An Analysis of the Finite Element Method*. Prentice-Hall. 1973.
10. K. Washizu. *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*. Segunda edición. Pergamon Press. 1974.
11. O.C. Zienkiewicz y K. Morgan. *Finite Elements and Approximation*. John Wiley. 1983.