

Índice general

1. Métodos de residuos ponderados	
Funciones de prueba continuas	5
1.1. Introducción	5
1.2. Ejemplos de ecuaciones diferenciales	5
1.3. Aproximación de funciones	7
1.3.1. Aproximaciones por residuos ponderados	8
1.3.2. Ejercicios:	10
1.4. Aproximación a la solución de ecuaciones diferenciales	10
1.4.1. Condiciones de borde satisfechas por elección de las funciones de prueba	10
1.4.2. Aproximación simultánea de la ecuación diferencial y de las condiciones de borde	16
1.4.3. Forma débil del problema. Condiciones de borde naturales.	18
1.4.4. Condiciones de borde naturales para la ecuación de conducción del calor	19
2. El método de elementos finitos	
Funciones de prueba por tramos	25
2.1. Introducción	25
2.2. Aproximación mediante funciones de forma de soporte compacto	26
2.3. Aproximación a la solución de ecuaciones diferenciales – condiciones de continuidad	28
2.4. Cálculos básicos en el método de elementos finitos	29
2.4.1. Propiedades de la matriz K y del vector F	31
2.4.2. Descripción global y local del elemento.	31
2.4.3. Cálculo explícito de la matriz de rigidez y del vector de fuerzas elementales .	34
2.5. Estimación del error en el MEF	36
2.5.1. Estimaciones asintóticas del error	37
3. Formulación del problema de segundo orden con dos condiciones de contorno	41
3.1. Introducción	41
3.2. Origen físico del problema	41
3.3. Formulación variacional del problema	46
3.4. Funciones de aproximación basadas en la interpolación de Lagrange	49
3.5. Aproximación por elementos finitos	53
3.5.1. Ensamble de las matrices elementales	55
3.5.2. Condiciones de borde	56
3.5.3. Estimaciones del error	59
4. Elementos unidimensionales	61
4.1. Introducción	61
4.2. Grado de continuidad entre elementos	61
4.2.1. Ejercicios	62
4.3. Problemas de cuarto orden	63
4.3.1. Condiciones de Dirichlet no-homogéneas	64
4.3.2. Formulación débil a partir del Principio de Trabajos Virtuales	65
4.3.3. Formulación a partir del Principio de Mínima Energía Potencial Total	66
4.4. Elemento de barra articulada	66
4.4.1. Ejercicio	69
4.5. Elemento de viga en 3 dimensiones	69
4.5.1. Hipótesis más significativas (teoría clásica)	69

4.5.2. Definición del sistema local de coordenadas y el elemento maestro	70
4.5.3. Relaciones Cinemáticas y Constitutivas	71
4.5.4. Funciones de Interpolación	71
4.5.5. Desarrollo	72
4.5.6. Término independiente (vector de cargas)	73
4.5.7. Cambio de base	74
4.5.8. Matriz de masa	74
4.5.9. Ejercicios	75
4.6. Elementos con deformación de corte	75
4.6.1. Matriz de rigidez de una viga recta en 2-D	78
4.6.2. Ejercicio:	79
4.7. Problemas de convección-difusión	80
4.8. Análisis de cables	84
4.8.1. Ejemplo	88
4.8.2. Ejercicio	89
5. Problemas de valores en el contorno en 2 y 3 dimensiones	91
5.1. Introducción	91
5.2. Transferencia de calor	91
5.3. Forma variacional del problema de valores en el contorno	94
5.4. Membrana traccionada	95
5.5. Flujo en un medio poroso	96
5.6. Torsión de una viga prismática sin restricción de alabeo	96
5.6.1. Deformaciones	97
5.6.2. Tensiones	97
5.6.3. Equilibrio	98
5.6.4. Condiciones de contorno	99
5.6.5. Forma débil de la ecuación de alabeo	100
5.6.6. Función de tensión	100
5.6.7. Forma débil de la ecuación de compatibilidad	101
5.7. Flujo potencial	102
5.7.1. Función potencial	102
5.7.2. Función líneas de corriente	102
5.8. Ecuación de convección - difusión	103
5.9. Elasticidad lineal	104
5.9.1. Ecuaciones básicas de la elasticidad lineal	104
5.9.2. Formulación débil usando residuos ponderados	106
5.9.3. Formulación a partir del Principio de los Trabajos Virtuales	107
5.9.4. Notación matricial de los tensores involucrados	107
5.9.5. Elasticidad Plana	108
5.10. Flexión de Placas	109
5.10.1. Teoría clásica de placas (Love-Kirchhoff)	109
5.10.2. Teoría de placas incluyendo deformaciones transversales de corte (Reissner-Mindlin)	111
6. Elementos finitos en dos dimensiones	113
6.1. Introducción	113
6.2. Condiciones de las funciones de aproximación	113
6.3. Elementos triangulares	114
6.4. Elementos rectangulares	117
6.5. Mapeamiento de la geometría	119

6.6.	Aplicación a la ecuación de Laplace	123
6.7.	Aplicación a problemas de elasticidad lineal	125
6.7.1.	Deformaciones y tensiones, notación matricial	126
6.7.2.	Matrices de rigidez elemental y global	126
6.7.3.	Trabajo virtual externo, vector de cargas nodales	127
6.8.	Elemento cuadrilátero de cuatro nodos	128
6.8.1.	Funciones de interpolación, geometría y desplazamientos	129
6.8.2.	Cálculo de la matriz de rigidez elemental	130
6.8.3.	Cálculo de las fuerzas nodales equivalentes	131
6.9.	Problemas de convección-difusión	131
7.	Aspectos generales asociados a la implementación	135
7.1.	Generación de mallas	135
7.2.	Imposición de restricciones nodales	137
7.2.1.	Imposición exacta de la condición	137
7.2.2.	Técnica de penalización	138
7.2.3.	Método de multiplicadores de Lagrange	139
7.3.	Una aplicación no-estándar	139
7.4.	Solución del sistema de ecuaciones	142
7.5.	Suavizado de Variables	145
8.	Elementos de placas y láminas	147
8.1.	Introducción	147
8.2.	Elementos de placa basados en la teoría de Kirchhoff	148
8.2.1.	La prueba de la parcela (“patch test”)	149
8.3.	Elementos de placa basados en la teoría de Reissner	149
8.3.1.	Elemento de placa con deformaciones por corte	150
8.3.2.	Técnica de deformaciones impuestas.	151
8.4.	Elementos de lámina	154
9.	Combinación de Elementos Finitos y Volúmenes Finitos	157
9.1.	Introducción	157
9.2.	Aproximaciones	158
9.3.	Ecuación de balance, integración	160
9.4.	Condiciones de contorno	163
10.	Apéndice: Descripción del programa GAMMA	169
10.1.	Introducción	169
10.2.	Base de datos	170
10.2.1.	parámetros	170
10.2.2.	Variables que definen el problema, introducidas al programa	171
10.2.3.	Arreglos de datos	172
10.3.	Descripción global del programa	173
10.3.1.	Rutina OPENFI	173
10.3.2.	Rutina MATPRO	173
10.3.3.	Rutina COORDG	173
10.3.4.	Rutina ELMDAT	174
10.3.5.	Rutina KNOWNV	174
10.3.6.	Rutina SKYLIN	175
10.3.7.	Rutina SOLVES	175
10.3.8.	Rutina STIFFG	175
10.3.9.	Rutina STIFFE	176

10.3.10.Rutina BMATRIX	176
10.3.11.Rutina SHAPES	177

Capítulo 1 Métodos de residuos ponderados

Funciones de prueba continuas

por A. Brewer

1.1. Introducción

Para establecer una descripción cuantitativa de un problema físico es necesario, en primer lugar, plantear un sistema de ecuaciones diferenciales (ordinarias o en derivadas parciales) válidas en cierta región (o dominio) y sujetas a determinadas condiciones iniciales y de borde. En segundo lugar, se necesita resolver el sistema planteado. Las mayores dificultades surgen en esta instancia, ya que sólo las ecuaciones más simples pueden ser resueltas en forma exacta. Las ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes constantes son uno de los pocos casos para los cuales existen soluciones preestablecidas (aun en estos casos, la solución se complica considerablemente cuando aumenta el número de variables dependientes).

Con el propósito de salvar estas dificultades y aprovechar las enormes ventajas de la computadora digital, se hace necesario replantear el problema matemático dándole una forma puramente algebraica que involucre solamente las operaciones matemáticas básicas. Para lograr este objetivo, el problema continuo debe ser discretizado, entendiéndose como tal el procedimiento en el que se reemplazan los infinitos puntos en los que se necesita conocer la función incógnita por un número finito de ellos, dando lugar a un número finito de parámetros desconocidos. Este proceso conlleva, en general, cierto grado de aproximación.

Entre los distintos métodos utilizados para discretizar un problema nos referiremos a aquellos que emplean distintas *funciones de prueba* para materializar la aproximación y que se conocen como métodos de elementos finitos.

Antes de continuar, nos detendremos en algunos problemas que servirán como base para ejemplos posteriores. Es imposible tratar en detalle el amplio rango de los problemas físicos, por lo que se han elegido algunos pocos ejemplos para introducir los principios generales de la aproximación.

1.2. Ejemplos de ecuaciones diferenciales

1. Conducción del calor en un medio continuo

En la Fig. 1 se ha representado un problema de flujo de calor en un dominio bidimensional Ω . Si llamamos σ_x y σ_y el calor que fluye en las direcciones x e y por unidad de longitud y unidad de tiempo, entonces la diferencia D entre el flujo que ingresa y egresa del elemento de tamaño $dx dy$ está dada por

$$D = dy \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx - \sigma_x \right) + dx \left(\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy - \sigma_y \right) \quad (1.1)$$

Por conservación del calor, esta cantidad debe ser igual a la suma del calor generado en el elemento en la unidad de tiempo, $F dx dy$, donde F puede variar con la posición y el tiempo (t), y al calor absorbido en la unidad de tiempo debido al cambio de temperatura, $-\rho c (\partial u / \partial t) dx dy$, en la que c es el calor específico, ρ es la densidad y $u(x, y, t)$ es la distribución de temperatura. Esta condición de igualdad conduce a la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - F + \rho c \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (1.2)$$

que debe satisfacerse en todo el dominio, Ω , del problema.

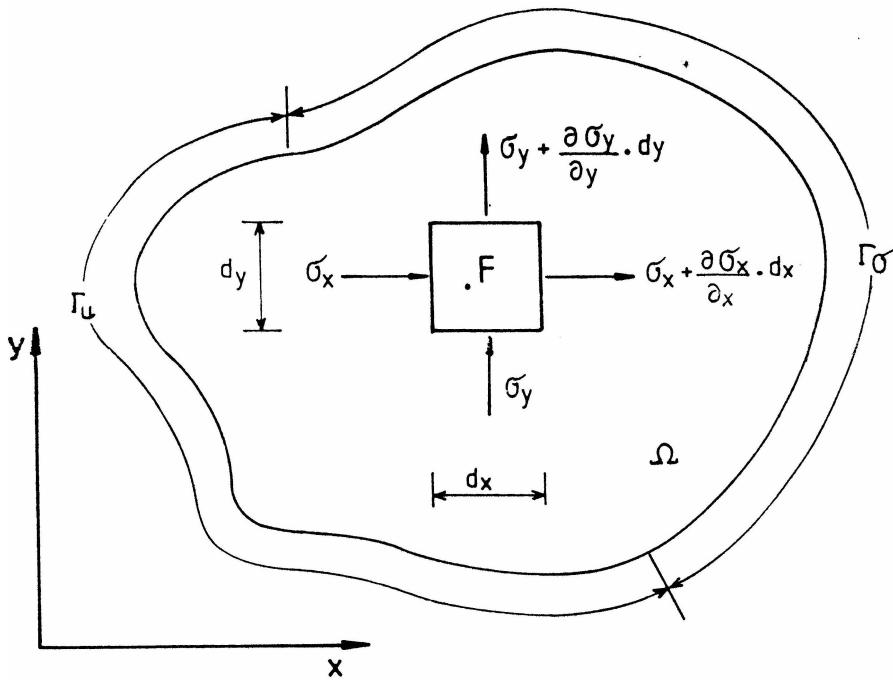


Figura 1 Problemas continuos. Conducción del calor en 2D

Introduciendo una ley física que gobierne el flujo de calor en un medio isótropo, se puede escribir para la componente del flujo en la dirección \mathbf{n}

$$\sigma_n = -k \frac{\partial u}{\partial n} \quad (1.3)$$

en la que k es una propiedad conocida como conductividad. Específicamente, la ec.(1.3) en las direcciones x e y conduce a las siguientes:

$$\sigma_x = -k \frac{\partial u}{\partial x} \quad \sigma_y = -k \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.4)$$

Las ecuaciones (1.2) y (1.4) definen un sistema de ecuaciones diferenciales en las incógnitas σ_x , σ_y y u . Para resolver el problema deben especificarse las *condiciones iniciales* para el tiempo $t = t_0$ (p.e., puede especificarse la distribución de la temperatura en todo el dominio Ω) y las *condiciones de borde* en la superficie o borde Γ del dominio. Existen dos clases de condiciones de borde. Una de ellas, aplicable al borde Γ_u , especifica los valores de la temperatura $\bar{u}(x, y, t)$, es decir

$$u - \bar{u} = 0 \quad \text{en } \Gamma_u \quad (1.5)$$

Una condición de borde de este tipo se conoce como condición de borde de *Dirichlet*.

El segundo tipo de condición de borde, aplicable al resto del borde Γ_σ , fija los valores del flujo de calor en el borde en la dirección normal al mismo

$$\sigma_n - \bar{\sigma} = 0 \quad \text{en } \Gamma_\sigma \quad (1.6)$$

o alternativamente

$$-k \frac{\partial u}{\partial n} - \bar{\sigma} = 0 \quad \text{en } \Gamma_\sigma \quad (1.7)$$

Este tipo de condición de borde se conoce como condición de borde de *Neumann*.

El problema queda completamente definido por las ecuaciones (1.2, 1.4, 1.5 y 1.7). Una forma alternativa se obtiene reemplazando la ec. (1.4) en la (1.2), con lo que resulta una única ecuación diferencial de mayor orden y en una variable independiente

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial u}{\partial y} \right) + F - \rho c \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (1.8)$$

que también requiere la especificación de las condiciones iniciales y de borde. Las variables independientes en la ec. (1.8) son x, y y t , correspondiendo las condiciones de contorno al dominio espacial (x, y) y las condiciones iniciales al dominio temporal (t). Si el problema entre manos puede ser considerado estacionario, (el problema es invariante con el tiempo y $\partial(\)/\partial t = 0$) entonces la ec. (1.8) queda

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial u}{\partial y} \right) + F = 0 \quad (1.9)$$

y las condiciones de contorno necesarias son sólo las (1.5) y (1.7). Este tipo de problemas (estacionarios) serán el objeto de gran parte de este curso. Si el problema es unidimensional (es decir que las condiciones no varían en una de las direcciones) la (1.9) se reduce a una ecuación diferencial ordinaria que puede ser resuelta analíticamente, lo que nos permitirá comparar las soluciones aproximadas con la exacta. La ecuación (1.9) que describe el flujo de calor, aparece también en otras ramas de la física:

2. Flujo de un fluido ideal irrotacional.

Si hacemos $k = 1$ y $F = 0$ en la ec. (1.9), ésta se reduce a la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \nabla^2 u = 0 \quad (1.10)$$

que gobierna la distribución del potencial durante el flujo de un fluido ideal irrotacional.

3. Flujo de un fluido a través de un medio poroso.

Si $F = 0$ e identificando a k con la permeabilidad del medio, la ec. (1.9) describe el comportamiento de la presión hidrostática u .

4. Pequeñas deformaciones de una membrana bajo carga lateral.

Si $k = 1$ y se asume que F es la relación de la carga lateral a la tensión interna en la membrana, entonces la ec. (1.9) describe la deflección u transversal de la membrana.

5. Torsión sin restricción de alabeo de una pieza prismática.

En este caso la ecuación que debe resolverse toma la forma

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -2\alpha G \quad \text{con} \quad \varphi = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma \quad (1.11)$$

en la que α y G representan el giro por unidad de longitud y el módulo de torsión respectivamente. A partir de determinar los valores de la función $\varphi(x, y)$ en Ω , es posible obtener los valores de la tensión de corte.

Aunque el origen y derivación de estas u otras ecuaciones que se presenten posteriormente puedan resultar un tanto oscuras al lector no familiarizado con las mismas, esperamos que los procedimientos matemáticos de discretización utilizados para resolverlas sean lo suficientemente claros.

1.3. Aproximación de funciones

Trataremos de mostrar que la clave de la solución de ecuaciones diferenciales utilizando métodos numéricos está en la capacidad para desarrollar buenas funciones de aproximación.

Supongamos que queremos aproximar una función u (conocida) en una región Ω encerrada por una curva Γ . **Un primer intento** de aproximación se basa en la condición de que la función propuesta satisfaga exactamente los valores en el borde Γ . Si puede encontrarse una función ψ (que llamaremos solución particular) tal que $\psi|_{\Gamma} = u|_{\Gamma}$ y además se propone un conjunto de funciones de prueba (ϕ_m , $m = 1, 2, \dots, M$) tales que $\phi_m|_{\Gamma} = 0$ para todos los m , entonces, para todos los puntos de Ω , puede aproximarse a u mediante la siguiente

$$u \simeq \hat{u} = \psi + \sum_{m=1}^M a_m \phi_m \quad (1.12)$$

en la que \hat{u} es la aproximación de u y a_m ($m = 1, 2, \dots, M$) son algunos parámetros que deben calcularse de modo de lograr un buen "ajuste". Estas funciones de prueba se conocen también como **funciones de base o de forma** y deben elegirse con la condición de que a medida que se aumenta M se garantice una mejor aproximación en (1.12). Una condición para lograr esta convergencia es que las funciones utilizadas puedan representar cualquier variación de la función u en el dominio Ω , lo que conduce al concepto de completitud.

1.3.1. Aproximaciones por residuos ponderados

A continuación se presenta un método general para determinar las constantes a_m en las aproximaciones de la forma (1.12). Se define el **error o residuo** R_Ω de la aproximación (1.12) como

$$R_\Omega = u - \hat{u} \quad (1.13)$$

De la definición se observa que R_Ω será función de la posición en Ω . Al intentar disminuir el residuo sobre el dominio Ω , surgen expresiones integrales del error que ponderan a R_Ω de distintas maneras y cuya forma general es la siguiente

$$\int_{\Omega} W_l (u - \hat{u}) d\Omega \equiv \int_{\Omega} W_l R_\Omega d\Omega = 0 \quad l = 1, 2, \dots, M \quad (1.14)$$

W_l es un conjunto de **funciones de peso** independientes. La condición general de convergencia enunciada anteriormente, es decir, que $\hat{u} \rightarrow u$ cuando $M \rightarrow \infty$ puede ser expresada alternativamente mediante la ec. (1.14) exigiendo que la misma se satisfaga para todo l para $M \rightarrow \infty$. Esto sólo será cierto si $R_\Omega \rightarrow 0$ en todos los puntos del dominio como es lo deseable. Reemplazando la ec. (1.12) en la (1.14) resulta el siguiente sistema lineal de ecuaciones

$$\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f} \quad (1.15)$$

que permite determinar los parámetros a_m y donde

$$\mathbf{a}^T = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_M)$$

$$K_{lm} = \int_{\Omega} W_l \phi_m d\Omega, \quad 1 \leq l, m \leq M$$

$$f_l = \int_{\Omega} W_l (u - \psi) d\Omega, \quad 1 \leq l \leq M \quad (1.16)$$

En la práctica pueden utilizarse distintos tipos de funciones de peso y cada una dará lugar a un método de residuos ponderados en particular. A continuación se presentan algunas de las opciones más comúnmente utilizadas en el contexto de sistemas unidimensionales.

1.3.1.1. Métodos de colocación

En este caso, las funciones de peso W_l están dadas por

$$W_l = \delta(x - x_l) \quad (1.17)$$

donde $\delta(x - x_l)$ es la función delta de Dirac definida por sus propiedades

$$\begin{aligned}
\delta(x - x_l) &= 0 && \text{para } x \neq x_l \\
\delta(x - x_l) &= \infty && \text{para } x = x_l
\end{aligned} \tag{1.18}$$

$$\int_{x < x_l}^{x > x_l} G(x) \delta(x - x_l) dx = G(x_l)$$

Elegir estas funciones de peso equivale, ecuación (1.14) mediante, a que R_Ω sea cero ($\hat{u} = u$) en los puntos x_l elegidos, es decir, que \hat{u} aproxima exactamente a u en M puntos elegidos. La matriz \mathbf{K} y el vector \mathbf{f} en la ecuación (1.16) resultan

$$K_{lm} = \phi_m|_{x=x_l}, \quad f_l = [u - \psi]|_{x=x_l} \tag{1.19}$$

1.3.1.2. Colocación en subdominios

En este caso las funciones de peso quedan definidas por

$$W_l = \begin{cases} 1, & x_l \leq x \leq x_{l+1} \\ 0, & x < x_l, x > x_{l+1} \end{cases} \tag{1.20}$$

por lo que las componentes de la matriz \mathbf{K} y el vector \mathbf{f} son

$$\begin{aligned}
K_{lm} &= \int_{x_l}^{x_{l+1}} \phi_m dx \\
f_l &= \int_{x_l}^{x_{l+1}} (u - \psi) dx
\end{aligned} \tag{1.21}$$

1.3.1.3. El método de Galerkin

En este, el más popular de los métodos de residuos ponderados, se eligen como funciones de peso a las mismas funciones utilizadas como funciones de prueba

$$W_l = \phi_l \tag{1.22}$$

La matriz \mathbf{K} y el vector \mathbf{f} tienen la siguiente forma

$$\begin{aligned}
K_{lm} &= \int_{\Omega} \phi_l \phi_m dx \\
f_l &= \int_{\Omega} \phi_l (u - \psi) dx
\end{aligned} \tag{1.23}$$

Se observa que una ventaja computacional de este método es que, en general, la matriz \mathbf{K} resulta simétrica.

1.3.1.4. Otras funciones de peso

Existen muchas otras posibilidades al momento de elegir funciones de peso. Citemos una de ellas (que conduce al método de los momentos) que utiliza al conjunto de funciones $W_l = x^{l-1}$, $l = 1, 2, \dots, M$, que obligan a que el área bajo la curva de error y sus momentos respecto del origen sean nulos.

Observemos, por último, que el **método de mínimos cuadrados** puede ser considerado como perteneciente al grupo de métodos basados en residuos ponderados. La aproximación estándar trata de minimizar el cuadrado de la función de error en cada punto del dominio Ω minimizando la expresión

$$I(a_1, a_2, a_3, \dots, a_M) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u - \hat{u})^2 \, d\Omega \quad (1.24)$$

es decir, que se deben satisfacer las siguientes igualdades

$$\frac{\partial I}{\partial a_l} = 0, \quad l = 1, 2, \dots, M \quad (1.25)$$

Cumpliéndose según la ec. (1.12) que

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial a_l} = \phi_l \quad (1.26)$$

la ec.(1.25) conduce a

$$\int_{\Omega} \phi_l (u - \hat{u}) \, d\Omega = 0 \quad (1.27)$$

que en este caso resulta idéntica a la que se obtiene mediante el método de Galerkin.

1.3.2. Ejercicios:

Ejercicio N°1: Dada la función

$$u(x) = 0,05 - 1,5x + 4x^2 - 1,5x^3 - 0,7x^4 \quad \text{con } 0 \leq x \leq 1$$

se desea aproximarla utilizando los siguientes conjuntos de funciones de aproximación:

- a) $\phi_m = x^m(1-x); \quad m = 1, 2, \dots$
- b) $\phi_m = \sin(m\pi x); \quad m = 1, 2, \dots$

En ambos casos, la solución particular $\psi(x)$ queda definida por la recta que une los extremos de $u(x)$.

Para minimizar el error utilice:

1. El método de colocación con un punto ($x = 0,5$) y con dos puntos ($x = 0,3$ y $x = 0,7$).
2. El método de Galerkin con uno y dos términos.

Saque conclusiones comparando los resultados obtenidos al usar las distintas aproximaciones.

Ejercicio N°2: Un problema unidimensional de calor produjo los siguientes resultados:

Distancia	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
Temperatura	20	30	50	65	40	30

Ajuste una curva suave a estos datos utilizando el método de Galerkin y un conjunto admisible de funciones de prueba.

Ejercicio N°3: Resolver el ejercicio 1 utilizando el método de colocación en subdominios. Utilizar como funciones de peso W_l dos subregiones ($[0,0,5]$ y $[0,5,1]$) y como funciones de prueba las propuestas en 1.a).

1.4. Aproximación a la solución de ecuaciones diferenciales

1.4.1. Condiciones de borde satisfechas por elección de las funciones de prueba

Consideremos la ecuación general

$$A(u) = \mathcal{L}(u) + p = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (1.28)$$

en la que \mathcal{L} es un **operador diferencial lineal** y p es independiente de u . Por ejemplo, en el caso de la ecuación diferencial del calor (1.9) que representa el flujo bidimensional se tiene

$$\mathcal{L}(u) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$p = F \quad (1.29)$$

en la que k y F no dependen de u . A su vez, las condiciones de borde se pueden expresar como

$$B(u) = \mathcal{M}(u) + r = 0 \quad \text{en } \Gamma \quad (1.30)$$

en la \mathcal{M} es un operador lineal adecuado y r es independiente de u . Por ejemplo, las condiciones de borde de Dirichlet y Neumann asociadas con la ecuación (1.9) se escriben como

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(u) &= u & r &= -\bar{u} && \text{en } \Gamma_u \\ \mathcal{M}(u) &= -k \frac{\partial u}{\partial n} & r &= -\bar{\sigma} && \text{en } \Gamma_\sigma \end{aligned} \quad (1.31)$$

Siguiendo las ideas anteriores, se propone una solución de la forma (1.12)

$$u \simeq \hat{u} = \psi + \sum_{m=1}^M a_m \phi_m \quad (1.32)$$

en la que la funciones ψ y ϕ_m son tales que

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{M}(\psi) &= -r \\ \mathcal{M}(\phi_m) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{en } \Gamma \quad (1.33)$$

y en consecuencia \hat{u} satisface las condiciones de borde de la ecuación (1.28) para todos los valores de a_m . Entonces, asumiendo que las funciones son suficientemente continuas y diferenciables en todo Ω , podemos escribir

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &\simeq \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \sum_{m=1}^M a_m \frac{\partial \phi_m}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &\simeq \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \sum_{m=1}^M a_m \frac{\partial^2 \phi_m}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (1.34)$$

y asi sucesivamente.

Las condiciones de que las funciones de prueba sean continuamente diferenciables será relajada más adelante.

En lo que sigue, debemos asegurar que \hat{u} satisfaga solamente a la ecuación diferencial (1.28) ya que la expansión \hat{u} se construyó satisfaciendo las condiciones de borde (1.30). Sustituyendo \hat{u} en la ec.(1.28) resulta el siguiente residuo

$$R_\Omega = A(\hat{u}) = \mathcal{L}(\hat{u}) + p = \mathcal{L}(\psi) + \sum_{m=1}^M a_m \mathcal{L}(\phi_m) + p \quad (1.35)$$

Este residuo puede minimizarse, utilizando el método de residuos ponderados, a fin de lograr que $R_\Omega \simeq 0$ en todo punto de Ω

$$\int_\Omega W_l R_\Omega d\Omega \equiv \int_\Omega W_l \left[\mathcal{L}(\psi) + \sum_{m=1}^M a_m \mathcal{L}(\phi_m) + p \right] d\Omega = 0 \quad (1.36)$$

Evaluando la integral (1.36) para $l = 1, 2 \dots M$, se obtiene un sistema de M ecuaciones algebraicas lineales

$$\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f} \quad (1.37)$$

en la que

$$K_{lm} = \int_{\Omega} W_l \mathcal{L}(\phi_m) d\Omega, \quad 1 \leq l, m \leq M$$

$$f_l = - \int_{\Omega} W_l p d\Omega - \int_{\Omega} W_l \mathcal{L}(\psi) d\Omega, \quad 1 \leq l \leq M \quad (1.38)$$

Resuelto este sistema, se puede completar la solución \hat{u} propuesta. En general, la matriz K así obtenida será llena, sin mostrar una estructura bandeadada. Las funciones de peso, como ya se viera, pueden ser elegidas de distintas formas.

1.4.1.1. Ejemplos

Ejemplo N°1: Resolver la ecuación

$$\frac{d^2u}{dx^2} - u = 0$$

sujeta a las condiciones de borde

$$\begin{aligned} u &= 0 && \text{en } x = 0 \\ u &= 1 && \text{en } x = 1 \end{aligned}$$

Estas condiciones pueden expresarse en la forma de las ec.(1.30) tomando $\mathcal{M}(u) = u$ y $r = 0$ en $x = 0$ y $r = -1$ en $x = 1$.

Entonces, según las ec. (1.33), las funciones de prueba ϕ_m deben satisfacer las condiciones

$$\psi = \phi_m = 0 \quad \text{en } x = 0; \quad \psi = 1, \quad \phi_m = 0 \quad \text{en } x = 1$$

Adoptamos $\psi = x$ y $\phi_m = \sin(m\pi x)$, $m = 1, 2, \dots, M$ de donde la solución aproximada será de la forma $\hat{u} = x + \sum a_m \phi_m$. Podemos utilizar los resultados obtenidos (1.38) identificando como $\mathcal{L}(.) = d^2(./) / dx^2 - (.)$ y $p = 0$. Tomaremos $M = 2$ y resolveremos utilizando el método de colocación y Galerkin. El sistema a resolver queda

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{21} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

donde para $l, m = 1, 2$,

$$\begin{aligned} k_{lm} &= \int_0^1 W_l [1 + (m\pi)^2] \sin(m\pi x) dx \\ f_l &= - \int_0^1 W_l x dx \end{aligned}$$

Para el método de colocación (con $R_{\Omega} = 0$ en $x = 1/3$, $x = 2/3$) resultan

$$\begin{aligned} k_{11} &= (1 + \pi^2) \sin \frac{\pi}{3} & k_{12} &= (1 + 4\pi^2) \sin \frac{2\pi}{3} \\ k_{21} &= (1 + \pi^2) \sin \frac{2\pi}{3} & k_{22} &= (1 + 4\pi^2) \sin \frac{4\pi}{3} \\ f_1 &= -\frac{1}{3} & f_2 &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

mientras que por Galerkin

$$k_{11} = \frac{1}{2} (1 + \pi^2) \quad k_{12} = 0$$

$$k_{21} = 0 \quad k_{22} = \frac{1}{2} (1 + 4\pi^2)$$

$$f_1 = -\frac{1}{\pi} \quad f_2 = \frac{1}{2\pi}$$

La solución de los sistemas conduce a los siguientes resultados

	a_1	a_2
Colocación	−0,05312	0,004754
Galerkin	−0,05857	0,007864

Ejemplo N°2: La aplicación de los métodos de residuos ponderados a problemas en dos dimensiones será ejemplificada resolviendo un problema de torsión definido por la ecuación

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -2\alpha G \quad \text{con} \quad \varphi = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma$$

donde $\varphi(x, y)$ es una función de tensión que permite encontrar las componentes de los esfuerzos de corte en la sección mediante las siguientes expresiones

$$\sigma_{yz} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \sigma_{xz} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

α es el giro por unidad de longitud $\alpha = d\theta/dz$.

G es el módulo de elasticidad transversal.

Obtenida la solución, se puede determinar el valor del momento torsor \mathbf{T} aplicado resolviendo la integral

$$\mathbf{T} = 2 \int \varphi(x, y) \, dx \, dy \quad (1.39)$$

Adoptemos como valor $\alpha G = 1$ y como dominio, la región rectangular $-3 \leq x \leq 3$ y $-2 \leq y \leq 2$. La solución es simétrica respecto de los ejes $x = 0$ e $y = 0$, por lo que restringiremos la elección a las funciones de prueba pares que satisfacen esta condición:

$$\phi_1 = \cos\left(\frac{\pi x}{6}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{4}\right)$$

$$\phi_2 = \cos\left(\frac{3\pi x}{6}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{4}\right)$$

$$\phi_3 = \cos\left(\frac{\pi x}{6}\right) \cos\left(\frac{3\pi y}{4}\right)$$

con estas funciones, la aproximación $\hat{\varphi} = \sum a_m \phi_m$, $m = 1, 2, 3$, automáticamente satisface las condiciones de borde requeridas. Nuevamente, el problema puede escribirse en la forma (1.28) haciendo $\mathcal{L}(\varphi) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$, y $p = 2$. Una vez elegidas las funciones de forma, se pueden aplicar directamente las ecuaciones (1.38) para obtener un sistema de tres ecuaciones con las tres incógnitas a_i . Si utilizamos el método de Galerkin, resultan las siguientes componentes para los elementos de la matriz \mathbf{K} y el vector \mathbf{f}

$$K_{lm} = - \int_{-3}^3 \int_{-2}^2 \phi_l \left(\frac{\partial^2 \phi_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_m}{\partial y^2} \right) dy \, dx$$

$$f_l = \int_{-3}^3 \int_{-2}^2 2 \phi_l dy \, dx \quad (1.40)$$

Debido a la ortogonalidad de las funciones de prueba, el sistema de ecuaciones resulta diagonal y la solución es inmediata

$$a_1 = \frac{4608}{13\pi^4} \quad a_2 = -\frac{4608}{135\pi^4} \quad a_3 = -\frac{4608}{255\pi^4}$$

El momento torsor se obtiene aplicando la ec. (1.39)

$$\mathbf{T} = 2 \int_{-3}^3 \int_{-2}^2 \hat{\varphi} dy dx = 74,26$$

que puede compararse con el valor exacto $\mathbf{T} = 76,4$. El valor de la tensión de corte máxima resulta en $|\tau| = 3,02$, mientras que el valor exacto es $|\tau| = 2,96$.

De los ejemplos presentados destaquemos nuevamente que el método de Galerkin produce (generalmente) sistemas de ecuaciones simétricos, a diferencia del método de colocación que da matrices no simétricas. Cuando hay que resolver grandes sistemas este aspecto resulta de singular importancia.

1.4.1.2. Ejercicios

Ejercicio N°4: a partir del Ejemplo N°1

- a) Obtener la solución exacta de la ecuación diferencial planteada.
- b) Completar los detalles en la obtención de las expresiones generales de k_{lm} y f_l . Verificar los valores para el método de colocación y Galerkin. Para este último caso resulta útil recordar que

$$I_{lm} = \int_0^L \sin\left(\frac{l\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} \frac{L}{2} & , l = m \\ 0 & , l \neq m \end{cases}$$

- c) Obtener una aproximación utilizando $M = 1$.
- d) Graficar la solución exacta y las aproximaciones obtenidas para $M = 1$ y 2 y los dos métodos de residuos ponderados utilizados.

En una tabla comparar los valores de la solución exacta y las aproximaciones obtenidas (con $M = 2$) en los puntos $x = 1/3$ y $x = 2/3$.

Ejercicio N°5: a partir del Ejemplo N°2

- a) Verificar las expresiones de k_{lm} y f_l en las ec. (1.40).
- b) Las curvas $\varphi = cte$ tienen un significado importante en el problema que se trata ya que en ellas el módulo de la tensión de corte

$$\tau = \sqrt{\sigma_{zx}^2 + \sigma_{zy}^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2}$$

se mantiene constante y la dirección del vector resultante coincide con la tangente a dicha curva. La tangente de la función $\varphi = cte$ se obtiene de la derivada total de φ respecto a x

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0$$

Entonces

- 1) graficar las curvas resultante $\varphi = cte$ que pasan por los puntos de abcisas: $x = 0,5, 1, 1,5, 2, 2,5, 3$ y ordenada $y = 0$.
- 2) Verificar que el valor de la tangente a la curva $\varphi = cte$ obtenida a partir de la anterior, coincide con la pendiente que se obtiene como relación de las componentes de la tensión de corte τ .
- 3) Obtenga el valor de la tensión de corte máxima haciendo pasar una parábola y encontrando su máximo.

Ejercicio N°6: La distribución del momento flector $M(x)$ en una viga cargada con $w(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ por unidad de longitud, satisface la ecuación

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = w(x)$$

Una viga de longitud 1 está simplemente apoyada ($M = 0$ en $x = 0$ y $x = 1$). Calcular la distribución de momento flector, utilizando el método de Galerkin y mínimos cuadrados. Compare los resultados con la solución exacta.

Nota: para plantear el problema por mínimos cuadrados, se hace necesario minimizar

$$I(a_1, a_2, \dots, M) = \int_{\Omega} R_{\Omega}^2 d\Omega = \int_{\Omega} \left[\mathcal{L}(\psi) + \sum_{m=1}^M a_m \mathcal{L}(\phi_m) + p \right]^2 d\Omega \quad (1.41)$$

haciendo $\partial I / \partial a_l = 0$, $l = 1, 2, \dots, M$, que conduce al sistema

$$\int_{\Omega} R_{\Omega} \frac{\partial R_{\Omega}}{\partial a_l} d\Omega = 0 \quad l = 1, 2, \dots, M \quad (1.42)$$

que se puede enmarcar dentro de los métodos de Residuos Ponderados definiendo $W_l = \frac{\partial R_{\Omega}}{\partial a_l} = \mathcal{L}(\phi_l)$.

Ejercicio N°7: Un problema de transferencia de calor unidimensional estacionario, con una fuente de calor distribuida, esta gobernado por la ecuación

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \varphi + 1 = 0$$

Las condiciones de borde son

$$\varphi = 0 \quad \text{en} \quad x = 0; \quad \frac{d\varphi}{dx} = -\varphi \quad \text{en} \quad x = 1$$

Buscar una solución utilizando el método de Galerkin y comparar los resultados con la solución exacta.

Ejercicio N°8: La ecuación que gobierna el desplazamiento transversal de una viga sobre una fundación elástica de rigidez k es

$$EI \frac{d^4u}{dx^4} + k u = w(x)$$

donde EI es la rigidez flexional de la viga (constante) y $w(x)$ la carga distribuida por unidad de longitud. Si la viga (de longitud unitaria) está empotrada en ambos extremos ($u = du/dx = 0$ en $x = 0$ y $x = 1$), determinar el desplazamiento utilizando los métodos de colocación y Galerkin para el caso en que $w/EI = k/EI = 1$. Comparar con la solución exacta.

Ejercicio N°9: Certo problema bidimensional de conducción del calor (estacionario) tiene lugar en un cuadrado. Las temperaturas en los lados $x = \pm 1$ varía con la ley $1 - y^2$; en los lados $y = \pm 1$ con la ley $1 - x^2$. Obtener una aproximación a la distribución de temperatura en el cuadrado utilizando el método de Galerkin.

Ejercicio N°10: La deflección normal u de una placa elástica delgada de rigidez flexional D simplemente apoyada en los bordes y sujeta a carga transversal p (por unidad de superficie) uniforme, está gobernada por la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = \frac{p}{D}$$

en Ω y las condiciones de borde $u = \partial^2 u / \partial n^2 = 0$ en Γ . Utilizar el método de colocación y Galerkin para aproximar la deflección de la placa en el dominio Ω definido por $|x| \leq 3$, $|y| \leq 2$. Tomar $p = 1$ y utilizar como funciones de forma las generadas por $\cos\left(\frac{i\pi x}{6}\right)$ y $\cos\left(\frac{j\pi y}{4}\right)$.

1.4.2. Aproximación simultánea de la ecuación diferencial y de las condiciones de borde

En esta sección se admitirá como función de prueba una aproximación que no satisfaga idénticamente las condiciones de borde, lo que permitirá ampliar el rango de funciones admisibles

$$u \simeq \hat{u} = \sum_{m=1}^M a_m \phi_m \quad (1.43)$$

La expansión (1.43) no satisface alguna o ninguna de las condiciones de borde, por lo que el residuo en el dominio

$$R_\Omega = A(\hat{u}) = \mathcal{L}(\hat{u}) + p \quad \text{en } \Omega \quad (1.44)$$

debe complementarse con un residuo en el borde

$$R_\Gamma = B(\hat{u}) = \mathcal{M}(\hat{u}) + r \quad \text{en } \Gamma \quad (1.45)$$

A fin de reducir los residuos en el dominio y en el borde, se propone el siguiente planteo en residuos ponderados

$$\int_{\Omega} W_l R_\Omega \, d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{W}_l R_\Gamma \, d\Gamma = 0 \quad (1.46)$$

en donde las funciones de peso, W_l y \bar{W}_l , pueden ser elegidas en forma independiente. Resulta claro que a medida que aumenta el número de funciones para las cuales se satisface la expresión (1.46), mejor será la aproximación de \hat{u} a u , asumiendo que la ec. (1.43) se ha elegido en forma adecuada.

Sustituyendo la aproximación (1.43) en la ec. (1.46) resulta un sistema idéntico a (1.37) en el que la matriz de coeficientes y el término independiente resultan

$$\begin{aligned} K_{lm} &= \int_{\Omega} W_l \mathcal{L}(\phi_m) \, d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{W}_l \mathcal{M}(\phi_m) \, d\Gamma \\ f_l &= - \int_{\Omega} W_l p \, d\Omega - \int_{\Gamma} \bar{W}_l r \, d\Gamma \end{aligned} \quad (1.47)$$

1.4.2.1. Ejemplos

Ejemplo N°3: Resolveremos nuevamente el **Ejemplo 1** pero en este caso no satisfaceremos las condiciones de borde con las funciones de prueba:

$$\hat{u} = \sum_{m=1}^M a_m \phi_m \quad ; \quad \phi_m = x^{m-1} \quad m = 1, 2, \dots$$

El borde Γ son dos puntos ($x = 0, x = 1$) y la ec.(1.46) queda

$$\int_0^1 W_l R_\Omega \, dx + [\bar{W}_l R_\Gamma]_{x=0} + [\bar{W}_l R_\Gamma]_{x=1} = 0$$

Si tomamos $W_l = \phi_l$; $\bar{W}_l = -\phi_l|_{\Gamma}$, la anterior queda

$$\int_0^1 \phi_l \left(\frac{d^2 \hat{u}}{dx^2} - \hat{u} \right) \, dx - [\phi_l \hat{u}]_{x=0} - [\phi_l (\hat{u} - 1)]_{x=1} = 0$$

Con tres términos, $\hat{u} = a_1 + a_2 x + a_3 x^2$, que conduce a un sistema $\mathbf{Ka} = \mathbf{f}$ donde

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 3 & \frac{3}{2} & -\frac{2}{3} \\ \frac{3}{2} & \frac{4}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{4}{3} & \frac{5}{4} & \frac{8}{15} \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Notar que \mathbf{K} es no simétrica aun cuando se utilizó el método de Galerkin. La solución es

$$a_1 = 0,068 \quad a_2 = 0,632 \quad a_3 = 0,226$$

La convergencia en la aproximación a las condiciones de borde en $x = 0$ y $x = 1$ se observa en la siguiente tabla con aproximaciones usando 1,2 o 3 términos

Nº términos	1	2	3	exacto
x=0	1/3	-0,095	0,068	0
x=1	1/3	0,762	0,925	1

Ejemplo N°4: resolveremos nuevamente el **ejemplo 2** utilizando nuevamente funciones pares pero relajando la condición de que las funciones de prueba satisfagan las condiciones de borde. Elegimos el conjunto de funciones

$$\phi_1 = 4 - y^2 \quad ; \quad \phi_2 = x^2\phi_1 \quad ; \quad \phi_3 = y^2\phi_1$$

$$\phi_4 = x^2y^2\phi_1 \quad ; \quad \phi_5 = x^4\phi_1 \quad \dots$$

que para una aproximación en 5 términos conduce a

$$\hat{\varphi} = (4 - y^2) (a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + a_5 x^4)$$

que satisface las condiciones de borde en $y = \pm 2$ pero no en $x = \pm 3$. En consecuencia, esta condición debe incorporarse al problema a través del enunciado de residuos ponderados

$$\int_{-3}^3 \int_{-2}^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + 2 \right) W_l dy dx + \int_{-2}^2 [\bar{W}_l \hat{\varphi}]_{x=3} dy - \int_{-2}^2 [\bar{W}_l \hat{\varphi}]_{x=-3} dy = 0$$

Adoptando $W_l = \phi_l$; $\bar{W}_l = \phi_l|_{\Gamma}$, resulta

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 6,7 & -44 & 43,7 & 80 & 813,6 \\ -12 & -333,6 & 105,6 & 355,2 & -5748,7 \\ 11,7 & -16 & 159,1 & 389,5 & -547,2 \\ 9,6 & -163,2 & 433,4 & 1971,6 & -3932,4 \\ -237,6 & -3156,7 & 432 & 1473,7 & -46239,4 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 12 \\ 36 \\ 16 \\ 48 \\ 194,4 \end{bmatrix}$$

A continuación se presentan la máxima tensión de corte τ y momento actuante \mathbf{T} obtenidos con 2 y 5 términos

Nº términos	2	5	exacto
\mathbf{T}	58,94	73,6	76,40
$ \tau $	3,52	3,33	2,96

1.4.2.2. Ejercicios.

Ejercicio N°11: graficar la solución obtenida en el **ejemplo 3** conjuntamente con la exacta y las obtenidas en el **ejemplo 1**.

Ejercicio N°12: con los datos del **ejemplo 4** verifique el valor del momento \mathbf{T} que figura en la tabla y obtenido con 5 términos.

Ejercicio N°13: Utilizar el método de Galerkin para resolver el siguiente ejercicio y comparar con la solución exacta

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + u = 0 \quad \text{con} \quad \begin{cases} u = 1 & \text{en } x = 0 \\ u = 0 & \text{en } x = 1 \end{cases}$$

Usar funciones de forma que satisfagan las condiciones de borde y funciones que no.

Ejercicio N°14: resolver el **Ejercicio N°6** usando una aproximación que satisfaga la condición en $x = 0$ y no en $x = 1$. Usar funciones de peso $\bar{W}_l = \alpha \phi_l|_{\Gamma}$, donde α es una constante, y comparar los resultados obtenidos con $\alpha = \pm 0,1, \pm 10, \pm 100$. con los obtenidos en el **Ej.N°6** en el que las aproximaciones satisfacían las condiciones de borde.

Ejercicio N°15: resolver el **Ejercicio N°9** utilizando una aproximación que satisfaga solamente las condiciones de borde en los lados $x = \pm 1$. Analice la convergencia de la aproximación a las condiciones de borde en los lados $y = \pm 1$.

Ejercicio N°16: resolver el **Ejercicio N°10** utilizando funciones de aproximación que satisfagan solamente la condición de desplazamiento nulo en los bordes de la placa. Analice la mejora en la aproximación de las condiciones de borde con el aumento de términos incluidos en la aproximación.

1.4.3. Forma débil del problema. Condiciones de borde naturales.

Los ejemplos de la sección previa han mostrado que es posible evaluar los coeficientes de la expansión (1.43), y por lo tanto obtener una solución aproximada, sin satisfacer a priori las condiciones de borde. Sin embargo, la formulación expresada en la ec. (1.46) puede dificultarse cuando las integrales de borde, que pueden contener derivadas de \hat{u} , deban evaluarse en bordes curvos o de forma complicada.

En esta sección se verá cómo evitar este tipo de cálculos y proponer un tratamiento más general de las condiciones de borde.

Retomando el planteo en residuos ponderados (1.46), se observa que el primer término de la primer integral

$$\int_{\Omega} W_l R_{\Omega} d\Omega = \int_{\Omega} W_l [\mathcal{L}(\hat{u}) + p] d\Omega \quad (1.48)$$

puede ser reescrito mediante una integración por partes como:

$$\int_{\Omega} W_l \mathcal{L}(\hat{u}) d\Omega = \int_{\Omega} [\mathcal{C}W_l] [\mathcal{D}(\hat{u})] d\Omega + \int_{\Gamma} W_l \mathcal{E}(\hat{u}) d\Gamma \quad (1.49)$$

en la que \mathcal{C} , \mathcal{D} , y \mathcal{E} son operadores diferenciales lineales de un orden de diferenciación menor que el correspondiente al operador \mathcal{L} . La expresión obtenida se conoce como **forma débil del problema de residuos ponderados**.

Entonces, al reemplazar la ec.(1.49) en la (1.46) es posible adecuar el último término de la ec. (1.49) para que se cancele con parte del último término de la ec. (1.46). Esto puede realizarse eligiendo convenientemente la función de peso \bar{W}_l , con lo que desaparecen las integrales de borde que involucran a \hat{u} o sus derivadas. Este procedimiento es aplicable sólo con algunas de las condiciones de borde que llamaremos **naturales**. En general, las condiciones de borde **esenciales**, que fijan los valores de la función en el borde, no se benefician de este tratamiento.

Una ventaja adicional, al hecho de que el orden de las funciones de aproximación es menor, es que el sistema de ecuaciones finales será, en general, simétrico.

Ejemplo N° 5: sea la ecuación diferencial

$$\frac{d^2u}{dx^2} - u = 0 \quad \text{con} \quad \begin{cases} u = 0 & \text{en } x = 0 \\ \frac{du}{dx} = 20 & \text{en } x = 1 \end{cases}$$

y la aproximación $\hat{u} = \psi + \sum_{m=1}^M a_m \phi_m$ elegida de tal forma que la condición en $x = 0$ sea automáticamente satisfecha. Tomemos $\psi = 0$ y $\phi_m = x^m$ para $m = 1, 2, \dots, M$. Entonces, la minimización del error por residuos ponderados toma la forma:

$$\int_0^1 W_l \left(\frac{d^2\hat{u}}{dx^2} - \hat{u} \right) dx + \left[\bar{W}_l \left(\frac{d\hat{u}}{dx} - 20 \right) \right]_{x=1} = 0$$

integrando por partes el primer término

$$\int_0^1 W_l \frac{d^2\hat{u}}{dx^2} dx = W_l \frac{d\hat{u}}{dx} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{dW_l}{dx} \frac{d\hat{u}}{dx} dx$$

que reemplazada en la anterior

$$\begin{aligned} & - \int_0^1 \frac{dW_l}{dx} \frac{d\hat{u}}{dx} dx - \int_0^1 W_l \hat{u} dx + W_l \frac{d\hat{u}}{dx} \Big|_{x=1} \\ & - W_l \frac{d\hat{u}}{dx} \Big|_{x=0} + \left[\bar{W}_l \left(\frac{d\hat{u}}{dx} - 20 \right) \right]_{x=1} = 0 \end{aligned}$$

como W_l y \bar{W}_l son funciones arbitrarias elegimos a W_l de tal modo que $W_l|_{x=0} = 0$ y $\bar{W}_l = -W_l$ en $x = 1$.

$$- \int_0^1 \frac{dW_l}{dx} \frac{d\hat{u}}{dx} dx - \int_0^1 W_l \hat{u} dx + 20 \cdot W_l|_{x=1} = 0$$

que se puede escribir como $\mathbf{Ka} = \mathbf{f}$ con

$$K_{lm} = \int_0^1 \frac{dW_l}{dx} \frac{d\phi_m}{dx} dx + \int_0^1 W_l \phi_m dx ; \quad f_l = 20 \cdot W_l|_{x=1}$$

Utilizando Galerkin y usando dos términos, resultan $a_1 = 11,75$ y $a_2 = 3,4582$. Los valores de \hat{u} en $x = 1/2$ y $x = 1$ se contrastan con los valores exactos

Nº términos	2	exacto
$x = 1/2$	6,7435	6,7540
$x = 1$	15,2161	15,2319

Las derivadas $d\hat{u}/dx$ con 1 y 2 términos en $x = 1$ resultan

Nº términos	1	2	exacto
$\frac{d\hat{u}}{dx} _{x=1}$	15	18,67	20

1.4.4. Condiciones de borde naturales para la ecuación de conducción del calor

Consideremos la ecuación del calor

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial u}{\partial y} \right) + F = 0 \quad (1.50)$$

sujeta a las condiciones de borde esenciales

$$u = \bar{u} \quad \text{en } \Gamma_u \quad (1.51)$$

y naturales

$$\sigma_n = -k \frac{\partial u}{\partial n} = \bar{\sigma} \quad \text{en } \Gamma_\sigma \quad (1.52)$$

y

$$\sigma_n = -k \frac{\partial u}{\partial n} = p(u - u_\infty) \quad \text{en } \Gamma_c \quad (1.53)$$

en donde el tilde significa que la variable es conocida. La condición $\sigma_n = -k \frac{\partial u}{\partial n} = \bar{\sigma}$ dice que el flujo en dirección de la normal a la curva Γ_σ es conocido, mientras que la condición $\sigma_n = p(u - u_\infty)$ representa una condición de convección en la que p es una constante (dato) que depende del medio y de las condiciones en que tiene lugar la convección, u es el valor de la temperatura (incógnita) en el borde Γ_c y u_∞ es la temperatura del medio próximo (dato).

Se propone una aproximación de la forma

$$u \simeq \hat{u} = \psi + \sum_{m=1}^M a_m \phi_m \quad (1.54)$$

en la que se han elegido a las funciones ψ y ϕ_m para que se satisfagan las condiciones de borde esenciales, es decir, $\psi = \bar{u}$ y $\phi_m = 0$, ($m = 1, 2, \dots, M$) en Γ_u . El problema de residuos ponderados correspondiente resulta

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} W_l \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} \right) \right] dx dy + \int_{\Omega} W_l F dx dy + \\ & + \int_{\Gamma_{\sigma}} \bar{W}_l \left(k \frac{\partial \hat{u}}{\partial n} + \bar{\sigma} \right) d\Gamma + \int_{\Gamma_c} \widetilde{W}_l \left(k \frac{\partial \hat{u}}{\partial n} + p(u - u_{\infty}) \right) d\Gamma = 0 \\ & l = 1, 2, \dots, M \end{aligned} \quad (1.55)$$

que para $M \rightarrow \infty$ asegura la satisfacción de la ecuación diferencial en Ω y de las condiciones de borde naturales. La primer integral en la ec.(1.55) puede ser "debilitada" utilizando el lema de Green que establece las siguientes identidades para las funciones α y β

$$\int_{\Omega} \alpha \frac{\partial \beta}{\partial x} dx dy = - \int_{\Omega} \frac{\partial \alpha}{\partial x} \beta dx dy + \int_{\Gamma} \alpha \beta n_x d\Gamma \quad (1.56)$$

$$\int_{\Omega} \alpha \frac{\partial \beta}{\partial y} dx dy = - \int_{\Omega} \frac{\partial \alpha}{\partial y} \beta dx dy + \int_{\Gamma} \alpha \beta n_y d\Gamma \quad (1.57)$$

en la que n_x y n_y son los cosenos directores de la normal n (saliente) al contorno cerrado Γ que rodea al dominio Ω en el plano x y. La integración sobre Γ se realiza en sentido antihorario. Utilizando estas identidades y notando que

$$\frac{\partial \alpha}{\partial n} = \frac{\partial \alpha}{\partial x} n_x + \frac{\partial \alpha}{\partial y} n_y \quad (1.58)$$

la ec. (1.55) puede reescribirse

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial W_l}{\partial x} k \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial W_l}{\partial y} k \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} \right) dx dy + \int_{\Omega} W_l F dx dy + \\ & + \int_{\Gamma_{\sigma} + \Gamma_u + \Gamma_c} W_l \left(k \frac{\partial \hat{u}}{\partial n} \right) d\Gamma + \int_{\Gamma_{\sigma}} \bar{W}_l \left(k \frac{\partial \hat{u}}{\partial n} + \bar{\sigma} \right) d\Gamma + \\ & + \int_{\Gamma_c} \widetilde{W}_l \left(k \frac{\partial \hat{u}}{\partial n} + p(u - u_{\infty}) \right) d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (1.59)$$

Limitando ahora la elección de las funciones de peso de tal modo que

$$W_l = 0 \text{ en } \Gamma_u; \quad \bar{W}_l = -W_l \text{ en } \Gamma_{\sigma}; \quad y \quad \widetilde{W}_l = -W_l \text{ en } \Gamma_c \quad (1.60)$$

se observa que el término que contiene al gradiente de \hat{u} desaparece y la ec.(1.59) queda

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(\frac{\partial W_l}{\partial x} k \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial W_l}{\partial y} k \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} \right) dx dy - \int_{\Omega} W_l F dx dy + \\ & + \int_{\Gamma_{\sigma}} W_l \bar{\sigma} d\Gamma + \int_{\Gamma_c} W_l p(u - u_{\infty}) d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (1.61)$$

La sustitución de la aproximación (1.54) en la ec. (1.61) conduce al ya conocido sistema

$$\mathbf{Ka} = \mathbf{f} \quad (1.62)$$

en el que

$$\begin{aligned} K_{lm} &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial W_l}{\partial x} k \frac{\partial \phi_m}{\partial x} + \frac{\partial W_l}{\partial y} k \frac{\partial \phi_m}{\partial y} \right) dx dy + \\ &\quad + \int_{\Gamma_c} W_l p \phi_m d\Gamma ; \quad l, m = 1, 2, \dots M \\ f_l &= \int_{\Omega} W_l F dx dy - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial W_l}{\partial x} k \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial W_l}{\partial y} k \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dx dy - \\ &\quad - \int_{\Gamma_\sigma} W_l \bar{\sigma} d\Gamma - \int_{\Gamma_c} W_l p (\psi - u_\infty) d\Gamma ; \quad l = 1, 2, \dots M \end{aligned} \quad (1.63)$$

Es posible elegir como funciones las correspondientes a Galerkin $W_l = \phi_l$ ya que las condiciones (1.60) impuestas a las funciones de peso de anularse sobre Γ_u ya son satisfechas por las ϕ_l utilizadas en la expansión (1.54). Se observa que esta alternativa produce una matriz \mathbf{K} que resulta simétrica ya que

$$K_{lm} = K_{ml} \quad (1.64)$$

En conclusión, se ha mostrado cómo la condición de borde (1.52) es una condición natural para este problema ya que la formulación débil pudo eliminar la necesidad de evaluar la derivada en el contorno. Por otro lado si $\bar{\sigma} = 0$, entonces esta condición no aparece en forma explícita en la formulación.

Ejemplo N° 6: un material de conductividad $k = 1$ ocupa una región cuadrada definida en $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$. Los lados $y = \pm 1$ se mantienen a temperatura de 0° , mientras se suministra calor en la relación $\cos(\pi y/2)$ por unidad de longitud en los lados $x = \pm 1$. Se pide resolver la ecuación de calor estacionario

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial u}{\partial y} \right) + F = 0$$

sujeta a las condiciones de borde

$$\begin{aligned} u &= 0 && \text{en } \Gamma_u \text{ definido por } y = \pm 1 \\ \bar{\sigma} &= -\cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) && \text{en } \Gamma_\sigma \text{ definido por } x = \pm 1 \end{aligned}$$

Si adoptamos como funciones para aproximar la temperatura a

$$\begin{aligned} \phi_1 &= 1 - y^2 && ; \quad \phi_2 = x^2 \phi_1 && ; \quad \phi_3 = y^2 \phi_1 \\ \phi_4 &= x^2 y^2 \phi_1 && ; \quad \phi_5 = x^4 \phi_1 && ; \quad \psi = 0 \end{aligned}$$

con lo cual $\hat{u} = \sum a_m \phi_m$ satisface las condiciones de borde esenciales. Si adoptamos a $W_l = \phi_l$, entonces W_l también satisface la condición necesaria para utilizar la formulación anterior. Las componentes de la matriz \mathbf{K} y el vector \mathbf{f} resultan

$$\begin{aligned} K_{lm} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\frac{\partial \phi_l}{\partial x} \frac{\partial \phi_m}{\partial x} + \frac{\partial \phi_l}{\partial y} \frac{\partial \phi_m}{\partial y} \right) dx dy ; \quad l, m = 1, 2, \dots, 5 \\ f_l &= 2 \int_{-1}^1 \phi_l|_{x=1} \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) dy ; \quad l = 1, 2, \dots, 5 \end{aligned}$$

de donde

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{16}{3} & \frac{16}{9} & \frac{16}{15} & \frac{16}{45} & \frac{16}{15} \\ & \frac{176}{45} & \frac{16}{45} & \frac{976}{1575} & \frac{2192}{525} \\ & & \frac{176}{105} & \frac{176}{315} & \frac{16}{75} \\ & & & \frac{2224}{4725} & \frac{16}{25} \\ & \text{Sim.} & & & \frac{5168}{945} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \frac{64}{\pi^3} \\ \frac{64}{\pi^3} \\ \frac{320\pi^2 - 3072}{\pi^5} \\ \frac{320\pi^2 - 3072}{\pi^5} \\ \frac{64}{\pi^3} \end{bmatrix}$$

y los valores de a_i obtenidos al resolver el sistema $\mathbf{Ka} = \mathbf{f}$ son

$$[a]^T = [0,276308, \ 0,339251, \ -0,05875, \ -0,09221, \ 0,077615]$$

1.4.4.1. Ejercicios

Ejercicio N°17: a partir del Ejemplo 6

a) Graficar la distribución de la temperatura en la placa.

b) Calcule la derivada direccional $\partial u / \partial n$ en el contorno Γ_σ y verifique la condición de borde.

Ejercicio N°18: la ecuación que gobierna la variación de temperatura T de un fluido viscoso fluyendo entre dos placas paralelas ($y = 0$ e $y = 2H$) está dada por

$$\frac{d^2T}{dy^2} = -\frac{4u^2\mu}{H^4k} (H - y^2)$$

donde μ , k , y y u son la viscosidad, conductividad térmica y velocidad máxima del fluido respectivamente. Si $\mu = 0,1$, $k = 0,08$, $H = 3,0$ y $u = 3,0$, entonces

a) Utilizando el método de Galerkin calcular la distribución de la temperatura cuando una placa se mantiene a una temperatura $T = 0$, mientras en la otra no hay flujo de calor (es decir, $dT/dy = 0$)

b) Comparar con la solución exacta del problema.

Ejercicio N°19: Sea el problema de flujo de calor unidimensional de una barra de longitud 10 cm y diámetro 1 cm., uno de cuyos extremos se mantiene a $50^\circ C$ mientras en el otro se introduce calor en la relación de $200W/cm^2$. Si $k = 75W/cm^\circ C$ y si se genera calor en la proporción de $150T W/cm^2$ por unidad de longitud, donde T es la temperatura,

a) Utilizando el método de Galerkin, calcule la distribución de temperaturas en la barra.

b) Compare con la solución exacta y muestre la convergencia de la solución a medida que se aumenta el número de términos en la aproximación.

Ejercicio N°20: resolver el Ejercicio N°8 utilizando Galerkin con una formulación débil y una aproximación que no satisface automáticamente las condiciones de borde naturales. Adoptar como condición de borde la de una viga simplemente apoyada, es decir, $u = d^2u/dx^2 = 0$ en ambos extremos.

Ejercicio N°21: una barra larga de sección rectangular, con una conductividad térmica de $k = 1,5W/m^\circ C$ está sujeta a las condiciones de borde que se muestran en la figura Fig. 1.2: dos lados opuestos se mantienen a temperatura uniforme de $180^\circ C$, un lado está aislado y el restante posee una condición de convección con $T_\infty = 25^\circ C$ y $p = 50W/m^2^\circ C$. Determinar la distribución de temperatura de la barra. Nota: en un modelo por E.F., la temperatura en los nodos 1, 2, y 3 fueron de $124,5$, $34,0$, y $45,4$ $^\circ C$ respectivamente.

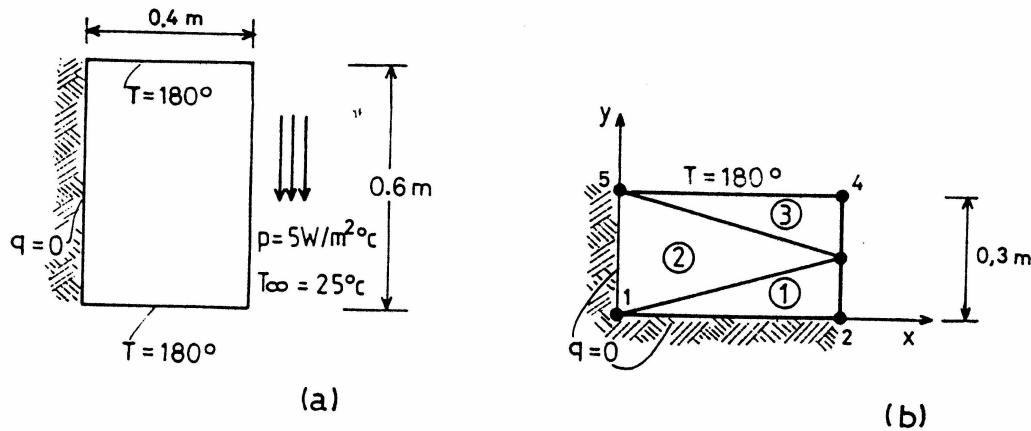


Figura 2 Ejercicio 21. a) Problema b) Discretización por E.F.

Ejercicio N°22: resolver la ecuación del calor en una región cuadrada $-1 \leq x, y \leq 1$ si los lados $y = \pm 1$ se mantienen a 100°C mientras los lados $x = \pm 1$ están sujetos a la condición $\partial u / \partial n = -1 - u$.

Ejercicio N°23: mostrar que en el problema del **Ejercicio N°10** la condición de borde $\partial^2 u / \partial n^2 = 0$ en Γ es una condición de borde natural. Resolver el problema y comparar con la respuesta obtenida en el **Ej. N°10**.

Ecuación diferencial $ay'' + b y' + cy = 0$	Ecuación característica $a m^2 + b m + c = 0$	
Raíces de la ecuación característica	Discriminante	Solución Completa
Reales y distintas $m_1 \neq m_2$	$b^2 - 4ac > 0$	$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$
Reales e iguales $m_1 = m_2$	$b^2 - 4ac = 0$	$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 x e^{m_1 x}$
Compl. Conjug. $m_{1-2} = p + i q$	$b^2 - 4ac < 0$	$y = e^{px}(A \cos qx + B \sin qx)$

Cuadro 1.1 Solución para la ecuación homogénea

Ecuación diferencial $ay'' + b y' + cy = f(x)$		
$f(x)$ forma de la integral particular		
1.	α	A
2.	αx^n (n entero positivo)	$A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_{n-1} x^1 + A_n$
3.	αe^{rx} (r real o complejo)	$A e^{rx}$
4.	$\alpha \cos(kx)$	$A \cos(kx) + B \sin(kx)$
5.	$\alpha \sin(kx)$	
6.	$\alpha x^n e^{rx} \cos(kx)$	$(A_0 x^n + \dots + A_{n-1} x^1 + A_n) e^{rx} \cos(kx) +$
7.	$\alpha x^n e^{rx} \sin(kx)$	$(B_0 x^n + \dots + B_{n-1} x^1 + B_n) e^{rx} \sin(kx)$

Cuadro 1.2 Solución para la ecuación no homogénea

- Cuando $f(x)$ está formada por la suma de varios términos, la solución particular de la suma es las soluciones particulares correspondientes a cada uno de estos términos

- Siempre que un término en cualquiera de las soluciones particulares enumeradas esté contenida también en la solución de la homogénea, hay que multiplicar todos los términos de esa solución particular por la menor potencia entera positiva de x que permita eliminar la duplicación.

Capítulo 2 El método de elementos finitos

Funciones de prueba por tramos

por A. Brewer

2.1. Introducción

El método de Galerkin es una poderosa herramienta para proponer soluciones aproximadas a problemas de contorno, pero presenta una seria limitación: el método no establece un procedimiento sistemático para la construcción de las funciones de prueba ϕ_j necesarias para determinar la forma de las aproximaciones \hat{u} . Salvo los requerimientos de independencia, continuidad y derivabilidad, estas funciones son arbitrarias por lo que el analista debe enfrentar el problema de elegir entre distintas posibilidades alguna de las cuales pueden resultar no tan claras. Lo que si está claro es que la calidad de la solución dependerá fuertemente de las propiedades de las funciones elegidas. La situación empeora en problemas de dos (2D) y tres dimensiones (3D) en los que las ϕ_j deben diseñarse para satisfacer las condiciones de borde en contornos que pueden presentar geometrías complicadas. Por otro lado, una mala elección de las funciones ϕ_j puede producir matrices \mathbf{K} mal condicionadas que hagan difícil o imposible la solución del problema $\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}$ dentro de los límites de la precisión esperada.

La alternativa es dividir el dominio Ω en subdominios o **elementos** Ω^e no superpuestos y entonces construir una aproximación \hat{u} por tramos sobre cada subdominio; e inclusive, se pueden utilizar distintas expresiones en cada uno de los subdominios en que se ha particionado Ω . En este caso, las integrales definidas sobre todo el dominio pueden obtenerse como la suma de las contribuciones de cada uno de los elementos

$$\int_{\Omega} W_i R_{\Omega} d\Omega = \sum_{e=1}^E \int_{\Omega^e} W_i R_{\Omega} d\Omega \quad (2.1)$$

$$\int_{\Gamma} \bar{W}_i R_{\Gamma} d\Gamma = \sum_{e=1}^E \int_{\Gamma^e} \bar{W}_i R_{\Gamma} d\Gamma \quad (2.2)$$

asumiendo, claro está, que

$$\sum_{e=1}^E \Omega^e = \Omega, \quad \sum_{e=1}^E \Gamma^e = \Gamma \quad (2.3)$$

En estas expresiones E representa el número de subdivisiones de la región Ω y Γ^e la parte del contorno de Ω^e que se solapa con Γ . De esta manera, pueden modelarse dominios cuyos contornos sean más o menos complicados.

La definición de funciones de prueba por tramos puede significar la aparición de discontinuidades en la función o sus derivadas. Algún grado de discontinuidad puede ser admitido, pero esto condicionaría el tipo de formulación utilizada.

Por último notemos que si la evaluación de las integrales en las ec.(2.1) y (2.2) se realiza sobre los subdominios resultará muy ventajoso definir las funciones de forma utilizando un soporte compacto de tal modo que su valor sea nulo en todas partes a excepción del elemento en cuestión y de los adyacentes al mismo.

2.2. Aproximación mediante funciones de forma de soporte compacto

En la Fig.1 se muestra la aproximación de una función arbitraria en un dominio unidimensional $\Omega = [0, L]$. La división de Ω en E elementos ($E = M - 1$) se realiza eligiendo puntos x_i ($x_i = 1, 2, \dots, M$) en Ω , con $x_1 = 0$ y $x_M = L$ y definiendo el elemento Ω^e como el intervalo $x_e \leq x \leq x_{e+1}$.

En la Fig.1.a se muestra como puede approximarse una función u utilizando el método de colocación mediante el cual se construye la aproximación \hat{u} que toma valores constantes en cada elemento. La función obtenida no es continua en los puntos de conexión de los elementos ($x_i; i = 2, \dots, M - 1$). Se han elegido como puntos de colocación los puntos medios de cada elemento; estos puntos reciben el nombre de **nudos** o **nodos**. En el método de elementos finitos se numeran los elementos y los nudos. En este caso la numeración es bastante obvia numerándose como nudo j el correspondiente al elemento j . La función \hat{u} puede escribirse en forma estándar como

$$u \simeq \hat{u} = \psi + \sum_{j=1}^{M-1} a_j \phi_j \quad \text{en } \Omega \quad (2.4)$$

que particularizada al presente caso resulta en

$$u \simeq \hat{u} = \sum_{j=1}^{M-1} \hat{u}_j \phi_j \quad \text{en } \Omega \quad (2.5)$$

en la que se ha omitido la función ψ ; ϕ_j representa una función de forma global discontinua definida para tomar el valor 1 sobre el elemento j y cero sobre los otros elementos; y \hat{u}_j es el valor que toma la función u en el nodo j . Desde un punto de vista elemental, la aproximación resulta

$$u \simeq \hat{u} = \hat{u}_e N^e = \hat{u}_e \quad \text{en el elemento } e \quad (2.6)$$

La aproximación \hat{u} no coincidirá en los extremos del dominio ($x = 0, x = L$) con los valores que toma la función original u en los mismos, sin embargo, estos valores pueden approximarse tanto como se quiera reduciendo la longitud de los elementos para $x = 0$ y $x = L$.

En la Fig.1.b se ha utilizado la misma subdivisión del dominio pero se mejoró la discretización adoptando una variación **lineal** en cada elemento. En este caso los nudos se definen coincidentes con los extremos del elemento y se asocia una función de forma **global** ϕ_i a cada nudo i con la propiedad de que ϕ_i es no nula en los elementos conectados por este nudo, vale 1 sobre el nudo i y cero en los otros nudos. Entonces, desde un punto de vista global se puede escribir

$$u \simeq \hat{u} = \sum_{j=1}^M \hat{u}_j \phi_j \quad \text{en } \Omega \quad (2.7)$$

con

$$\phi_j \left\{ \begin{array}{ll} \frac{x - x_{j-1}}{h_j} & \text{para } x_{j-1} \leq x \leq x_j \\ \frac{x_{j+1} - x}{h_{j+1}} & \text{para } x_j \leq x \leq x_{j+1} \\ 0 & \text{para } x \leq x_{j-1} \text{ y } x \geq x_{j+1} \end{array} \right. \quad (2.8)$$

en la que \hat{u}_j es valor que toma u en el nodo j . En consecuencia, la aproximación (2.7) automáticamente coincide en los extremos de Ω con los valores de u y no es necesario utilizar una función ψ . Si la aproximación se considera desde el **elemento** entonces

$$u \simeq \hat{u} = u_i N_i^e + u_j N_j^e \quad \text{en el elemento } e \quad (2.9)$$

en la que u_i y u_j son los valores de u en los nodos i y j y N_i^e y N_j^e las funciones de interpolación lineales definidas como:

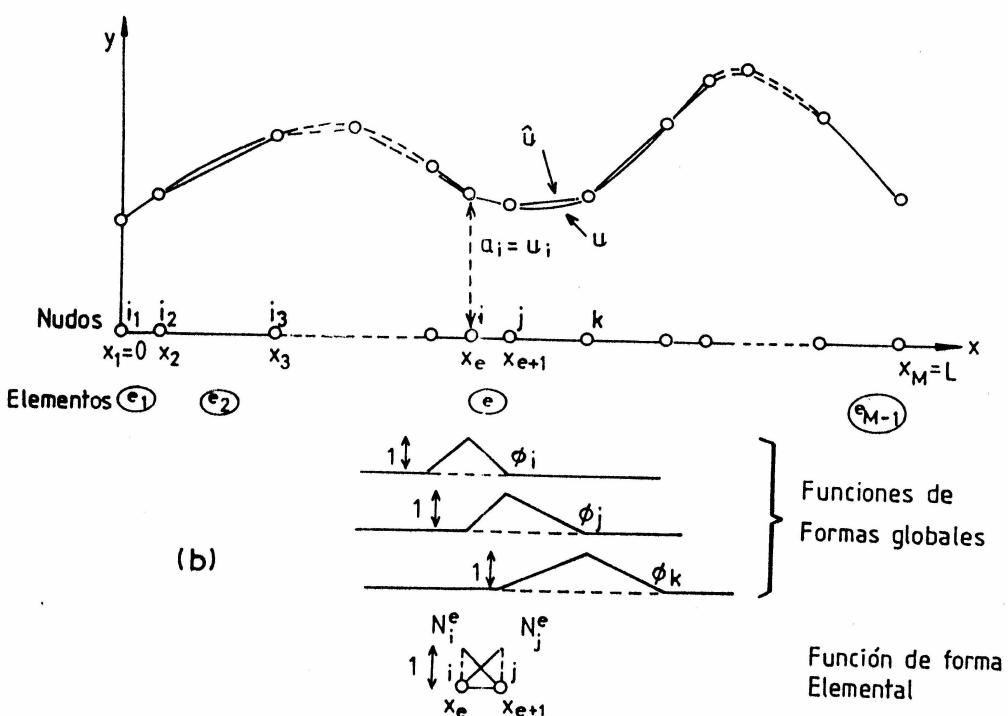
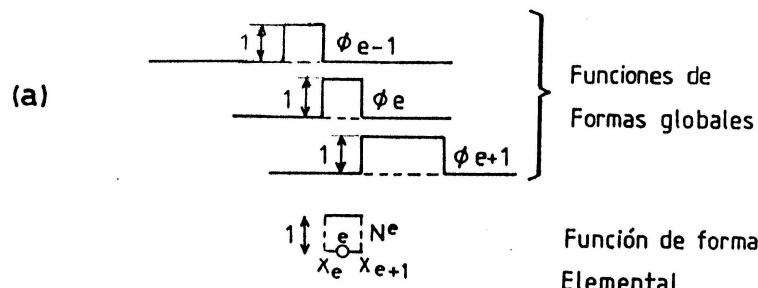
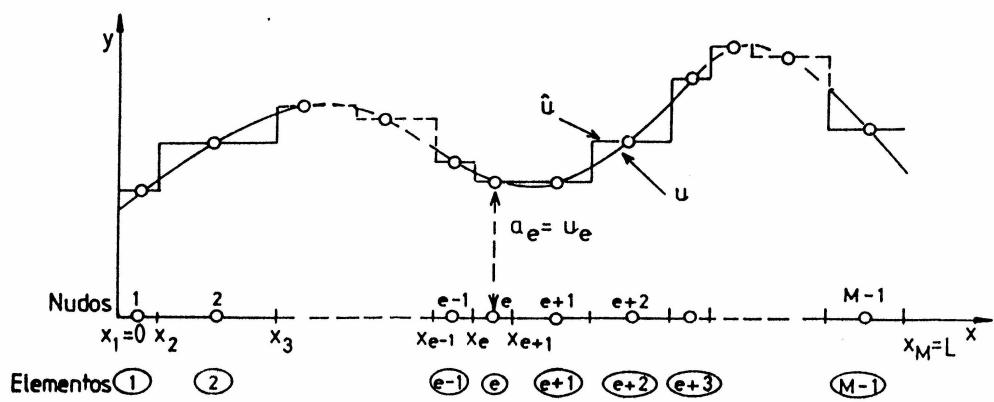


Figura 1 Aproximación de una función mediante:
a) elementos constantes y
b) elementos de variación lineal

$$N_i^e = \frac{h^e - (x - x_i)}{h^e}$$

$$N_j^e = \frac{x - x_i}{h^e} \quad (2.10)$$

en la que $h^e = x_j - x_i$.

Las dos aproximaciones presentadas permiten aproximar la función propuesta tanto como se quiera en la medida en que se aumente el número de subdivisiones del dominio.

Finalmente, los coeficientes de la aproximación se obtienen minimizando el residuo,

$$\int_0^L \phi_i(u - \hat{u}) dx = 0 \quad (2.11)$$

en donde se ha usado como función de peso las mismas funciones de prueba que las usadas en la aproximación (2.7). Los pasos restantes son idénticos a los ya utilizados en el capítulo anterior.

2.3. Aproximación a la solución de ecuaciones diferenciales – condiciones de continuidad

Las funciones de aproximación definidas en la sección anterior, pueden ser utilizadas en la solución de ecuaciones diferenciales. Recordemos la forma general de una ecuación diferencial en una dimensión

$$A(u) = \mathcal{L}(u) + p = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (2.12)$$

sujeta a las condiciones de borde

$$B(u) = \mathcal{M}(u) + r = 0 \quad \text{en } \Gamma \quad (2.13)$$

de la que podemos obtener una forma discreta a partir del método de residuos ponderados

$$\int_{\Omega} W_i R_{\Omega} d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{W}_i R_{\Gamma} d\Gamma = 0 \quad (2.14)$$

con

$$R_{\Omega} = \mathcal{L}(\hat{u}) + p \quad (2.15)$$

$$R_{\Gamma} = \mathcal{M}(\hat{u}) + r \quad (2.16)$$

En la sección anterior se approximó, una función utilizando funciones discontinuas, y funciones continuas con derivadas discontinuas. La pregunta es: ¿pueden utilizarse estas funciones habida cuenta que la ecuación (2.14) contiene derivadas de las funciones de aproximación? Para contestar esta pregunta, consideremos el caso de tres tipos de funciones de aproximación ϕ cerca del punto A de unión de dos elementos unidimensionales. La primera función es discontinua en el punto A , mientras que la segunda muestra una discontinuidad en la derivada primera, en el mismo punto, y la tercera una discontinuidad en la derivada segunda. En consecuencia, las funciones ilustradas darán valores infinitos para la primera, segunda, y tercera derivada respectivamente en los puntos donde dicha discontinuidad ocurre.

Si vamos a evaluar la integral de residuos ponderados (2.14), es deseable que dichos valores infinitos sean evitados, ya que de otra forma la integral puede quedar indeterminada. Entonces, si aparecen derivadas de orden s en las integrales (2.14) (es decir, que los operadores \mathcal{L} o \mathcal{M} contienen dichas derivadas), debemos asegurar que las derivadas de orden $s - 1$ sean continuas en las funciones de prueba ϕ_j utilizadas en la aproximación. En otras palabras, diremos que es necesario que las funciones utilizadas muestren continuidad C^{s-1} .

Por ejemplo, si estamos approximando una función y no hay operadores diferenciales entonces $s = 0$ y podremos utilizar las funciones de forma de la Fig.2.a. Si en cambio aparecen derivadas primeras en los operadores \mathcal{L} o \mathcal{M} , entonces $s = 1$, y necesitaremos continuidad C^0 como la mostrada en la Fig.2.b. Si aparecen derivadas segundas, entonces $s = 2$, y será necesaria continuidad C^1 , como se muestra en 2.c.

Las condiciones de continuidad impuestas a las funciones de prueba son aplicables también a las funciones de peso W_i . Por lo que en el caso de la ec. (2.14), podrán tomarse como válidas funciones de peso discontinuas con discontinuidades finitas. En rigor, hemos utilizado funciones de Dirac cuando definimos la aproximación por colocación. En este caso se ha violado claramente la regla recién enunciada, pero esta excepción es permisible en la medida que la integral del residuo adopte un valor finito. En general, este tipo de funciones de peso especiales no se utiliza y las reglas expuestas son suficientes.

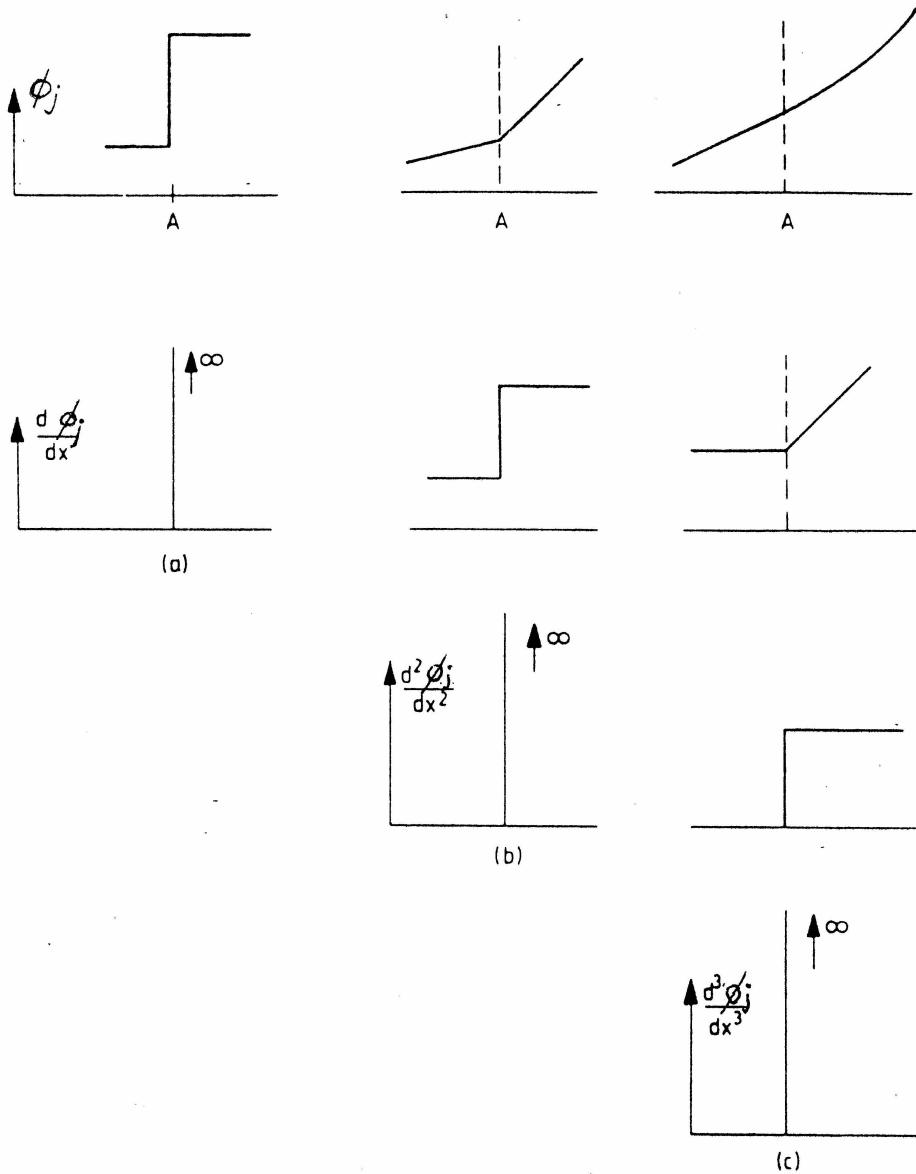


Figura 2 Comportamiento de tres funciones de forma y sus derivadas en la unión A de dos elementos unidimensionales

2.4. Cálculos básicos en el método de elementos finitos

A fin de poder exponer claramente los aspectos más relevantes del método de elementos finitos, analizaremos un ejemplo sencillo. Sea resolver la siguiente ecuación diferencial, cuya **formulación fuerte** es encontrar la función u que satisfaga la siguiente ecuación diferencial y condiciones de borde:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{d^2u(x)}{dx^2} + u(x) &= f(x) && \text{para } 0 \leq x \leq 1 \\ \text{y } f(x) &= x, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

La minimización del residuo de esta ecuación conduce a la expresión

$$\int_0^1 W_i \left(-\frac{d^2\hat{u}}{dx^2} + \hat{u} - f(x) \right) dx = 0 \quad (2.18)$$

cuya forma débil resulta de la integración por partes del primer término

$$\int_0^1 \frac{dW_i}{dx} \frac{d\hat{u}}{dx} dx - W_i \left. \frac{d\hat{u}}{dx} \right|_0^1 + \int_0^1 W_i \hat{u} dx = \int_0^1 W_i f(x) dx \quad (2.19)$$

Finalmente, si las funciones de peso se eligen de tal forma que $W_i(0) = W_i(1) = 0$, entonces resulta

$$\int_0^1 \left(\frac{dW_i}{dx} \frac{d\hat{u}}{dx} + W_i \hat{u} \right) dx = \int_0^1 W_i f(x) dx \quad (2.20)$$

En la Fig.3 se ha dividido el dominio en 4 elementos denotados $\Omega_i = 1, 2, 3, 4$. Tomemos como aproximación para la función incógnita la definida en la ec. (2.7)

$$\hat{u} = \sum_{j=1}^3 u_j \phi_j \quad (2.21)$$

y para la función de peso la siguiente

$$W_i = \phi_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.22)$$

en las que u_j son los valores de u en los nudos y las ϕ_j las funciones de interpolación globales definidas en ec. (2.8) y representadas en la Fig.4. Reemplazando las ec. (2.21) y (2.22) en la (2.20) se obtiene

$$\int_0^1 \left[\phi_{i,x} \left(\sum_{j=1}^3 u_j \phi_j \right)_{,x} + \phi_i \left(\sum_{j=1}^3 u_j \phi_j \right) \right] dx = \int_0^1 \phi_i f(x) dx ; \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.23)$$

donde $(.)_{,x} = d(.) / dx$. Esta expresión se puede escribir como

$$\sum_{j=1}^3 \left[\int_0^1 (\phi_{i,x} \phi_{j,x} + \phi_i \phi_j) dx \right] u_j = \int_0^1 \phi_i f(x) dx \quad (2.24)$$

o en forma compacta

$$\sum_{j=1}^3 K_{ij} u_j = F_i ; \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.25)$$

con

$$K_{ij} = \int_0^1 (\phi_{i,x} \phi_{j,x} + \phi_i \phi_j) dx \quad (2.26)$$

$$F_i = \int_0^1 f(x) \phi_i dx \quad (2.27)$$

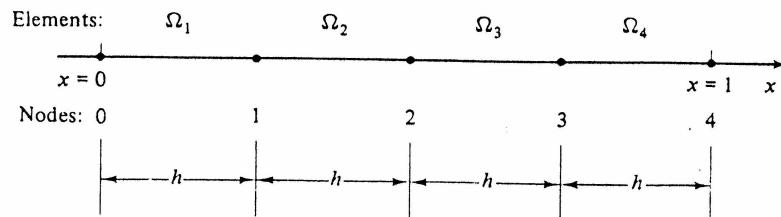


Figura 3 Discretización en 4 elementos

2.4.1. Propiedades de la matriz **K** y del vector **F**

Examinemos algunas de las propiedades de la matriz **K** y del vector **F**.

a) Aditividad de la matriz **K:** esta es una de las propiedades más importantes en el método de elementos finitos. Esta propiedad se deriva de la propiedad que poseen las integrales respecto a su dominio, es decir

$$\begin{aligned}
 K_{ij} &= \int_0^1 (\phi_{i,x}\phi_{j,x} + \phi_i\phi_j) dx = \\
 &= \int_0^h (\phi_{i,x}\phi_{j,x} + \phi_i\phi_j) dx + \int_h^{2h} (\phi_{i,x}\phi_{j,x} + \phi_i\phi_j) dx + \\
 &\quad + \int_{2h}^{3h} (\phi_{i,x}\phi_{j,x} + \phi_i\phi_j) dx + \int_{3h}^1 (\phi_{i,x}\phi_{j,x} + \phi_i\phi_j) dx = \\
 &= \sum_{e=1}^4 \int_{\Omega_e} (\phi_{i,x}\phi_{j,x} + \phi_i\phi_j) dx = \sum_{e=1}^4 K_{ij}^e
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

en la que \int_{Ω_e} denota integración sobre el elemento Ω_e . Pero en el interior del elemento (ver ecs.2.8 y 2.10) se satisfacen las igualdades $\phi_i = N_i$ y $\phi_j = N_j$. Entonces, podemos escribir

$$K_{ij}^e = \int_{\Omega_e} (\phi_{i,x}\phi_{j,x} + \phi_i\phi_j) dx = \int_{\Omega_e} (N_{i,x}N_{j,x} + N_iN_j) dx \tag{2.29}$$

representa las componentes de la **matriz de “rigidez” elemental** para el elemento Ω_e , y en consecuencia

$$K_{ij} = \sum_{e=1}^4 K_{ij}^e \tag{2.30}$$

En forma análoga,

$$F_i = \sum_{e=1}^4 F_i^e, \quad F_i^e = \int_{\Omega_e} f(x) N_i dx \tag{2.31}$$

en donde F_i^e son las componentes del **vector de “cargas”** para el elemento Ω_e y N_i son las funciones elementales definidas en (2.10). Debido a esta propiedad, es posible generar **K** y **F** calculando solamente las matrices **K**^e y **F**^e para un elemento típico Ω_e y sumar luego las contribuciones según las ec.(2.30) y (2.31). Este procedimiento se conoce como **ensamble** y será elaborado más adelante.

b) La matriz **K es bandeada:** para el ejemplo planteado, y las funciones de interpolación de la fig. 4 resulta que ϕ_i y $\phi_j \neq 0$ cuando $i = j$ o cuando $i \neq j$ con la condición de que los elementos comparten un nudo. Lo mismo sucede con las derivadas, por lo que cuando i, j no satisfacen las condiciones anteriores resulta $K_{ij} = 0$, lo que origina una matriz que presentará elementos no nulos en y próximos a la diagonal, zona esta que se conoce como **banda** de la matriz. Fuera de la banda los elementos son nulos. En general, el **ancho de banda** depende de la numeración de los nodos por lo debe prestarse especial atención a este aspecto.

c) Simetría de **K:** Intercambiando los índices i, j en las expresiones integrales que definen la matriz de rigidez (2.29) , se obtiene el mismo resultado por lo que $K_{ij} = K_{ji}$, es decir que la matriz de rigidez es **simétrica**.

Las propiedades descriptas anteriormente son importantes a la hora definir la estrategia de cálculo y programación del método.

2.4.2. Descripción global y local del elemento.

Retomemos el problema de calcular la contribución de cada elemento a: la matriz de rigidez **K** **global** del sistema (2.30) y al vector de cargas **F** (2.31).

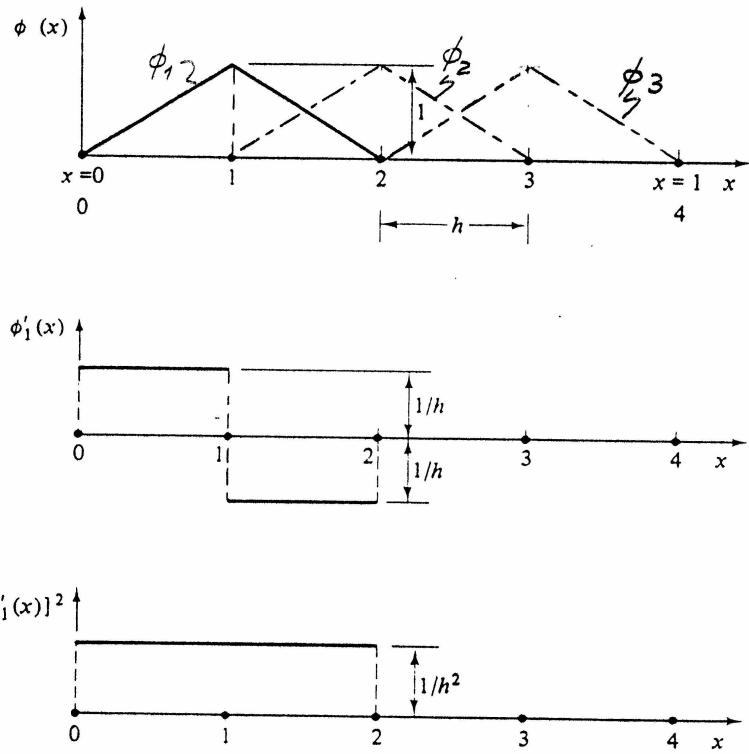


Figura 4 Funciones de base y sus derivadas

A partir de la propiedad de aditividad, se observa que los cálculos son esencialmente repetitivos para cada elemento, por lo que sólo necesitamos realizarlos sobre un elemento típico. A tal fin, es conveniente introducir un punto de vista **local** del elemento, ver fig. 5 . Para resaltar las diferencias con el punto de vista **global**, enunciemos las propiedades del elemento desde ambos enfoques:

a) Descripción global del elemento

1. Dominio $[x_i, x_j]$
2. Nudos $\{i, j\}$
3. Grados de libertad $\{u_i, u_j\}$
4. Funciones de forma $\{N_i^e(x), N_j^e(x)\}$ definidas en las ec. (2.10)
5. Función de interpolación:

$$\hat{u}_e(x) = N_i^e(x) u_i + N_j^e(x) u_j$$

en donde u_i, u_j son los valores de la función u en los nudos i y j .

Las cantidades anteriores están en función de parámetros globales, y las cantidades correspondientes en coordenadas locales se escriben

b) Descripción local del elemento

1. Dominio $[\xi_1, \xi_2]$
2. Nudos $\{1, 2\}$
3. Grados de libertad $\{u_1, u_2\}$
4. Funciones de forma $\{N_1^e(\xi), N_2^e(\xi)\}$
5. Función de interpolación: $\hat{u}_e(\xi) = N_1^e(\xi) u_1 + N_2^e(\xi) u_2$; en donde u_1, u_2 son los valores de la función u en los nudos 1 y 2.

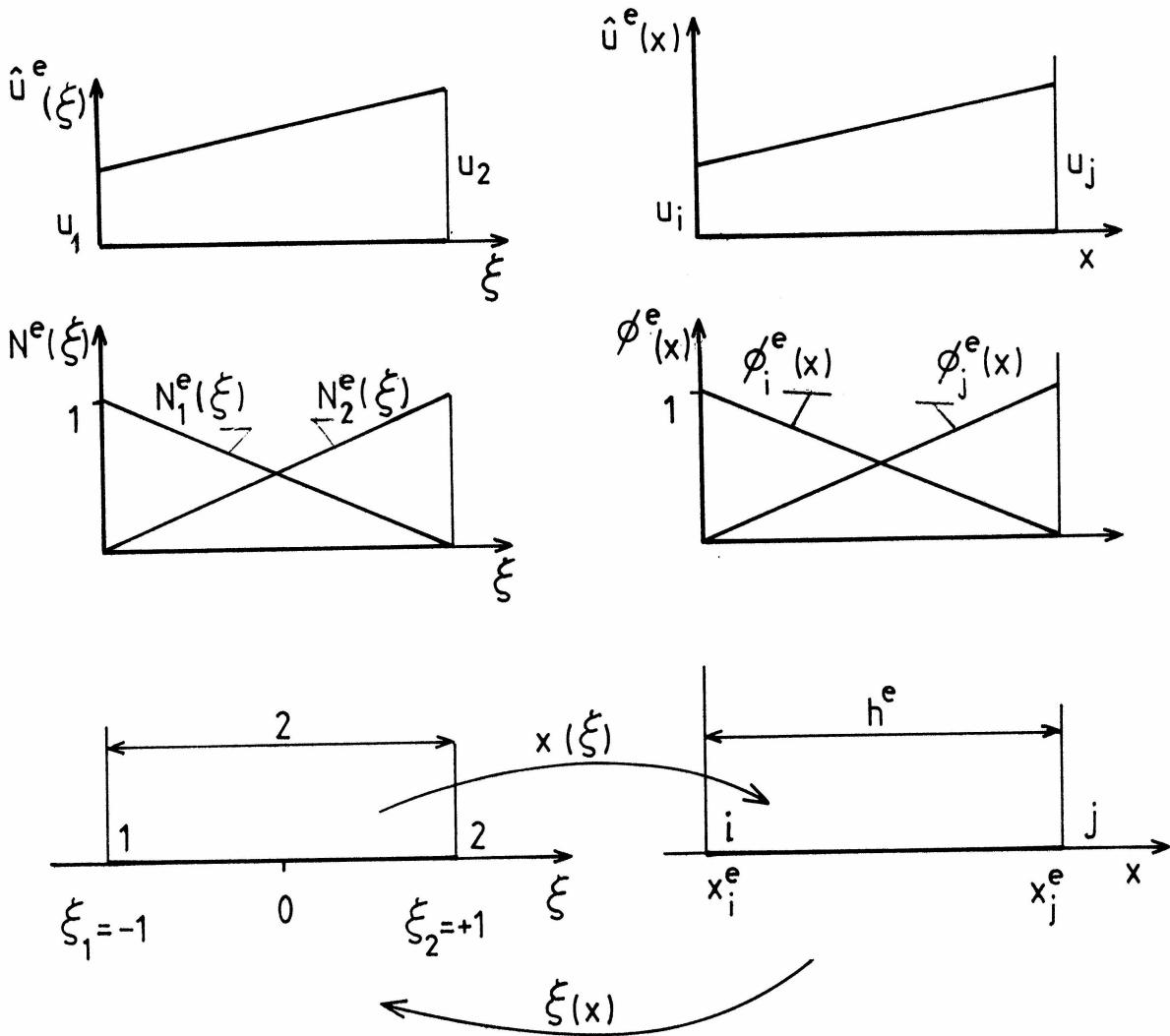


Figura 5 Descripción local y global del elemento

Notar que en la descripción local, los nudos se empiezan a numerar desde 1.

Para relacionar los dominios local y global, utilizaremos una transformación afín definida como:

$$\xi : [x_i, x_j] \rightarrow [\xi_1, \xi_2] \text{ tal que } \xi(x_i) = \xi_1 \text{ y } \xi(x_j) = \xi_2 \quad (2.32)$$

Es corriente adoptar $\xi_1 = -1$ y $\xi_2 = 1$, y entonces ξ puede escribirse como

$$\xi(x) = c_1 + c_2 x \quad (2.33)$$

en la que c_1 y c_2 se determinan al resolver el siguiente sistema

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 x_i &= -1 \\ c_1 + c_2 x_j &= 1 \end{aligned} \quad (2.34)$$

que conduce a

$$\xi(x) = \frac{2x - x_i - x_j}{h^e} \quad (2.35)$$

en la que $h^e = x_j - x_i$. La función inversa de $\xi(x)$ se obtiene resolviendo x de la anterior

$$x(\xi) = \frac{h^e \xi + x_i + x_j}{2} \quad (2.36)$$

Utilizando esta expresión es posible definir las funciones de forma **locales** a partir de las correspondientes **globales**. Reemplazando la ec. (2.36) en las ec. (2.10) se obtienen

$$N_1^e(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad N_2^e(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (2.37)$$

que permiten completar el punto de vista local del elemento. Notemos que, usando estas funciones de interpolación, la ec. (2.36) se puede reescribir como

$$x(\xi) = N_1^e(\xi) x_i + N_2^e(\xi) x_j \quad (2.38)$$

lo que muestra que la interpolación utilizada en el dominio es idéntica a la utilizada en la interpolación de la función u .

Calculemos para uso posterior las siguientes derivadas

$$N_{1,\xi}^e(\xi) = -\frac{1}{2}; \quad N_{2,\xi}^e(\xi) = \frac{1}{2} \quad (2.39)$$

$$x_{,\xi}(\xi) = \frac{h^e}{2}; \quad \xi_{,x}(x) = \frac{2}{h^e} = [x_{,\xi}(\xi)]^{-1} \quad (2.40)$$

2.4.3. Cálculo explícito de la matriz de rigidez y del vector de fuerzas elementales

Antes de entrar de lleno en el cálculo recordemos algunos resultados preliminares

Fórmula para el cambio de variables:

Sea una función integrable $f : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbf{R}$ y sea $x : [\xi_1, \xi_2] \rightarrow [x_1, x_2]$ una función continuamente diferenciable con $x(\xi_1) = x_1$ y $x(\xi_2) = x_2$. Entonces

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x(\xi)) x_{,\xi}(\xi) d\xi \quad (2.41)$$

Regla de la cadena:

Sean f y x las mismas funciones anteriores y asumamos que f es diferenciable. Entones

$$\frac{d}{d\xi} f(x(\xi)) = f_{,x}(x(\xi)) x_{,\xi}(\xi) \quad (2.42)$$

2.4.3.1. Cálculo de la matriz de rigidez elemental

A partir de estos resultados podemos resolver la matriz, ec. (2.29), del elemento como sigue

$$\begin{aligned} K_{ij}^e &= \int_{\Omega_e} [N_{i,x}(x)N_{j,x}(x) + N_i(x)N_j(x)] dx \\ &= \int_{-1}^1 [N_{i,x}(x(\xi))N_{j,x}(x(\xi)) + N_i(x(\xi))N_j(x(\xi))] x_{,\xi}(\xi) d\xi \\ &= \int_{-1}^1 N_{i,\xi}(\xi) N_{j,\xi}(\xi) [x_{,\xi}(\xi)]^{-1} d\xi + \int_{-1}^1 N_i(\xi) N_j(\xi) x_{,\xi}(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (2.43)$$

obtenida por un cambio de variables, con $x(\xi)$ definida en la ec. (2.36), y el uso de la regla de la cadena (2.42). Resolviendo estas integrales resulta la siguiente matriz elemental

$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} \frac{1}{h^e} + \frac{h^e}{3} & -\frac{1}{h^e} + \frac{h^e}{6} \\ -\frac{1}{h^e} + \frac{h^e}{6} & \frac{1}{h^e} + \frac{h^e}{3} \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

2.4.3.2. Cálculo del vector de cargas

Para nuestro ejemplo el vector de cargas esta dado por la ec. (2.31)

$$F_i^e = \int_{\Omega_e} f(x) N_i(x) dx \quad (2.45)$$

en la que para nuestro caso $f(x) = x$. Antes de resolver esta integral es conveniente aproximar la función $f(x)$ escribiéndola globalmente como

$$f(x) = \sum_{e=1}^4 f^e(x) = \sum_{e=1}^4 [N_i(x) f_i + N_j(x) f_j] \quad (2.46)$$

en la que $f_i = f(x_i)$ y $f_j = f(x_j)$. Llevando la ec. (2.46) a la ec. (2.45) y haciendo el cambio de variables globales a locales resulta

$$F_i^e = \int_{-1}^1 N_i(\xi) [N_i(\xi) f_i + N_j(\xi) f_j] x_{,\xi}(\xi) d\xi$$

$$F_j^e = \int_{-1}^1 N_j(\xi) [N_i(\xi) f_i + N_j(\xi) f_j] x_{,\xi}(\xi) d\xi$$

que integradas conducen al siguiente vector de fuerzas elemental

$$\mathbf{F}^e = \begin{bmatrix} F_i^e \\ F_j^e \end{bmatrix} = \frac{h^e}{6} \begin{bmatrix} 2 f_i + f_j \\ f_i + 2 f_j \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

Tomando $h = 1/4$, y utilizando los resultados obtenidos resultan las siguientes matrices elementales:

Elemento Ω_1

$$\mathbf{K}^1 = [K_{ij}^1] = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 98 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F}^1 = \{F_i^1\} = \frac{1}{96} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Elemento Ω_2

$$\mathbf{K}^2 = [K_{ij}^2] = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 98 & -95 & 0 \\ -95 & 98 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F}^2 = \{F_i^2\} = \frac{1}{96} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Elemento Ω_3

$$\mathbf{K}^3 = [K_{ij}^3] = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 98 & -95 \\ 0 & -95 & 98 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F}^3 = \{F_i^3\} = \frac{1}{96} \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Elemento Ω_4

$$\mathbf{K}^4 = [K_{ij}^4] = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 98 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F}^4 = \{F_i^4\} = \frac{1}{96} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

y de acuerdo a las ec. (2.30) y (2.31) resulta

$$\mathbf{K} = [K_{ij}] = \mathbf{K}^1 + \mathbf{K}^2 + \mathbf{K}^3 + \mathbf{K}^4 = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 196 & -95 & 0 \\ -95 & 196 & -95 \\ 0 & -95 & 196 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F} = \{F_i\} = \mathbf{F}^1 + \mathbf{F}^2 + \mathbf{F}^3 + \mathbf{F}^4 = \frac{1}{96} \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

que conducen, luego de resolver el sistema, a los siguientes valores nodales

$$\mathbf{u} = [0,0353, 0,0569, 0,0505]^T$$

que permite escribir la solución aproximada como

$$\hat{u} = 0,0353 \phi_1 + 0,0569 \phi_2 + 0,0505 \phi_3 \quad (2.48)$$

Ejercicio N°24: Calcular el vector de cargas \mathbf{F} y la matriz de rigidez \mathbf{K} para un modelo de elementos finitos de 4 elementos igualmente espaciados con funciones de base lineales para el siguiente problema

$$-u_{,xx} = 1, \quad \text{con } 0 \leq x \leq 1$$

$$u(0) = u(1) = 0$$

Graficar la solución exacta y la aproximada.

2.5. Estimación del error en el MEF

La necesidad de estimar el error aparece en forma natural, ya que de partida estamos obteniendo soluciones aproximadas. Además, debemos establecer la forma en que dicho error se verá afectado a medida que el número de elementos se incremente. Se define el error, $e(x)$, de una aproximación como la diferencia entre el valor exacto y el aproximado

$$e(x) = u(x) - \hat{u}(x) \quad (2.49)$$

Es obvio que el verdadero error no podrá ser evaluado si no se conoce la solución exacta; sin embargo, aun cuando $u(x)$ sea desconocido, es posible construir **estimaciones del error** y determinar si éste decrece a medida que aumenta el número de elementos. Tener información al respecto es de gran utilidad cuando se debe elegir entre varios elementos o cuando habiendo elegido elemento, se desea conocer la influencia que tendrá en la solución el duplicar o triplicar su número. De hecho, un análisis del error puede mostrar la incapacidad de algún elemento para resolver el problema entre manos.

De la definición de error se observa que éste es una función, y en consecuencia, si vamos a hablar de la exactitud de nuestra solución, debemos ser capaces de cuantificar o medir el **tamaño**

de funciones. Una medida universalmente aceptada como la magnitud de una función g , es un número positivo que se conoce como **norma** de g y se escribe $\|g\|$. Si $g \equiv 0$, entonces $\|g\| = 0$; recíprocamente, si $\|g\| = 0$, entonces se interpreta que g es cero. De esto surge que para poder estimar el error debemos elegir la norma con la que mediremos nuestra aproximación.

Las normas comúnmente utilizadas en conjunción con el MEF son tres: la norma basada en la energía $\|e\|_E$, la norma media cuadrática $\|e\|_0$ y la norma infinita o máxima $\|e\|_\infty$.

a) La definición de la **norma energética** $\|e\|_E$ está asociada a la forma que toma la energía elástica del problema entre manos. Tomemos por ejemplo el problema definido en la sección anterior mediante la (2.17) y cuya solución esta dada en la expresión (2.48). Esta solución se puede escribir en forma compacta como

$$u(x) = \boldsymbol{\phi} \mathbf{u} = \mathbf{u}^T \boldsymbol{\phi}^T$$

en donde $\boldsymbol{\phi} = [\phi_1, \phi_2, \phi_3]$ y $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]^T$ contienen las funciones de forma y los desplazamientos nodales respectivamente. Mostremos que la energía de deformación aproximada es

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_0^1 [(\hat{u}_{,x})^2 + \hat{u}^2] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 [\mathbf{u}^T \boldsymbol{\phi}_{,x}^T \boldsymbol{\phi}_{,x} \mathbf{u} + \mathbf{u}^T \boldsymbol{\phi}^T \boldsymbol{\phi} \mathbf{u}] dx \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \left\{ \int_0^1 [\boldsymbol{\phi}_{,x}^T \boldsymbol{\phi}_{,x} + \boldsymbol{\phi}^T \boldsymbol{\phi}] dx \right\} \mathbf{u} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} \end{aligned}$$

Entonces, se define a la norma energética del error como la raíz cuadrada del doble de la energía de deformación producida por el error

$$\|e\|_E = \left\{ \int_0^1 [(e_{,x})^2 + e^2] dx \right\}^{1/2} \quad (2.50)$$

Esta norma es una de las formas mas naturales y significativas de cuantificar el error. Si la aproximación adoptada muestra un buen comportamiento respecto de esta norma a medida que se refina la malla, podemos, en general, asegurar que tenemos un método de aproximación aceptable.

b) La **norma media cuadrática** (L^2 o “L-dos”) mide la raíz media cuadrática del error de una función en su dominio y se define por

$$\|e\|_0 = \left(\int_0^1 e^2 dx \right)^{1/2} \quad (2.51)$$

c) La **norma infinita o máxima** mide el máximo valor absoluto de la función en su dominio

$$\|e\|_\infty = \max |e(x)| \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2.52)$$

2.5.1. Estimaciones asintóticas del error

En las aplicaciones del MEF es común buscar “estimaciones asintóticas” de las normas recién definidas, es decir, estimaciones de la forma

$$\|e\| \leq Ch^p \quad (2.53)$$

en las que h es la longitud de los elementos utilizados para discretizar el dominio, C es una constante que depende de los datos del problema y p es un entero que depende de las funciones de base adoptadas en los elementos. El exponente p es una medida de la *velocidad de convergencia* del método respecto a una norma en particular. Es posible que existan situaciones en las que se obtiene

convergencia respecto a una norma y no respecto a otra; de hecho la noción de convergencia es, sin dudas, dependiente de la norma adoptada.

Las estimaciones del error que como la (2.53) no requieren información de la solución, se conocen como estimaciones *a priori*. En contraposición, las estimaciones que necesitan de la solución para ser evaluadas, se conocen como estimaciones *a posteriori*. Para el problema planteado, se puede demostrar que las estimaciones a priori, para funciones de interpolación lineales, son

$$\begin{aligned}\|e\|_E &\leq C_1 h \\ \|e\|_0 &\leq C_2 h^2 \\ \|e\|_\infty &\leq C_3 h^2\end{aligned}\tag{2.54}$$

Existen otras medidas del error que pueden ser de interés, como por ejemplo

$$\|e_{,x}\|_\infty = \max |e(x)_{,x}| \quad 0 \leq x \leq 1$$

o

$$\|e_{,xx}\|_\infty, \quad \|e_{,x}\|_0 \quad \text{o} \quad \|e_{,xx}\|_0$$

Inclusive, se puede evaluar el error puntualmente calculando $|e(\xi)|$, donde ξ es un punto del dominio de la solución. Digamos que muchos elementos presentan puntos de *superconvergencia*, en los que se observa altas velocidades de convergencia (y en consecuencia elevada exactitud). De todos modos, las normas (2.54) son las más útiles cuando se utiliza el MEF.

Volviendo a la expresión (2.53) destaquemos que una ecuación de la forma

$$E(h) = C h^p$$

es una recta cuando se grafica en coordenadas log-log esto es

$$\log E = p \log h + \log C$$

de donde si graficamos $\log \|e\|$ versus $\log h$ obtendremos la velocidad de convergencia para la norma $\|\cdot\|$ ya que ésta coincide con la pendiente de la recta. En la Fig.6 se muestra el comportamiento del error energético y medio cuadrático para el ejemplo considerado.

Ejercicio N°25: Calcular la solución exacta y la solución con dos, cuatro y seis elementos para el problema de contorno definido por

$$-u_{,xx} = 1 - x^2 ; \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$u(0) = 0 ; \quad u(1) = 0$$

a) Calcular las normas del error $\|e\|_E$ y $\|e\|_0$ para cada malla y graficar $\log \|e\|$ vs $\log h$. Indique las velocidades de convergencia para cada norma.

b) Calcule el error puntual en $x = 1/8$ para cada malla. Cuál es la velocidad de convergencia en ese punto?

c) Idem para el punto de coordenada $x = 1/2$. Que encuentra de particular en este punto?

Nota: este resultado no es habitual y no tipifica a las aproximaciones por EF.

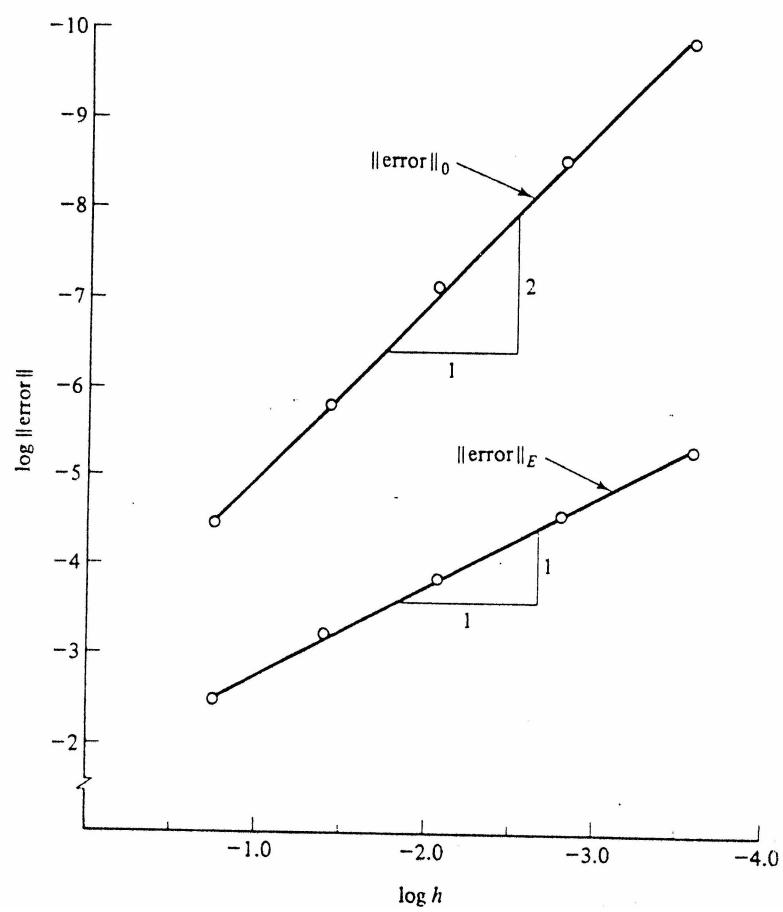


Figura 6 Curvas del error utilizando ejes log-log

Capítulo 3 Formulación del problema de segundo orden con dos condiciones de contorno

por A. Brewer

3.1. Introducción

Trataremos de establecer algunas resultados generales del MEF utilizando un problema unidimensional caracterizado por la siguiente ecuación diferencial

$$a_0(x) \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + a_1(x) \frac{du(x)}{dx} + a_2(x) u(x) = f(x) \quad (3.1)$$

en la que $u(x)$ es la función incógnita, a_0 , a_1 y a_2 son coeficientes que, como la función f , dependen de la variable utilizada para describir el dominio. La ec. (3.1) es lineal debido a que la incógnita $u(x)$ y sus derivadas aparecen linealmente en la ecuación. Como consecuencia inmediata de la linealidad, se puede aplicar el principio de superposición: si $u = u_1$ es solución de la ec. (3.1) para determinada función $f = f_1$ y $u = u_2$ es la solución obtenida para $f = f_2$ entonces para constantes arbitrarias α y β resulta que $\alpha u_1 + \beta u_2$ es la solución del problema cuando $f = \alpha f_1 + \beta f_2$. La ecuación se dice de segundo orden por el máximo orden de derivación de la incógnita presente.

Trataremos en seguida el caso en el cual la ecuación diferencial (3.1) se satisface solamente en los subdominios del problema y determinaremos las condiciones que deben satisfacerse en las interfaces de estos subdominos.

Es sabido que la integración de la ec. (3.1) en un subintervalo conducirá a una solución general que contiene dos constantes arbitrarias. Una especificación completa del problema, deberá entonces incluir, además de la ecuación diferencial, información adicional que permita determinar estas dos constantes. Esta información es lo que se conoce como condiciones de borde en el intervalo. En estas notas, se tratarán problemas de contorno elípticos en los que el coeficiente $a_0(x)$ nunca cambia de signo o se anula en el dominio y además, las condiciones de borde se fijan una en cada extremo del intervalo e involucran solamente los valores de la función y/o sus derivadas primeras. En consecuencia, las condiciones de borde más generales asociadas con la ec. (3.1), que satisfacen las imposiciones anteriores y que preservan la linealidad del problema, pueden escribirse como

$$\begin{aligned} \alpha_0 \frac{du(0)}{dx} + \beta_0 u(0) &= \gamma_0 \\ \alpha_L \frac{du(L)}{dx} + \beta_L u(L) &= \gamma_L \end{aligned} \quad (3.2)$$

en la que α_0 , β_0 , γ_0 , α_L , β_L , y γ_L son constantes.

3.2. Origen físico del problema

En la primera parte, se muestra cómo debe formularse un problema que posee algunas discontinuidades y posteriormente se presenta la formulación débil, que incluirá en forma natural las discontinuidades presentes.

En general, la ec. (3.1) tiene su origen en la descripción matemática de fenómenos físicos que no dependen del tiempo. A continuación haremos una descripción en abstracto de dichos problemas (es decir, sin una referencia específica a ninguno de ellos). Mostraremos cómo se obtienen la ecuación diferencial y las demás condiciones necesarias para la definición del problema a partir de imponer una condición de “suavidad” sobre la solución que se busca, y de un principio físico al que nos

referiremos como "ley de conservación". Estos resultados serán de aplicación a un amplio rango de problemas prácticos que serán identificados asociando los coeficientes y funciones de la ec. (3.1) con las variables físicas apropiadas al problema entre manos. Muchos problemas se formulan utilizando dos variables: las **variable de estado** u y el **flujo** σ . Estas variables se relacionan entre si mediante una **ecuación constitutiva**, que contiene una descripción del material en el cual se desarrolla el proceso en estudio.

La ecuación constitutiva que describe el comportamiento para materiales lineales es de la forma

$$\sigma(x) = -k(x) \frac{du(x)}{dx} \quad (3.3)$$

en la que $k(x)$ se conoce como **módulo del material** y es un dato del problema. Asumiremos que $k(x)$ es siempre positivo o negativo.

La **ley de conservación** es un enunciado que condiciona al flujo en el sentido de que para un determinado subdominio el flujo neto que entra al subdominio es cero (es decir, el flujo se conserva). El flujo puede estar presente en el sistema de dos formas: una a través de una distribución interna de fuentes, descriptas por la función $f(x)$, y otra a través del borde de la región. En la tabla 3.1 se muestran distintas interpretaciones de u , σ , k , y f para distintos problemas físicos.

A parte de la ley de conservación y de la ecuación constitutiva, aparecen condiciones sobre la variable de estado u : en todos los problemas de interés se requiere que $u(x)$ sea una función continua de x . A esta condición, se le puede agregar que $u(x)$ tome un valor determinado en uno o ambos extremos. Esta condición se llama **condición de borde esencial**. Toda otra condición en problemas de contorno, son derivables a partir del principio de conservación.

Para fijar ideas, consideremos un problema unidimensional que sea representativo de las condiciones recién enunciadas. Sea por ejemplo una barra en el dominio $[0, L]$ como se muestra en la Fig. 1. El cuerpo está formado por dos materiales, uno en el intervalo $[0, x_1]$ y otro en el intervalo $[x_1, L]$. Si bien el módulo k sufre una discontinuidad en x_1 , se asume que es continuo en cada uno de los subdominios.

Problema físico	Principio de conservación	Variable de estado u	Flujo σ	Módulo del material k	Fuente f	Ecuación Constitutiva $\sigma = -ku'$
deformación de una barra elástica	equilibrio de fuerzas (conservación de la cantidad de movimiento)	desplazamiento	tensión	módulo de elasticidad de Young	fuerzas nómicas	ley de Hooke
conducción del calor en una barra	conservación de la energía	temperatura	flujo de calor	conductividad térmica	fuentes de calor	ley de Fourier
flujo de un fluido	conservación de la cantidad de movimiento	velocidad	tensión de corte	viscosidad	fuerzas nómicas	ley de Stokes
electrostática	conservación del flujo eléctrico	potencial eléctrico	flujo eléctrico	permisividad dielectrica	carga	ley de Coulomb
flujo en un medio poroso	conservación de la masa	carga hidráulica	velocidad del flujo	permeabilidad	fuente de fluido	ley de Darcy

Cuadro 3.1 Valor de las constantes para distintos problemas físicos

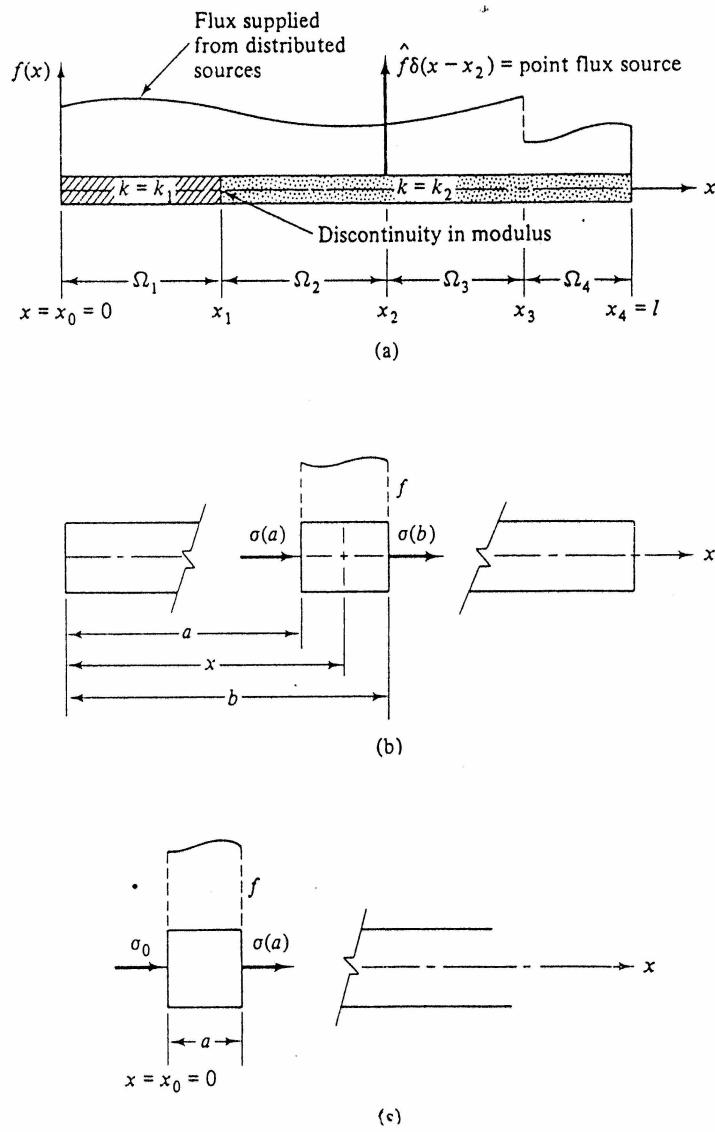


Figura 1 a) Problema unidimensional dividido en cuatro subregiones;
 b) flujos en el interior de los elementos y
 c) flujo en el borde de un elementos

Por otro lado, se observa que la distribución f de las fuentes internas es continua en todos los puntos salvo en $x = x_2$, donde se encuentra una fuente concentrada de intensidad \hat{f} , representada por una función δ de Dirac, y en el punto $x = x_3$ donde la función f presenta una discontinuidad simple. Entonces, los datos conducen naturalmente a la definición de cuatro subdominios Ω_i , $i = 1, 2, 3, 4$, dentro de los cuales los datos son suaves, y cinco puntos (incluidos los extremos) x_i , $i = 0, 1, 2, 3, 4$, en los cuales existen discontinuidades en alguno de los datos. Diremos que cada uno de los subdominios Ω_i es un **subdominio suave**.

A continuación formularemos una descripción matemática clásica (formulación fuerte), utilizando solamente las condiciones esenciales de u , la ley de conservación, la ecuación constitutiva, y los datos del problema unidimensional

1. El flujo debe conservarse en todo punto. Consideremos un punto \bar{x} en el interior de un subdominio suave $[a, b]$ como el indicado en la Fig. 1.b. El flujo está indicado por flechas en la figura. El elemento contiene además una fuente interna de intensidad $f(x)$. Entonces, por conservación de flujo resulta que

$$\sigma(b) - \sigma(a) = \int_a^b f(x) dx \quad (3.4)$$

2. Para determinar la forma que adopta la ley de conservación en el punto, tomamos límites en ambos miembros haciendo tender el punto a desde la izquierda de \bar{x} y a b desde la derecha. Debido a que $f(x)$ es acotada, en el límite la integral desaparece y se obtiene

$$\lim_{b \rightarrow \bar{x}^+} \sigma(b) - \lim_{a \rightarrow \bar{x}^-} \sigma(a) = \lim_{\substack{a \rightarrow \bar{x}^- \\ b \rightarrow \bar{x}^+}} \int_a^b f(x) dx = 0$$

o

$$[\sigma(\bar{x})] = \lim_{b \rightarrow \bar{x}^+} \sigma(b) - \lim_{a \rightarrow \bar{x}^-} \sigma(a) = 0 \quad (3.5)$$

donde $[\sigma(\bar{x})]$ es el salto de σ en \bar{x} . En consecuencia, la ec. (3.5) establece que si no hay discontinuidades, el flujo resulta continuo en todos los puntos de los subdominios suaves Ω_i , $i = 1, 2, 3, 4$.

3. A partir de que $f(x)$ en la sec. (3.4) es continua, podemos aplicar el teorema del valor medio del cálculo integral $\int_a^b f(x) dx = (b-a) f(\zeta)$ siendo ζ un punto que pertenece al intervalo $a < \zeta < b$ y $f(\zeta)$ es el promedio de $f(x)$ sobre este intervalo. Entonces

$$\sigma(b) - \sigma(a) = (b-a) f(\zeta)$$

Dividiendo por $b-a$ y tomando límite por izquierda y derecha obtenemos

$$\lim_{\substack{a \rightarrow \bar{x}^- \\ b \rightarrow \bar{x}^+}} \frac{\sigma(b) - \sigma(a)}{(b-a)} = \lim_{\substack{a \rightarrow \bar{x}^- \\ b \rightarrow \bar{x}^+}} f(\zeta), \quad a < \zeta < b$$

Debido a la continuidad de $f(x)$ el límite del segundo miembro existe y por ende el izquierdo y en consecuencia para todo punto interior de una región suave se cumple

$$\frac{d\sigma}{dx} = f(x) \quad (3.6)$$

La sustitución de la ecuación constitutiva (3.3) en la ec. (3.6) conduce una ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$-\frac{d}{dx} \left[k(x) \frac{du(x)}{dx} \right] = f(x) \quad (3.7)$$

que en los puntos en los cuales el módulo del material $k(x)$ es suave, (3.7) puede expandirse como

$$-k(x) \frac{d^2 u(x)}{dx^2} - \frac{dk(x)}{dx} \frac{du(x)}{dx} = f(x) \quad (3.8)$$

ecuación que tiene la misma forma que la ec. (3.1).

4. Consideremos ahora puntos, como $x = x_3$, en los que algunos datos son discontinuos pero finitos. La discusión del punto 2 es todavía válida, y el principio de conservación del flujo conduce al resultado

$$[\sigma(x_3)] = 0$$

que muestra que el flujo es continuo aunque $f(x)$ no lo sea. La consecuencia de la discontinuidad de $f(x)$ se refleja en el hecho de que el teorema del valor medio no puede ser aplicado en este caso; ku' (el flujo) es continuo pero $(ku')'$ (que definiría a $f(x)$) no existe por no existir el límite. En consecuencia en el punto $x = x_3$ no tenemos ecuación diferencial. En el punto $x = x_1$ donde $f(x)$ es continua pero $k(x)$ es discontinuo, el principio de conservación conduce nuevamente a la condición (3.5), es decir, $[\sigma(x_1)] = 0$. También se verifica la ecuación diferencial (3.6) pero como $k(x)$ no es continua, no posee derivada, y no se puede expandir la ec. (3.7) para obtener la (3.8) en este punto.

5. En el punto x_2 donde aparece una fuente concentrada de valor $f = \hat{f}\delta(x - x_2)$ escribimos la ecuación de balance del flujo en una región que contiene al punto x_2

$$\sigma(b) - \sigma(a) = \int_a^b \bar{f}(x) dx + \int_a^b \hat{f}\delta(x - x_2) dx \quad (3.9)$$

en la que $\bar{f}(x)$ es la parte suave de $f(x)$. Tomando límites por izquierda y derecha del punto x_2 se obtiene una condición de salto no homogénea

$$[\sigma(x_2)] = \hat{f}$$

A su vez, debido a que la última integral no depende de los límites a y b , no podemos obtener una ecuación diferencial en el punto $x = x_2$.

6. Finalmente consideremos los bordes del cuerpo, $x = x_0$ y $x = x_4$. En todo problema físico existe una definición de las condiciones de borde originadas por la interacción que el sistema en estudio tiene con el medio que lo rodea. Los efectos del medio son incorporados al modelo matemático prescribiendo en los bordes del sistema ya sea la variable de estado o el valor del flujo. Entonces, por lo general es necesario hacer una modelización del medio adyacente para proveer una condición de borde. La fig.1.c muestra el extremo izquierdo del cuerpo. El flujo en el borde se denota como σ_0 . En este segmento el flujo se conserva, y en consecuencia

$$\sigma(a) - \sigma_0 = \int_0^a f(x) dx$$

Tomando límites cuando $a \rightarrow 0$ resulta $\sigma(0) = \sigma_0$ constituyendo esta igualdad una condición de borde. Cuando se define el flujo en el borde, debemos reconocer que estamos asignando un sentido a la derivada de u en estos puntos para representar el hecho de que el flujo está entrando o saliendo del cuerpo. Específicamente, si se fija el flujo $\sigma = \sigma_0$ y $\sigma = \sigma_L$ en los extremos $x = 0$ y $x = L$, tomaremos

$$\left. \begin{aligned} -k(0) \left[-\frac{du(0)}{dx} \right] &= \sigma_0 \\ -k(L) \left[\frac{du(L)}{dx} \right] &= \sigma_L \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

A través de la ecuación constitutiva se observa que estas condiciones están fijando el valor de la derivada de la variable de estado. Este tipo de condiciones de borde se denominan naturales. En otras situaciones típicas (transferencia de calor por convección), el flujo se asume como proporcional a la diferencia entre el valor de la variable de estado en el borde y su valor a alguna distancia en el interior del medio. Por ejemplo, en $x = 0$ esta condición se escribe

$$\sigma_0 = p_0[u(0) - u_\infty] \quad (3.11)$$

en la que p_0 es una constante que depende del módulo del material del medio adyacente y u_∞ es un valor de referencia de la variable de estado en el medio. La sustitución de la condición (3.11) en la ecuación anterior conduce a

$$k(0) \frac{du(0)}{dx} = p_0[u(0) - u_\infty] \quad (3.12)$$

Debido a que nuevamente aparece la derivada de u , la ec. (3.12) es también una condición de borde natural de la ec. (3.7). Es obvio que el tipo de condición de borde será propio del problema físico que se esté abordando. Resumiendo digamos que las condiciones de borde que consideraremos son:

1. Condiciones de borde esenciales, en las que se especifican los valores que adopta la variable de estado u .
2. Condiciones de borde naturales en las que:
 - a) se especifica el valor del flujo o
 - b) se especifica una combinación lineal del flujo y de la variable de estado.

Por último notemos que en el caso de problemas en los cuales se especifiquen condiciones de borde naturales en ambos extremos, deberá satisfacerse una condición global de conservación que está dada por

$$\sigma_0 + \sigma_L = \int_0^L f(x) dx \quad (3.13)$$

3.3. Formulación variacional del problema

Resulta claro que el enunciado clásico del problema de contorno (3.1) y (3.2) implica condiciones sobre la solución que pueden resultar muy difíciles de satisfacer aun para situaciones en las que los datos resulten razonables. Lo que se pretende con una formulación variacional es obtener un enunciado propicio para poder aplicar el método de elementos finitos. Es deseable además que la formulación posea simetría y preferiblemente que las funciones de prueba y de peso posean el mismo grado de suavidad, es decir, que el orden de derivación, que presenten ambas funciones en el enunciado del problema, sea el mismo. Reescribamos nuestro problema

$$\left. \begin{aligned} & -\frac{d}{dx} \left[k(x) \frac{du(x)}{dx} \right] + c(x) \frac{du(x)}{dx} + b(x)u(x) = f(x) \\ & x \in \Omega_i, \quad i = 1, 2, 3, 4 \\ & \left[k(x) \frac{du(x)}{dx} \right] = 0 \quad \text{en } x = x_1 \\ & - \left[k(x) \frac{du(x)}{dx} \right] = \hat{f} \quad \text{en } x = x_2 \\ & \left[k(x) \frac{du(x)}{dx} \right] = 0 \quad \text{en } x = x_3 \\ & \alpha_0 \frac{du(0)}{dx} + \beta_0 u(0) = \gamma_0, \quad \alpha_L \frac{du(L)}{dx} + \beta_L u(L) = \gamma_L \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

en donde las condiciones de borde son la expresión general de alguna de las siguientes situaciones

- $u(0) = \bar{u}_0 \quad ; \quad u(L) = \bar{u}_L$
- $k(0) \frac{du(0)}{dx} = \bar{\sigma}_0 \quad ; \quad -k(L) \frac{du(L)}{dx} = \bar{\sigma}_L$
- $k(0) \frac{du(0)}{dx} = p_0[u(0) - u_\infty] \quad ; \quad -k(L) \frac{du(L)}{dx} = p_0[u(L) - u_\infty]$

Recordemos que el dominio Ω se ha dividido en cuatro subdominios como se indica en la fig.1. Como en cada subdominio la función incógnita debe ser suave, podemos construir la función de error para cada uno de ellos

$$R_{\Omega_i} = -[k u_{,x}]_{,x} + c u_{,x} + b u - f$$

que puede minimizarse utilizando una función de peso

$$\int_{\Omega_i} W R_{\Omega_i} dx = \int_{\Omega_i} W \left\{ -[k u_{,x}]_{,x} + c u_{,x} + b u - f \right\} dx$$

que se puede integrar por partes

$$\int_{\Omega_i} W R_{\Omega_i} dx = -kW u_{,x}|_{x_{i-1}}^{x_i} + \int_{\Omega_i} (kW_{,x} u_{,x} + cW u_{,x} + bW u) dx - \int_{\Omega_i} W f dx \quad (3.15)$$

Si u es solución del problema entonces $\int_{\Omega_i} W R_{\Omega_i} dx = 0$ y

$$\sum_{i=1}^4 \int_{\Omega_i} W R_{\Omega_i} dx = 0 \quad (3.16)$$

La sustitución de (3.15) en la ec. (3.16) resulta en

$$\begin{aligned} & \int_0^L (kW_{,x} u_{,x} + cW u_{,x} + bW u) dx + k(0)W(0)u_{,x}(0) + \\ & + [k(x_1)u_{,x}(x_1)]W(x_1) + [k(x_2)u_{,x}(x_2)]W(x_2) + \\ & + [k(x_3)u_{,x}(x_3)]W(x_3) - k(L)W(L)u_{,x}(L) = \int_0^L W \bar{f} dx \end{aligned} \quad (3.17)$$

en donde

$$[k(x_i)u_{,x}(x_i)] = \lim_{x \rightarrow x_i^+} k(x_i)u_{,x}(x_i) - \lim_{x \rightarrow x_i^-} k(x_i)u_{,x}(x_i)$$

La función \bar{f} que aparece en el segundo miembro es la parte suave (es decir la parte integrable) de la función f . A partir de las condiciones impuestas en los puntos de discontinuidad, ec. (3.14), la ec. (3.17) queda

$$\begin{aligned} & \int_0^L (kW_{,x} u_{,x} + cW u_{,x} + bW u) dx = \int_0^L W \bar{f} dx + \hat{f}W(x_2) - \\ & - \frac{k(0)}{\alpha_0} [\gamma_0 - \beta_0 u(0)]W(0) + \frac{k(L)}{\alpha_L} [\gamma_L - \beta_L u(L)]W(L) \end{aligned} \quad (3.18)$$

válida para toda función W admisible.

La ec. (3.18) contiene la ecuación diferencial, las condiciones de salto y las condiciones de borde especificadas en (3.14). El problema variacional (3.18) caracteriza a la solución como una función definida sobre todo el dominio $[0, L]$ a diferencia de la definición por partes en (3.14). Algunas observaciones de la forma variacional (3.18) son

1. Al integrar por partes se obtiene una integral que contiene derivadas primeras de las funciones de peso y de forma. Esto significa que las funciones u y W deben ser miembros de una clase de funciones, denominada H^1 , cuyas derivadas primeras al cuadrado sean integrables sobre Ω , es decir deben satisfacer la condición

$$\int_0^L [(u_{,x})^2 + u^2] dx < \infty \quad (3.19)$$

Por otro lado, si el problema posee condiciones de borde esenciales, entonces a parte de la condición anterior, debe exigirse a las funciones de peso que satisfagan las condiciones $W(0) = W(L) = 0$.

2. Las condiciones de borde no pueden construirse en forma arbitraria, sino que deben ser compatibles con la ecuación diferencial que gobierna el problema. En este sentido la formulación variacional posee la ventaja de que cualquier condición de borde que pueda incorporarse naturalmente al problema, como consecuencia de la integración por partes, será automáticamente compatible con la ecuación diferencial.

3. Recordemos que las condiciones de borde entran en la definición del problema variacional (3.18) en dos formas: las condiciones de borde esenciales, que son la especificación del valor de la solución, entran en el problema a partir de la definición del espacio admisible de las funciones del problema, mientras que las condiciones naturales, que conllevan la especificación de las derivadas de la solución, determinan la forma de la ecuación variacional.

Ejemplos:

i)

$$-u(x)_{,xx} + u(x) = f(x) \quad 0 < x < L$$

$$u(0) = 0, \quad u(L) = 0$$

ii)

$$-u(x)_{,xx} + u(x) = f(x) \quad 0 < x < L$$

$$u(0)_{,x} = \gamma_0, \quad u(L)_{,x} = \gamma_L$$

Los enunciados variacionales de estos problemas son

V-i) Encontrar u en H_0^1 (es decir que u satisface las condiciones (3.19) y además $u(0) = u(L) = 0$) tal que

$$\int_0^L (W_{,x}u_{,x} + Wu) dx = \int_0^L Wf dx, \quad \forall W \in H_0^1$$

V-ii) Encontrar $u \in H^1$ tal que

$$\int_0^L (W_{,x}u_{,x} + Wu) dx = \int_0^L Wf dx - \gamma_0 W(0) + \gamma_L W(L), \quad \forall W \in H^1$$

Estos ejemplos muestran que las condiciones esenciales se introducen en **V-i)** a partir de la definición de la clase de funciones admisibles para proponer las funciones de prueba y las naturales como datos en el segundo miembro de la ecuación en **V-ii)**.

4. Por último, en analogía con la energía U definida anteriormente, podemos escribir la norma energética para el problema (3.18) (con $b(x) > 0$)

$$\|e\|_E = \left[\int_0^L (k e_{,x}^2 + b e^2) dx \right]^{1/2} \quad (3.20)$$

También puede utilizarse la norma H^1 equivalente

$$\|e\|_1 = \left[\int_0^L (e_{,x}^2 + e^2) dx \right]^{1/2} \quad (3.21)$$

Ejercicio N°26: Construir la forma débil indicando en cada caso el espacio de funciones de prueba admisibles.

a)

$$-(k(x) u(x)_{,x})_{,x} + u(x)_{,x} + u(x) = 0$$

en
 $0 < x < 1; 1 < x < 2; 2 < x < 3; 3 < x < 4;$
 con
 $[k(1) u_{,x}(1)] = [k(2) u_{,x}(2)] = 0; [k(3) u_{,x}(3)] = 10$
 y
 $k(x) \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ 2 & 1 \leq x < 2 \\ 1 & 2 < x < 4 \end{cases}; \quad \begin{cases} u(0) = 0 \\ u(4)_{,x} = 3 \end{cases}$

b)

$$-u(x)_{,xx} + u(x) = \delta(x - 1) \quad 0 < x < 2$$

$$u(0)_{,x} = 2, \quad u(2)_{,x} + u(2) = 3$$

c)

$$u(x)_{,xx} + u(x) = 0 \quad 0 < x < 1; 1 < x < 2$$

$$[u_x(1)] = 1; \quad u(0) = u(2) = 0$$

Ejercicio N°27: los problemas de valores de contorno siguientes están mal condicionados o no satisfacen las hipótesis descriptas en las notas. ¿Qué está mal en ellos?

a)

$$\frac{1}{(x-1)} u(x)_{,xx} + u(x) = \operatorname{sen}(x) \quad 0 < x < 2$$

y $u(0) = u(2) = 0$

b)

$$(1-x^2) u(x)_{,xx} + u(x)_{,x} = 3 \quad 0 < x < 2$$

y $u(0) = 0; u(2)_{,x} = 1$

c)

$$u(x)_{,xx} + x u(x)_{,x} = 3 \quad 0 < x < 1$$

y $u(0)_{,xx} = 0; u(1) = 0$

d)

$$-u(x)_{,xx} + u(x)_{,x} = x \quad 0 < x < 1$$

y
 $\frac{1}{2} u(0)_{,x} + u(1)_{,x} = u(1); \quad u(0)_{,x} + 2 u(1)_{,x} = u(0)$

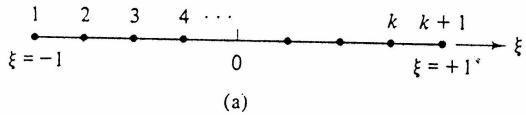
3.4. Funciones de aproximación basadas en la interpolación de Lagrange

En esta sección extenderemos las ideas respecto a las funciones de interpolación elementales introduciendo una técnica que conduce a lo que se conoce como elementos finitos Lagrangeanos, nombre que deriva del conceptos de interpolación utilizando polinomios de Lagrange:

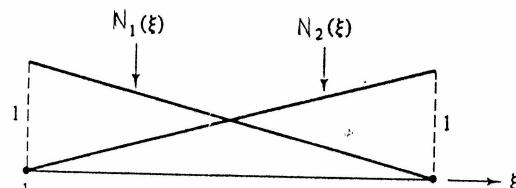
1. Consideraremos un elemento típico Ω_e , aislado de la malla, y establezcamos un sistema local de coordenadas ξ , cuyo origen se ubica en el centro del elemento, escalado de tal forma de satisfacer que $\xi = -1$ en el extremo izquierdo y $\xi = 1$ en el derecho, Fig.2.a. Esto se realiza mediante la transformación general que para el caso de un elemento de $k+1$ nodos se escribe

$$\xi(x) = \frac{2x - x_1^e - x_{k+1}^e}{h^e} \quad (3.22)$$

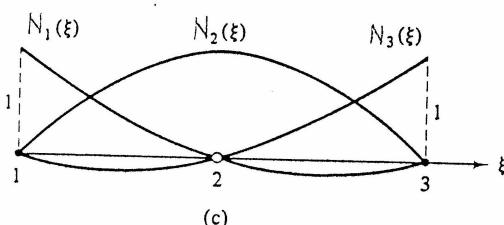
de tal modo que todo punto x en el intervalo $x_1^e \leq x \leq x_{k+1}^e$ se transforma en un punto ξ tal que $-1 \leq \xi \leq 1$. Los cálculos serán realizados sobre este elemento “maestro” y denotaremos $N_i(\xi)$ a sus funciones de interpolación. El grado de estas funciones será k , es decir que cada función $N_i(\xi)$ del elemento contiene monomios en ξ hasta el orden ξ^k , con $k > 0$.



(a)



(b)



(c)

Figura 2 (a) Elemento maestro con $k+1$ nodos;
 (b) funciones de forma lineales para $k=1$;
 (c) elemento de tres nodos con funciones cuadráticas ($k=2$).

2. Para obtener funciones de grado k , identificamos $k+1$ nodos (incluyendo los extremos) que dividen al elemento en k segmentos iguales. Sea ξ_i , $i = 1, 2, \dots, k+1$, la coordenada ξ correspondiente a cada nodo. Para cada nodo ξ_i formamos el producto de las k funciones lineales $(\xi - \xi_j)$, $j = 1, 2, \dots, k+1$, $j \neq i$. Notar que este producto es cero en todos los nodos excepto en el nodo i . Estas funciones son de la forma

$$\begin{aligned} \text{nodo 1: } & (\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3) \dots (\xi - \xi_i) \dots (\xi - \xi_{k+1}) \\ \text{nodo 2: } & (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_3) \dots (\xi - \xi_i) \dots (\xi - \xi_{k+1}) \\ & \vdots \quad \vdots \\ \text{nodo } i: & (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) \dots (\xi - \xi_{i-1}) \dots (\xi - \xi_{i+1}) \dots (\xi - \xi_{k+1}) \end{aligned} \quad (3.23)$$

3. Para cada nodo i se debe evaluar el correspondiente producto (3.23) en $\xi = \xi_i$ y dividir el producto de las funciones por este valor. De esta manera se obtiene el polinomio N_i normalizado de tal modo que $N_i(\xi_i) = 1$. La forma general resulta

$$N_i(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) \dots (\xi - \xi_{i-1}) \dots (\xi - \xi_{i+1}) \dots (\xi - \xi_{k+1})}{(\xi_i - \xi_1)(\xi_i - \xi_2) \dots (\xi_i - \xi_{i-1}) \dots (\xi_i - \xi_{i+1}) \dots (\xi_i - \xi_{k+1})} \quad (3.24)$$

Estas funciones tienen la propiedad que

$$N_i(\xi_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (3.25)$$

que muestra que las $N_i(\xi)$ son linealmente independientes. Estas $k + 1$ funciones definen una base completa para el conjunto de polinomios de grado k . Esto significa que cualquier polinomio de grado k o menor, puede ser generado unívocamente utilizando como base los polinomios de Lagrange. A su vez, esta propiedad se traslada a las funciones globales ϕ_i generadas a partir de estos polinomios, es decir, que todo polinomio de grado $\leq k$ puede expresarse en una única forma como combinación lineal de las funciones ϕ_i generadas por las funciones de forma (3.24).

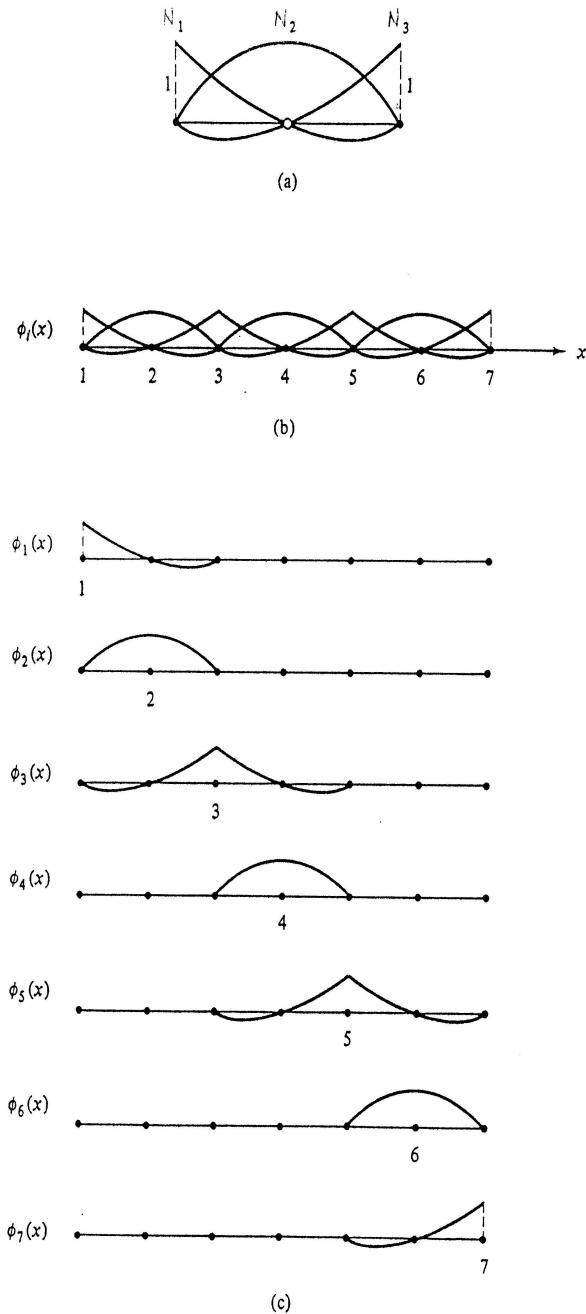


Figura 3 a) Elemento de tres nodos con funciones cuadráticas
 b) malla con tres elementos
 c) funciones de base generadas por estos tres elementos

Para $k = 1$ (funciones de forma lineal), el elemento presenta 2 nodos y las funciones de interpolación resultan las ya conocidas

$$\left. \begin{array}{l} N_1(\xi) = \frac{(\xi - \xi_2)}{(\xi_1 - \xi_2)} = \frac{1}{2}(1 - \xi) \\ N_2(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)}{(\xi_2 - \xi_1)} = \frac{1}{2}(1 + \xi) \end{array} \right\} \quad (3.26)$$

Para $k = 2$ (funciones de forma cuadráticas), el elemento presenta tres nodos y las funciones de forma (ver Fig. 2.c) son

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}\xi(1 - \xi), \quad N_2(\xi) = (1 - \xi^2), \quad N_3(\xi) = \frac{1}{2}\xi(1 + \xi) \quad (3.27)$$

Las correspondientes funciones globales ϕ_i se muestran en la Fig. 3.

Ejemplo: sea interpolar la función $g(x) = \sin(x)$ en el intervalo $0 \leq x \leq 1$, utilizando dos elementos cuadráticos como se muestra en la Fig. 4

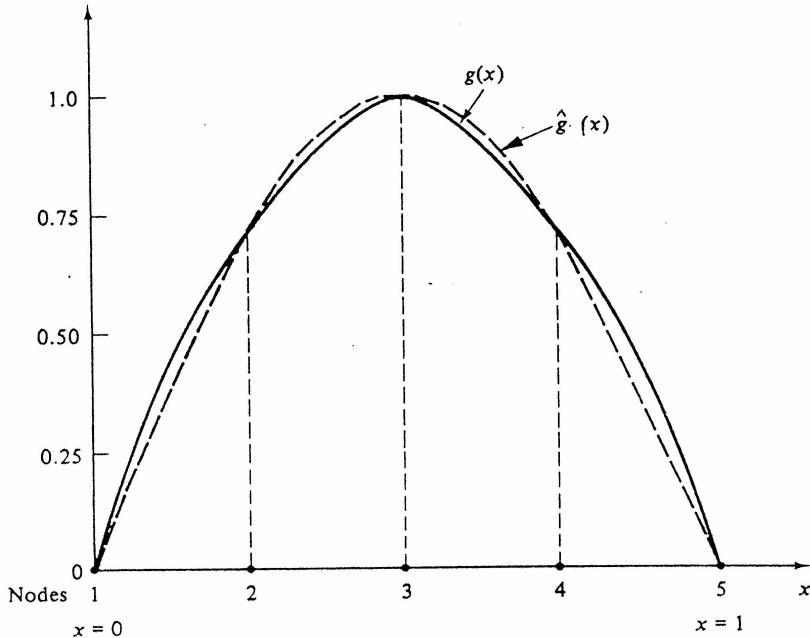


Figura 4 Interpolación de $g(x)$ usando 2 elementos cuadráticos.

Los nodos están ubicados en $x = 0, 0,25, 0,5, 0,75$ y 1 . Los valores de la función en estos puntos son $0, 0,707, 1,0, 0,707, 0$, por lo que la función interpolante puede escribirse

$$\hat{g}(x) = 0,707\phi_2(x) + \phi_3(x) + 0,707\phi_4(x)$$

en donde las funciones ϕ_i están graficadas en la Fig. 3.

Se puede mostrar que el error $e(x) = u(x) - \hat{u}(x)$ entre una función exacta u y la aproximación \hat{u} obtenida utilizando polinomios de Lagrange puede estimarse como

$$\max_{0 \leq x \leq L} |e(x)| \leq \frac{h^2}{8} \max_{0 \leq x \leq L} |u(x)_{,xx}| \quad (3.28)$$

Para elementos que emplean polinomios completos de mayor orden, el error asume la forma

$$\|e\|_\infty = \max_{0 \leq x \leq L} |e(x)| \leq Ch^{k+1} \quad (3.29)$$

en la que C es independiente de h .

Es importante la **completitud de los polinomios** usados para interpolar: si, por ejemplo, las funciones de forma contienen términos proporcionales a x^0 (constantes), x^2 , x^3, \dots, x^k , pero ninguno proporcional a x^1 , entonces el error será proporcional a h y no a h^{k+1} como indica la expresión (3.29). Si las constantes no están presentes en las funciones de interpolación, la aproximación puede no converger en absoluto. **Observación:** para deducir (3.29) es necesario que u presente derivadas continuas de orden $\leq k$. Si la función u sólo posee derivadas de orden s con $0 < s \leq k$, entonces no importa cuánto aumentemos el grado de k en la aproximación \hat{u} ya que sólo sus primeros s términos serán efectivos al aproximar u . Entonces, en lugar de (3.29) tendremos

$$\|e\|_\infty = \max_{0 \leq x \leq L} |e(x)| \leq Ch^s \quad (3.30)$$

y en consecuencia no podremos mejorar la convergencia aumentando el orden del polinomio pero si disminuyendo el tamaño h del elemento.

Ejercicio N°28: si un conjunto de funciones de forma es completo hasta el orden k , entonces puede interpolarse exactamente cualquier polinomio de igual o menor grado que k .

a) Mostrar porque (para $k \geq 1$) todo conjunto completo de funciones de forma debe satisfacer

$$\sum_{i=1}^{k+1} N_i(\xi) = 1 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{k+1} \frac{dN_i(\xi)}{d\xi} = 0$$

b) Para las siguientes funciones determinar el grado del polinomio completo contenido en el conjunto. Cada conjunto de funciones de forma tiene la propiedad que $N_i(\xi_j) = 1$ si $i = j$ y $N_i(\xi_j) = 0$ si $i \neq j$.

1.

$$N_1(\xi) = \frac{1}{4}(1-\xi)^2 \quad ; \quad N_2(\xi) = \frac{1}{4}(1+\xi)^2 \\ \xi_1 = -1, \quad \xi_2 = 1$$

2.

$$N_1(\xi) = -\frac{1}{2}(1-\xi)\xi; \quad N_2(\xi) = (1-\xi^2)^2; \quad N_3(\xi) = \frac{1}{2}(1+\xi)\xi \\ \xi_1 = -1, \quad \xi_2 = 0, \quad \xi_3 = 1$$

Ejercicio N°29: utilizar una malla de 3 elementos y construir interpolaciones para las funciones

$$f(x) = x + x^2 \quad \text{y} \quad g(x) = \cos \pi x \\ \text{para } 0 < x < 1$$

usando (a) funciones lineales, (b) funciones de Lagrange cuadráticas.

Ejercicio N°30: Derive las ecuaciones explícitas para las funciones de interpolación de Lagrange cúbicas y grafíquelas para un elemento típico. Ilustre la forma de las funciones de base ϕ_i generadas por tales funciones para una malla consistente de tres elementos.

Ejercicio N°31: Es posible representar una función $g(x)$ sobre un elemento interpolando los valores que toma la función y sus derivadas en los extremos.

a) muestre que, a tal fin, resultan funciones de forma cúbicas.

b) Grafique estas funciones para un elemento típico.

Las funciones de aproximación que resultan de esta forma se llaman polinomios de Hermite.

3.5. Aproximación por elementos finitos

El dominio Ω se partitiona en un número finito de elementos Ω_e de longitud h ($\sum h^e = L$). Por definición, el problema presenta cuatro subdominios en los que la solución es suave. Pero en la unión de estos subdominios pueden ocurrir discontinuidades (p.ej. $x = x_2$) a las que las funciones de interpolación no podrán acomodarse. Por tal motivo, la malla siempre se construirá de tal

modo de ubicar un nodo en todo punto en donde se produzca una discontinuidad en los datos. Los términos tales como $\hat{f}W(x_2)$ que representan un salto, nunca entrarán en la descripción local que caracteriza la aproximación elemental. Estos términos aparecerán cuando se sume la contribución de cada uno de los elementos.

Para cada subdominio elemental Ω_e de extremos s_1^e y s_2^e se puede formular el siguiente enunciado variacional

$$\int_{s_1^e}^{s_2^e} (kW_{,x}^e u_{,x}^e + cW^e u_{,x}^e + bW^e u^e) dx = \int_{s_1^e}^{s_2^e} W^e \bar{f} dx + \sigma(s_1^e) W(s_1^e) - \sigma(s_2^e) W(s_2^e) \quad (3.31)$$

en el que $\sigma(s_1^e)$ y $\sigma(s_2^e)$ representan los valores verdaderos del flujo (y no aproximaciones) en los extremos del elemento. Las cantidades $\sigma(s_i^e)$ representan las condiciones de borde naturales del elemento Ω_e . Este enunciado se hace independientemente de las condiciones de borde reales en $x = 0$ y $x = L$. Recordemos que aunque estamos planteando el problema en el dominio elemental, los cálculos los realizaremos en el dominio mapeado como ya se viera anteriormente. Proponemos como función de aproximación elemental

$$u^e(x) = \sum_{j=1}^{N^e} u_j^e N_j^e(x) \quad (3.32)$$

y para la función de peso

$$W^e(x) = \sum_{i=1}^{N^e} w_i^e N_i^e(x) \quad (3.33)$$

en las que N^e es la cantidad de nodos que tiene el elemento (dos si las funciones de interpolación son lineales, tres si son cuadráticas, etc.). Por otro lado, $u^e(x_j) = u_j^e$ y $W^e(x_i) = w_i^e$. Finalmente, reemplazando (3.32) y (3.33) en (3.31) resulta el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\sum_{j=1}^{N^e} k_{ij}^e u_j^e = f_i^e + \sigma(s_1^e) N_i^e(s_1^e) - \sigma(s_2^e) N_i^e(s_2^e), \quad i = 1, 2, \dots, N^e \quad (3.34)$$

con

$$k_{ij}^e = \int_{s_1^e}^{s_2^e} (k N_{i,x}^e N_{j,x}^e + c N_i^e N_{j,x}^e + b N_i^e N_j^e) dx \quad (3.35)$$

$$f_i^e = \int_{s_1^e}^{s_2^e} \bar{f}(x) N_i^e dx \quad i, j = 1, 2, \dots, N^e \quad (3.36)$$

en donde k_{ij}^e son los elementos de la matriz de rigidez elemental y f_i^e las componentes del vector de cargas del elemento Ω_e . En la práctica, las integrales (3.35) y (3.36) raramente se evalúan en forma cerrada, siendo en cambio común el uso de reglas de integración numéricas suficientemente exactas. Además, también es corriente la utilización de una interpolación para definir la función $\bar{f}(x)$ en el elemento

$$f_h^e = \sum_{j=1}^{N^e} \bar{f}(x_j^e) N_j^e(x) \quad (3.37)$$

por lo que la ec. (3.36) se calcula como

$$f_i^e = \int_{s_1^e}^{s_2^e} \left[\sum_{j=1}^{N^e} \bar{f}(x_j^e) N_j^e(x) \right] N_i^e(x) dx \quad (3.38)$$

De esta forma, la carga se define mediante su valor en los puntos nodales.

3.5.1. Ensamble de las matrices elementales

Consideremos el caso en que se hallan elegido funciones de interpolación lineales. En tal caso, las ec. (3.34) originan dos ecuaciones por elemento de la forma

$$\begin{aligned} k_{11}^e u_1^e + k_{12}^e u_2^e &= f_1^e + \sigma(s_1^e) \\ k_{21}^e u_1^e + k_{22}^e u_2^e &= f_2^e - \sigma(s_2^e) \end{aligned} \quad (3.39)$$

en la que los subíndices 1 y 2 hacen referencia al nudo izquierdo y derecho del elemento. Cuando se realiza el ensamblaje es necesario asignar a estos nudos una numeración que sea coincidente con la que le corresponde a los nudos del elemento en el sistema global de referencia. Por ejemplo, si el elemento está ubicado entre los nodos 6 y 7 en la malla, entonces u_1^e es u_6 y u_2^e es u_7 ; $\sigma(s_1^e)$ es el valor de $-ku_{,x}$ en el nudo 6 aproximándose desde la derecha y $\sigma(s_2^e)$ el valor de $-ku_{,x}$ en el nudo 7 aproximándose desde la izquierda.

Consideremos una malla con N nudos y $N - 1$ elementos. Esto significa que el ensamblaje de los elementos originará un sistema de N ecuaciones con N incógnitas. En consecuencia, deberá preverse una matriz de rigidez $\mathbf{K} = [K_{ij}]$ de $N \times N$ elementos. El ensamblaje consiste en recorrer la malla elemento por elemento, calcular los valores en ec. (3.39) y sumar la contribución de la matriz elemental \mathbf{k}^e y del vector de cargas \mathbf{f}^e a la matriz global \mathbf{K} y vector global \mathbf{F} según la numeración de los nodos del elemento en la malla (ver Fig. 5).

Antes de iniciar el proceso de ensamblaje, deben ponerse a cero la matriz \mathbf{K} y el vector de cargas \mathbf{F} haciendo $K_{ij} = 0$ y $F_i = 0$. Para el elemento Ω_1 , ubicado entre los nudos 1 y 2 la ec. (3.39) conduce a

$$\begin{aligned} k_{11}^1 u_1^1 + k_{12}^1 u_2^1 &= f_1^1 + \sigma(0) \\ k_{21}^1 u_1^1 + k_{22}^1 u_2^1 &= f_2^1 - \sigma(x_1^-) \end{aligned} \quad (3.40)$$

donde $\sigma(0) = \sigma(0^+)$ es el flujo en el nudo 1 desde la derecha y $\sigma(x_1^-)$ el flujo en el nudo 2 de coordenadas x_1 aproximándose desde la izquierda. Estas ecuaciones se suman en la primera y segunda fila del sistema $N \times N$ que describe la malla completa.

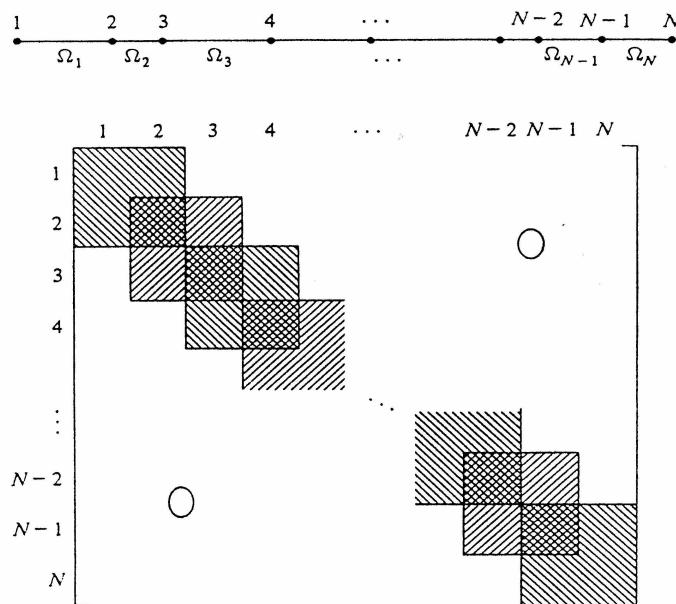


Figura 5 Malla de N nudos y $N-1$ elementos y matriz de coeficientes en la que se ha representado la contribución de los elementos. Fuera de la banda los valores son cero.

El elemento Ω_2 , cuyos extremos son los nudos 2 y 3 se suma en las filas 2 y 3. Habiéndose

considerado dos elementos se tiene el sistema

$$\begin{aligned} k_{11}^1 u_1 + k_{12}^1 u_2 + &= f_1^1 + \sigma(0) \\ k_{21}^1 u_1 + (k_{22}^1 + k_{11}^1) u_2 + k_{12}^2 u_3 &= f_2^1 + f_1^2 - \sigma(x_1^-) + \sigma(x_1^+) \\ + k_{21}^2 u_2 + k_{22}^2 u_3 &= f_2^2 - \sigma(x_2^-) \end{aligned}$$

Continuando este proceso para todos los elementos se obtiene

$$\begin{aligned} k_{11}^1 u_1 + k_{12}^1 u_2 + &= f_1^1 + \sigma(0) \\ k_{21}^1 u_1 + (k_{22}^1 + k_{11}^1) u_2 + k_{12}^2 u_3 &= f_2^1 + f_1^2 + [\sigma(x_1)] \\ + k_{21}^2 u_2 + (k_{22}^2 + k_{11}^2) u_3 + k_{12}^3 u_4 &= f_2^2 + f_1^3 + [\sigma(x_2)] \\ &\vdots \\ k_{21}^{N-1} u_{N-1} + k_{22}^{N-1} u_N &= f_2^{N-1} - \sigma(L) \end{aligned} \quad (3.41)$$

donde $[\sigma(x_j)] = \sigma(x_j^+) - \sigma(x_j^-)$ es el salto de σ en el nudo j ($j = 1, 2, \dots, N-1$). Recordemos que en todos los puntos interiores en los que el flujo es continuo, se cumple $[\sigma] = 0$. Si en cambio, existe una fuente puntual $\hat{f}_j \delta(x - x_j)$ en el nudo j deberemos hacer $[\sigma(x_j)] = \hat{f}_j$ en (3.41). Estas ecuaciones pueden reescribirse como

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F}$$

donde la matriz \mathbf{K} es

$$\left[\begin{array}{cccccc} k_{11}^1 & k_{12}^1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 + k_{11}^1 & k_{12}^2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & k_{21}^2 & k_{22}^2 + k_{11}^2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{21}^3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k_{22}^{N-2} + k_{11}^{N-1} & k_{12}^{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k_{21}^{N-1} & k_{22}^{N-1} \end{array} \right] \quad (3.42)$$

y los vectores \mathbf{u} y \mathbf{F} resultan

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ \vdots \\ F_{N-1} \\ F_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^1 + \sigma(0) \\ f_2^1 + f_1^2 \\ f_2^2 + f_1^3 \\ \vdots \\ f_2^{N-2} + f_1^{N-1} \\ f_2^{N-1} - \sigma(L) \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

El sistema $\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F}$ planteado no contiene las condiciones de borde. Las modificaciones que deben realizarse al mismo serán discutidas a continuación.

3.5.2. Condiciones de borde

Consideremos los siguientes casos:

1. Condiciones naturales generales: Estas condiciones corresponden al caso general (3.2) en la que se prescriben u y $u_{,x}$. De estas condiciones resultan

$$u_{,x}(0) = \frac{\gamma_0 - \beta_0 u(0)}{\alpha_0}, \quad u_{,x}(L) = \frac{\gamma_L - \beta_L u(L)}{\alpha_L} \quad (3.44)$$

en la que $u(0) = u_1$ y $u(L) = u_N$. Recordando la relación constitutiva (3.3) resultan las siguientes

$$\sigma(0) = -k(0) \left[\frac{\gamma_0 - \beta_0 u(0)}{\alpha_0} \right], \quad \sigma(L) = -k(L) \left[\frac{\gamma_L - \beta_L u(L)}{\alpha_L} \right]$$

que reemplazadas en (3.43) modifican a este vector y a la matriz de rigidez (3.42) quedando

$$\left[\begin{array}{cccccc} k_{11}^1 - \frac{k(0)\beta_0}{\alpha_0} & k_{12}^1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 + k_{11}^2 & k_{12}^2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & k_{21}^2 & k_{22}^2 + k_{11}^3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{21}^3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k_{22}^{N-2} + k_{11}^{N-1} & k_{12}^{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k_{21}^{N-1} & k_{22}^{N-1} + \frac{k(L)\beta_L}{\alpha_L} \end{array} \right] \times \quad (3.45)$$

$$\left[\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} f_1^1 - \frac{k(0)\gamma_0}{\alpha_0} \\ f_2^1 + f_1^2 \\ f_2^2 + f_1^3 \\ \vdots \\ f_2^{N-2} + f_1^{N-1} \\ f_2^{N-1} + \frac{k(L)\gamma_L}{\alpha_L} \end{array} \right] \quad (3.46)$$

sistema que puede resolverse para las N incógnitas u .

2. Condiciones esenciales o de Dirichlet: en este caso se especifican los valores de la incógnita en los extremos

$$u(0) = \frac{\gamma_0}{\beta_0}, \quad u(L) = \frac{\gamma_L}{\beta_L} \quad (3.47)$$

En este caso el número de incógnitas se reduce en dos, ya que $u(0) = u_1$ y $u(L) = u_N$, lo que permite reducir el sistema (3.42) en dos ecuaciones (la primera y la última). Los valores conocidos (3.47) se reemplazan en la ecuaciones restantes quedando el siguiente sistema

$$\left[\begin{array}{cccc} k_{22}^1 + k_{11}^2 & k_{12}^2 & \dots & 0 \\ k_{21}^2 & k_{22}^2 + k_{11}^3 & \dots & 0 \\ 0 & k_{21}^3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_{22}^{N-2} + k_{11}^{N-1} \end{array} \right] \times \quad (3.48)$$

$$\left[\begin{array}{c} u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} f_2^1 + f_1^2 - k_{21}^1 \frac{\gamma_0}{\beta_0} \\ f_2^2 + f_1^3 \\ \vdots \\ f_2^{N-2} + f_1^{N-1} - k_{12}^{N-1} \frac{\gamma_L}{\beta_L} \end{array} \right] \quad (3.49)$$

de donde surgen las $N - 2$ incógnitas. A partir de esta solución y de las condiciones de borde (3.47) se pueden determinar los valores del flujo en los extremos utilizando las ecuaciones 1 y N eliminadas al imponer las condiciones de borde

$$\begin{aligned} k_{11}^1 \frac{\gamma_0}{\beta_0} + k_{12}^1 u_2 &= f_1^1 + \sigma(0) \\ k_{21}^{N-1} u_{N-1} + k_{22}^{N-1} \frac{\gamma_L}{\beta_L} &= f_2^{N-1} - \sigma(L) \end{aligned} \quad (3.50)$$

3. Condiciones naturales de Neumann: bajo este nombre se encuentran las condiciones que fijan el valor de la derivada en los extremos

$$u_{,x}(0) = \frac{\gamma_0}{\alpha_0}, \quad u_{,x}(L) = \frac{\gamma_L}{\alpha_L} \quad (3.51)$$

Este tipo de condiciones puede requerir ciertas consideraciones de acuerdo al tipo de ecuaciones que se este resolviendo. En particular, si el problema (3.14) es tal que $c(x) = b(x) = 0$, el problema se reduce a la ecuación diferencial

$$-\frac{d}{dx} \left[k(x) \frac{du(x)}{dx} \right] = f(x) \quad (3.52)$$

Entonces, si u es solución de la ec. (3.52) con las condiciones (3.51) entonces $u + C_0$, con C_0 una constante arbitraria, también es solución del mismo problema. Por la analogía con los sistemas mecánicos que representa este problema, se dice que C_0 está asociado con un movimiento de cuerpo rígido. Como consecuencia de esto, la formulación de elementos finitos correspondiente tampoco dará lugar a una única solución, lo que significa que la matriz de rigidez \mathbf{K} es **singular**.

La presencia de un movimiento de cuerpo rígido permite hacer otra consideración importante: las constantes que definen las condiciones de borde (3.51), γ_0 , α_0 , γ_L , α_L , no pueden elegirse arbitrariamente, sino que deben satisfacer una condición que se obtiene a partir de la formulación variacional del problema (3.52) planteado. El enunciado variacional es: encontrar $u \in H^1$ tal que

$$\begin{aligned} \int_0^L (k W_{,x} u_{,x}) dx &= \int_0^L W \bar{f} dx + \hat{f} W(\bar{x}) - k(0) \frac{\gamma_0}{\alpha_0} W(0) \\ &\quad + k(L) \frac{\gamma_L}{\alpha_L} W(L) \end{aligned} \quad (3.53)$$

para toda función $W \in H^1$. Como $u = C_0$ es una solución del problema (3.52), también lo será de (3.53), para p.ej. $W = 1$, lo cual conduce a

$$\int_0^L \bar{f} dx + \hat{f} - k(0) \frac{\gamma_0}{\alpha_0} + k(L) \frac{\gamma_L}{\alpha_L} = 0 \quad (3.54)$$

que es la condición que deben satisfacer las constantes que definen las condiciones de borde del problema. La condición (3.54) es una condición **necesaria** para la existencia de la solución de (3.53). Desde un punto de vista físico, (3.54) representa una **ley de conservación global** que refleja la necesidad de que se conserve el flujo σ en todo el cuerpo Ω . Para el caso descripto por la ec. (3.52), esta condición toma la forma (ver ec.(3.43))

$$\sum_{i=1}^N F_i = 0 \quad (3.55)$$

Para eliminar el movimiento de cuerpo rígido se debe asignar un valor específico a u_j correspondiente a un nudo j arbitrario. Por ejemplo, si tomamos $u_1 = c_0$, se obtiene el sistema

$$\begin{bmatrix} k_{22}^1 + k_{11}^2 & k_{12}^2 & \cdot & 0 & 0 \\ k_{21}^2 & k_{22}^2 + k_{11}^3 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & k_{21}^{N-1} & k_{22}^{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_2^1 + f_1^2 - k_{21}^1 c_0 \\ f_2^2 + f_1^3 \\ \cdot \\ \cdot \\ f_2^{N-1} + \frac{k(L)\gamma_L}{\alpha_L} \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

y la ecuación

$$k_{11}^1 c_0 + k_{12}^1 u_2 = f_1^1 + \sigma(0) \quad (3.57)$$

Se observa que el valor de u_2 puede obtenerse tanto del sistema (3.56) como de la ec.(3.57), ya que la condición de compatibilidad (3.54), garantiza que ambos valores u_2 sean iguales.

4. Condiciones de borde mixtas: cuando el problema presenta una condición de borde esencial en un extremo y una natural en el otro, se dice que las condiciones de borde son mixtas. Por ejemplo:

$$u(0) = \frac{\gamma_0}{\beta_0}, \quad u_{,x}(L) = \frac{\gamma_L}{\alpha_L} \quad (3.58)$$

$$\alpha_0 u_{,x}(0) + \beta_0 u(0) = \gamma_0, \quad \beta_L u(L) = \frac{\gamma_L}{\beta_L} \quad (3.59)$$

son dos condiciones de borde mixtas. Su tratamiento es similar a los ya expuestos por lo que no se entrará en mayores detalles.

3.5.3. Estimaciones del error

Supongamos que la solución exacta u del problema de contorno tenga la propiedad de que sus derivadas de orden s al cuadrado son integrables en Ω , pero que las de orden $s+1$ y superiores no lo son (s es un entero mayor que 1). Además, supongamos que estamos utilizando funciones de forma que contienen polinomios completos de grado $\leq k$ y una malla uniforme de elementos de igual longitud h . Entonces, una aproximación del error, medido en la norma H^1 definida por la ec. (3.21) satisface la aproximación asintótica

$$\|u - \hat{u}\|_1 \leq Ch^\mu \quad (3.60)$$

en donde C es una constante independiente de h y μ es

$$\mu = \min(k, s) \quad (3.61)$$

es decir, que la velocidad de convergencia es k si $k < s$ o s si $s < k$. El comportamiento respecto de la norma media cuadrática es un orden mejor

$$\|u - \hat{u}\|_0 \leq C_1 h^{\mu+1} \quad (3.62)$$

con C_1 una constante.

Las estimaciones (3.60) y (3.62) indican que cuando la solución u es regular (es decir, $s > k$), entonces se puede mejorar la velocidad de convergencia aumentando el orden k de los polinomios utilizados en la aproximación. Sin embargo, para $s < k$, la velocidad de convergencia es independiente de k y no hay mejora al incrementar k .

Ejercicio N°32: Considere el problema de contorno siguiente definido por la ecuación diferencial

$$-u(x)_{,xx} + b_0 u(x) = 10\delta(x-1); \quad 0 < x < 2$$

con b_0 una constante, y los conjuntos de condiciones de borde:

(i) $u(0) = 1, \quad u(2) = 3$

(ii) $u(0)_{,x} = 2, \quad u(2)_{,x} = g_0 \quad (g_0 = \text{constante})$

(iii) $u(0)_{,x} + u(0) = 1, \quad u(2) = 1$

(a) Utilizando cuatro elementos de igual longitud y funciones de base lineales evaluar numéricamente la matriz de rigidez global y el vector de cargas para esta clase de problemas tomando $b_0 = 1$ y $b_0 = 0$.

(b) Desarrollar la forma reducida (no singular) de las ecuaciones para los problemas (i) y (iii).

(c) Considere las condiciones (ii) y $b_0 = 0$. ¿Qué valor debe tener la constante g_0 ?

(d) Obtener la forma reducida de las ecuaciones para el caso (ii) con $b_0 = 0$ y el valor de g_0 determinado en la parte (c) del enunciado.

Capítulo 4 Elementos unidimensionales

por F. Flores

4.1. Introducción

En este capítulo se presentan elementos estructurales unidimensionales sencillos orientados al análisis de estructuras espaciales de barras articuladas, cables y vigas. Inicialmente se retoma el problema de la conducción del calor a los fines de mostrar como imponer la continuidad interelemento de la primera derivada de la variable. Luego se introducen problemas de continuidad C^1 como paso previo a la introducción de los elementos estructurales. Las matrices de rigidez que se obtienen son idénticas a las obtenidas en los cursos de Análisis Matricial de Estructuras. Finalmente se muestra como desarrollar elementos de viga que consideren las deformaciones transversales por corte.

4.2. Grado de continuidad entre elementos

Para el análisis del problema de conducción del calor en una dimensión hemos utilizado elementos de 2, 3 y 4 nudos (lineales, cuadráticos y cúbicos respectivamente) con derivadas continuas en el interior del elemento, pero que entre elementos sólo aseguran continuidad de la variable (u) pero no de su derivada (du/ds). Esta última está ligada al flujo a través de la relación “constitutiva” $\sigma = -k du/ds$. Es decir que no se asegura la continuidad del flujo entre elementos y no necesariamente se cumple la condición de que el salto $[\sigma \cdot \nu]$ entre elementos sea nulo.

Una posibilidad para mejorar la aproximación anterior es utilizar como incógnitas nodales la variable u y su derivada u_s . Por ej. usando un elemento de dos nudos se tendrían las siguientes incógnitas:

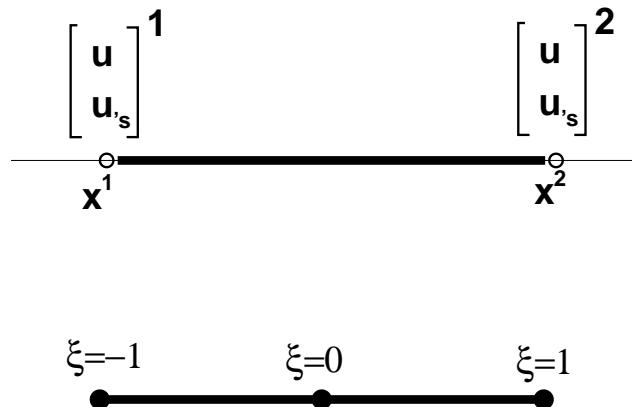


Figura 1 Elementos Hermíticos

La aproximación a u dentro del elemento dependerá de cuatro parámetros (u^1, u_s^1, u^2, u_s^2) y resulta entonces una interpolación cúbica de la forma

$$u(s) = \phi^1 u^1 + \varphi^1 u_s^1 + \phi^2 u^2 + \varphi^2 u_s^2$$

los polinomios de interpolación indicados ($\phi^1, \varphi^1, \phi^2, \varphi^2$) se conocen como polinomios de Hermite de 1er. orden. Por ser cúbicos su forma general será

$$f = a + b\xi + c\xi^2 + d\xi^3 \quad \xi = \frac{2x - (x^2 + x^1)}{(x^2 - x^1)}$$

donde (x^1, x^2) son las coordenadas de los nodos del elemento ($\xi \in [-1, 1]$).

Para obtener los coeficientes (a, b, c, d) recordemos que para que las incógnitas tengan el significado físico deseado, exigímos que las funciones de interpolación satisfagan:

$$f^I(x^J) = \delta_{IJ} \quad \begin{cases} u(x^J) = u^j \\ u_s(x^J) = u_s^j \end{cases}$$

En este caso al tener las derivadas como incógnitas resultan necesarias condiciones similares. Para las funciones de forma asociadas al nudo 1, resultan las siguientes condiciones:

$$\phi^1(x^1) = 1 \quad \phi_s^1(x^1) = \phi^1(x^2) = \phi_s^1(x^2) = 0$$

$$\varphi_s^1(x^1) = 1 \quad \varphi^1(x^1) = \varphi^1(x^2) = \varphi_s^1(x^2) = 0$$

y otras similares para las funciones asociadas al nudo 2. Luego los coeficientes de la función ϕ^1 se obtiene de resolver las siguientes ecuaciones (siendo $\phi_s^1 = (b + 2c\xi + 3d\xi^2)/2/L$)

$$\left. \begin{array}{l} \phi^1(\xi = -1) : \quad a - b + c - a = 1 \\ \phi_s^1(\xi = -1) : \quad \frac{2b}{L} - \frac{4c}{L} + \frac{6d}{L} = 0 \\ \phi^1(\xi = 1) : \quad a + b + c + d = 0 \\ \phi_s^1(\xi = 1) : \quad \frac{2b}{L} + \frac{4c}{L} + \frac{6d}{L} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{3}{4} \\ c = 0 \\ d = \frac{1}{4} \end{array}$$

similarmente se obtienen los coeficientes del resto de las funciones, que resultan

$$\phi^1 = \frac{1}{4}(2 - 3\xi + \xi^3) \quad \phi^2 = \frac{1}{4}(2 + 3\xi - \xi^3)$$

$$\varphi^1 = \frac{1}{4}(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3) \frac{L}{2} \quad \varphi^2 = \frac{1}{4}(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3) \frac{L}{2}$$

Notar sin embargo que la continuidad de la derivada no siempre es una ventaja y presenta problemas precisamente en aquellos puntos donde esta es discontinua, por ej:

- Si hay un cambio en las características del material (conductividad k), ya que en tal punto si la derivada es continua el flujo no puede ser continuo

$$\sigma^+ = k^+ \frac{du}{ds} \neq k^- \frac{du}{ds} = \sigma^-$$

- Cuando hay una fuente puntual q que implica una discontinuidad en el flujo

$$[\sigma^+ - \sigma^-] = q$$

4.2.1. Ejercicios

1. Plantear las condiciones necesarias para obtener los polinomios de Hermite de 1er orden y resolverlos. Graficar las funciones de interpolación.
2. Usando esta aproximación cónica, calcular la matriz de coeficientes del problema de conducción del calor.

4.3. Problemas de cuarto orden

Son problemas menos comunes pero muy importantes, surgen (entre otras posibilidades) al considerar teorías clásicas de vigas y placas (y/o láminas). Recordemos por ejemplo la ecuación diferencial que gobierna el comportamiento de una viga continua en flexión

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dx} + p(x) &= 0 \\ M = EI\chi &= EI \frac{d^2u}{dx^2} \end{aligned} \quad \begin{aligned} \frac{dM}{dx} + Q &= 0 \\ \frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2u}{dx^2} \right) &= p(x) \end{aligned}$$

usando el método de residuos ponderados (con v la función de ponderación) e integrando dos veces por partes resulta la siguiente formulación débil:

$$\begin{aligned} \int_L v \left[\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2u}{dx^2} \right) - p(x) \right] dx &= \int_L \left[\frac{d^2v}{dx^2} EI \frac{d^2u}{dx^2} - v p(x) \right] dx + \\ &+ v \frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2u}{dx^2} \right) \Big|_0^L - \frac{dv}{dx} EI \frac{d^2u}{dx^2} \Big|_0^L = 0 \end{aligned}$$

donde podemos reconocer en los términos evaluados en los extremos al momento flector y al esfuerzo de corte:

$$EI \frac{d^2u}{dx^2} = M \quad \text{y} \quad - \frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2u}{dx^2} \right) = - \frac{dM}{dx} = Q$$

Luego la expresión del residuo puede escribirse como

$$\int_L \left[\frac{d^2v}{dx^2} EI \frac{d^2u}{dx^2} \right] dx = \int_L v p(x) dx + vQ \Big|_0^L + \frac{dv}{dx} M \Big|_0^L$$

Notemos que para poder realizar la integral del primer miembro es necesario que u'' (y v'') exista, es decir que u' (y v') debe ser por lo menos continua. Este tipo de problemas donde la formulación requiere que las derivadas primeras de la variable sean continuas en todo el dominio (y por lo tanto entre elementos) se denominan de continuidad C^1 . Aquellos donde sólo se requiere que la variable sea continua se denominan de continuidad C^0 .

Las condiciones de continuidad tienen siempre una fuerte interpretación física, en este caso la continuidad C^1 resulta de la hipótesis de conservación de las secciones planas y de que dicha sección se mantiene normal al eje deformado. Esta hipótesis expresa el campo de desplazamientos normales a la sección transversal de los puntos fuera del eje baricéntrico proporcionales a la distancia al mismo y al giro de la sección. Si el giro no es continuo, los desplazamientos tampoco lo serán y se pierde la compatibilidad.

Si utilizamos en el presente problema un elemento similar al descripto en el punto anterior, usamos la aproximación de Galerkin para las funciones de prueba (es decir la mismas funciones que para las variables) tendremos (que para EI constante en cada elemento):

- una aproximación cúbica para u que implica aproximación cuadrática para el giro, lineal para el momento y corte constante.
- El elemento puede modelar en forma exacta una viga sin carga de tramo (ecuación homogénea).

Veamos como evaluar la matriz de rigidez del elemento de viga, sea entonces

$$u(\xi) = \phi^1(\xi) u^1 + \varphi^1(\xi) \beta^1 + \phi^2(\xi) u^2 + \varphi^2(\xi) \beta^2$$

donde hemos denominado $\beta = du/dx$ al giro de la sección. Similarmente la función de prueba será

$$v(\xi) = \phi^1(\xi)v^1 + \varphi^1(\xi)\theta^1 + \phi^2(\xi)v^2 + \varphi^2(\xi)\theta^2$$

La derivada segunda de u respecto a x dos veces (curvatura del eje medio) es

$$u'' = \frac{d^2u}{d\xi^2} \frac{d^2\xi}{dx^2} = \underbrace{\frac{4}{L^2} [\phi'_{\xi\xi}, \varphi'_{\xi\xi}, \phi'_{\xi\xi}, \varphi'_{\xi\xi}]}_{\mathbf{B}(\xi)} \underbrace{\begin{bmatrix} u^1 \\ \beta^1 \\ u^2 \\ \beta^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}} = \mathbf{B}(\xi) \mathbf{u}$$

similarmente para la función de peso

$$v'' = \frac{d^2v}{d\xi^2} \frac{d^2\xi}{dx^2} = \underbrace{\frac{4}{L^2} [\phi'_{\xi\xi}, \varphi'_{\xi\xi}, \phi'_{\xi\xi}, \varphi'_{\xi\xi}]}_{\mathbf{B}(\xi)} \underbrace{\begin{bmatrix} v^1 \\ \theta^1 \\ v^2 \\ \theta^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}} = \mathbf{B}(\xi) \mathbf{v}$$

La integral

$$\int_L \frac{d^2v}{dx^2} EI \frac{d^2u}{dx^2} dx = \mathbf{v}^T \underbrace{\int_L \mathbf{B}^T(\xi) (EI) \mathbf{B}(\xi) dx}_{\mathbf{K}} \mathbf{u} = \mathbf{v}^T \mathbf{K} \mathbf{u}$$

haciendo el cambio de variable en la integral ($dx = \frac{L}{2}d\xi$ e integrando entre -1 y 1) obtenemos \mathbf{K}

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ sim. & & 12 & -6L \\ & & & 4L^2 \end{bmatrix}$$

4.3.1. Condiciones de Dirichlet no-homogéneas

Resulta importante notar como se tratan las condiciones de contorno esenciales no homogéneas (desplazamiento prescriptos), sea por ej. ($\beta^1 = \bar{\beta}^1$). Recordemos que en el método de Galerkin las condiciones de contorno no homogéneas se satisfacían mediante una solución particular, en este caso la aproximación en el elemento resulta

$$u(\xi) = \phi^1(\xi)u^1 + \varphi^1(\xi)\bar{\beta}^1 + \phi^2(\xi)u^2 + \varphi^2(\xi)\beta^2$$

donde $\varphi^1(\xi)\bar{\beta}^1$ es ahora nuestra solución particular y el elemento queda entonces con sólo tres parámetros independientes. La matriz de rigidez del elemento queda ahora reducida a 3×3 y resulta de

$$[v^1, v^2, \theta^2] \int \left(\frac{16}{L^4} \right) \begin{bmatrix} \phi'_{\xi\xi} \\ \phi'_{\xi\xi} \\ \varphi'_{\xi\xi} \end{bmatrix} (EJ) [\phi'_{\xi\xi}, \phi'_{\xi\xi}, \varphi'_{\xi\xi}] dx \begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \beta^2 \end{bmatrix}$$

que es equivalente a eliminar la 2 fila y la segunda columna de la matriz completa

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -12 & 6L \\ sim. & 12 & -6L \\ & & 4L^2 \end{bmatrix}$$

notar que para ello la función de peso se ha escrito ahora

$$v(\xi) = \phi^1(\xi)v^1 + \phi^2(\xi)v^2 + \varphi^2(\xi)\theta^2$$

pues debe satisfacer las condiciones homogéneas de contorno ($\theta = 0$ donde $\beta = \bar{\beta} \Rightarrow \theta^1 = 0$). La solución particular contribuye al término independiente de la forma

$$\begin{bmatrix} v^1, v^2, \theta^2 \end{bmatrix} \int_L \left(\frac{16}{L^4} \right) \begin{bmatrix} \phi_{\xi\xi}^1 \\ \phi_{\xi\xi}^2 \\ \varphi_{\xi\xi}^2 \end{bmatrix} (EI) \varphi_{\xi\xi}^1 dx \bar{\beta}^1$$

que no es otra cosa que la segunda columna de la matriz original multiplicada por el valor conocido $\bar{\beta}^1$.

Ejercicio 1: Calcular los autovalores y autovectores de la matriz **K**

Ejercicio 2: Calcular el término independiente debido a una carga uniforme

4.3.2. Formulación débil a partir del Principio de Trabajos Virtuales

Si bien el método de residuos ponderados se presenta como una técnica numéricas consistente para resolver una ecuación diferencial con valores en el contorno, resulta ilustrativo y muy conveniente asociarla con principios físicos conocidos, de tal forma de poder dar una interpretación conceptual a distintos aspectos del método.

Recordemos rápidamente el principio de trabajos virtuales, definamos primero un sistema virtual de desplazamientos δu . Conceptualmente un desplazamiento virtual es un incremento posible de desplazamientos a partir de una posición dada. Posible de ocurrir significa en este caso dos cosas

1. que satisfaga las ecuaciones de compatibilidad interna del problema, para el problema en estudio esto significa que la derivada segunda $\frac{d^2u}{ds^2}$ exista (y sea finita).
2. que satisfaga las condiciones esenciales homogéneas del problema, es decir que tomado como desplazamiento incremental a partir de un campo de desplazamientos que satisface las condiciones esenciales no-homogéneas, la suma también satisfaga estas últimas.

$$\delta u = 0 \quad \text{donde} \quad u = \bar{u}$$

El principio de trabajos virtuales (desplazamientos virtuales) dice que un sistema de fuerzas internas (momentos y esfuerzos de corte en este caso) está en equilibrio con un conjunto de acciones externas (cargas y momentos) si para cualquier (es decir para todo) desplazamiento virtual se satisface que el trabajo virtual de las fuerzas internas es igual al de las fuerzas externas.

Escribamos el principio de trabajos virtuales para el problema en estudio:

$$\mathbf{T.V.I.} = \int_L \left(\frac{d^2\delta u}{dx^2} \right) M dx = \int_L \delta u q(x) dx + \left[\frac{d\delta u}{dx} \bar{M} \right]_0^L + \delta u \bar{Q}]_0^L = \mathbf{T.V.E.}$$

reemplazando la ecuación constitutiva en el primer miembro, el T.V.I. resulta

$$\mathbf{T.V.I.} = \int_L \left(\frac{d^2\delta u}{dx^2} \right) (EI) \left(\frac{d^2u}{dx^2} \right) dx$$

donde podemos reconocer la misma forma que la formulación débil obtenida por residuos ponderados con la diferencia que aquí $v = \delta u$. Si ahora comparamos las condiciones que impusimos a la función de peso v en residuos ponderados con las condiciones impuestas a los desplazamientos virtuales δu vemos que no hay ninguna diferencia y ambos formulaciones conducen a las mismas ecuaciones.

Notar que estamos hablando de las ecuaciones de trabajos virtuales en forma discreta, es decir que buscamos la solución u dentro de una familia discreta de funciones (descripta por las funciones de forma utilizadas y sus parámetros asociados) y exigimos que se satisfaga la igualdad $\mathbf{T.V.I.} = \mathbf{T.V.E.}$ para esa misma familia de funciones δu y no para cualquier función admisible.

4.3.3. Formulación a partir del Principio de Mínima Energía Potencial Total

La ventaja de utilizar este principio reside en la fuerte interpretación física de la formulación resultante. En este aspecto resulta idéntica al método de Rayleigh-Ritz. Por otro lado desde un punto de vista más general tiene el inconveniente de que requiere que exista un potencial expresado en función de los desplazamientos. Este potencial no existe si hay disipación, por ejemplo cuando el material no es elástico (y en consecuencia no se puede escribir la energía interna de deformación en términos exclusivamente de los desplazamientos y se requiere conocer otras variables) o cuando las cargas dependen de la configuración (cargas seguidoras), vínculos unilaterales, problemas de contacto con y sin fricción.

En el presente problema la energía potencial total $\Pi(u)$ se escribe para un material lineal elástico

$$\Pi(u) = \frac{1}{2} \int_L EI \left(\frac{d^2 u}{dx^2} \right)^2 dx - \int_L q(x)u dx - \bar{M} \left(\frac{du}{dx} \right)_0^L - \bar{Q}u]_0^L$$

Aplicando el principio de mínima tendremos:

$$\delta\Pi(u, \delta u) = \int_L EI \left(\frac{d^2 u}{dx^2} \right) \left(\frac{d^2 \delta u}{dx^2} \right) dx - \int_L q(x)\delta u dx - \bar{M} \left(\frac{d\delta u}{dx} \right)_0^L - \bar{Q}\delta u]_0^L = 0$$

Si comparamos esta expresión con el P.T.V. veremos que es la misma, la diferencia está en que aquí δu representa la 1ra variación de los desplazamientos, pero que formalmente debe satisfacer las mismas condiciones que un desplazamiento virtual, es decir ser un desplazamiento incremental admisible.

4.4. Elemento de barra articulada

Los elementos estructurales de barras articuladas son los más sencillos. Son desde el punto de vista espacial bi o tridimensionales. Sin embargo desde el punto de vista de la ecuación diferencial que gobierna su comportamiento son undimensionales, en el sentido de que dependen de una única coordenada espacial (la longitud de arco a lo largo de su eje).

Por otro lado, muchas veces resulta más sencillo calcular las matrices elementales de coeficientes (matrices de rigidez) y los vectores elementales de términos independientes respecto a un sistema coordenado local o en función de un conjunto de variables locales. Posteriormente, el ensamblaje de la matriz y vector elemental deben llevarse a cabo sobre un sistema coordenado común (global) a todos los elementos, lo que hace necesario referir matrices y vectores a este sistema global.

Consideremos entonces como determinar la matriz de rigidez de una barra de reticulado plano, para lo cual utilizaremos el principio de trabajos virtuales, en particular la matriz de rigidez provendrá del trabajo virtual interno, además como ejemplo mostraremos como ir introduciendo aquí la notación que se usa habitualmente en el método de elementos finitos al considerar elementos más complejos.

Si se define un sistema local (\bar{x}_1, \bar{x}_2) (con una barra encima de la variable representaremos valores en el sistema local) en cada barra de forma que el eje de la barra coincida con la dirección \bar{x}_1 , es posible calcular la longitud de la barra y su orientación respecto al sistema global en función de las coordenadas de los nudos

$$\begin{aligned} L &= [(\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1) \cdot (\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1)]^{\frac{1}{2}} \\ &= [(x_1^2 - x_1^1)^2 + (x_2^2 - x_2^1)^2]^{\frac{1}{2}} \\ \cos \alpha &= \frac{(x_1^2 - x_1^1)}{L} \quad \sin \alpha = \frac{(x_2^2 - x_2^1)}{L} \end{aligned}$$

Los desplazamientos se interpolan en forma lineal

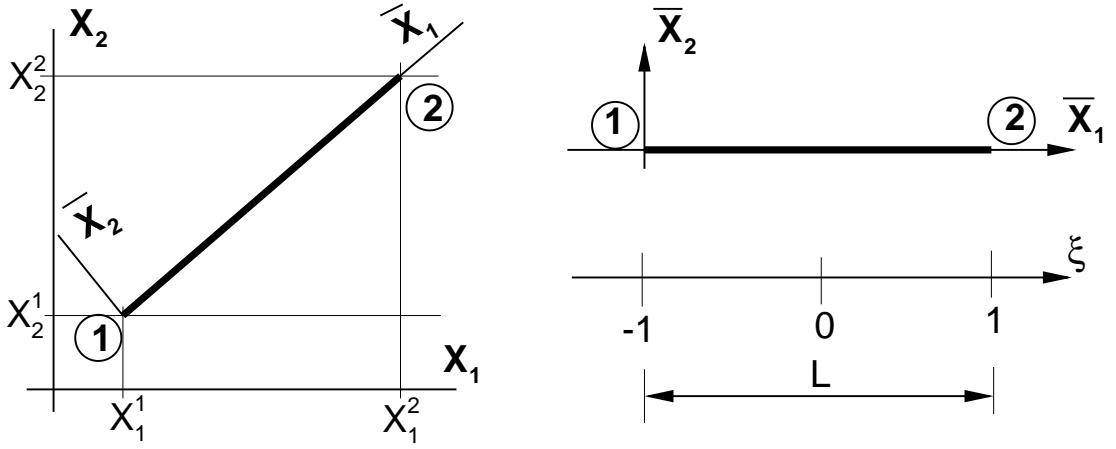


Figura 2 barra de reticulado en coordenadas locales

$$\bar{\mathbf{u}} = N^1(\xi) \bar{\mathbf{u}}^1 + N^2(\xi) \bar{\mathbf{u}}^2$$

La única variable de deformación relevante en este caso es la deformación longitudinal en la dirección del eje de la barra

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{d\bar{u}_1}{d\bar{x}_1} = N'_1(\xi) \bar{u}_1^1 + N'_2(\xi) \bar{u}_1^2 \\ N'_1 &= \frac{dN^I(\xi)}{d\bar{x}_1} = \frac{dN^I(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{d\bar{x}_1} = N'_{\xi} \frac{2}{L}\end{aligned}$$

Para este caso de dos funciones lineales

$$\begin{aligned}N^1(\xi) &= \frac{1}{2}(1-\xi) & N'_{\xi} &= -\frac{1}{2} & N'_1 &= -\frac{1}{L} \\ N^2(\xi) &= \frac{1}{2}(1+\xi) & N'_{\xi} &= +\frac{1}{2} & N'_2 &= +\frac{1}{L}\end{aligned}\quad (4.1)$$

Si agrupamos los desplazamientos de los nudos en un vector de incógnitas elementales

$$\bar{\mathbf{u}}^e = [\bar{u}_1^1, \bar{u}_2^1, \bar{u}_1^2, \bar{u}_2^2]^T$$

la deformación axial puede escribirse

$$\varepsilon = [N'_1, 0, N'_2, 0] \quad \bar{\mathbf{u}}^e = \frac{1}{L} [-1, 0, 1, 0] \quad \bar{\mathbf{u}}^e = \mathbf{B} \bar{\mathbf{u}}^e$$

La variable de tensión asociada a esta deformación es la fuerza axial sobre la barra resultante de integrar las tensiones normales sobre el área de la sección.

$$S = \int_A \sigma_{11} dA = (EA) \varepsilon = D\varepsilon$$

En forma similar, los desplazamientos virtuales conducen a una deformación virtual

$$\delta\varepsilon = [N'_1, 0, N'_2, 0] \quad \delta\bar{\mathbf{u}}^e = \frac{1}{L} [-1, 0, 1, 0] \quad \delta\bar{\mathbf{u}}^e = \mathbf{B} \delta\bar{\mathbf{u}}^e$$

La matriz de rigidez resulta entonces del trabajo virtual interno

$$\begin{aligned}\text{T.V.I.} &= \int_0^L \delta\varepsilon S ds = \int_0^L (\mathbf{B} \delta\bar{\mathbf{u}}^e)^T D \mathbf{B} \bar{\mathbf{u}}^e ds \\ &= \delta\bar{\mathbf{u}}^e \int_0^L \mathbf{B}^T D \mathbf{B} ds \bar{\mathbf{u}}^e = \delta\bar{\mathbf{u}}^e \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{u}}^e\end{aligned}$$

$$\bar{\mathbf{K}} = \int_0^L \mathbf{B}^T D \mathbf{B} d\bar{x}_1 = \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}^T D \mathbf{B} \frac{L}{2} d\xi$$

$$\bar{\mathbf{K}} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Recordemos entonces que esta matriz representa el trabajo virtual interno a través de la expresión

$$\text{T.V.I.} = (\delta \bar{\mathbf{u}}^e)^T \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{u}}^e$$

Para reescribir esta expresión en términos de desplazamientos respecto al sistema global de coordenadas debemos expresar los $\bar{\mathbf{u}}^e$ y $\delta \bar{\mathbf{u}}^e$ en función de \mathbf{u}^e y $\delta \mathbf{u}^e$ referidos al sistema global

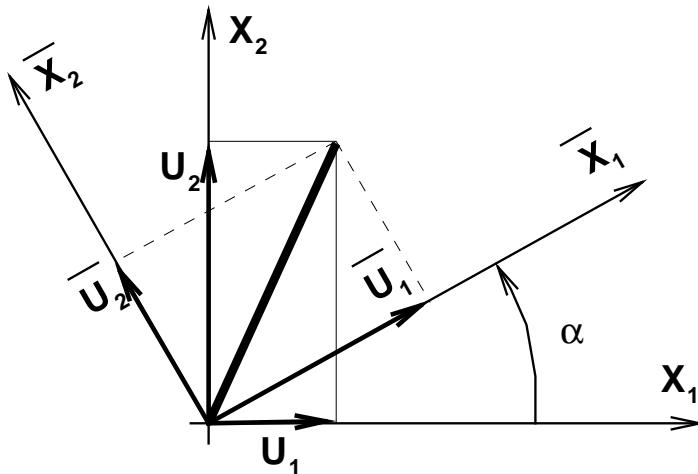


Figura 3 barra de reticulado en coordenadas globales

$$\bar{\mathbf{u}}^e = \begin{bmatrix} \bar{u}_1^1 \\ \bar{u}_2^1 \\ \bar{u}_1^2 \\ \bar{u}_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \end{bmatrix} = \Lambda \mathbf{u}^e$$

similarmente

$$\delta \bar{\mathbf{u}}^e = \Lambda \delta \mathbf{u}^e$$

La matriz Λ tiene la forma

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix}$$

donde \mathbf{R} es en este caso particular la matriz de rotación del sistema global al local y se cumple que $\Lambda^{-1} = \Lambda^T$ (en un caso general las matrices de transformación no son sencillamente matrices de cambio de coordenadas entre dos sistemas ortogonales). Luego el T.V.I. puede escribirse

$$\text{T.V.I.} = (\delta \mathbf{u}^e)^T \underbrace{\Lambda^T \bar{\mathbf{K}} \Lambda}_{\mathbf{K}} \mathbf{u}^e = (\delta \mathbf{u}^e)^T \mathbf{K} \mathbf{u}^e$$

notar entonces que para transformar la matriz de rigidez la expresión correcta es con Λ^T y no con Λ^{-1} , por ser la matriz de rigidez un tensor y no una aplicación lineal

Similarmente para el trabajo virtual externo notar que:

$$\text{T.V.E.} = (\delta \bar{\mathbf{u}}^e)^T \bar{\mathbf{f}} = (\delta \mathbf{u}^e)^T \underbrace{\Lambda^T \bar{\mathbf{f}}}_{\mathbf{f}} = (\delta \mathbf{u}^e)^T \mathbf{f}$$

Notar como es la matriz \mathbf{R} , si definimos por \mathbf{t}_1 al versor orientado del nudo 1 al nudo 2, y por \mathbf{t}_2 al versor normal a \mathbf{t}_1 de tal forma que $\mathbf{t}_3 = \mathbf{t}_1 \times \mathbf{t}_2$, sea la normal saliente al plano, entonces es fácil ver que

$$\mathbf{t}_1 = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} \quad \mathbf{t}_2 = \begin{bmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{bmatrix}$$

que son precisamente las columnas de \mathbf{R}

$$\mathbf{R} = [\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2]$$

En forma completamente similar puede obtenerse las matriz de un elemento de barra en 3 dimensiones. Ahora hay 3 componentes de desplazamiento por nudo y la matriz de rigidez en coordenadas locales resulta

$$\bar{\mathbf{K}} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Llamando nuevamente por \mathbf{t}_1 al versor orientado del nudo 1 al 2, y \mathbf{t}_2 y \mathbf{t}_3 a dos versores ortogonales a \mathbf{t}_1 , tales que $\mathbf{t}_1 \times \mathbf{t}_2 = \mathbf{t}_3$, entonces la matriz de rotación resulta

$$\mathbf{R} = [\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3]$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{R} \end{bmatrix}$$

y finalmente la matriz de la barra en coordenadas globales es

$$\mathbf{K} = \Lambda^T \bar{\mathbf{K}} \Lambda \quad (4.2)$$

Los elementos de barra articulada, además de utilizarse para modelos estructurales de enrejado, suelen utilizarse para modelar cables en general y tensores en particular. En estos casos debe notarse que los cables suelen presentar grandes desplazamientos, por lo cual el problema es no lineal y la matriz de rigidez debe actualizarse a la configuración deformada.

4.4.1. Ejercicio

Calcular la matriz de rigidez de la barra articulada en coordenadas globales usando (4.2), mostrar que sólo depende de \mathbf{t}_1 , es decir que no es necesario definir las direcciones \mathbf{t}_2 y \mathbf{t}_3

4.5. Elemento de viga en 3 dimensiones

4.5.1. Hipótesis más significativas (teoría clásica)

- Las secciones se mantienen planas
- Los desplazamientos son pequeños

La geometría inicial y final son indistinguibles

Las secciones son indeformables

- Las únicas tensiones relevantes son las que actúan en el plano de la sección ($\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}$)
- Se desprecian las deformaciones asociadas al corte transversal.

- Las cargas normales al eje de la viga actúan en el centro de corte, si no es necesario reemplazarla por una carga equivalente actuando en el centro de corte más un momento torsor distribuido.
- La pieza es prismática
 - El eje de la viga es recto
 - La sección es constante

4.5.2. Definición del sistema local de coordenadas y el elemento maestro

Debido a que toda la descripción de la viga esta referida a su eje baricéntrico (\mathbf{t}_1) y a sus dos ejes principales de inercia (\mathbf{t}_2 y \mathbf{t}_3), resulta conveniente definir un sistema local de coordenadas que coincida con dichos ejes. Esto permite trabajar con expresiones sencillas para las relaciones cinemáticas y constitutivas, y desacoplar los diferentes comportamientos (flexión en dos planos ortogonales, torsión y fuerza axial)

La coordenada x_1 local coincide entonces con el arco a lo largo del eje de la viga, en tanto que las coordenadas x_2 y x_3 se miden a partir del baricentro de la sección en las direcciones principales de inercia. La coordenada x_1 se encuentra en el intervalo $[0, L]$, con L la longitud de la viga. Las coordenadas x_2 y x_3 dependen de la forma de la sección. La elección de cual de los ejes principales de inercia asociar a x_2 es arbitraria.

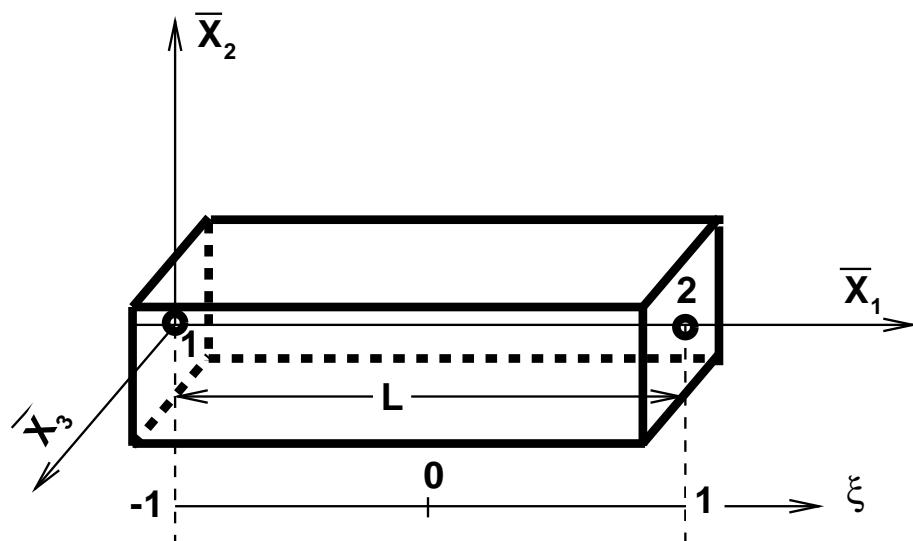


Figura 4 Coordenadas locales en un elemento de viga

Computacionalmente el eje \mathbf{t}_1 se calcula a partir de las coordenadas de los nudos extremos, en tanto que la orientación del eje \mathbf{t}_2 , queda (en la práctica) definido por un nudo auxiliar, de tal forma que el plano definido por $(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$ sea paralelo al plano que contiene a los nudos extremos de la viga y el nudo auxiliar. Finalmente $\mathbf{t}_3 = \mathbf{t}_1 \times \mathbf{t}_2$.

El elemento maestro es entonces unidimensional, y la variable local ξ está restringida al intervalo $[-1, 1]$.

El elemento de viga estándar está definido por dos nudos extremos que llamaremos 1 y 2. Denominaremos con u_i al desplazamiento en la dirección i local, y con θ_i al giro alrededor del eje local i . Esto permite desacoplar el comportamiento en 4 partes

1. -Esfuerzo normal N asociado a los desplazamiento u_1
2. -Torsión M_t asociado a los giros θ_1
3. -Flexión en el plano $x_1 - x_2$, Q_2 y M_3 asociado a u_2 y θ_3

4. -Flexión en el plano $x_1 - x_3$, Q_3 y M_2 asociado a u_3 y θ_2

4.5.3. Relaciones Cinemáticas y Constitutivas

$$\begin{aligned} N &= EA\varepsilon = EA \frac{du_1}{dx_1} \\ M_t &= \alpha GI_p \chi_1 = \alpha GI_p \frac{d\theta_1}{dx_1} \\ M_3 &= EI_3 \chi_3 = EI_3 \left(\frac{d\theta_3}{dx_1} \right) = EI_3 \left(\frac{d^2 u_2}{dx_1^2} \right) \\ M_2 &= EI_2 \chi_2 = EI_2 \left(\frac{d\theta_2}{dx_1} \right) = EI_2 \left(-\frac{d^2 u_3}{dx_1^2} \right) \end{aligned}$$

Donde E es el módulo de elasticidad longitudinal (módulo de Young) y G es el módulo de elasticidad transversal o de corte. A es el área transversal de la sección, I_p , es el momento de inercia polar de la sección y I_i es el momento de inercia de la sección respecto al eje i . El coeficiente α modifica la rigidez torsional en función de la forma de la sección.

Las variables de deformación generalizada son: ε es la deformación axial, χ_1 es el cambio de ángulo de torsión por unidad de longitud y χ_i son las curvaturas de flexión.

Notar que la denominación del momento flector y su curvatura asociada está referida al eje normal al plano de flexión, y la convención de positivo/negativa a que coincide con la dirección positiva del eje correspondiente.

4.5.4. Funciones de Interpolación

El análisis de las ecuaciones diferenciales que gobiernan el comportamiento indica que la función solución para el caso homogéneo (sin carga de tramo) del comportamiento axial (esfuerzos axiales y torsión) es una recta. Por lo tanto basta con considerar una aproximación lineal para u_1 y para θ_1 . En tanto que para la flexión la correspondiente función solución (del desplazamiento transversal) es un polinomio cúbico (sin carga de tramo), por lo que una aproximación cúbica es adecuada.

De la aproximación por residuos ponderados tras la correspondiente integración por partes resulta que el problema es de continuidad C^0 para el problema axial y C^1 para la flexión. En definitiva en los nudos deben ser continuos, además de los desplazamientos, θ_1 , $\frac{du_2}{dx_1} = \theta_3$ y $\frac{du_3}{dx_1} = -\theta_2$. Es decir que por lo menos debemos tener 6 grados de libertad por nudo (las tres componentes de desplazamiento y las tres componentes del giro).

Denominaremos con u_i^I al desplazamiento del nudo I en la dirección i local, y con θ_i^I al giro del nudo I alrededor del eje local i . Luego:

1. -Para las fuerzas axiales tenemos como grados de libertad u_1^1 y u_1^2 suficientes para definir la recta solución de la ecuación homogénea
2. -Para la torsión tenemos como grados de libertad θ_1^1 y θ_1^2 suficientes para definir la recta solución de la ecuación homogénea
3. -Para la flexión en el plano $x_1 - x_2$, tenemos los grados de libertad u_2^1 , θ_3^1 , u_2^2 y θ_3^2 suficientes para definir el polinomio cúbico solución de la ecuación homogénea
4. -Para la flexión en el plano $x_1 - x_3$, tenemos los grados de libertad u_3^1 , θ_2^1 , u_3^2 y θ_2^2 suficientes para definir el polinomio cúbico solución de la ecuación homogénea

Luego las funciones de interpolación propuestas son:

$$1. u_1(\xi) = \frac{1}{2}(1-\xi)u_1^1 + \frac{1}{2}(1+\xi)u_1^2 = N^1(\xi)u_1^1 + N^2(\xi)u_1^2 = \sum_{I=1}^2 N^I(\xi)u_1^I$$

$$2. \theta_1(\xi) = \sum_{I=1}^2 N^I(\xi) \theta_1^I$$

$$3. u_2(\xi) = \phi^1(\xi) u_2^1 + \varphi^1(\xi) \theta_3^1 + \phi^2(\xi) u_2^2 + \varphi^2(\xi) \theta_3^2$$

$$4. u_3(\xi) = \phi^1(\xi) u_3^1 - \varphi^1(\xi) \theta_2^1 + \phi^2(\xi) u_3^2 - \varphi^2(\xi) \theta_2^2$$

Donde puede verse que hemos usado para el comportamiento axial los polinomios de Lagrange de grado 1 y para el comportamiento flexional los polinomios de Hermite de orden 1.

4.5.5. Desarrollo

Recordando que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx_1} &= \frac{d}{d\xi} \frac{d\xi}{dx_1} = \frac{d}{d\xi} \frac{2}{L} \\ \frac{d\xi}{dx_1} &= \left(\frac{dx_1}{d\xi} \right)^{-1} = J^{-1}\end{aligned}$$

tenemos que las deformaciones generalizadas resultan

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{du_1}{dx_1} = N'_\xi \frac{2}{L} u_1^I = (u_1^2 - u_1^1) \frac{1}{L} \\ \chi_1 &= \frac{d\theta_1}{dx_1} = N'_\xi \frac{2}{L} \theta_1^I = (\theta_1^2 - \theta_1^1) \frac{1}{L}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\chi_3 &= \frac{d^2 u_2}{dx_1^2} = \frac{d^2 u_2}{d\xi_1^2} \left(\frac{d\xi}{dx_1} \right)^2 = \frac{4}{L^2} [\phi'_{\xi\xi} u_2^1 + \varphi'_{\xi\xi} \theta_3^1 + \phi'_{\xi\xi} u_2^2 + \varphi'_{\xi\xi} \theta_3^2] \\ &= \left[\frac{6\xi}{L^2}, \frac{-1+3\xi}{L}, -\frac{6\xi}{L^2}, \frac{1+3\xi}{L} \right] \begin{bmatrix} u_2^1 \\ \theta_3^1 \\ u_2^2 \\ \theta_3^2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\chi_2 &= -\frac{d^2 u_3}{dx_1^2} = -\frac{d^2 u_3}{d\xi_1^2} \left(\frac{d\xi}{dx_1} \right)^2 = -\frac{4}{L^2} [\phi'_{\xi\xi} u_3^1 - \varphi'_{\xi\xi} \theta_2^1 + \phi'_{\xi\xi} u_3^2 - \varphi'_{\xi\xi} \theta_2^2] \\ &= -\left[\frac{6\xi}{L^2}, -\frac{-1+3\xi}{L}, -\frac{6\xi}{L^2}, -\frac{1+3\xi}{L} \right] \begin{bmatrix} u_3^1 \\ \theta_2^1 \\ u_3^2 \\ \theta_2^2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Que puede resumirse en la siguiente expresión matricial

$$\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \chi_1 \\ \chi_3 \\ \chi_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & & & & +1 \\ & -1 & & & \\ \frac{6\xi}{L} & & -1 & & \\ & -\frac{6\xi}{L} & & -1+3\xi & \\ & & & -\frac{6\xi}{L} & +1 \\ & & & \frac{6\xi}{L} & +1+3\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_3^1 \\ \theta_1^1 \\ \theta_2^1 \\ \theta_3^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_3^2 \\ \theta_1^2 \\ \theta_2^2 \\ \theta_3^2 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\boldsymbol{\varepsilon}}_{4 \times 1} = \underbrace{\mathbf{B}(\xi)}_{4 \times 12} \underbrace{\mathbf{a}^e}_{12 \times 1}$$

En tanto que la relaciones constitutivas pueden escribirse matricialmente como

$$\begin{bmatrix} N \\ M_t \\ M_3 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & & & \\ & \alpha GI_p & & \\ & & EI_3 & \\ & & & EI_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \chi_1 \\ \chi_3 \\ \chi_2 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\boldsymbol{\sigma}}_{4 \times 1} = \underbrace{\mathbf{D}}_{4 \times 4} \underbrace{\boldsymbol{\varepsilon}}_{4 \times 1}$$

Finalmente la matriz de rigidez (en el sistema local) resulta de integrar a lo largo de la viga

$$\underbrace{\mathbf{K}_L}_{12 \times 12} = \int_0^L \underbrace{\mathbf{B}^T}_{12 \times 4} \underbrace{\mathbf{D}}_{4 \times 4} \underbrace{\mathbf{B}}_{4 \times 12} dx_1 = \int_{-1}^1 \mathbf{B}(\xi)^T \mathbf{D} \mathbf{B}(\xi) \frac{L}{2} d\xi$$

Notar que como máximo en $\mathbf{B}(\xi)$ hay polinomios de orden 1, luego en el producto $\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B}$ hay como máximo polinomios de orden 2 en ξ , por lo cual bastan dos puntos de integración si se va a realizar una integración numérica. La integral puede hacerse en este caso en forma analítica sin ningún problema.

La matriz de rigidez (cuya obtención se deja como ejercicio) es idéntica a la obtenida en los cursos de cálculo matricial de estructuras. Esto es así porque las funciones de interpolación utilizadas son capaces de reproducir la solución exacta de las ecuaciones diferenciales (homogéneas).

4.5.6. Término independiente (vector de cargas)

Supongamos que las cargas están representadas localmente (es decir respecto al sistema local) y varían en forma lineal dentro del elemento

$$\mathbf{q}(\xi) = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \sum_{I=1}^2 N^I(\xi) \mathbf{q}^I$$

El trabajo virtual externo se puede escribir como

$$\begin{aligned} \text{T.V.E.} &= \int_0^L \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q}(\xi) dx_1 = \int_0^L [\delta u_1, \delta u_2, \delta u_3] \begin{bmatrix} q_1(\xi) \\ q_2(\xi) \\ q_3(\xi) \end{bmatrix} dx_1 \\ &= [\delta \mathbf{a}_e]^T \int_0^L \begin{bmatrix} N^1 & & N^2 & & \\ \phi^1 & & \varphi^1 & & \\ \phi^1 & 0 & -\varphi^1 & & \\ & & & \phi^2 & \\ & & & \phi^2 & 0 & -\varphi^2 & \varphi^2 \end{bmatrix}^T \\ &\quad \times \begin{bmatrix} N^1 & & N^2 & & \\ & N^1 & & N^2 & \\ & & N^1 & & N^2 \end{bmatrix} dx_1 \begin{bmatrix} q_1^1 \\ q_2^1 \\ q_3^1 \\ q_1^2 \\ q_2^2 \\ q_3^2 \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{[\delta \mathbf{a}_e]^T}_{1 \times 12} \int_0^L \underbrace{\Phi^T(\xi)}_{12 \times 3} \underbrace{\mathbf{N}(\xi)}_{3 \times 6} dx_1 \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{q}^1 \\ \mathbf{q}^2 \end{bmatrix}}_{6 \times 1} = \underbrace{[\delta \mathbf{a}_e]^T}_{1 \times 12} \underbrace{\mathbf{F}_L}_{12 \times 1} \end{aligned} \tag{4.3}$$

Donde \mathbf{F}_L es el término independiente referido al sistema de coordenadas locales.

4.5.7. Cambio de base

La expresión de la matriz de rigidez en coordenadas globales sigue el procedimiento general. Referida a un sistema coordinado local la matriz de rigidez que es de 12×12 tiene la forma

$$\mathbf{K}_L = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11} & \mathbf{k}_{12} \\ \mathbf{k}_{21} & \mathbf{k}_{22} \end{bmatrix}$$

asociada con un vector de desplazamientos en coordenada locales de forma

$$\mathbf{a}_L = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^1 \\ \boldsymbol{\theta}^1 \\ \mathbf{u}^2 \\ \boldsymbol{\theta}^2 \end{bmatrix}_L \quad \mathbf{u}_L^I = \begin{bmatrix} u_1^I \\ u_2^I \\ u_3^I \end{bmatrix}_L \quad \boldsymbol{\theta}^I = \begin{bmatrix} \theta_1^I \\ \theta_2^I \\ \theta_3^I \end{bmatrix}_L$$

donde \mathbf{u}_L^I son los desplazamientos del nudo I referidos a la terna local y $\boldsymbol{\theta}_L^I$ es el vector de giros (donde cada componente es la proyección del vector rotación) referido a la terna local. Las submatrices \mathbf{k}_{ij} son de 6×6 y los únicos valores no nulos son los que se indican con una X

$$\mathbf{k}_{ij} = \begin{bmatrix} X & & & & & \\ & X & & & & X \\ & & X & X & X & \\ & & & X & X & \\ & & & & X & X \\ X & & & & & X \end{bmatrix}$$

Para realizar el cambio de coordenadas resulta necesario observar (ver figura 4) que las relaciones que ligan ambos sistemas tienen para cada nodo la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_L^I &= \mathbf{R} \mathbf{u}^I \\ \boldsymbol{\theta}_L^I &= \mathbf{R} \boldsymbol{\theta}^I \end{aligned}$$

donde la matriz rotación \mathbf{R} es

$$\mathbf{R} = [\mathbf{t}_1 \ \mathbf{t}_2 \ \mathbf{t}_3]$$

La matriz de transformación Λ resulta entonces de

$$\mathbf{a}_L^e = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^1 \\ \boldsymbol{\theta}^1 \\ \mathbf{u}^2 \\ \boldsymbol{\theta}^2 \end{bmatrix}_L = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & & & \\ & \mathbf{R} & & \\ & & \mathbf{R} & \\ & & & \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^1 \\ \boldsymbol{\theta}^1 \\ \mathbf{u}^2 \\ \boldsymbol{\theta}^2 \end{bmatrix} = \Lambda \mathbf{a}^e$$

las expresiones de cambio de la matriz de rigidez y el vector de términos independientes tienen la misma forma que antes, es decir:

$$\mathbf{K} = \Lambda^T \mathbf{K}_L \Lambda \quad \mathbf{F} = \Lambda^T \mathbf{F}_L$$

4.5.8. Matriz de masa

Habitualmente se considera la masa de la viga concentrada sobre el eje baricéntrico (es decir se desprecia la energía cinética asociada a la velocidad de rotación de la sección transversal). La matriz de masa aparece en problemas no estacionarios (dependientes del tiempo) y resulta consistentemente de aplicar residuos ponderados sobre la ecuación de equilibrio dinámico (o alternativamente como expresión de la energía cinética).

Suponiendo una interpolación para las velocidades y aceleraciones del eje baricéntrico, similar a los desplazamientos. La velocidad (y la aceleración) de un punto del eje de la viga es (referido al sistema local):

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N^1 & & & N^2 & & \\ & \phi^1 & & \varphi^1 & \phi^2 & \\ & & \phi^1 & 0 & -\varphi^1 & \\ & & & & \phi^2 & 0 & -\varphi^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}^1 \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}^1 \\ \dot{\mathbf{u}}^2 \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}^2 \end{bmatrix}_L \\ = \Phi(\xi) \dot{\mathbf{a}}_L^e$$

de donde resulta

$$\mathbf{M} = \int_0^L \rho A \Phi^T \Phi dx_1 = \frac{\rho A L}{2} \int_{-1}^1 \Phi^T(\xi) \Phi(\xi) d\xi \quad (4.4)$$

Que permite escribir la energía cinética de la viga como

$$T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}^1 & \dot{\boldsymbol{\theta}}^1 & \dot{\mathbf{u}}^2 & \dot{\boldsymbol{\theta}}^2 \end{bmatrix}_L \mathbf{M} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}^1 \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}^1 \\ \dot{\mathbf{u}}^2 \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}^2 \end{bmatrix}_L$$

4.5.9. Ejercicios

1. Calcular los coeficientes de la matriz de rigidez de la viga espacial en coordenadas locales.
2. Calcular la matriz de masa (expresión 4.4) para una viga continua en 2-D.
3. Calcular el vector independiente para un carga lineal arbitraria (expresión 4.3)

4.6. Elementos con deformación de corte

Los elementos con deformación de corte son aquellos basados en la teoría de vigas de Timoshenko y sus extensiones a problemas en 3-D. Además de poder considerar modelos flexibles al corte su mayor ventaja radica en la facilidad de su extensión al rango no-lineal y en el tratamiento de geometrías curvas. Tienen la ventaja también de ser de continuidad C^0 , aunque esto no es importante en vigas en el campo lineal.

Si consideramos el comportamiento de una viga en el plano x_1-x_2 (con eje baricéntrico en correspondencia con el eje x_1) las relaciones cinemáticas son:

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= \frac{du_2}{dx_1} - \theta_3 \\ \chi_3 &= \frac{d\theta_3}{dx_1} \\ \varepsilon &= \frac{du_1}{dx_1} \end{aligned}$$

Supongamos un elemento de 3 nudos (1 en cada extremo y un nudo central). En cada nudo nuestras incógnitas serán los desplazamientos en las dos direcciones del plano (u_1, u_2) más el giro alrededor del eje normal al plano (θ_3). La aproximación resulta entonces cuadrática para las tres variables. Recordando entonces que

$$\begin{aligned} N^1 &= \frac{\xi}{2}(\xi - 1) & N^2 &= 1 - \xi^2 & N^3 &= \frac{\xi}{2}(1 + \xi) \\ N'_{x_1}^1 &= \frac{2\xi - 1}{L} & N'_{x_1}^2 &= -\frac{4\xi}{L} & N'_{x_1}^3 &= \frac{2\xi + 1}{L} \end{aligned}$$

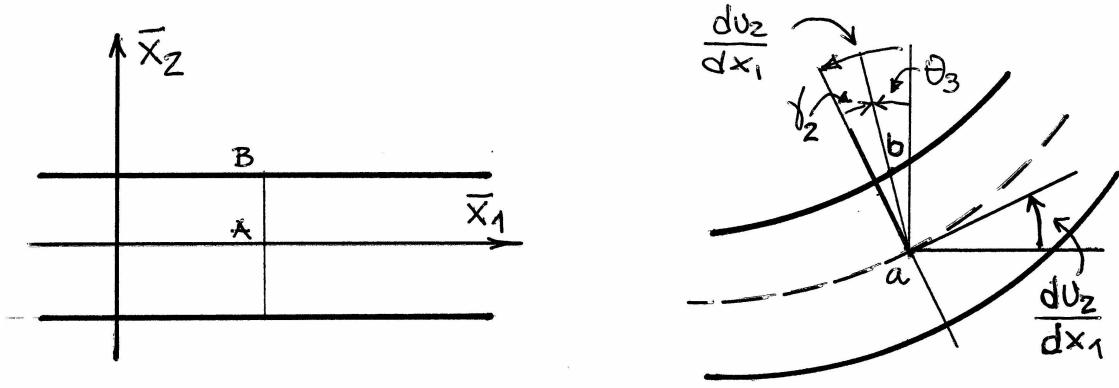


Figura 5 Viga con deformación de corte

las deformaciones generalizadas resultan

$$\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \chi_3 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2\xi-1}{L} & 0 & 0 & -\frac{4\xi}{L} & 0 & 0 & \frac{2\xi+1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\xi-1}{L} & 0 & 0 & -\frac{4\xi}{L} & 0 & 0 & \frac{1+2\xi}{L} \\ 0 & \frac{2\xi-1}{L} & \frac{\xi}{2}(1-\xi) & 0 & -\frac{4\xi}{L} & \xi^2 - 1 & 0 & \frac{2\xi+1}{L} & -\frac{\xi}{2}(1+\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ \theta_3^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \\ \theta_3^2 \\ u_1^3 \\ u_2^3 \\ \theta_3^3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}(\xi) \mathbf{a}^e$$

Las relaciones constitutivas para este caso son:

$$\begin{bmatrix} N \\ M_3 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & & \\ & EI & \\ & & GA_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \chi_3 \\ \gamma_2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}$$

donde A_2 es el área de corte en la dirección 2, definida convenientemente.

En el caso de vigas de eje curvo, es necesario una interpolación adecuada de la geometría (en el caso anterior asumíamos que el nudo central estaba ubicado exactamente en el punto medio entre los extremos). Una opción sencilla y conveniente es la interpolación isoparamétrica, luego el eje baricéntrico de la viga queda descripto por

$$\mathbf{x}(\xi) = \sum_{I=1}^3 N^I(\xi) \mathbf{x}^I$$

Paralelamente resulta conveniente definir un sistema coordenado local. En la geometría indefinida (libre de tensiones) dicho sistema local tiene el vector \mathbf{t}_1 coincidente con la tangente al eje baricéntrico, que forma un ángulo α con el eje x_1 global, en tanto que el vector \mathbf{t}_2 es normal al anterior:

$$\Lambda(\xi) = [\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2](\xi) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

Las deformaciones generalizadas normal y de corte resultan ahora

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{d(\mathbf{x} + \mathbf{u})}{ds} \cdot \mathbf{t}_1 \\ \gamma_2 &= \frac{d(\mathbf{x} + \mathbf{u})}{ds} \cdot \mathbf{t}_2 \end{aligned}$$

donde s es la longitud de arco medido sobre el eje baricéntrico de la viga.

Debido a que la viga tiene ahora una curvatura inicial, debemos hablar de cambio de curvatura. La curvatura original se mide como

$$\kappa_3^{(0)} = \frac{d\alpha}{ds}$$

y la curvatura del eje deformado es

$$\kappa_3 = \frac{d(\alpha + \theta_3)}{ds}$$

luego el cambio de curvatura resulta

$$\chi_3 = \kappa_3 - \kappa_3^{(0)} = \frac{d(\alpha + \theta_3)}{ds} - \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\theta_3}{ds}$$

En problemas tridimensionales, la teoría que gobierna el problema es similar. Por supuesto ahora \mathbf{x} y \mathbf{u} tienen tres componentes. Por otro lado el sistema coordenado local se escribe ahora

$$\boldsymbol{\Lambda}(s) = [\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3]$$

donde \mathbf{t}_1 coincide con la tangente al eje baricéntrico, en tanto que \mathbf{t}_2 y \mathbf{t}_3 están dirigidos en las direcciones principales de inercia de la sección transversal. Las deformaciones generalizadas asociadas a los esfuerzos normal y de corte se escriben ahora

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{d(\mathbf{x} + \mathbf{u})}{ds} \cdot \mathbf{t}_1 \\ \gamma_2 &= \frac{d(\mathbf{x} + \mathbf{u})}{ds} \cdot \mathbf{t}_2 \\ \gamma_3 &= \frac{d(\mathbf{x} + \mathbf{u})}{ds} \cdot \mathbf{t}_3\end{aligned}$$

Las curvaturas del eje baricéntrico resultan ahora de la siguiente expresión

$$\mathbf{K} = \boldsymbol{\Lambda}^T \frac{d\boldsymbol{\Lambda}}{ds} = \begin{bmatrix} 0 & -\kappa_3 & \kappa_2 \\ \kappa_3 & 0 & -\kappa_1 \\ -\kappa_2 & \kappa_1 & 0 \end{bmatrix}$$

donde los κ_i serán curvaturas iniciales si $\boldsymbol{\Lambda}$ es la original o serán las curvaturas del eje deformado si $\boldsymbol{\Lambda}$ corresponde a la estructura deformada. La diferencia entre ambas permite calcular los cambios de curvatura, que incluye deformación de torsión (χ_1) y deformaciones de flexión (χ_2 y χ_3).

$$\begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_1 - \kappa_1^{(0)} \\ \kappa_2 - \kappa_2^{(0)} \\ \kappa_3 - \kappa_3^{(0)} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\kappa}^{(0)}$$

Si mantenemos los giros en cada punto de la viga referidos al sistema local (recordando la relación que los liga con los globales)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\theta}_G &= \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\theta}_L \\ \boldsymbol{\theta}_L &= \boldsymbol{\Lambda}^T \boldsymbol{\theta}_G\end{aligned}$$

la linealización de la expresión anterior conduce a

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon} &= \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Lambda}^T \frac{d\mathbf{u}}{ds} + \mathbf{e}_1 \times \boldsymbol{\theta}_L = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 \cdot \frac{d\mathbf{u}}{ds} \\ \mathbf{t}_2 \cdot \frac{d\mathbf{u}}{ds} - \theta_3 \\ \mathbf{t}_3 \cdot \frac{d\mathbf{u}}{ds} + \theta_2 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\chi} &= \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \end{bmatrix} = \frac{d\boldsymbol{\theta}_L}{ds} + \boldsymbol{\kappa}^{(0)} \times \boldsymbol{\theta}_L = \begin{bmatrix} \frac{d\theta_1}{ds} \\ \frac{d\theta_2}{ds} \\ \frac{d\theta_3}{ds} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \kappa_2 \theta_3 - \kappa_3 \theta_2 \\ \kappa_3 \theta_1 - \kappa_1 \theta_3 \\ \kappa_1 \theta_2 - \kappa_2 \theta_1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

de donde pueden particularizarse las expresiones para la viga en el plano obtenidas antes.

4.6.1. Matriz de rigidez de una viga recta en 2-D

Si nos restringimos al caso plano y una viga de eje recto. Usando una aproximación cuadrática (3 nudos), con el nudo interno en el centro del elemento, la matriz de rigidez en coordenadas locales resulta de la integral

$$\mathbf{K}_L = \int_L \mathbf{B}^T(\xi) \mathbf{D} \mathbf{B}(\xi) ds = \int_{-1}^1 \frac{L}{2} \mathbf{B}^T(\xi) \mathbf{D} \mathbf{B}(\xi) d\xi$$

$$\left[\begin{array}{cccc} \frac{EA}{2L} (N'_\xi^1)^2 & & \frac{EA}{2L} N'_\xi N'_\xi^2 & \\ & \frac{GA_c}{2L} (N'_\xi^1)^2 & \frac{GA_c}{2} N'_\xi N^1 & \frac{GA_c}{3L} N'_\xi N'_\xi^2 \\ & & \frac{EI}{2L} (N'_\xi^1)^2 + \frac{GA_c L}{2} (N^1)^2 & \frac{GA_c}{2} N'_\xi N^2 \\ & & & \frac{EI}{2L} N'_\xi N'_\xi^2 + \frac{GA_c L}{2} N^1 N^2 \\ \int_{-1}^1 & & \frac{EA}{2L} (N'_\xi^2)^2 & \\ & & & \frac{GA_c}{2L} (N'_\xi^2)^2 \\ & & & \frac{GA_c}{2} N'_\xi N^2 \\ & & & \frac{EI}{2L} (N'_\xi^2)^2 + \frac{GA_c L}{2} (N^2)^2 \\ \text{Simétrica} & & & \end{array} \right] d\xi$$

$$\left[\begin{array}{ccc} \frac{EA}{2L} N'_\xi N'_\xi^3 & \frac{GA_s}{2L} N'_\xi N'_\xi^3 & \frac{GA_c}{2} N'_\xi N^3 \\ & \frac{EI}{2L} N'_\xi N'_\xi^3 + \frac{GA_c L}{2} N^1 N^3 & \\ \frac{EA}{2L} N'_\xi N'_\xi^3 & \frac{GA_c}{2L} N'_\xi N'_\xi^3 & \frac{GA_c}{2} N'_\xi N^3 \\ & \frac{EI}{2L} N'_\xi N'_\xi^3 + \frac{GA_c L}{2} N^2 N^3 & \\ \frac{EA}{2L} (N'_\xi^3)^2 & \frac{GA_c}{2L} (N'_\xi^3)^2 & \\ & \frac{EI}{2L} (N'_\xi^3)^2 + \frac{GA_c L}{2} (N^3)^2 & \end{array} \right]$$

Notar que todos los términos a integrar son polinomios en ξ , luego se pueden integrar en forma analítica sin problemas. Notar además el orden de los polinomios a integrar:

de 2do orden para productos de derivadas entre sí

de 3er orden para producto de función y derivada

de 4to orden para productos de funciones entre sí

Recordar que si se integra numéricamente con dos puntos de integración se puede integrar exactamente un polinomio cúbico. De lo cual surge que si se integra con dos puntos de integración se integrará en forma exacta todos los términos salvo los asociados a productos de funciones nodales entre sí (términos que relacionan las rotaciones entre sí, asociados al corte transversal). Por ejemplo la integral exacta de $(N^1)^2$ es $\frac{4}{15}$ e integrando con dos puntos es $\frac{2}{9}$, lo que es un 20% menos que la integral exacta.

Por otro lado, experimentos numéricos primero y desarrollos teóricos posteriores mostraron que era conveniente una sub-integración de los términos asociados al corte a los fines de evitar el bloqueo numérico. El bloqueo numérico se produce debido a una imposibilidad de las funciones de forma de representar correctamente el comportamiento de todas las variables con el consiguiente aumento de la rigidez asociado a un incremento espurio de la energía de deformación asociada al corte transversal.

Usando integración numérica con dos puntos de integración se tiene

$$\left[\begin{array}{cccccc} \frac{EA}{2L} \frac{14}{3} & \frac{GA_c}{2L} \frac{14}{3} & \frac{GA_c}{2} (-1) & \frac{EA}{2L} \left(-\frac{16}{3}\right) & \frac{GA_c}{3L} \left(-\frac{16}{3}\right) & \frac{GA_c}{2L} \left(-\frac{4}{3}\right) \\ & & \frac{EI}{2L} \frac{14}{3} + \frac{GA_c L}{2} \frac{2}{9} & & \frac{EI}{2L} \left(-\frac{16}{3}\right) + \frac{GA_c L}{2} \frac{2}{9} & \\ & & \frac{EA}{2L} \frac{32}{3} & & \frac{GA_c}{2L} \frac{32}{3} & \frac{GA_c}{2L} (0) \\ & & & & & \frac{EI}{2L} \frac{32}{3} + \frac{GA_c L}{2} \frac{8}{9} \\ \\ \frac{EA}{2L} \left(\frac{2}{3}\right) & \frac{GA_s}{2L} \left(\frac{2}{3}\right) & \frac{GA_c}{2} \left(\frac{1}{3}\right) & & & \\ & & \frac{EI}{2L} \left(\frac{2}{3}\right) + \frac{GA_c L}{2} \left(-\frac{1}{9}\right) & \\ \frac{EA}{2L} \left(-\frac{16}{3}\right) & \frac{GA_c}{2L} \left(-\frac{16}{3}\right) & \frac{GA_c}{2L} \left(-\frac{4}{3}\right) & & & \\ & & \frac{EI}{2L} \left(-\frac{16}{3}\right) + \frac{GA_c L}{2} \frac{2}{9} & & \\ \frac{EA}{2L} \frac{14}{3} & \frac{GA_c}{2L} \frac{14}{3} & \frac{EI}{2L} \frac{14}{3} + \frac{GA_c L}{2} \frac{2}{9} & & & \end{array} \right]$$

Notar que la solución exacta de las ecuaciones homogéneas de la viga de Timoshenko, requiere una aproximación cúbica para el desplazamiento y cuadrática para el corte, por lo que el elemento desarrollado no resuelve exactamente los problemas, por lo cual, si el objetivo es obtener la solución exacta, es necesario usar más de un elemento finito por tramo de viga (a diferencia de la teoría clásica). Una segunda posibilidad es utilizar una interpolación cúbica para el desplazamiento transversal (por ejemplo utilizando cuatro nudos para el desplazamiento y sólo 3 para el giro). Por otro lado dado que los nudos internos no se comparten con otros elementos, es posible previo al ensamble eliminar dichos grados de libertad usando “condensación”, con lo cual sólo permanecen como grados de libertad los de los nudos extremos, en tal caso la matriz de rigidez resulta de 4×4 (viga continua) y coincide con la matriz de rigidez (incluyendo deformaciones por corte) obtenida en los cursos de cálculo matricial de estructuras.

4.6.2. Ejercicio:

Calcular la matriz de rigidez de un elemento de viga de dos nudos (sólo flexión, sin axial) utilizando un único punto de integración

$$\begin{aligned} v(x) &= [N^1(\xi) u^1 + N^2(\xi) u^2] \\ \theta(x) &= [N^1(\xi) \theta^1 + N^2(\xi) \theta^2] \end{aligned}$$

Donde las funciones de forma son:

$$\begin{aligned} N^1(\xi) &= \frac{1}{2}(1-\xi) \\ N^2(\xi) &= \frac{1}{2}(\xi+1) \end{aligned}$$

y cuyas derivadas (constantes) valen

$$\begin{aligned} N'_{\xi}^1 &= -\frac{1}{2} & N'_{\xi}^2 &= +\frac{1}{2} \\ N'_x^1 &= -\frac{1}{L} & N'_x^2 &= +\frac{1}{L} \end{aligned}$$

La matriz \mathbf{B} resulta (evaluada en $\xi = 0$)

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} & 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{L} & +\frac{1}{2} & \frac{1}{L} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

En tanto que la matriz de rigidez resulta del producto

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= L \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ -\frac{1}{L} & +\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} EI & 0 \\ 0 & GA_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} & 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{L} & +\frac{1}{2} & \frac{1}{L} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{GA_c}{L} & -\frac{GA_{0c}}{2} & -\frac{GA_c}{2} & \frac{GA_c}{2} \\ -\frac{GA_c}{L} & \frac{EI}{L} + \frac{GA_c L}{2} & \frac{GA_c L}{2} & -\frac{EI}{L} + \frac{GA_c L}{2} \\ -\frac{GA_c^2}{2} & \frac{GA_c}{2} & \frac{GA_c}{2} & \frac{GA_c}{2} \\ \frac{GA_c^2}{2} & -\frac{EI}{L} + \frac{GA_c L}{2} & \frac{GA_c L}{2} & \frac{EI}{L} + \frac{GA_c L}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4.7. Problemas de convección-difusión

Consideremos la siguiente ecuación diferencial (no autoadjunta)

$$\frac{d}{dx} \left[\rho u \phi - \Gamma \frac{d\phi}{dx} \right] - q = 0 \quad (4.5)$$

con u la velocidad conocida, en este caso unidimensional u debe ser constante.

Las condiciones de contorno (extremos del dominio) admisibles son:

$$\phi = \bar{\phi} \quad \text{o} \quad \rho u \phi - \Gamma \frac{d\phi}{dx} = \bar{\sigma}$$

es decir que en los extremos o se conoce ϕ o se conoce el flujo σ . Con el objetivo de exemplificar el tratamiento de las condiciones de contorno en un dominio de longitud L , supondremos que ϕ es conocido en $x = 0$ y que σ es conocido en $x = L$.

Si subdividimos el dominio en N segmentos y proponemos entonces una aproximación para la variable ϕ en el dominio en función de las variables nodales ϕ^I ($I = 0..N$)

$$\phi(x) = \sum_{I=0}^N \varphi^I(x) \phi^I \quad (4.6)$$

Reemplazando en la expresión 4.5, se obtiene

$$\sum_{I=0}^N \frac{d}{dx} \left[\rho u \varphi^I(x) - \Gamma \frac{d\varphi^I(x)}{dx} \right] \phi^I - q = r(x)$$

$$\sum_{I=0}^N \left[\rho u \frac{d\varphi^I(x)}{dx} - \Gamma \frac{d^2\varphi^I(x)}{dx^2} \right] \phi^I - q = r(x) \quad (4.7)$$

La última expresión es el “residuo” ($r(x)$), y es lo que el método numérico intentará **minimizar** para obtener una solución aproximada del problema. Por otro lado no deben olvidarse las condiciones de contorno, que pueden escribirse

$$\bar{\phi} - \sum_{I=0}^N \varphi^I(x)|_{x=L} \phi^I = s_0 \quad (4.8)$$

$$\bar{\sigma} - \sum_{I=0}^N \left[\rho u \varphi^I(x) - \Gamma \frac{d\varphi^I(x)}{dx} \right]_{x=L} \phi^I = s_L \quad (4.9)$$

Definido entonces el residuo, el objetivo de máxima sería lograr que dicho residuo se anulara en todo punto, esto normalmente no es posible, y lo que se busca es anularlo en promedio, es decir en forma integral. El método de residuos ponderados propone definir una función de ponderación $w(x)$

$$w(x) = \sum_{I=0}^N W^I(x) \beta^I$$

donde $W^I(x)$ son funciones elegidas adecuadamente y β^I son parámetros arbitrarios. Definida esta función se propone que

$$\int_L r(x) w(x) dx + s_0 w_0 + s_L w_L = 0 \quad (4.10)$$

para todo valor de los parámetro β^I . Como se ve en la definición de la función de peso, la cantidad de parámetros arbitrarios es igual al número de incógnitas del problema ϕ^I . Entre las aproximaciones habituales se exige que la aproximación a ϕ satisfaga en forma exacta las condiciones de borde sobre la propia variable (condiciones esenciales), en nuestro caso eso significa que la aproximación satisface exactamente la primera condición de contorno, lo que conduce a que

$$\begin{aligned} \phi^1 &= \bar{\phi} \\ s_0 &= 0 \end{aligned}$$

Luego nuestra aproximación se puede escribir

$$\phi(x) = \varphi^0(x) \bar{\phi} + \sum_{I=1}^N \varphi^I(x) \phi^I \quad (4.11)$$

donde hemos separado el primer término de la sumatoria que ahora es conocido. Este primer término se conoce como solución particular y satisface en forma exacta las condiciones de contorno esenciales, el resto de la aproximación satisface las mismas condiciones de contorno pero en forma homogénea. Simétricamente en la función de ponderación se elimina el primer sumando para mantener igual la cantidad de incógnitas ϕ^I y la cantidad de parámetros arbitrarios β^I .

Reemplazando entonces la aproximación a ϕ y la función de ponderación en la integral ponderada, tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{J=1}^N \beta^J \left\{ \int_L W^J r(x) dx + W_L^J s_L \right\} &= 0 \\ \sum_{J=1}^N \beta^J \left\{ \int_L W^J \left[\sum_{I=0}^N \left(\rho u \frac{d\varphi^I(x)}{dx} - \Gamma \frac{d^2\varphi^I(x)}{dx^2} \right) \phi^I - q \right] dx + W_L^J s_L \right\} &= 0 \end{aligned}$$

Lo que se pide es que lo encerrado entre llaves sea cero, es decir que independientemente del valor de los parámetros arbitrarios β^I , se satisface la igualdad. Esto implica entonces N condiciones

(una para cada W^J) en función de las N incógnitas ϕ^I . Resulta entonces un sistema lineal de ecuaciones

$$\mathbf{A} \Phi + \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

donde Φ es un vector de dimensión N que agrupa a las incógnitas ϕ^I , la matriz de coeficientes \mathbf{A} se calcula como

$$A_{JI} = \int_L W^J \left[\rho u \frac{d\varphi^I(x)}{dx} - \Gamma \frac{d^2\varphi^I(x)}{dx^2} \right] dx + W_L^J \left[-\rho u \varphi^I(x) + \Gamma \frac{d\varphi^I(x)}{dx} \right]_{x=L} \quad (4.12)$$

$$F_J = \int_L W^J \left[\left(\rho u \frac{d\varphi^0(x)}{dx} - \Gamma \frac{d^2\varphi^0(x)}{dx^2} \right) \bar{\phi} - q \right] dx + W_L^J \left[\bar{\sigma} - \left(\rho u \varphi^0(x) - \Gamma \frac{d\varphi^0(x)}{dx} \right) \right]_{x=L} \quad (4.13)$$

La elección de la función de ponderación conduce a formulaciones diferentes. En principio las $W^I(x)$ sólo requieren como condición indispensable la de independencia lineal, sin embargo una adecuada elección es crucial desde el punto de vista numérico.

La aproximación de Galerkin (método de elementos finitos estándar) propone usar como función de peso una forma idéntica a la función de interpolación de la variable (4.11)

$$w(x) = \sum_{I=1}^N \varphi^I(x) \beta^I$$

Donde N es aquí el número de puntos en la grilla, es decir la expresión anterior es formal, no estamos utilizando un único elemento en toda la grilla.

El término de la solución particular (como se explicara antes) por supuesto no aparece aquí.

Utilizando una grilla con puntos igualmente espaciados (incluyendo los puntos extremos). Las ecuaciones podrían calcularse de evaluar consistentemente las expresiones 4.12 y 4.13. Sin embargo resulta más conveniente realizar previamente una integración por partes, en este caso esta integración por partes se restringe al término difusivo que es el que tiene la derivada de mayor orden. El objetivo de esta integración por partes como ya hemos visto es disminuir el orden de derivación que aparecen en las ecuaciones discretas a resolver.

$$\begin{aligned} \sum_{J=1}^N \beta^J \left\{ \int_L W^J \left[\sum_{I=0}^N \left(\rho u \frac{d\varphi^I(x)}{dx} - \Gamma \frac{d^2\varphi^I(x)}{dx^2} \right) \phi^I - q \right] dx + W_L^J s_L \right\} &= 0 \\ \sum_{J=1}^N \beta^J \left\{ \sum_{I=0}^N \left[\int_L \left(W^J \rho u \frac{d\varphi^I}{dx} + \frac{dW^J}{dx} \Gamma \frac{d\varphi^I}{dx} \right) dx - \left(W^J \Gamma \frac{d\varphi^I}{dx} \right)_0^L \right] \phi^I - \int_L W^J q dx + W_L^J s_L \right\} &= 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

Al integrar por partes hemos disminuido entonces el máximo orden de derivación de la variable ϕ , con lo que ahora alcanza con proponer una aproximación continua para ϕ , esto ha sido a costa de aumentar el orden de derivación de la función de peso (que ahora deberá ser derivable, es decir continua) y de la aparición de términos sobre el contorno.

Para fijar ideas, supongamos la aproximación más sencilla que corresponde a una interpolación lineal entre nudos (4.1). En un intervalo cualquiera J la variable ϕ y la función de peso resultan

$$\begin{aligned} \phi(x) &= (1 - \xi) \phi^J + \xi \phi^{J+1} \\ w(x) &= (1 - \xi) \beta^J + \xi \beta^{J+1} \end{aligned}$$

Reemplazando en (4.14), y separando la integral sobre el segmento J tenemos

$$\sum_{K=J-1}^J \beta^K \left\{ \sum_{I=J-1}^J \int_{x^{J-1}}^{x^J} \left(\varphi^K \rho u \frac{d\varphi^I}{dx} + \frac{d\varphi^K}{dx} \Gamma \frac{d\varphi^I}{dx} \right) dx \phi^I - \int_{x^{I-1}}^{x^I} \varphi^K q dx \right\} = Int(J)$$

Llamando

$$\begin{aligned} H_{KI} &= C_{KI} + D_{KI} \\ q^K &= \int_{x^{I-1}}^{x^I} \varphi^K q \, dx \end{aligned}$$

Donde

$$C_{KI} = \int_{x^{J-1}}^{x^J} \varphi^K \rho u \frac{d\varphi^I}{dx} dx \quad (4.15)$$

$$D_{KI} = \int_{x^{J-1}}^{x^J} \frac{d\varphi^K}{dx} \Gamma \frac{d\varphi^I}{dx} dx \quad (4.16)$$

Luego

$$\begin{aligned} Int(J) &= \sum_{K=J-1}^J \beta^K \left\{ \sum_{I=J-1}^J (C_{KI} + D_{KI}) \phi^I - q^K \right\} \\ &= [\beta^{J-1} \quad \beta^J] \left\{ \begin{bmatrix} H_{J-1,J-1} & H_{J-1,J} \\ H_{J,J-1} & H_{J,J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi^{J-1} \\ \phi^J \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f^{J-1} \\ f^J \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

El resto de los términos (integrales sobre el contorno resultan)

$$Int(C) = \sum_{J=1}^N \beta^J \left\{ \sum_{I=0}^N - \left(\varphi^J \Gamma \frac{d\varphi^I}{dx} \right)_0^L \phi^I + \varphi_L^J \left[\bar{\sigma} - \sum_{I=0}^N \left(\rho u \varphi^I(x) - \Gamma \frac{d\varphi^I(x)}{dx} \right)_{x=L} \phi^I \right] \right\}$$

Debe notarse aquí que $w(x=0) = 0$, además todas las $\varphi^J(x=L) = 0$, salvo $\varphi^N(x=L) = 1$, luego

$$\beta^N \left\{ \sum_{I=N-1}^N -\Gamma \frac{d\varphi^I}{dx} \phi^I + \bar{\sigma} - \rho u \phi^N + \sum_{I=N-1}^N \Gamma \frac{d\varphi_L^I}{dx} \phi^I \right\} = \beta^N \{ \bar{\sigma} - \rho u \phi^N \}$$

La integral de residuos ponderados (4.14) puede escribirse ahora

$$\sum_{J=1}^N Int(J) + Int(C) = 0$$

$$\sum_{J=1}^N [\beta^{J-1} \quad \beta^J] \left\{ \begin{bmatrix} H_{J-1,J-1} & H_{J-1,J} \\ H_{J,J-1} & H_{J,J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi^{J-1} \\ \phi^J \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f^{J-1} \\ f^J \end{bmatrix} \right\} + \beta^N \{ \bar{\sigma} - \rho u \phi^N \} = 0$$

Esta expresión debe verse como un conjunto de N ecuaciones (una para cada β^J) con N incógnitas (las ϕ^I). La matriz de coeficientes resulta de ensamblar las matrices “elementales” \mathbf{H} . A esta última contribuye también en la posición (N,N) el término del contorno $-\rho u$. El vector término independiente resulta de ensamblar los vectores “elementales” f , también contribuyen aquí los términos asociados a la solución particular (la primera columna de la primera matriz elemental \mathbf{H} , multiplicada por $\phi^0 = \bar{\phi}$).

Esta aproximación corresponde a una de las posibilidades del **método de Elementos Finitos**. La matriz \mathbf{H} elemental consta de dos partes, \mathbf{C} debida al término convectivo y es no-simétrica y \mathbf{D} debida al término difusivo que es simétrica. La aproximación de Galerkin es óptima para problemas difusivos puros (problemas espacialmente elípticos) asociado a operadores auto-adjuntos (matrices simétricas). Para problemas dominantemente convectivos se usan normalmente aproximaciones diferentes.

Para la aproximación propuesta, la matriz elemental resulta

$$\mathbf{H} = \frac{\rho u}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\Gamma}{\Delta x} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio

1-Sea el problema de convección difusión gobernado por la ecuación 4.5. Con una aproximación lineal para la variable (4.1) en cada intervalo

$$\phi(x) = (1 - \xi)\phi^I + \xi\phi^{I+1}$$

$$\xi = \frac{(x - x^I)}{x^{I+1} - x^I} = \frac{(x - x^I)}{\Delta x} \quad 0 \leq \xi \leq 1$$

Usar el método de residuos ponderados con función de ponderación

$$w(x) = [(1 - \xi) + \alpha\xi(1 - \xi)]\beta^J + [\xi - \alpha\xi(1 - \xi)]\beta^{J+1}$$

donde α es un parámetro fijo que puede variar entre 0 y 1. Este permite dar más peso al residuo en la parte inicial del intervalo (una forma de upwinding). De hecho para $\alpha = 0$, se obtiene la aproximación habitual de **Galerkin** y para $\alpha = 1$ se obtiene una aproximación conocida como **Petrov-Galerkin**.

- Graficar las funciones de peso asociadas a β^J en el intervalo $[x^{J-1}, x^{J+1}]$ para los valores $\alpha = 0, \frac{1}{2}, 1$.
- Calcular la integral del residuo en un intervalo genérico $[x^I, x^{I+1}]$, expresado en la forma

$$\begin{bmatrix} \beta^{J-1} & \beta^J \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} H_{J-1,J-1} & H_{J-1,J} \\ H_{J,J-1} & H_{J,J} \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} \hat{H}_{J-1,J-1} & \hat{H}_{J-1,J} \\ \hat{H}_{J,J-1} & \hat{H}_{J,J} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \phi^{J-1} \\ \phi^J \end{bmatrix}$$

- Escribir la ecuación de balance asociada a un β^J cualquiera para los 3 valores de α indicados arriba.

4.8. Análisis de cables

En general el análisis de estructuras de cables implica importantes desplazamientos y pretensiones, por lo cual es necesario plantear el equilibrio en la configuración deformada e incluir el efecto de las tensiones iniciales. En forma similar a una barra articulada los cables no tienen rigidez flexional apreciable y sólo transmiten esfuerzos normales. Más aún, si no se considera el peso propio es inmediato asimilar el comportamiento de un sector de cable al de una barra articulada, considerando cada tramo de cable entre dos cargas como una barra. Como una introducción al tema aquí se mostrará con un ejemplo sencillo los principales elementos a tener en cuenta. Supongamos entonces una estructura sencilla de un cable (ver figura) bajo tres cargas puntuales, geométricamente simétrica respecto al centro. Definamos la geometría inicial del cable, puesto que el cable no tiene tensión inicial, cualquier configuración está en equilibrio y lo único importante es la longitud inicial del cable. Definamos entonces la configuración inicial como formada por dos tramos rectos de la misma longitud (ver figura) y supongamos que las cargas aplicadas corresponden a la mitad de cada tramo y a la unión de los dos tramos. De esta forma el cable ha sido discretizado por cuatro elementos de barra-cable de igual longitud inicial

$$L_o = [1^2 + 0,5^2]^{\frac{1}{2}}$$

Podemos entonces definir las coordenadas iniciales o originales de los nudos

Nudo	1	2	3	4	5
X_1	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0
X_2	0.0	-0.5	-1.0	-0.5	0.0

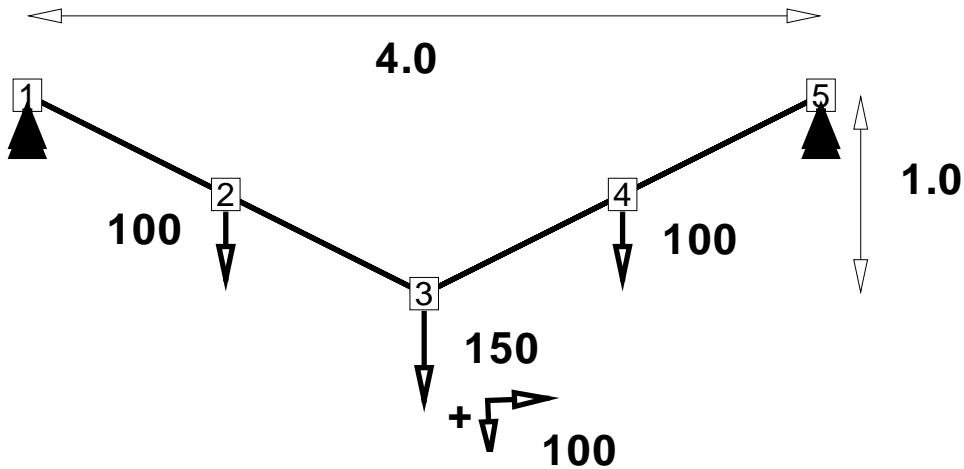


Figura 6 Estructura de cables

Dado un estado de solicitudes definido por las cargas en los 3 nudos libres de desplazarse (dos componentes por nudo),

$$\mathbf{f}^T = [p_1^2, p_2^2, p_1^3, p_2^3, p_1^4, p_2^4]$$

Y dada una configuración deformada, definida por los desplazamientos de los nudos a partir de la configuración original

$$\mathbf{u}^T = [u_1^2, u_2^2, u_1^3, u_2^3, u_1^4, u_2^4]$$

o directamente las coordenadas nodales actualizadas

$$x_i^I = X_i^I + u_i^I \quad (4.17)$$

donde X_i^I es la coordenada original del nudo I en la dirección i y x_i^I es la coordenada actual del nudo I en la dirección i .

Para saber si la configuración actualizada corresponde al equilibrio utilizamos el Principio de Trabajos Virtuales, el cual puede escribirse

$$\sum_{K=1}^{NB} N^K \delta\varepsilon^K L_0^K = \sum_{N=1}^{NP} \sum_{i=1}^2 p_i^N \delta u_i^N \quad (4.18)$$

donde N^K , $\delta\varepsilon^K$, y L_0^K son respectivamente el esfuerzo axial, la deformación virtual y la longitud inicial de la tramo K , en tanto que NB es el número de tramos en que se ha dividido al cable. En el segundo miembro aparece el trabajo virtual de las fuerzas externas y NP es el número de nudos donde se aplican cargas.

Consideremos un tramo cualquiera de cable, por ejemplo el 1-2, y evaluemos el trabajo virtual interno que allí se produce. Para ello tenemos que evaluar:

La longitud actual:

$$\begin{aligned} L &= [(\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1) \cdot (\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1)]^{\frac{1}{2}} \\ &= [(\mathbf{X}^2 - \mathbf{X}^1 + \mathbf{u}^2 - \mathbf{u}^1) \cdot (\mathbf{X}^2 - \mathbf{X}^1 + \mathbf{u}^2 - \mathbf{u}^1)]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4.19)$$

La deformación longitudinal

$$\varepsilon = \frac{L}{L_0} - 1 \quad (4.20)$$

El esfuerzo axial

$$N = EA\varepsilon \quad (4.21)$$

La deformación virtual

$$\begin{aligned}\delta\varepsilon &= \frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{u}}\delta\mathbf{u} = \frac{1}{L_0} \left(\frac{\partial L}{\partial\mathbf{u}^2}\delta\mathbf{u}^2 + \frac{\partial L}{\partial\mathbf{u}^1}\delta\mathbf{u}^1 \right) = \frac{1}{L_0} \frac{\partial L}{\partial(\mathbf{u}^2 - \mathbf{u}^1)} (\delta\mathbf{u}^2 - \delta\mathbf{u}^1) \\ \frac{\partial L}{\partial(\mathbf{u}^2 - \mathbf{u}^1)} &= \frac{1}{L} (\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1) = \mathbf{t} \quad (\text{dirección actual del tramo}) \\ \delta\varepsilon &= \frac{1}{L_0} \frac{1}{L} (\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1) \cdot (\delta\mathbf{u}^2 - \delta\mathbf{u}^1) = \frac{1}{L_0} \mathbf{t} \cdot (\delta\mathbf{u}^2 - \delta\mathbf{u}^1)\end{aligned}\quad (4.22)$$

En consecuencia la contribución de una barra al trabajo virtual interno resulta

$$TVI = N \frac{1}{L_0} \mathbf{t} \cdot (\delta\mathbf{u}^2 - \delta\mathbf{u}^1) L_0 = (\delta\mathbf{u}^2 - \delta\mathbf{u}^1) \cdot \mathbf{t} N \quad (4.23)$$

En el ejemplo considerado las contribuciones de las tres barras resultan (notar que $\delta\mathbf{u}^1 = \delta\mathbf{u}^5 = 0$, pues $\mathbf{u}^1 = \mathbf{u}^5 = \mathbf{0}$)

$$TVI = (\delta\mathbf{u}^2) \cdot \mathbf{t}_1 N^1 + (\delta\mathbf{u}^3 - \delta\mathbf{u}^2) \cdot \mathbf{t}_2 N^2 + (\delta\mathbf{u}^4 - \delta\mathbf{u}^3) \cdot \mathbf{t}_3 N^3 - \delta\mathbf{u}^4 \cdot \mathbf{t}_4 N^4 \quad (4.24)$$

sacando factor los $\delta\mathbf{u}^I$, la expresión anterior puede escribirse (notar que $\delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{t} = \delta\mathbf{u}^T \mathbf{t}$)

$$TVI = [\delta\mathbf{u}^{2T}, \delta\mathbf{u}^{3T}, \delta\mathbf{u}^{4T}] \begin{bmatrix} N^1\mathbf{t}_1 - N^2\mathbf{t}_2 \\ N^2\mathbf{t}_2 - N^3\mathbf{t}_3 \\ N^3\mathbf{t}_3 - N^4\mathbf{t}_4 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

a su vez el trabajo virtual externo puede escribirse

$$TVE = [\delta\mathbf{u}^{2T}, \delta\mathbf{u}^{3T}, \delta\mathbf{u}^{4T}] \begin{bmatrix} \mathbf{p}^2 \\ \mathbf{p}^3 \\ \mathbf{p}^4 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

haciendo la diferencia entre la segunda y la primera e igualando a cero

$$[\delta\mathbf{u}^{2T}, \delta\mathbf{u}^{3T}, \delta\mathbf{u}^{4T}] \left\{ \begin{bmatrix} N^2\mathbf{t}_2 - N^1\mathbf{t}_1 \\ N^3\mathbf{t}_3 - N^2\mathbf{t}_2 \\ N^4\mathbf{t}_4 - N^3\mathbf{t}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{p}^2 \\ \mathbf{p}^3 \\ \mathbf{p}^4 \end{bmatrix} \right\} = 0 \quad (4.27)$$

Como los $\delta\mathbf{u}^I$ son arbitrarios, para asegurar la igualdad, cada una de las ecuaciones entre llaves debe anularse. Puede verse fácilmente que estas ecuaciones no son otra cosa que las ecuaciones de equilibrio en cada nudo.

Las ecuaciones planteadas son no-lineales en los desplazamientos, pues tanto N^K como \mathbf{t}_K dependen en forma no-lineal de los desplazamientos. Los problemas no lineales se resuelven habitualmente en forma incremental. Un forma común es escribir las acciones externas en función de un escalar λ

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}^2 \\ \mathbf{p}^3 \\ \mathbf{p}^4 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{f}^2 \\ \mathbf{f}^3 \\ \mathbf{f}^4 \end{bmatrix} = \lambda \mathbf{f} \quad (4.28)$$

y obtener la solución (\mathbf{u}_i) para valores crecientes de λ_i partiendo de la posición de equilibrio sin tensiones ($\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$, $\lambda_0 = 0$). Supongamos entonces que se conoce una posición de equilibrio (\mathbf{u}_i , λ_i) y queremos conocer una nueva posición de equilibrio ($\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i + \Delta\mathbf{u}$, $\lambda_{i+1} = \lambda_i + \Delta\lambda$),

donde λ_{i+1} es dato e interesa determinar \mathbf{u}_{i+1} . Es decir que se ha llegado a un punto i donde se satisface

$$\begin{aligned} [\delta\mathbf{u}^{2T}, \delta\mathbf{u}^{3T}, \delta\mathbf{u}^{4T}] \left\{ \begin{bmatrix} N^2\mathbf{t}_2 - N^1\mathbf{t}_1 \\ N^3\mathbf{t}_3 - N^2\mathbf{t}_2 \\ N^4\mathbf{t}_4 - N^3\mathbf{t}_3 \end{bmatrix}_i + \lambda_i \begin{bmatrix} \mathbf{f}^2 \\ \mathbf{f}^3 \\ \mathbf{f}^4 \end{bmatrix} \right\} &\approx 0 \\ [\delta\mathbf{u}]^T \{\mathbf{g}(\mathbf{u}_i) + \lambda_i \mathbf{f}\} &\approx 0 \end{aligned} \quad (4.29)$$

y se busca un nuevo \mathbf{u}_{i+1} que satisfaga

$$[\delta\mathbf{u}]^T \{\mathbf{g}(\mathbf{u}_{i+1}) + \lambda_{i+1} \mathbf{f}\} \approx 0 \quad (4.30)$$

Para ello se utiliza un esquema predictor-corrector, es decir se propone un valor inicial (predicción) de \mathbf{u}_{i+1} y luego se corrige hasta convergencia. Uno de los esquemas predictor-corrector más utilizados es el de Newton-Raphson, el cual consiste en realizar la siguiente aproximación

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}_{i+1}) = \mathbf{g}(\mathbf{u}_i) + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}}|_i \Delta \mathbf{u} = \mathbf{g}(\mathbf{u}_i) - \mathbf{K}_i \Delta \mathbf{u} \quad (4.31)$$

donde se ha introducido a

$$\mathbf{K} = -\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} \quad (4.32)$$

que es el ‘Hessiano’ o derivada del sistema de ecuaciones no-lineales o simplemente la matriz tangente. reemplazando en la anterior

$$[\delta\mathbf{u}]^T \{\mathbf{g}(\mathbf{u}_i) - \mathbf{K}_i \Delta \mathbf{u} + \lambda_{i+1} \mathbf{f}\} \approx 0$$

de donde la predicción resulta

$$\Delta \mathbf{u} = [\mathbf{K}_i]^{-1} [\mathbf{g}(\mathbf{u}_i) + \lambda_{i+1} \mathbf{f}] = [\mathbf{K}_i]^{-1} [\mathbf{r}] \quad (4.33)$$

donde \mathbf{r} es el residuo que se quiere anular

Veamos como obtener la matriz tangente para un elemento de cable o barra articulada. Notar que hasta ahora hemos escrito

$$TVI = \sum_{K=1}^{NB} N^K \delta\varepsilon^K L_0^K = -[\delta\mathbf{u}]^T \mathbf{g}(\mathbf{u}) \quad (4.34)$$

Para cada barra interesa calcular su contribución a

$$-[\delta\mathbf{u}]^T \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}}|_i \Delta \mathbf{u} = [\delta\mathbf{u}]^T \mathbf{K}_i \Delta \mathbf{u} = \frac{\partial(TVI)}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u} \quad (4.35)$$

Evaluemos entonces

$$\begin{aligned} L_0 \frac{\partial(N \delta\varepsilon)}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u} &= L_0 \left[\frac{\partial N}{\partial \mathbf{u}} \delta\varepsilon + N \frac{\partial \delta\varepsilon}{\partial \mathbf{u}} \right] \Delta \mathbf{u} \\ &= L_0 \delta\varepsilon \frac{\partial N}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u} + N L_0 \frac{\partial \delta\varepsilon}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u} \end{aligned} \quad (4.36)$$

La derivada en el primer término es

$$\frac{\partial N}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial EA\varepsilon}{\partial \mathbf{u}} = EA \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{u}} \quad (4.37)$$

a su vez la derivada $\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u} = \Delta\varepsilon$ es formalmente idéntica a $\delta\varepsilon = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u}$ (expresión 4.22) es decir

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u} = \frac{1}{L_0} \mathbf{t} \cdot (\Delta \mathbf{u}^2 - \Delta \mathbf{u}^1)$$

Con lo cual una primera contribución a \mathbf{K}

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{u}^T \mathbf{K}_M \Delta \mathbf{u} &= L_0 \delta \varepsilon \frac{\partial N}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u} = (\delta \mathbf{u}^2 - \delta \mathbf{u}^1) \cdot \mathbf{t} \frac{EA}{L_0} \mathbf{t} \cdot (\Delta \mathbf{u}^2 - \Delta \mathbf{u}^1) \\ &= (\delta \mathbf{u}^{1T}, \delta \mathbf{u}^{2T}) \frac{EA}{L_0} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \mathbf{t}^T & -\mathbf{t} \mathbf{t}^T \\ -\mathbf{t} \mathbf{t}^T & \mathbf{t} \mathbf{t}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}^1 \\ \Delta \mathbf{u}^2 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (4.38)$$

Notar que la matriz \mathbf{K}_M obtenida es formalmente idéntica a la matriz de rigidez de la barra en un análisis lineal, la diferencia es que aquí \mathbf{t} corresponde a la geometría actual y no a la inicial. Esta primera contribución se denomina ‘Matriz de rigidez material’ (\mathbf{K}_M).

La segunda contribución resulta de

$$\delta \mathbf{u}^T \mathbf{K}_G \Delta \mathbf{u} = NL_0 \frac{\partial \delta \varepsilon}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u}$$

que será no nula sólo si existen esfuerzos N , esta componente \mathbf{K}_G se denomina matriz de rigidez ‘geométrica’, de ‘carga-geometría’ o debida a los ‘esfuerzos iniciales’. Para evaluarla debemos obtener

$$\frac{\partial \delta \varepsilon}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u} = \frac{\partial \left[\frac{1}{L_0} (\delta \mathbf{u}^2 - \delta \mathbf{u}^1)^T \mathbf{t} \right]}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u} = \frac{1}{L_0} (\delta \mathbf{u}^2 - \delta \mathbf{u}^1)^T \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u}\quad (4.39)$$

A su vez

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u} = \frac{\partial \left(\frac{\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1}{L} \right)}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u} = \frac{1}{L} [\mathbf{1} - \mathbf{t} \mathbf{t}^T] \Delta \mathbf{u}\quad (4.40)$$

con lo cual

$$L_0 N \frac{\partial \delta \varepsilon}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u} = (\delta \mathbf{u}^2 - \delta \mathbf{u}^1)^T \frac{N}{L} [\mathbf{1} - \mathbf{t} \mathbf{t}^T] (\Delta \mathbf{u}^2 - \Delta \mathbf{u}^1)\quad (4.41)$$

de donde las segunda contribución a la matriz de rigidez resulta

$$\delta \mathbf{u}^T \mathbf{K}_G \Delta \mathbf{u} = (\delta \mathbf{u}^{1T}, \delta \mathbf{u}^{2T}) \frac{N}{L} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{1} - \mathbf{t} \mathbf{t}^T & -\mathbf{1} + \mathbf{t} \mathbf{t}^T \\ -\mathbf{1} + \mathbf{t} \mathbf{t}^T & \mathbf{1} - \mathbf{t} \mathbf{t}^T \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}^1 \\ \Delta \mathbf{u}^2 \end{bmatrix}\quad (4.42)$$

A la suma de las matrices $\mathbf{1} - \mathbf{t} \mathbf{t}^T$ se la denomina matriz de proyección ortogonal, pues el producto de esta matriz por un vector \mathbf{v} cualquiera conduce a la proyección del vector \mathbf{v} sobre el plano normal a \mathbf{t} . Esto puede verse como quitarle a \mathbf{v} su componente en la dirección \mathbf{t} . La operación de quitarle a un vector \mathbf{v} su proyección v_t sobre \mathbf{t} , se hace habitualmente como

$$\begin{aligned}v_t &= \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{t}^T \mathbf{v} \\ \mathbf{v}_n &= \mathbf{v} - \mathbf{t} v_t = \mathbf{v} - \mathbf{t} (\mathbf{t}^T \mathbf{v}) = \mathbf{v} - \mathbf{t} \mathbf{t}^T \mathbf{v} = (\mathbf{1} - \mathbf{t} \mathbf{t}^T) \mathbf{v}\end{aligned}$$

La aparición de esta matriz se debe a que en 4.40 se está derivando un versor (vector unitario) y la dirección de esta derivada debe ser normal al versor, lo cual puede verse fácilmente a partir de que

$$\begin{aligned}\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} &= 1 \\ \frac{\partial (\mathbf{t} \cdot \mathbf{t})}{\partial \mathbf{u}} &= 2 \mathbf{t} \cdot \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \mathbf{u}} = 0\end{aligned}$$

4.8.1. Ejemplo

Supongamos que la sección del cable es $A = 1\text{cm}^2$ y el módulo de elasticidad es $E = 2 \times 10^6 \text{kg/cm}^2$. El cable sometido al siguiente estado de cargas

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} p_1^2 \\ p_2^2 \\ p_1^3 \\ p_2^3 \\ p_1^4 \\ p_2^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -100 \\ 0 \\ -150 \\ 0 \\ -100 \end{bmatrix} [\text{N}]$$

está en equilibrio para los siguientes desplazamientos:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_1^3 \\ u_2^3 \\ u_1^4 \\ u_2^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,073927 \\ -0,12672 \\ 0,00000 \\ 0,061802 \\ 0,073927 \\ -0,12672 \end{bmatrix} [\text{m}]$$

Si al sistema de cargas previos se le agregan en el punto central las siguientes

$$\Delta \begin{bmatrix} p_1^3 \\ p_2^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ -100 \end{bmatrix} [\text{N}]$$

Las matrices tangentes elementales son

$$\mathbf{K}^{1-2} = \begin{bmatrix} 1,2260 & -0,8295 & -1,2260 & 0,8295 \\ & 0,5616 & 0,8295 & -0,5616 \\ & & 1,2260 & -0,8295 \\ & & & 0,5616 \end{bmatrix} \times 10^6$$

$$\mathbf{K}^{2-3} = \begin{bmatrix} 1,6489 & -0,4781 & -1,6489 & 0,4781 \\ & 0,1389 & 0,4781 & -0,1389 \\ & & 1,6489 & -0,4781 \\ & & & 0,1389 \end{bmatrix} \times 10^6$$

$$\mathbf{K}^{3-4} = \begin{bmatrix} 1,6489 & 0,4781 & -1,6489 & -0,4781 \\ & 0,1389 & -0,4781 & -0,1389 \\ & & 1,6489 & 0,4781 \\ & & & 0,1389 \end{bmatrix} \times 10^6$$

$$\mathbf{K}^{4-5} = \begin{bmatrix} 1,2260 & 0,8295 & -1,2260 & -0,8295 \\ & 0,5616 & -0,8295 & -0,5616 \\ & & 1,2260 & 0,8295 \\ & & & 0,5616 \end{bmatrix} \times 10^6$$

La matriz global ensamblada es;

$$\mathbf{K}_i = \begin{bmatrix} 2,8749 & -1,3077 & -1,6489 & 0,4781 & & \\ & 0,7005 & 0,4781 & -0,1389 & & \\ & & 3,2978 & 0,0000 & -1,6489 & -0,4781 \\ & & & 0,2778 & -0,4781 & -0,1389 \\ & & & & 2,8749 & 1,3077 \\ & & & & & 0,7005 \end{bmatrix} \times 10^6$$

en tanto que los desplazamientos y los esfuerzos en las barras, una vez alcanzada convergencia son

$$\mathbf{u}_{i+1} = \begin{bmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_1^3 \\ u_2^3 \\ u_1^4 \\ u_2^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,045848 \\ -0,083259 \\ 0,004578 \\ 0,033147 \\ 0,065921 \\ -0,114780 \end{bmatrix} [\text{m}]$$

$$\begin{bmatrix} N^{1-2} \\ N^{2-3} \\ N^{3-4} \\ N^{4-5} \end{bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} 476,2 \\ 432,6 \\ 322,7 \\ 366,7 \end{bmatrix} [\text{N}]$$

4.8.2. Ejercicio

A partir de los desplazamientos indicados, calcular la configuración actual, los vectores \mathbf{t}_2 y \mathbf{t}_3 y comprobar el equilibrio del nudo 3

Capítulo 5 Problemas de valores en el contorno en 2 y 3 dimensiones

por F. Flores

5.1. Introducción

En el presente capítulo se presenta en forma resumida el conjunto de las ecuaciones de la mecánica que es de interés resolver en este curso. En general sólo se presentan las ecuaciones más relevantes y no se incluye su deducción, pues no es el objeto del curso y demandaría mucho espacio, por lo cual aquellos interesados en su deducción deben dirigirse a textos específicos.

Existen diferentes problemas en la mecánica cuyo comportamiento puede representarse por la ecuación de Helmholtz, que en su forma más sencilla conduce a la ecuación de Laplace. Este tipo de problemas se expresa en función de una variable escalar, lo que permite una primera aplicación del MEF, antes de abordar problemas donde la variable incógnita es vectorial.

5.2. Transferencia de calor

Recordemos primero el problema de transferencia de calor en 2 dimensiones. Definamos previamente el operador ∇ (nabla)

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{t}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \mathbf{t}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

aplicado sobre una función escalar u (la temperatura en nuestro caso) se obtiene el gradiente espacial de la misma

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x_1} \mathbf{t}_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \mathbf{t}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

La derivada direccional de u en una dirección cualquiera $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ que escribiremos $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ se calcula como

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \cdot \nu = \nabla^T u \cdot \nu = \frac{\partial u}{\partial x_1} \nu_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \nu_2$$

donde se ha escrito el producto punto entre dos vectores como el producto matricial de un vector fila (transpuesta del primer vector) y el segundo vector. La utilización de productos matriciales es una forma muy conveniente para el desarrollo del método de elementos finitos.

Una segunda magnitud física de interés en nuestros problemas de valores en el contorno es el flujo σ . El flujo es una función vectorial o un campo vectorial lo mismo que el gradiente.

Sea Ω un dominio cerrado con un contorno suave $\partial\Omega$ con normal saliente $\mathbf{n}(s)$ en cada punto de dicho contorno. El flujo que atraviesa el contorno en cada punto es:

$$\sigma_n(s) = \sigma(s) \cdot \mathbf{n}(s) = \sigma^T(s) \cdot \mathbf{n}(s)$$

si se desea evaluar el flujo total (neto) que ingresa o egresa en un subdominio cualquiera $\omega \subset \Omega$ basta integrar sobre el contorno del subdominio $\partial\omega$

$$\Sigma_\omega = \int_{\partial\omega} \sigma_n d\partial\omega$$

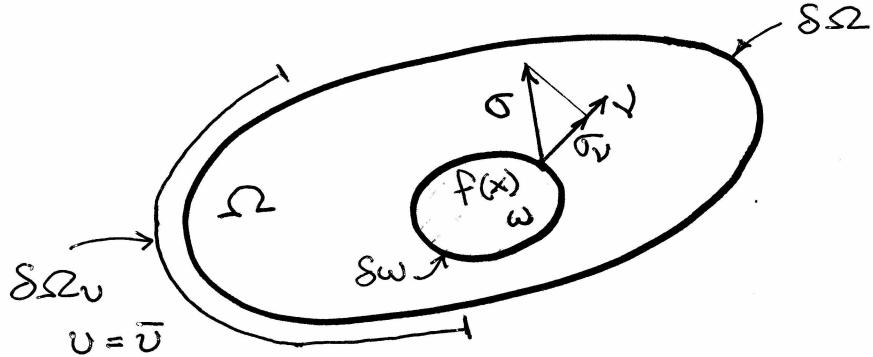


Figura 1 Conducción del calor en 2 dimensiones

dividiendo por el área (volumen) A_ω de ω y tomando límite para A_ω que tiende a 0, se obtiene (usando el teorema del valor medio del cálculo integral) la fórmula de la divergencia del campo vectorial σ en el punto $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$

$$\operatorname{div}(\sigma) = \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial x_2} = \nabla \cdot \sigma$$

como la densidad de flujo neto en el punto. El flujo total Σ_Ω a través del contorno de Ω se puede escribir

$$\Sigma_\Omega = \int_{\Omega} \nabla \cdot \sigma \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \sigma \cdot \mathbf{n} \, ds$$

En el caso general del teorema de la divergencia σ puede ser tanto un campo vectorial (tensor de 1er. orden) como un campo tensorial (2do. orden), en el segundo caso Σ es un vector.

Los problemas físicos que nos interesa resolver están gobernados por relaciones “constitutivas” (en el sentido de que dependen del material que “constituye” el dominio) lineales de la forma

$$\begin{aligned} \sigma(\mathbf{x}) &= -k(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x}) \quad k > 0 \quad \forall \mathbf{x} \\ \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix} &= -\mathbf{k} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

En la segunda expresión se ha generalizado la ley constitutiva al escribir el escalar k (conductividad o permeabilidad térmica) como un tensor de segundo orden \mathbf{k} . Esto permitiría tratar medios que tuvieran diferentes conductividades en diferentes direcciones del espacio. El caso isótropo se recupera escribiendo

$$\mathbf{k} = k \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

El principio de conservación (o ley de balance) establece que dentro de cualquier porción del dominio, el flujo neto a través del contorno de dicho subdominio debe ser igual a la cantidad producida por las fuentes internas. Si f denota la fuente por unidad de área (volumen) tenemos

$$\int_{\partial\omega} \sigma \cdot \mathbf{n} \, d\partial\omega = \int_{\omega} f \, d\omega$$

usando el teorema de la divergencia

$$\int_{\omega} (\nabla \cdot \sigma - f) \, d\omega = 0$$

En consecuencia la ley local de balance resulta

$$\nabla \cdot \sigma(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$$

para cualquier subregión ω en Ω . Podríamos agregar (por completitud) fuentes internas de intensidad proporcional a u , en tal caso la ley de balance local es

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$$

La expresión matemática final de nuestro problema de valores en el contorno se obtiene eliminando $\boldsymbol{\sigma}$ y σ_n usando la relación constitutiva. Los datos que definen el problema son entonces:

1. Los contornos $\partial\Omega_u$ (donde u es conocido) y $\partial\Omega_\sigma$ (donde σ es conocido)
2. La distribución de fuentes $f(\mathbf{x})$ en Ω
3. Las características (conductividad térmica) del material $k(\mathbf{x})$
4. Los valores prescriptos en $\partial\Omega_u$ $u(s) = \bar{u}(\mathbf{x})$
5. En $\partial\Omega_\sigma$ los valores prescriptos de $\bar{\sigma}(s)$ o el coeficiente de borde $p(s)$ y $\hat{u}(s)$

Dados los datos anteriores, el problema es entonces encontrar la función $u(\mathbf{x})$ que satisface

1. La ley de balance local

$$-\nabla \cdot [\mathbf{k}(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x})] + b(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad \text{en } \Omega$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right] \left\{ \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \right\} + b(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$$

2. La condición de salto en interfaces interiores

$$[\mathbf{k} \nabla u \cdot \mathbf{n}] = 0$$

3. Las condiciones esenciales de borde

$$u(s) = \bar{u}(s) \quad \text{en } \partial\Omega_u$$

4. Las condiciones naturales de borde

$$\left. \begin{array}{l} -\mathbf{k}(s) \frac{\partial u(s)}{\partial \mathbf{n}} = p(s)[u(s) - \hat{u}(s)] \\ \text{o} \\ -\mathbf{k}(s) \frac{\partial u(s)}{\partial \mathbf{n}} = \bar{\sigma}(s) \end{array} \right\} \text{en } \partial\Omega_\sigma$$

La forma diferencial del problema en el caso isótropo y homogéneo, con $b(\mathbf{x}) = 0$, conduce a la ecuación de Laplace.

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right] \left\{ k \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \right\} = k \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right\} = k \nabla \cdot \nabla u = f(\mathbf{x})$$

5.3. Forma variacional del problema de valores en el contorno

La construcción de la forma variacional del problema de valores en el contorno comienza definiendo el residuo r

$$r(\mathbf{x}) = -\nabla \cdot [\mathbf{k}(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x})] + b(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})$$

multiplicando el residuo por una función de ponderación o prueba v suficientemente suave, integrando en el dominio e igualando a cero dicha integral. En la integral del residuo ponderado es necesario realizar una integral por partes, para ello notemos que:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (v \mathbf{k} \nabla u) &= \nabla u \cdot (\mathbf{k} \nabla v) + v \nabla \cdot (\mathbf{k} \nabla u) \\ \nabla^T (v \mathbf{k} \nabla u) &= \nabla^T u \mathbf{k} \nabla v + v \nabla^T (\mathbf{k} \nabla u)\end{aligned}$$

y de aquí

$$\begin{aligned}v \nabla \cdot (\mathbf{k} \nabla u) &= \nabla \cdot (v \mathbf{k} \nabla u) - \nabla u \cdot (\mathbf{k} \nabla v) \\ v \nabla^T (\mathbf{k} \nabla u) &= \nabla^T (v \mathbf{k} \nabla u) - \nabla^T u \mathbf{k} \nabla v\end{aligned}$$

reemplazando el segundo miembro por el primero en la integral del residuo conduce a:

$$\int_{\Omega} (\nabla u \cdot (\mathbf{k} \nabla v) + b u v - f v) d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \cdot (v \mathbf{k} \nabla u) d\Omega = 0$$

La segunda integral puede ser transformada en una integral sobre el contorno usando el teorema de la divergencia

$$-\int_{\Omega} \nabla \cdot (v \mathbf{k} \nabla u) d\Omega = -\int_{\partial\Omega} v \mathbf{k} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} ds \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \nabla u \cdot \mathbf{n}$$

En forma consistente al realizar la integral por partes aparecen las condiciones de contorno que es posible fijar en el problema en estudio. Además de la propia variable del problema u , en la última expresión aparece en el contorno el término $-\mathbf{k} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \sigma_v$ (que es la condición de contorno natural del problema), multiplicando a la función de ponderación v .

Notar que el problema de transferencia de calor en 3 dimensiones se plantea en forma idéntica, es decir:

$$\blacksquare \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \quad \text{y} \quad \nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

- La ecuación de campo es igual que antes

$$-\nabla \cdot [\mathbf{k}(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x})] + b(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$$

- y las condiciones de contorno

$$\left. \begin{aligned} u(A) &= \bar{u}(A) && \text{en } \partial\Omega_u \\ -\mathbf{k}(A) \frac{\partial u(A)}{\partial \mathbf{n}} &= p(A) [u(A) - \hat{u}(A)] \\ \text{o} \\ -\mathbf{k}(A) \frac{\partial u(A)}{\partial \mathbf{n}} &= \bar{\sigma}(A) \end{aligned} \right\} \text{en } \partial\Omega_{\sigma}$$

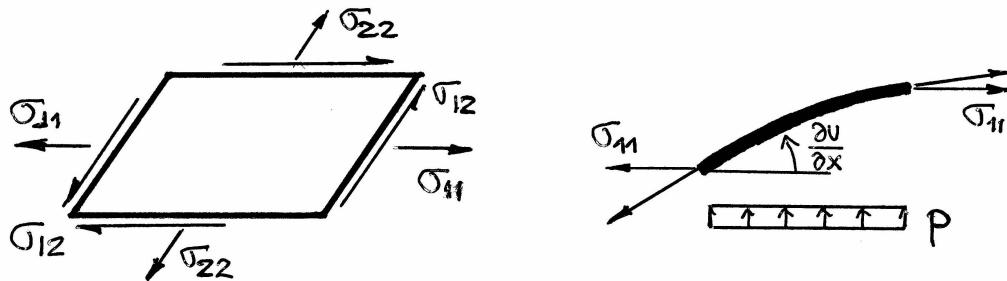


Figura 2 Membrana traccionada sometida a una presión lateral

5.4. Membrana traccionada

El comportamiento de una membrana plana traccionada sometida a una presión lateral uniforme responde también a la ecuación de Helmholtz. Supongamos que el estado tensional de la membrana sea

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$$

Este estado tensional es uniforme en toda la membrana y no hay cargas másicas actuando en el plano de la membrana, por lo cual se cumplen en forma trivial las ecuaciones de equilibrio en el plano de la membrana. Notar que es posible determinar las direcciones principales (ν_1, ν_2) del tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$, de tal forma que la expresión del tensor de tensiones en dicho sistema sea diagonal. Esto simplifica un poco las expresiones que se presentan a continuación, sin embargo no iremos en esa dirección, para mostrar la facilidad que tiene el método para tratar este tipo de problemas.

Al aplicar una presión lateral p (uniforme) sobre la membrana, esta debe desplazarse lateralmente $u(\mathbf{x})$ (dejando de ser plana) a los fines de restablecer el equilibrio. Como la membrana no puede desarrollar momentos flectores (en forma análoga a un cable), es a través de sus esfuerzos en el plano como puede equilibrar fuerzas normales. La ecuación de equilibrio transversal a la membrana, debida a la presión lateral es:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left[\sigma_{11} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \sigma_{12} \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\sigma_{21} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \sigma_{22} \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \right] + \frac{p}{e} = 0$$

Donde e es el espesor de la membrana. La expresión anterior puede escribirse como

$$\nabla \cdot \left\{ \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \nabla u \right\} + \frac{p}{e} = 0$$

En este problema las condiciones de contorno son exclusivamente esenciales (Dirichlet). En todo el contorno $u = \text{cte.}$ (o 0).

Si la tensión sobre la membrana es igual en todas las direcciones del plano ($\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma$, $\sigma_{12} = 0$), llamando $N = \sigma e$ al esfuerzo membranal, entonces la ecuación de equilibrio se resume a la ecuación de Laplace (no-homogénea)

$$\nabla \cdot \nabla u = -\frac{p}{N}$$

La ecuación a resolver resulta muy sencilla y es completamente similar al caso anterior. Notar la similitud formal entre el tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ de este caso con el tensor \mathbf{k} que define la conductividad térmica en el caso anterior. La forma variacional se obtiene de la misma forma que en el caso anterior.

5.5. Flujo en un medio poroso

El flujo laminar a través de un medio poroso está gobernado por la ley de Darcy, la velocidad del flujo (o caudal por unidad de área) es para un medio isótropo:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix} = k \nabla u$$

donde k es la permeabilidad del medio y u es la carga hidráulica. Reemplazando en la ecuación de continuidad (divergencia de la velocidad igualada a 0 para un fluido incompresible)

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0$$

resulta

$$\nabla \cdot (k \nabla u) = 0$$

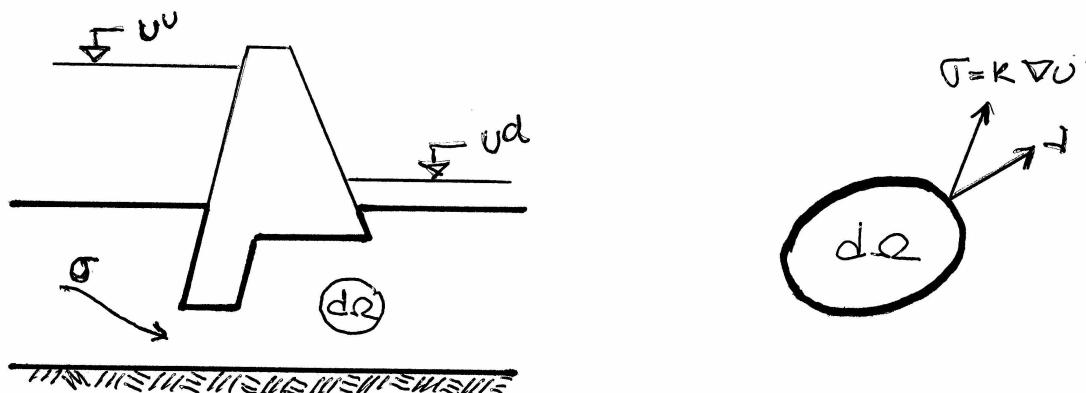


Figura 3 Flujo en un medio poroso

Si el material es homogéneo (k constante) se obtiene nuevamente la ecuación de Laplace

$$k \nabla \cdot \nabla u = 0$$

En el caso de medios estratificados, la permeabilidad es diferente en las distintas direcciones, el material presenta características ortótropas. En tal caso es posible reemplazar la permeabilidad k por un tensor de permeabilidad \mathbf{k} (simétrico) en la ley de Darcy

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

Por otro lado si existen fuentes o sumideros puntuales, es posible incluirlos en la ecuación diferencial.

Las condiciones de borde pueden ser de dos tipos

- a) que se conozca el nivel de la carga hidráulica u
- b) que se conozca el flujo normal al contorno (caudal). Es habitual en este tipo de problemas la existencia de paredes impermeables como condición de contorno, allí se impone que el flujo normal a la pared sea nulo.

5.6. Torsión de una viga prismática sin restricción de alabeo

El estudio del alabeo de una sección de una viga prismática sometida a un momento torsor, es un tema clásico de la mecánica. Las hipótesis cinemáticas son:

1. La sección no se deforma (en el plano de la sección) al aplicar el torsor

2. La sección gira alrededor de G (centro de corte) un valor θ que por unidad de longitud de viga denominaremos β , de tal forma que usando como referencia la sección en $z = 0$

$$\theta = \beta z$$

en función ello los desplazamientos en el plano de la sección resultan

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= -\theta(z)y = -\beta zy \\ v(x, y, z) &= \theta(z)x = \beta zx \end{aligned}$$

3. La sección no tiene restricción al alabeo, lo cual conduce en general a que:

$$\beta w(x, y, z) \neq 0$$

luego veremos que w es sólo función de (x, y)

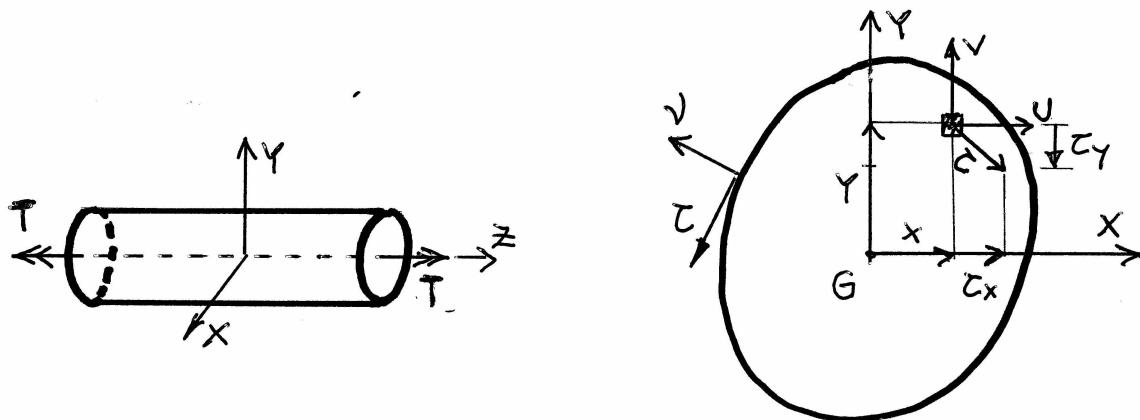


Figura 4 torsión de una pieza prismática

5.6.1. Deformaciones

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial \beta w}{\partial z} = 0 \quad (\text{la justificación es posterior}) \\ \gamma_{xy} &= 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\beta z + \beta z = 0 \\ \gamma_{xz} &= 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \beta w}{\partial x} = -\beta y + \beta w'_x \\ \gamma_{yz} &= 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial \beta w}{\partial y} = \beta x + \beta w'_y \end{aligned}$$

5.6.2. Tensiones

Las tensiones resultan de las ecuaciones constitutivas, luego considerando un material elástico y lineal (isótropo u ortotrópico, en este último caso supondremos que las direcciones principales de

ortotropía coinciden con las direcciones coordenadas).

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} & C_{xz} \\ C_{xy} & C_{yy} & C_{yz} \\ C_{xz} & C_{yz} & C_{zz} \\ & & G_{xy} \\ & & G_{xz} \\ & & G_{yz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}$$

Al no haber restricción al alabeo, en los extremos se cumple que $\sigma_{zz} = 0$, por otro lado si consideramos un estado tensional uniforme a lo largo de la pieza, entonces $\sigma_{zz} = 0$ en toda la pieza, lo cual sumado a que $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = 0$, conduce

$$\sigma_{zz} = 0 = C_{zz}\varepsilon_{zz}$$

de donde resulta $\varepsilon_{zz} = 0$ que justifica lo dicho antes y conduce a que $w = w(x, y)$ es decir que w no depende de z . Consecuencia de lo anterior es que $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0$, resultando además $\tau_{xy} = 0$. Luego las únicas tensiones no nulas son

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= G_{xz}\gamma_{xz} = G_{xz}\beta(-y + w_x) \\ \tau_{yz} &= G_{yz}\gamma_{yz} = G_{yz}\beta(x + w_y) \end{aligned} \quad (5.1a)$$

5.6.3. Equilibrio

Las únicas fuerzas actuantes son las aplicadas en las secciones extremas a los fines de imponer el momento torsor T . Este momento torsor se equilibra con el momento que producen las tensiones rasantes de corte respecto al centro de corte según la siguiente expresión (con $\mathbf{r} = (x, y)$ la posición de cada punto respecto al centro de corte y $\boldsymbol{\tau} = (\tau_{xz}, \tau_{yz})$)

$$T = \int_A \mathbf{r} \times \boldsymbol{\tau} dA = \int_A (-\tau_{xz}y + \tau_{yz}x) dA$$

Reemplazando $\boldsymbol{\tau}$ en función de 5.1a

$$\begin{aligned} T &= \beta \int_A [-G_{xz}(-y + w_x)y + G_{yz}(x + w_y)x] dA \\ &= \beta \int_A [(G_{xz}y^2 + G_{yz}x^2) + (-G_{xz}w_x y + G_{yz}w_y x)] dA \end{aligned}$$

Notar que si particularizamos esta expresión para una material isótropo ($G_{xz} = G_{yz} = G$)

$$\begin{aligned} T &= \beta G \int_A [y^2 + x^2 + (w_y x - w_x y)] dA \\ &= \beta G \left\{ J + \int_A (w_y x - w_x y) dA \right\} \end{aligned}$$

Y para el caso de una sección circular que se sabe que no alabea $w(x, y) = 0$, se obtiene el resultado conocido $T = GJ\beta$.

Las ecuaciones de equilibrio en el dominio se satisfacen en forma trivial para las direcciones x e y , pues ni β ni w dependen de la coordenada z .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + F_x &= 0 + 0 + \frac{\partial}{\partial z} [G_{xz}\beta(-y + w_x)] + 0 = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + F_y &= 0 + 0 + \frac{\partial}{\partial z} [G_{yz}\beta(x + w_y)] + 0 = 0 \end{aligned}$$

La ecuación de equilibrio en la dirección z es la que gobierna el alabeo

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + F_z = \frac{\partial}{\partial x} [G_{xz}\beta(-y + w_x)] + \frac{\partial}{\partial y} [G_{yz}\beta(x + w_y)] = 0 \quad (5.2)$$

$$G_{xz}\frac{\partial w_x}{\partial x} + G_{yz}\frac{\partial w_y}{\partial y} = G_{xz}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + G_{yz}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (5.3)$$

Donde en la segunda expresión se ha supuesto que el material es homogéneo

Si el material además es isótropo $G_{xz} = G_{yz} = G$ se obtiene la ecuación de Laplace

$$G \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = G \nabla \cdot \nabla w = 0$$

5.6.4. Condiciones de contorno

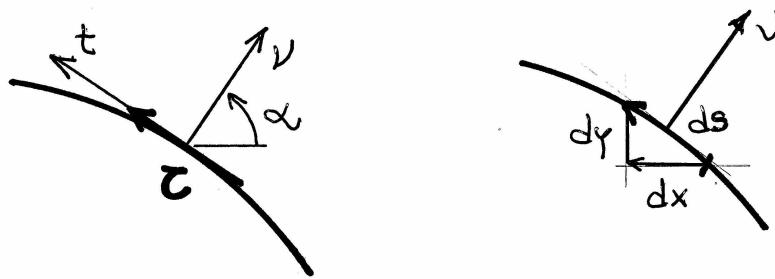


Figura 5 Condición de contorno en la torsión

Las condiciones de contorno son exclusivamente naturales (Neumann). La tensión de corte normal al contorno debe ser cero $\tau_\nu = 0$. Denominando con α al ángulo que forma la normal al contorno ν con el eje x , tenemos que (llamando s a lo longitud de arco sobre el contorno

$$\nu_x = \cos \alpha = \frac{dy}{ds} \quad \nu_y = \sin \alpha = -\frac{dx}{ds}$$

la tensión de corte normal es

$$\tau_\nu = \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nu} = \tau_{xz} \frac{dy}{ds} - \tau_{yz} \frac{dx}{ds} \quad (5.4)$$

reemplazando las expresiones 5.1a

$$\begin{aligned} \tau_\nu &= [G_{xz}\beta(-y + w_x)] \frac{dy}{ds} - [G_{yz}\beta(x + w_y)] \frac{dx}{ds} \\ &= -\beta \left\{ G_{xz}y \frac{dy}{ds} + G_{yz}x \frac{dx}{ds} + G_{xz}w_x \frac{dy}{ds} - G_{yz}w_y \frac{dx}{ds} \right\} \end{aligned} \quad (5.5)$$

Si el material es isótropo

$$\begin{aligned} \tau_\nu &= G\beta \left\{ - \underbrace{\left[y \frac{dy}{ds} + x \frac{dx}{ds} \right]}_{\frac{1}{2} \frac{dr^2}{ds}} + \underbrace{\left(w_x \frac{dy}{ds} - w_y \frac{dx}{ds} \right)}_{w_{\nu}} \right\} = 0 \\ w_{\nu} &= \frac{1}{2} \frac{dr^2}{ds} \end{aligned}$$

5.6.5. Forma débil de la ecuación de alabeo

Aplicando residuos ponderados sobre la expresión 5.2, con v la función de ponderación

$$\begin{aligned}\beta \int_A v \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [G_{xz}(-y + w_x)] + \frac{\partial}{\partial y} [G_{yz}(x + w_y)] \right\} dA &= 0 \\ \beta \int_A v \left[\frac{\partial}{\partial x} (G_{xz}w_x) + \frac{\partial}{\partial y} (G_{yz}w_y) \right] + v \left[-\frac{\partial}{\partial x} (G_{xz}y) + \frac{\partial}{\partial y} (G_{yz}x) \right] dA &= 0\end{aligned}$$

Notar que el segundo término es necesario sólo cuando el material no es homogéneo, es decir cuando hay una variación de la matriz constitutiva del material. Esta formulación permite entonces tratar el alabeo de secciones compuestas de distintos materiales. Notar además que el segundo término incluye sólo valores conocidos, por lo cual podríamos separar en dos miembros la ecuación, de tal forma que el segundo miembro es nulo para materiales homogéneos

$$\beta \int_A v \left[\frac{\partial}{\partial x} (G_{xz}w_x) + \frac{\partial}{\partial y} (G_{yz}w_y) \right] dA = \beta \int_A v \left[\frac{\partial}{\partial x} (G_{xz}y) - \frac{\partial}{\partial y} (G_{yz}x) \right] dA$$

Integrando por partes ambos miembros

$$\begin{aligned}\int_A v \left[\frac{\partial}{\partial x} (G_{xz}w_x) + \frac{\partial}{\partial y} (G_{yz}w_y) \right] dA &= \int_S v [G_{xz}w_x\nu_x + G_{yz}w_y\nu_y] ds - \int_A [G_{xz}w_xv_x + G_{yz}w_yv_y] dA \\ \int_A v \left[\frac{\partial}{\partial x} (G_{xz}y) - \frac{\partial}{\partial y} (G_{yz}x) \right] dA &= \int_S v [G_{xz}y\nu_x - G_{yz}x\nu_y] ds - \int_A [G_{xz}yv_x - G_{yz}xv_y] dA\end{aligned}$$

Reemplazando en la expresión anterior y notando que los términos en el contorno se anulan entre si (ver ecuación 5.5)

$$\beta \int_S v \{G_{xz}w_x\nu_x + G_{yz}w_y\nu_y - [G_{xz}y\nu_x - G_{yz}x\nu_y]\} ds = \int_s v \tau_\nu ds = 0$$

resulta

$$\begin{aligned}\int_A [G_{xz}w_xv_x + G_{yz}w_yv_y] dA &= \int_A [G_{xz}yv_x - G_{yz}xv_y] dA \\ \int_A [v_x, v_y] \begin{bmatrix} G_{xz} \\ G_{yz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \end{bmatrix} dA &= \int_A [v_x, v_y] \begin{bmatrix} G_{xz} \\ G_{yz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix} dA\end{aligned}$$

Notar que para la solución del problema es necesario fijar en algún punto el valor de w , además habitualmente se resuelve el problema para un valor unitario de β . En secciones simétricas es suficiente con discretizar una de las porciones simétricas, en este caso deben imponerse condiciones de contorno sobre w (esenciales), $w = 0$ en las líneas de simetría.

La formulación presentada hasta aquí sigue los lineamientos del método de los desplazamientos (o método de rigidez) consistente en resolver las ecuaciones de equilibrio del problema expresadas en función de las incógnitas de desplazamiento. Una vez obtenida la solución del problema la determinación de deformaciones y tensiones es directa. A continuación veremos una solución alternativa, consistente en resolver ecuaciones de compatibilidad, lo que se asocia habitualmente con el método de las fuerzas, contraparte de esta formulación

5.6.6. Función de tensión

La formulación más renombrada para el análisis del problema de alabeo está asociada a la solución de una ecuación de compatibilidad. Esto es así porque, como veremos, para materiales isótropos y homogéneos, resulta como ecuación de gobierno la ecuación de Laplace con condiciones de contorno sólo esenciales y homogéneas (secciones simplemente conexas). Esto permite hacer analogías con otros problemas mecánicos, como por ejemplo la membrana traccionada que se describió antes (“analogía de la membrana” debida a Prandtl).

Para resolver el problema se propone una función ϕ (función de tensión) que satisface en forma implícita las ecuaciones de equilibrio del problema en el dominio. Habíamos visto que en este caso la única ecuación de equilibrio no trivial es

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} = 0$$

Definiendo ϕ tal que

$$\tau_{xz} = \beta \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \tau_{yz} = -\beta \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

reemplazado en la ecuación de equilibrio del dominio la satisface en forma idéntica. A su vez si la reemplazamos en la ecuación de equilibrio en el contorno $\tau_\nu = 0$ (5.4) resulta

$$\tau_\nu = \beta \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \beta \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{dx}{ds} = \beta \frac{d\phi}{ds} = 0$$

La expresión anterior indica que $\phi(s) = \text{cte.}$ en el contorno. Para dominios simplemente conexos basta con fijar un valor constante arbitrario para la función incógnita sobre todo el contorno, valor que se elige igual 0 por comodidad.

Si escribimos ahora las deformaciones en términos de la función de tensión, tenemos

$$\begin{aligned}\gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G_{xz}} = \frac{\beta}{G_{xz}} \frac{\partial \phi}{\partial y} = \beta(-y + w_x) \\ \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G_{yz}} = -\frac{\beta}{G_{yz}} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \beta(x + w_y)\end{aligned}$$

Derivando la primera respecto a y , la segunda respecto a x

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\beta}{G_{xz}} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) &= \beta(-1 + w_{xy}) \\ -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\beta}{G_{yz}} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) &= \beta(1 + w_{yx})\end{aligned}$$

y observando que debe cumplirse que para que la función de alabeo w sea compatible $w_{xy} = w_{yx}$, restando la segunda de la primera resulta

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\beta}{G_{yz}} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\beta}{G_{xz}} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = -2\beta \quad (5.6)$$

Que es una ecuación de compatibilidad ($w_{xy} = w_{yx}$) en función de ϕ . Si el material es homogéneo e isótropo resulta la ecuación de Laplace con condiciones de contorno homogéneas (dominios simplemente conexos)

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \nabla \phi &= -2G \\ \phi(s) &= 0\end{aligned}$$

5.6.7. Forma débil de la ecuación de compatibilidad

Para obtener la forma débil multiplicamos la ecuación 5.6 por una función de peso ψ e integramos por partes el primer miembro

$$\int_A \psi \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{G_{yz}} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{G_{xz}} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right] dA = \int_A -\psi 2 dA \quad (5.7)$$

$$\int_S \psi \left[\left(\frac{1}{G_{yz}} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \nu_x + \left(\frac{1}{G_{xz}} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \nu_y \right] ds - \int_A \nabla \psi \cdot \left[\left(\frac{1}{G_{xz}} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right), \left(\frac{1}{G_{yz}} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right] dA = -2 \int_A \psi dA \quad (5.8)$$

Como ϕ es conocida sobre el contorno (0) la función de peso ψ vale 0 sobre el contorno y la integral sobre el contorno se anula. En consecuencia la forma débil resulta

$$\int_A \left[\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y} \right] \begin{bmatrix} \frac{1}{G_{xz}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{G_{yz}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{bmatrix} dA = -2 \int_A \psi dA \quad (5.9)$$

En el caso de dominios multiplemente conexos debe cumplirse que la función de tensión sea constante en cada contorno. Fijando el valor $\phi = 0$, en el contorno exterior, en cada contorno interno S_i la función valdrá $\bar{\phi}_i$. Estos valores de $\bar{\phi}_i$ son ‘a priori’ desconocidos y se obtienen de la solución numérica. Lo que debe imponerse es que en todos los puntos j de cada contorno interno i el valor de ϕ sea el mismo $\phi_j = \bar{\phi}_i$ ($\forall j \in S_i$)

5.7. Flujo potencial

En el caso de flujos potenciales las condiciones que debe cumplir el campo de velocidades son dos

1. continuidad, asociado con que la divergencia del campo de velocidades \mathbf{u} sea nula

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

2. irrotacionalidad, asociado a que el rotor del campo de velocidades sea nulo

$$\nabla \times \mathbf{u} = 0$$

Hay dos formas equivalentes de abordar el problema, con diferentes ventajas de acuerdo al problema que se intenta analizar. La variable fundamental del problema no es el campo de velocidades, sino que éste (como todos los flujos tratados hasta ahora) se derivan de una variable (escalar).

5.7.1. Función potencial

Una primera posibilidad es utilizar como variable independiente al potencial φ , de esta manera, el campo de velocidades resulta

$$\mathbf{u} = -\nabla \varphi$$

Naturalmente si el campo \mathbf{u} se deriva de un potencial, entonces satisface en forma explícita la condición irrotacionalidad y lo único que resta imponer es que satisfaga continuidad, es decir

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = -\nabla \cdot \nabla \varphi = 0$$

con lo cual se obtiene la ecuación de Laplace.

Las condiciones de contorno que pueden imponerse en este caso son:

1. esenciales, es posible fijar el valor de φ (potencial hidráulico)
2. naturales, es posible fijar el valor de la velocidad normal al contorno $u_\nu = \nu \cdot \nabla \varphi$

5.7.2. Función líneas de corriente

La segunda posibilidad es utilizar como variable independiente la función líneas de corriente ψ que es conjugada de la función potencial φ . El campo de velocidades \mathbf{u} queda ahora definido por

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \end{bmatrix}$$

La definición de este campo de velocidades hace que se cumpla explícitamente la condición de continuidad, por lo cual ahora la condición a cumplir es que el campo \mathbf{u} sea irrotacional

$$\nabla \times \mathbf{u} = \nabla \times \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{-\partial \psi}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} \right) = 0$$

nuevamente obtenemos la ecuación de Laplace, cuyas condiciones de contorno pueden ser

1. esenciales, es posible fijar el valor de ψ (valor de la línea de corriente)
2. naturales, es posible fijar el valor de la velocidad tangencial al contorno $u_t = \boldsymbol{\nu} \cdot \nabla \psi$. Notar que

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \nabla \psi = [\nu_1, \nu_2] \begin{bmatrix} -u_2 \\ u_1 \end{bmatrix} = [-\nu_2, \nu_1] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} = u_t$$

5.8. Ecuación de convección - difusión

Las ecuaciones diferenciales tratadas hasta aquí conducen a la ecuación de Laplace, donde el orden de derivación de la variable incógnita es par en todos los casos. Esto ha conducido, al realizar la integral por partes, a una simetría del operador respecto a la variable incógnita y a la función de ponderación. Las ecuaciones diferenciales con estas características se denominan auto-adjuntas.

En este caso, nos interesa resolver la siguiente ecuación diferencial que aparece principalmente el área de mecánica de los fluidos

$$\nabla \cdot [\rho \mathbf{u} \phi - \Gamma \nabla \phi] + q = 0$$

donde \mathbf{u} es el campo de velocidades (conocido)

$$\mathbf{u}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

que satisface la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

ϕ es la variable (incógnita) del problema, es una variable escalar

Γ es la difusividad, en general en un medio isótropo ésta es un escalar. En algunos problemas que interesa abordar, resulta necesario escribir a Γ como un tensor de segundo orden (simétrico)

$$\boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{bmatrix}$$

q es un escalar y representa una fuente (o un sumidero) distribuido en el dominio.

La diferencia fundamental entre esta ecuación diferencial y las que se han tratado hasta ahora es el término $\nabla \cdot [\rho \mathbf{u} \phi]$ (término convectivo), si se omite este término se tiene nuevamente la ecuación de Laplace. En este término la variable incógnita aparece derivada sólo una vez, por lo cual el operador ya no resulta autoadjunto y en las discretizaciones numéricas dará lugar a matrices no-simétricas (independientemente de la función de ponderación elegida).

Las condiciones de contorno que pueden imponerse son

1. el valor de la variable ϕ en parte del contorno S_ϕ
2. el valor del flujo normal al contorno $\sigma_\nu = [\rho \mathbf{u} \phi - \Gamma \nabla \phi] \cdot \boldsymbol{\nu}$ en la parte del contorno S_σ

La formulación débil que resulta para este problema se obtiene como siempre de aplicar residuos ponderados sobre la ecuación de balance en el dominio y sobre las condiciones de contorno. Multiplicando entonces por una función de peso arbitraria φ

$$\int_A \varphi \{ \nabla \cdot [\rho \mathbf{u} \phi - \Gamma \nabla \phi] + q \} dA + \int_{S_\sigma} \varphi [\bar{\sigma}_\nu - (\rho \mathbf{u} \phi - \Gamma \nabla \phi) \cdot \boldsymbol{\nu}] dS_\sigma + \int_{S_\phi} \varphi (\bar{\phi} - \phi) dS_\phi = 0$$

integrando por partes en el dominio el término difusivo y notando que $(\bar{\phi} - \phi) = 0$, pues las aproximaciones satisfacen en forma exacta este tipo de condiciones

$$\int_{S_\sigma} \varphi [\bar{\sigma}_\nu - \rho \mathbf{u} \phi \cdot \boldsymbol{\nu}] dS_\sigma + \int_A \varphi \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \phi) dA + \int_A \nabla \varphi \cdot \Gamma \nabla \phi dA + \int_A \varphi q dA = 0$$

Finalmente notando que el campo de velocidades debe satisfacer la condición de incompresibilidad

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

entonces

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \phi) = \phi \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) + (\rho \mathbf{u}) \cdot \nabla \phi = (\rho \mathbf{u}) \cdot \nabla \phi$$

de donde la integral del residuo resulta

$$\int_{S_\sigma} \varphi [\bar{\sigma}_\nu - \rho \mathbf{u} \phi \cdot \boldsymbol{\nu}] dS_\sigma + \int_A \varphi (\rho \mathbf{u}) \cdot \nabla \phi dA + \int_A \nabla \varphi \cdot \Gamma \nabla \phi dA + \int_A \varphi q dA = 0$$

5.9. Elasticidad lineal

5.9.1. Ecuaciones básicas de la elasticidad lineal

A continuación se describen las ecuaciones básicas de la elasticidad lineal con el objeto de obtener una formulación débil que luego pueda discretizarse usando el método de elementos finitos.

La ecuación de equilibrio (o ley de balance local) es de la forma

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho(\mathbf{x}) [\mathbf{b}(\mathbf{x}) - \mathbf{a}(\mathbf{x})] = \mathbf{0} \quad \text{en } \Omega \quad (5.10)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right] \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} + \rho(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

donde $\boldsymbol{\sigma}$ es el tensor de tensiones de Cauchy que es simétrico, ρ es la densidad de masa, \mathbf{b} es la fuerza másica por unidad de masa ($\rho \mathbf{b} = \mathbf{F}$ es la fuerza másica por unidad de volumen) y \mathbf{a} es la aceleración. Las condiciones de contorno del problema son:

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{f} \quad \text{en } \partial\Omega_\sigma$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{en } \partial\Omega_u$$

donde \mathbf{n} es la normal en el contorno, \mathbf{f} es la fuerza aplicada sobre el contorno, $\bar{\mathbf{u}}$ son desplazamientos prescriptos y $\partial\Omega_\sigma$ es la parte del contorno donde se conocen las fuerzas externas, $\partial\Omega_u$ es la parte del contorno donde se conocen los desplazamientos, que cumplen que $\partial\Omega = \partial\Omega_\sigma + \partial\Omega_u$ y $\partial\Omega_\sigma \cap \partial\Omega_u = \emptyset$. Las ecuaciones constitutivas y cinemáticas son

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon} & \boldsymbol{\varepsilon} &= \boldsymbol{\nabla}^s \mathbf{u} = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\nabla}^T \mathbf{u} + \boldsymbol{\nabla} \mathbf{u}) \\ \sigma_{ij} &= D_{ijkl} \varepsilon_{ij} & \boldsymbol{\nabla}^T \mathbf{u} &= (\boldsymbol{\nabla} \mathbf{u})^T \end{aligned}$$

donde $\boldsymbol{\varepsilon}$ es el tensor de pequeñas deformaciones, \mathbf{D} es el tensor de elasticidad de cuarto orden (liga dos tensores de 2do. orden) y $\boldsymbol{\nabla}^s \mathbf{u}$ es la parte simétrica del gradiente de desplazamientos.

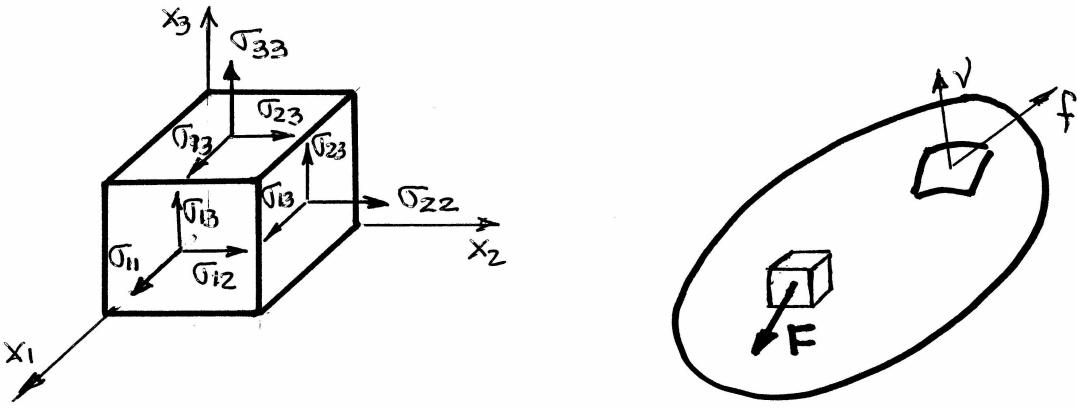


Figura 6 Elasticidad tridimensional

Las ecuaciones anteriores desarrolladas para el problema tridimensional resultan:

$$\nabla \cdot \sigma = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_1} \end{bmatrix} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \mathbf{t}_i = \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} \mathbf{t}_i$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho(b_i - a_i) = 0$$

$$\sigma \cdot \mathbf{n} = \sigma^T \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}\nu_1 + \sigma_{12}\nu_2 + \sigma_{13}\nu_3 \\ \sigma_{21}\nu_1 + \sigma_{22}\nu_2 + \sigma_{23}\nu_3 \\ \sigma_{31}\nu_1 + \sigma_{32}\nu_2 + \sigma_{33}\nu_3 \end{bmatrix} = \sigma_{ij}\nu_j \mathbf{t}_i = \sigma_{ij}\nu_i \mathbf{t}_j$$

$$\sigma_{ij}\nu_j = f_i$$

$$(\nabla \mathbf{u})_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad \varepsilon_{ij} = (\nabla^s \mathbf{u})_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$$

Para un material isótropo, el tensor de elasticidad depende de sólo dos constantes y puede escribirse

$$\mathbf{D} = 2\mu \mathbf{I} + \lambda \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$$

$$D_{ijkl} = \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \lambda \delta_{ij}\delta_{kl}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

donde μ y λ son los parámetros de Lamé, E es el módulo de elasticidad de Young y ν es la relación de Poisson. \mathbf{I} es el tensor identidad de cuarto orden, $\mathbf{1}$ es el tensor identidad de segundo orden y \otimes denota el producto tensorial

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \varepsilon_{kl} = [\mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \lambda \delta_{ij}\delta_{kl}] \varepsilon_{kl}$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \delta_{ij} \lambda \varepsilon_{kk}$$

5.9.2. Formulación débil usando residuos ponderados

Aplicaremos el método de residuos ponderados a la ecuación de equilibrio (5.10) con una función de ponderación $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ donde los w_i son funciones independientes una de otra y ponderan cada componente de la ecuación de equilibrio

$$\int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \{ \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho(\mathbf{x}) [\mathbf{b}(\mathbf{x}) - \mathbf{a}(\mathbf{x})] \} d\Omega = 0$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) d\Omega = - \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) \mathbf{w} \cdot [\mathbf{b}(\mathbf{x}) - \mathbf{a}(\mathbf{x})] d\Omega$$

Integremos por partes el primer miembro, para lo cual recordemos que:

$$\begin{aligned} \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{w}^T \boldsymbol{\sigma} = w_i \sigma_{ij} \mathbf{t}_j \\ \nabla \cdot (\mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\sigma}) &= \frac{\partial}{\partial x_j} (w_i \sigma_{ij}) \\ &= \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \sigma_{ij} + w_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \\ &= \nabla \mathbf{w} : \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{w} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \end{aligned}$$

la última expresión permite escribir el primer miembro del residuo como

$$\int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \mathbf{w} \cdot \underbrace{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})}_{\mathbf{f}(s)} d\partial\Omega - \int_{\Omega} \nabla \mathbf{w} : \boldsymbol{\sigma} d\Omega$$

donde el operador “:” es el producto punto entre tensores de segundo orden, similar al de vectores (por ej.: $\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$). Notando además que debido a la simetría del tensor de tensiones $\nabla \mathbf{w} : \boldsymbol{\sigma} = \nabla^s \mathbf{w} : \boldsymbol{\sigma}$ la integral ponderada del residuo puede escribirse:

$$\int_{\Omega} \nabla^s \mathbf{w} : \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \rho(\mathbf{x}) [\mathbf{b}(\mathbf{x}) - \mathbf{a}(\mathbf{x})] d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{f}(s) d\partial\Omega$$

Reemplazando la ecuación constitutiva tenemos:

$$\int_{\Omega} \nabla^s \mathbf{w} : \mathbf{D} : \nabla^s \mathbf{u} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \rho(\mathbf{x}) [\mathbf{b}(\mathbf{x}) - \mathbf{a}(\mathbf{x})] d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{f}(s) d\partial\Omega$$

Las condiciones sobre la solución \mathbf{u} son: continuidad (compatibilidad), derivabilidad ($\nabla \mathbf{u}$ debe existir y poder ser calculado) y $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$ en $\partial\Omega_{\mathbf{u}}$. Al usar Galerkin e integrar por partes, las condiciones sobre \mathbf{w} resultan similares: continuidad y derivabilidad ($\nabla \mathbf{w}$ debe existir y poder ser calculado) y $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ en $\partial\Omega_{\mathbf{u}}$. Esta última condición permite dividir la segunda integral del segundo miembro en dos partes, dividiendo el contorno en dos partes ($\partial\Omega_{\boldsymbol{\sigma}}$ y $\partial\Omega_{\mathbf{u}}$) en la segunda parte la integral resulta entonces identicamente nula. Finalmente si llamamos

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \nabla^s \mathbf{w}$$

$$\int_{\Omega} \bar{\varepsilon}_{ij} D_{ijkl} \varepsilon_{kl} d\Omega = \int_{\Omega} w_i \rho(\mathbf{x}) [b_i(\mathbf{x}) - a_i(\mathbf{x})] d\Omega + \int_{\partial\Omega_{\boldsymbol{\sigma}}} w_i f_i(s) d\partial\Omega_s$$

donde en el primer miembro se puede reemplazar el tensor \mathbf{D}

$$\int_{\Omega} \bar{\varepsilon}_{ij} D_{ijkl} \varepsilon_{kl} d\Omega = \int_{\Omega} (2\mu \bar{\varepsilon}_{ij} \varepsilon_{ij} + \lambda \bar{\varepsilon}_{kk} \varepsilon_{ll}) d\Omega$$

5.9.3. Formulación a partir del Principio de los Trabajos Virtuales

Si bien el método de residuos ponderados representa una forma directa para la discretización numérica de las ecuaciones de equilibrio de un sólido elástico cuando se usa el método de elementos finitos, existen otras formas para obtener ecuaciones equivalentes. Estas otras formas presentan las ventajas de su más fácil interpretación mecánica. Aquí mostraremos como es posible obtener ecuaciones de equilibrio discretas (es decir en términos de un conjunto finito de parámetros) a partir del Principio de Trabajos Virtuales (P.T.V.). Básicamente el P.T.V. dice que para que un sólido elástico esté en equilibrio debe satisfacerse que para todo campo de desplazamientos virtuales $\delta\mathbf{u}$ (compatible con los vínculos)

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta\varepsilon_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} \rho\mathbf{b}(\mathbf{x}) \cdot \delta\mathbf{u} dv - \int_{\partial\Omega_\sigma} \mathbf{f} \cdot \delta\mathbf{u} d\partial\Omega_\sigma = 0 \quad (5.11)$$

Si reemplazamos

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \delta_{ij}\lambda\varepsilon_{kk}$$

$$\delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i})$$

obtenemos ecuaciones similares al método de residuos ponderados donde podemos asimilar el desplazamiento virtual a la función de peso ya que las condiciones sobre ambas son las mismas.

5.9.4. Notación matricial de los tensores involucrados

En este tipo de problemas resulta necesario manejar tensores de 4to. orden, desde el punto de vista computacional esto no es deseable, y si bien analíticamente y conceptualmente es conveniente y necesario trabajar con ellos, a veces es más visual manejarlos en la forma que se detalla a continuación. Los tensores de segundo orden se manejan como vectores y los tensores de 4to orden como matrices, así al tensor de deformaciones que tiene 9 componentes, pero sólo seis diferentes debido a su simetría, lo manejaríamos como un arreglo (vector) de seis componentes ordenados de la forma

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \end{bmatrix}$$

la razón de por qué considerar dos veces las deformaciones de corte quedará claro más adelante. Este tensor que depende de tres componentes de desplazamiento puede escribirse como un operador lineal \mathbf{B} sobre el vector \mathbf{u}

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{u} \quad (5.12)$$

Similarmente el tensor de tensiones lo podemos expresar como un vector de seis componentes ordenado de la siguiente forma

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{bmatrix}$$

La relación que liga tensiones con deformaciones está definida por el tensor de elasticidad \mathbf{D} , esta relación cuando se expresa en términos de los tensores de 2do orden expresados como arreglos de una dimensión conduce a la siguiente expresión (material elástico lineal e isótropo):

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{bmatrix} = \frac{E}{1+\nu} \begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & & & \varepsilon_{11} \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & & & \varepsilon_{22} \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & & & \varepsilon_{33} \\ & & & \frac{1}{2} & & 2\varepsilon_{12} \\ & & & & \frac{1}{2} & 2\varepsilon_{23} \\ & & & & & \frac{1}{2} 2\varepsilon_{13} \end{bmatrix} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{u}$$

Dado que tratamos con deformaciones lineales, las deformaciones virtuales pueden escribirse de la misma forma que las reales

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \delta\varepsilon_{11} \\ \delta\varepsilon_{22} \\ \delta\varepsilon_{33} \\ 2\delta\varepsilon_{12} \\ 2\delta\varepsilon_{23} \\ 2\delta\varepsilon_{13} \end{bmatrix} = \mathbf{B}\delta\mathbf{u} \quad (5.13)$$

Notar que en la expresión del trabajo virtual interno (primer término de la expresión 5.11) podemos escribir en lugar del producto interno de tensores de 2do. orden $\boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{\varepsilon} \equiv \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}$, donde en el primer miembro de la equivalencia estamos considerando tensores y en el segundo miembro la notación vectorial. El segundo miembro de esta igualdad indica la forma estándar de expresar un producto interno de dos vectores columnas como una multiplicación de matrices. Si reemplazamos (5.12 y 5.13) este producto interno puede escribirse finalmente:

$$\boldsymbol{\sigma}^T \delta\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{u}^T \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \delta\mathbf{u}$$

5.9.5. Elasticidad Plana

Listamos a continuación las principales ecuaciones de la elasticidad plana, en la notación previa, correspondientes a los estados:

5.9.5.1. Estado plano de tensión ($\sigma_{i3} = 0$):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & \\ \nu & 1 & \\ & & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{(1-\nu)} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})$$

5.9.5.2. Estado plano de deformación ($\varepsilon_{i3} = 0$):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{(1-\nu)} \\ \frac{\nu}{(1-\nu)} & 1 \\ & \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

5.9.5.3. Estado de deformación axilsimétrico:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{1}{x_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{33} \end{bmatrix} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{(1-\nu)} & \frac{\nu}{(1-\nu)} \\ \frac{\nu}{(1-\nu)} & 1 & \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} \\ \frac{\nu}{(1-\nu)} & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

5.10. Flexión de Placas

5.10.1. Teoría clásica de placas (Love-Kirchhoff)

En la teoría clásica de placas (delgadas) se asume en forma similar a la teoría clásica de vigas:

1. que la placa funciona en un estado plano de tensión (se desprecian los esfuerzos normales al plano de la placa)
2. la fibra que en la configuración indeformada, era normal al plano de la placa, en la configuración deformada:
 - se mantiene recta
 - se mantiene normal a la superficie deformada, y en consecuencia el giro de la fibra (θ) coincide con el giro de la normal a la superficie media

$$\boldsymbol{\theta} = -\nabla u = -\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}\right)$$

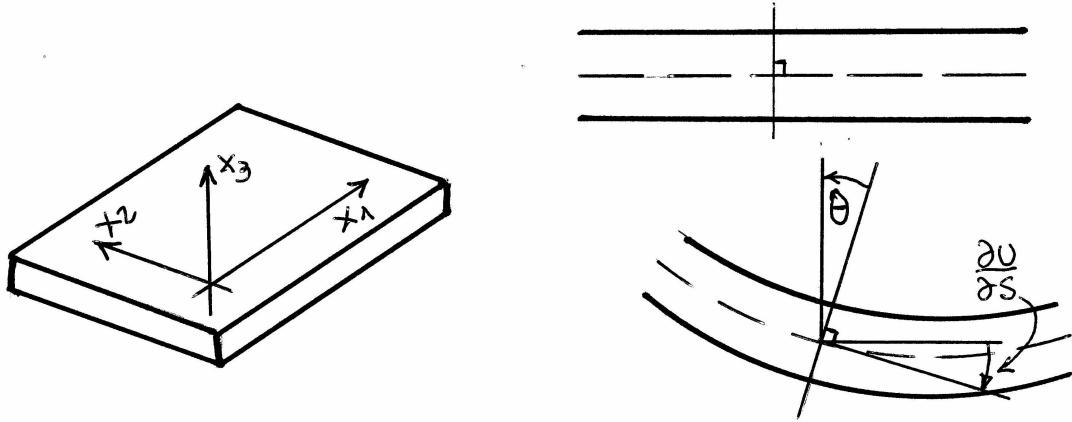


Figura 7 Teoría de placas clásica

Estas hipótesis conducen a despreciar las deformaciones debidas al corte transversal γ , y a que todo el comportamiento flexional quede descripto por el desplazamiento transversal a la placa u . El plano medio se mantiene indeformado (membranalmente) y las deformaciones en puntos fuera del plano medio son proporcionales a su distancia al mismo (x_3) según una ley lineal en el espesor de la placa (h):

$$\varepsilon_{ij} = \chi_{ij} x_3 \quad -\frac{h}{2} \leq x_3 \leq \frac{h}{2}$$

$$\chi_{ij} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \quad i, j = 1, 2$$

Los momentos flectores se relacionan con las curvaturas del plano medio mediante las siguientes ecuaciones constitutivas

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{bmatrix} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_{11} \\ \chi_{22} \\ 2\chi_{12} \end{bmatrix} = \mathbf{D} \boldsymbol{\chi}$$

Al igual que en el caso de vigas sin deformación cortante, los esfuerzos de corte transversal $\mathbf{Q} = \{Q_1, Q_2\}$ no tienen ecuaciones constitutivas asociadas sino que estos se obtienen de las ecuaciones de equilibrio, en función de derivadas de los momentos. La ecuación de trabajos virtuales se escribe:

$$\int_{\Omega} (M_{11}\delta\chi_{11} + M_{22}\delta\chi_{22} + 2M_{12}\delta\chi_{12}) d\Omega = \int_{\Omega} p \delta u d\Omega + \int_{\partial\Omega} \left(-M_{\nu\nu} \frac{\partial\delta u}{\partial \mathbf{n}} - M_{\nu s} \frac{\partial\delta u}{\partial \mathbf{s}} + Q_{\nu} \delta u \right) d\partial\Omega$$

Donde \mathbf{n} es la normal al contorno y \mathbf{s} es la tangente al mismo (ambas en el plano de la lámina). En la última integral podemos reescribir los últimos dos términos en la forma

$$\int_{\partial\Omega} \left(-M_{\nu s} \frac{\partial\delta u}{\partial \mathbf{s}} + Q_{\nu} \delta u \right) d\Omega = -M_{\nu s} \delta u]_0^s + \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial M_{\nu s}}{\partial \mathbf{s}} + Q_{\nu} \right) \delta u d\Omega$$

El término entre paréntesis en la integral del segundo miembro se conoce como corte efectivo o de Kirchhoff. El primer término del 2do. miembro se anula en el caso de contornos suaves y da lugar a valores puntuales en caso contrario. Notar que el problema de flexión de placas requiere poder evaluar derivadas segundas de la variable, y por lo tanto conduce a elementos de continuidad C^1 . A diferencia del caso de vigas, donde esta condición es relativamente sencilla de cumplir, en el caso de placas la continuidad C^1 trae muchos problemas. La mayoría de los elementos finitos

basados en esta teoría no satisfacen en forma completa la continuidad de las derivadas primeras a lo largo de los contornos inter-elementos. Aquellos elementos que no satisfacen en forma completa los requisitos de continuidad se denominan “no-conformes”

5.10.2. Teoría de placas incluyendo deformaciones transversales de corte (Reissner-Mindlin)

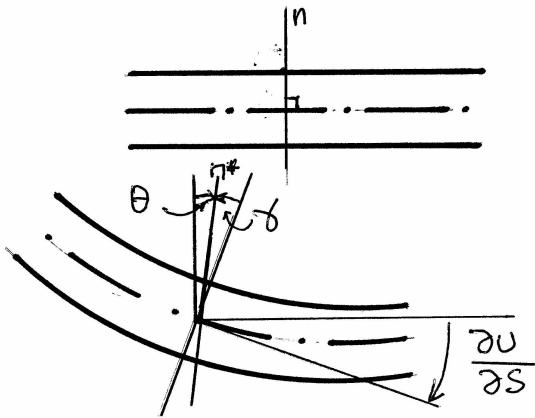


Figura 8 Teoría de placas con deformaciones de corte

Esta teoría se diferencia de la anterior en la segunda parte de la 2da hipótesis, en forma similar a la diferencia que existe entre la teoría de vigas clásicas y la que se conoce como teoría de vigas de Timoshenko. En este caso entonces no se exige que la fibra normal a la superficie media indeformada se mantenga normal a la superficie media deformada. En consecuencia el giro de la fibra no resulta igual al gradiente de u , es decir

$$\boldsymbol{\theta} \neq -\nabla u$$

Aparecen ahora deformaciones asociadas al corte transversal relacionadas precisamente con la inequidad anterior, que se suponen constantes en el espesor.

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 + \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \theta_2 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\theta} + \nabla u$$

Al igual que antes el plano medio se mantiene indeformado (membranalmente) y las deformaciones en puntos fuera del plano medio son proporcionales a su distancia al mismo (x_3) según una ley lineal en el espesor de la placa (h):

$$\varepsilon_{ij} = \chi_{ij} x_3 \quad -\frac{h}{2} \leq x_3 \leq \frac{h}{2}$$

pero ahora

$$\chi_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial u_j} + \frac{\partial \theta_j}{\partial u_i} \right) = \nabla^s \boldsymbol{\theta} \quad i, j = 1, 2$$

Los momentos flectores se relacionan con las curvaturas del plano medio mediante las mismas ecuaciones constitutivas que antes

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{bmatrix} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \\ & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_{11} \\ \chi_{22} \\ 2\chi_{12} \end{bmatrix} = \mathbf{D} \boldsymbol{\chi}$$

Los esfuerzos de corte transversal se relacionan con las deformaciones de corte transversal mediante

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = Gh\kappa \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix}$$

Donde G es el módulo de corte y κ es un factor de forma que normalmente se toma $\kappa = \frac{5}{6}$. Notar que planteada así esta teoría no satisface las condiciones de tensiones de corte nulas en las caras de la placa. El equilibrio requiere una variación parabólica de las deformaciones y tensiones de corte, el coeficiente κ precisamente resulta de igualar la energía de deformación asociada a ambos casos. La ecuación de trabajos virtuales tiene ahora la forma

$$\int_{\Omega} (M_{11}\delta\chi_{11} + M_{22}\delta\chi_{22} + 2M_{12}\delta\chi_{12} + Q_1\delta\gamma_1 + Q_2\delta\gamma_2) d\Omega = \int_{\Omega} p \delta u d\Omega + \int_{\partial\Omega} (M_{\nu\nu}\delta\theta_{\nu} + M_{\nu s}\delta\theta_s + Q_{\nu}\delta u) d\partial\Omega$$

Notar que el problema resulta ahora de continuidad C^0 .

Capítulo 6 Elementos finitos en dos dimensiones

por F. Flores

6.1. Introducción

En el capítulo precedente se han descripto en forma sucinta los principales problemas de interés que se pretende resolver usando la técnica de elementos finitos. Las ecuaciones diferenciales que gobiernan estos problemas son, a diferencia de las abordadas en el Capítulo 4, a derivadas parciales. El dominio es bi o tridimensional y el contorno entre elementos resulta una curva (en dos dimensiones) o una superficie (en 3 dimensiones). Esto implica una diferencia substancial con los problemas unidimensionales, donde las fronteras entre elementos eran puntos, e incluso muchas veces era factible integrar en forma exacta la ecuación diferencial (ordinaria) que gobierna el problema. De esta forma el análisis de estructuras de barras articuladas y vigas conducía a la solución exacta (en el marco de la teoría lineal) de los problemas en estudio. En el caso de problemas a derivadas parciales, no es posible resolver tales ecuaciones en forma exacta para un caso general, por lo cual las soluciones numéricas que se obtienen son aproximadas y dependen de la discretización realizada.

En el presente capítulo se verá como aplicar el método de elementos finitos a problemas bidimensional de clase C^0 . Los elementos posibles corresponden a triángulos y cuadriláteros. Se comenzará con elementos con lados rectos, y luego se introducirán los de lados curvos que permiten tratar geometrías más generales, particularmente contornos. Luego se muestra su aplicación a la ecuación de Laplace, a problemas de elasticidad lineal y al problema de convección difusión. La extensión de las ideas a problemas tridimensionales es inmediata.

6.2. Condiciones de las funciones de aproximación

Recordemos las condiciones que deben cumplir las funciones de forma $\phi^I(\mathbf{x})$ a los fines de que las incógnitas del problema tengan el significado físico deseado y que se satisfagan las condiciones de continuidad entre elementos (continuidad C^0). Sea la variable \mathbf{u} (vector) aproximada por:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{NN} \phi^I(\mathbf{x}) \mathbf{u}^I$$

se debe satisfacer

a)- $\phi^I(\mathbf{x}^J) = \delta_{IJ}$

b)- $\sum_{I=1}^{NN} \phi^I(\mathbf{x}^I) = 1$

c)- $\sum_{I=1}^{NN} \frac{\partial \phi^I(\mathbf{x}^I)}{\partial x_i} = 0$ (consecuencia de (b))

Estas condiciones tienen el siguiente objetivo:

- La condición (a) asegura el significado físico de la variable, es decir que el parámetro \mathbf{u}^I corresponde al valor de la variable en el nudo I . Por otro lado es necesario asegurar la continuidad de la variable no sólo en los nudos sino en todo el contorno entre elementos, es decir que el valor de \mathbf{u} a lo largo de una línea que limita dos elementos debe tener un único valor independientemente de cual de los dos elementos se considere. Dado que dos

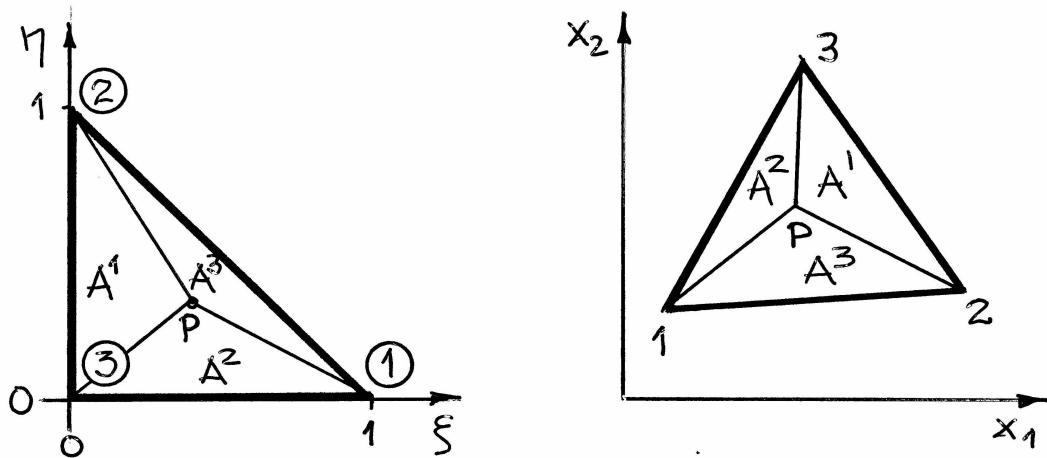


Figura 1 Triángulo Maestro, y triángulo en el espacio coordenado físico

elementos tendrán como parámetros comunes las variables asociadas a sus nodos comunes (los que definen geométricamente su contorno común) es necesario que el valor de la variable \mathbf{u} a lo largo de dicho contorno común sólo dependa de las variables asociadas a los nudos que lo definen. En consecuencia la función de interpolación debe valer 0 no sólo en los otros nudos (condición (a)) sino también a lo largo de el(los) lado(s) que no lo incluyan.

- La condición (b) asegura que si el valor de la variable es constante en todo los nodos, entonces es constante en todo el elemento. La condición (c) consecuencia de la anterior dice que, en tal caso, el gradiente en todo el elemento será cero.
- Además resulta conveniente que las funciones de aproximación sean capaces de representar un estado de gradiente constante, que es el límite que debe alcanzarse cuando de refina la discretización.

6.3. Elementos triangulares

Empecemos viendo el elemento más sencillo para problemas planos que es el triángulo lineal. Definamos inicialmente un elemento maestro, en forma similar a como hicimos en el problema unidimensional. En este caso el elemento maestro se define como un triángulo rectángulo con el ángulo recto en el origen de coordenadas, lados paralelos a los ejes y de longitud unitaria. Numeremos además sus vértices en la forma indicada, 1 de coordenadas ($\xi = 1, \eta = 0$), 2 de coordenadas ($\xi = 0, \eta = 1$), y 3 de coordenadas ($\xi = 0, \eta = 0$)

En el elemento así definido llamemos ξ al eje horizontal y η al eje vertical. Observemos las siguientes funciones lineales definidas sencillamente como:

$$L^1(\xi, \eta) = \xi$$

$$L^2(\xi, \eta) = \eta$$

$$L^3(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta$$

Notemos que estas funciones satisfacen todas las condiciones pedidas anteriormente. La (a) resulta inmediata de evaluar en los nudos, en tanto que para la (b) basta ver la definición de la 3ra. función. Observemos además que el gradiente de la variable es constante para cualquier valor que tomen las parámetros nodales.

Trataremos ahora de darle un significado geométrico a las funciones de forma L^I , tomemos un punto cualquiera “ p ” de coordenadas (ξ, η) dentro de elemento y unamos este punto con los 3 vértices lo que nos define 3 triángulos. Si observamos el triángulo inferior definido por el eje ξ y

el punto $p(\xi, \eta)$, y calculamos su área (llamemos a esta área A_2 por ser la del triángulo opuesto al nudo 2) vemos fácilmente que vale la altura del mismo dividido 2 pues el largo de la base vale 1, que no es otra cosa que $A_2 = \eta/2$. Si hacemos lo mismo con el formado por el eje η y el punto p tendremos que el área (A_1) de este vale $A_1 = \xi/2$. Finalmente el triángulo restante tendrá por área el valor $A_3 = (1 - \xi - \eta)/2$ lo que resulta de que el área total del triángulo (A) vale $1/2$. Vemos entonces que es posible asociar las funciones de forma L^I con el doble del área del triángulo definido por el punto $p(\xi, \eta)$ y el lado opuesto al nudo, o puesto de otra forma la función de forma L^I define la relación entre el área del triángulo opuesto al nudo A^I y el área total del triángulo A .

$$L^I = A^I / A$$

Si aplicamos esta misma idea a un triángulo cualquiera en el plano $(x_1 - x_2)$, de coordenadas nodales \mathbf{x}^1 , \mathbf{x}^2 y \mathbf{x}^3 , podemos obtener el mismo resultado. Para ello recordemos que el área de un triángulo puede evaluarse como la mitad del módulo del vector obtenido como el producto vectorial de dos de sus lados. Por ejemplo para el área de todo el triángulo podemos usar como vectores los definidos por los lados $\overline{31}$ y $\overline{32}$:

$$2A = \overline{31} \times \overline{32} = (\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^3) \times (\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^3) = (x_1^1 - x_1^3)(x_2^2 - x_2^3) - (x_2^1 - x_2^3)(x_1^2 - x_1^3)$$

En tanto que para un punto genérico $p(\mathbf{x})$, dos veces del área del triángulo 1 resulta entonces

$$2A_1 = \overline{p2} \times \overline{p3} = (\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}) \times (\mathbf{x}^3 - \mathbf{x}) = (x_1^2 - x_1)(x_2^3 - x_2) - (x_2^2 - x_2)(x_1^3 - x_1)$$

y dividiendo ambas expresiones tenemos

$$L^1 = \frac{1}{2A} [x_1^2 x_2^3 - x_2^2 x_1^3 + (x_2^2 - x_2^3)x_1 + (x_1^3 - x_1^2)x_2]$$

que hemos escrito como una función lineal de las coordenadas del punto (x_1, x_2) . Similarmente (o por permutación de índices) se pueden encontrar las expresiones para los otros dos nodos.

$$L^2 = \frac{1}{2A} [x_1^3 x_2^1 - x_2^3 x_1^1 + (x_2^3 - x_2^1)x_1 + (x_1^1 - x_1^3)x_2]$$

$$L^3 = \frac{1}{2A} [x_1^1 x_2^2 - x_2^1 x_1^2 + (x_2^1 - x_2^2)x_1 + (x_1^2 - x_1^1)x_2]$$

Llamando a las constantes que aparecen en las funciones de forma

$$\begin{aligned} a_1 &= (x_1^3 - x_1^2) & b_1 &= (x_2^2 - x_2^3) & c_1 &= x_1^2 x_2^3 - x_2^2 x_1^3 \\ a_2 &= (x_1^1 - x_1^3) & b_2 &= (x_2^3 - x_2^1) & c_2 &= x_1^3 x_2^1 - x_2^3 x_1^1 \\ a_3 &= (x_1^2 - x_1^1) & b_3 &= (x_2^1 - x_2^2) & c_3 &= x_1^1 x_2^2 - x_2^1 x_1^2 \end{aligned}$$

éstas se pueden escribir como

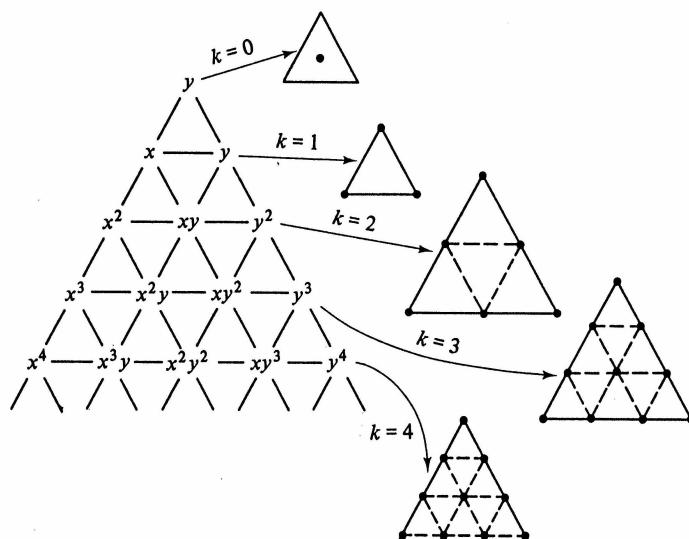
$$L^I = \frac{1}{2A} [c_I + b_I x_1 + a_I x_2]$$

Otros elementos triangulares incluyendo polinomios de mayor grado en x_1 y x_2 pueden construirse fácilmente. Primero mostremos en forma tabular los términos que aparecen en los polinomios de varios grados

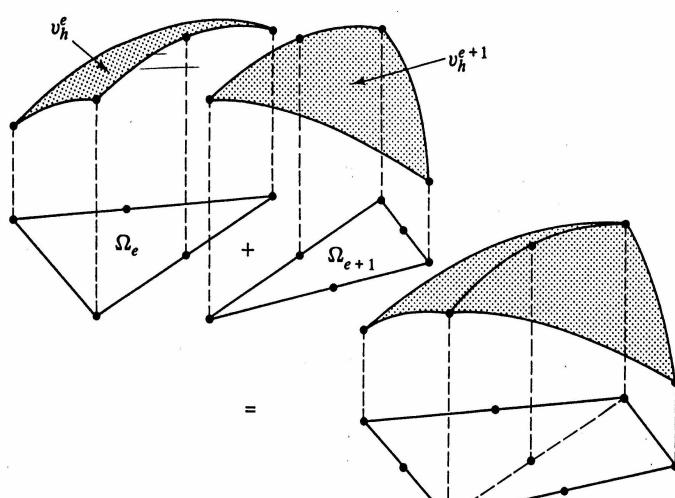
	1	grado 0
	$x_1 \quad x_2$	grado 1
	$x_1^2 \quad x_1 x_2 \quad x_2^2$	grado 2
	$x_1^3 \quad x_1^2 x_2 \quad x_1 x_2^2 \quad x_2^3$	grado 3
	$x_1^4 \quad x_1^3 x_2 \quad x_1^2 x_2^2 \quad x_1 x_2^3 \quad x_2^4$	grado 4

Este arreglo triangular se denomina triángulo de Pascal. Notar que un polinomio completo de grado k en x_1 y x_2 tendrá exactamente $\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$ términos. En consecuencia un polinomio de grado k , puede ser únicamente determinado especificando los valores en $\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$ puntos en el plano. Además, las posiciones en el triángulo de Pascal sugieren una posición simétrica de los nudos en un elemento triangular que conducirá al número exacto de nodos necesarios para definir el polinomio completo del grado deseado. Por ejemplo, los seis términos del polinomio cuadrático quedan determinados si se especifican seis valores nodales, uno en cada vértice y uno a la mitad de cada lado, precisamente las posiciones definidas por el triángulo de Pascal cuadrático. La familia de elementos finitos generados de esta forma se ilustra en la figura.

En función de las coordenadas de área estos polinomios resultan



(a)



(b)

Figura 2 (a) Uso del triángulo de Pascal para generar varios elementos triangulares sobre los cuales se definen polinomios completos de orden k , (b) ilustración para el caso $k = 2$ que las funciones de forma producidas por estos elementos son continuas en los bordes inter elementos.

- Para el caso cuadrático

$$\begin{aligned}
 (\xi, \eta) = (1, 0) & \quad N^1(L^i) = 2L^1 \left(L^1 - \frac{1}{2} \right) \\
 (\xi, \eta) = (0, 1) & \quad N^2(L^i) = 2L^2 \left(L^2 - \frac{1}{2} \right) \\
 (\xi, \eta) = (0, 0) & \quad N^3(L^i) = 2L^3 \left(L^3 - \frac{1}{2} \right) \\
 (\xi, \eta) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) & \quad N^4(L^i) = 4L^1 L^2 \\
 (\xi, \eta) = \left(0, \frac{1}{2} \right) & \quad N^5(L^i) = 4L^2 L^3 \\
 (\xi, \eta) = \left(\frac{1}{2}, 0 \right) & \quad N^6(L^i) = 4L^3 L^1
 \end{aligned}$$

- Para el elemento cúbico

$$\begin{aligned}
 (\xi, \eta) = (1, 0) & \quad N^1(L^i) = \frac{9}{2} L^1 \left(L^1 - \frac{1}{3} \right) \left(L^1 - \frac{2}{3} \right) \\
 (\xi, \eta) = (0, 1) & \quad N^2(L^i) = \frac{9}{2} L^2 \left(L^2 - \frac{1}{3} \right) \left(L^2 - \frac{2}{3} \right) \\
 (\xi, \eta) = (0, 0) & \quad N^3(L^i) = \frac{9}{2} L^3 \left(L^3 - \frac{1}{3} \right) \left(L^3 - \frac{2}{3} \right) \\
 (\xi, \eta) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right) & \quad N^4(L^i) = \frac{27}{2} L^1 L^2 \left(L^1 - \frac{1}{3} \right) \\
 (\xi, \eta) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right) & \quad N^5(L^i) = \frac{27}{2} L^1 L^2 \left(L^2 - \frac{1}{3} \right) \\
 (\xi, \eta) = \left(0, \frac{2}{3} \right) & \quad N^6(L^i) = \frac{27}{2} L^3 L^2 \left(L^2 - \frac{1}{3} \right) \\
 (\xi, \eta) = \left(0, \frac{1}{3} \right) & \quad N^7(L^i) = \frac{27}{2} L^3 L^2 \left(L^3 - \frac{2}{3} \right) \\
 (\xi, \eta) = \left(\frac{1}{3}, 0 \right) & \quad N^8(L^i) = \frac{27}{2} L^1 L^3 \left(L^1 - \frac{2}{3} \right) \\
 (\xi, \eta) = \left(\frac{2}{3}, 0 \right) & \quad N^9(L^i) = \frac{27}{2} L^1 L^3 \left(L^1 - \frac{1}{3} \right) \\
 (\xi, \eta) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) & \quad N^{10}(L^i) = 27 L^1 L^2 L^3
 \end{aligned}$$

La utilización de las funciones de forma para triángulos en términos de las coordenadas triangulares, permite escribir las derivadas en términos de la regla de la cadena, es decir dado:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{NN} N^I(L^J) \mathbf{u}^I$$

entonces

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} &= \sum_{I=1}^{NN} \sum_{J=1}^3 \left[\frac{\partial N^I}{\partial L^J} (L^1, L^2, L^3) \frac{b_J}{2A} \right] \mathbf{u}^I \\
 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_2} &= \sum_{I=1}^{NN} \sum_{J=1}^3 \left[\frac{\partial N^I}{\partial L^J} (L^1, L^2, L^3) \frac{a_J}{2A} \right] \mathbf{u}^I
 \end{aligned}$$

6.4. Elementos rectangulares

Similarmente al caso unidimensional los elementos se definen sobre un dominio normalizado, en este caso dicho dominio es equivalente al unidimensional pero extendido en ambas direcciones, es decir un cuadrado de lado 2 centrado en el origen de coordenadas locales (ξ, η) .

Si nos inclinamos por los elementos del tipo Lagrangeano, es decir aquellos obtenidos usando los polinomios de Lagrange, entonces las funciones de forma nodales se pueden obtener realizando el producto tensorial de los correspondientes polinomios unidimensionales evaluados sobre las variables locales (ξ, η) . Dados los vértices del rectángulo, $(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3, \mathbf{x}^4)$ las coordenadas locales se definen por

$$\begin{aligned}
 \xi &= \frac{2x_1 - (x_1^3 + x_1^4)}{(x_1^3 - x_1^4)} = \frac{2x_1 - (x_1^2 + x_1^1)}{(x_1^2 - x_1^1)} = \frac{2x_1 - x_1^0}{a} \\
 \eta &= \frac{2x_2 - (x_2^4 + x_2^1)}{(x_2^4 - x_2^1)} = \frac{2x_2 - (x_2^3 + x_2^2)}{(x_2^3 - x_2^2)} = \frac{2x_2 - x_2^0}{b}
 \end{aligned}$$

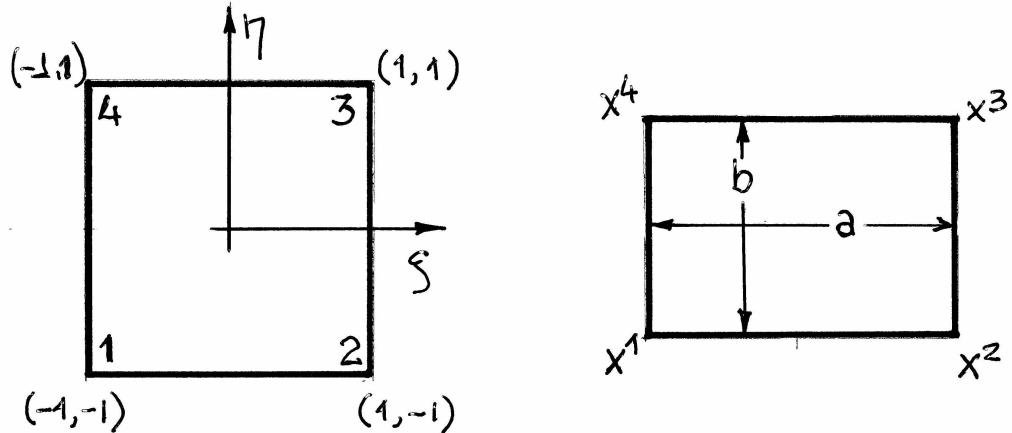


Figura 3 Cuadrado Maestro, y rectángulo en el espacio coordenado

donde los nudos están en correspondencia con las siguientes coordenadas locales

Nudo	ξ	η
1	-1	-1
2	1	-1
3	1	1
4	-1	1

y \mathbf{x}^0 son las coordenadas del centro del rectángulo y a y b son la las longitudes de sus lados en las direcciones x_1 y x_2 respectivamente.

El elemento rectangular más sencillo resulta entonces el bilineal obtenido de multiplicar los polinomios lineales en ambas direcciones

$$\begin{aligned} N^1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\ N^2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ N^3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\ N^4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{aligned}$$

o englobando las cuatro en una única expresión

$$N^I(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi^I \xi) (1 + \eta^I \eta)$$

De la misma forma puede encontrarse el elemento cuadrático Lagrangeano de 9 nodos y el cúbico de 16 nodos. Que las funciones propuestas cumplen con las condiciones expresadas inicialmente es muy fácil de demostrar y se deja como ejercicio.

La utilización de las funciones de forma para rectángulo en términos de las coordenadas locales, permite escribir las derivadas en términos de la regla de la cadena, es decir dado:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{NN} N^I(\xi, \eta) \mathbf{u}^I$$

entonces

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} = \sum_{I=1}^{NN} \left[\frac{\partial N^I}{\partial \xi}(\xi, \eta) \frac{2}{a} \right] \mathbf{u}^I$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_2} = \sum_{I=1}^{NN} \left[\frac{\partial N^I}{\partial \eta} (\xi, \eta) \frac{2}{b} \right] \mathbf{u}^I$$

Notemos que a diferencia del triángulo, en donde cuando se genera un elemento (cuadrático por ejemplo) aparece la cantidad exacta de coeficientes necesarios para dicha aproximación (6 en el caso cuadrático), para los elementos rectangulares aparece una cantidad de coeficientes (9 en el caso cuadrático) mayor que el número indispensable, asociados con términos de orden superior ($x_1^2 x_2$, $x_1^2 x_2^2$, $x_1 x_2^2$). Además dado que en la matriz global de coeficientes, los parámetros asociados a los nudos internos del elemento sólo tienen contribución del mismo elemento, muchas veces suelen eliminarse estos grados de libertad por “condensación”. Estos considerandos han llevado a desarrollar elementos cuadráticos de mayor orden con sólo nudos en el contorno, estos elementos se conocen como “serendípitos” y se obtienen por inspección de las funciones de forma. Por ejemplo el elemento rectangular de 8 nudos en el que se ha eliminado el nudo central del elemento de 9 nudos y con él el término $x_1^2 x_2^2$, de forma que del triángulo de Pascal sobreviven los siguientes

$$\begin{matrix} & & 1 \\ & x_1 & x_2 \\ x_1^2 & x_1 x_2 & x_2^2 \\ x_1^2 x_2 & x_1 x_2^2 \end{matrix}$$

La forma estándar de encontrar estas funciones de forma es escribirlas de la forma

$$N^I(x_1, x_2) = a_1 + a_2 x_1 + a_3 x_2 + a_4 x_1^2 + a_5 x_1 x_2 + a_6 x_2^2 + a_7 x_1^2 x_2 + a_8 x_1 x_2^2$$

e imponer las condiciones correspondientes de que $N^I(\mathbf{x}^J) = \delta_{IJ}$ que conduce a invertir un sistema de 8×8 , que nos da simultáneamente los 8 coeficientes de cada una de las 8 funciones de forma. La otra forma es armarlas directamente inspeccionando la forma que deberían tener (de allí su nombre ‘serendipity’ en inglés). Estas funciones resultan de esta forma

$$N^I(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi^I \xi) (1 + \eta^I \eta) (\xi^I \xi + \eta^I \eta - 1) \quad \text{nudos esquina}$$

$$N^I(\xi, \eta) = \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 + \eta^I \eta) \quad \text{nudos medios } \eta = \pm 1$$

$$N^I(\xi, \eta) = \frac{1}{2} (1 + \xi^I \xi) (1 - \eta^2) \quad \text{nudos medios } \xi = \pm 1$$

6.5. Mapeamiento de la geometría

Hasta ahora hemos considerado elementos con geometrías sencillas. En principio hemos definido las funciones de forma a partir de elementos “maestros” definidos sobre un dominio normalizado. En el caso del triángulo ha sido posible pasar fácilmente a un elemento triangular general de lados rectos, en tanto que para el caso de elementos cuadriláteros nos hemos restringido a elementos rectangulares. Desde el punto de vista práctico el elemento rectangular resulta muy limitado para el modelado de geometrías reales, para lo cual si resulta conveniente el elemento triangular que es mucho más versátil en ese aspecto, sin embargo en ambos casos debe aproximarse el contorno mediante segmentos de recta.

Los inconvenientes anteriores pueden resolverse si se recurre a mapear al elemento “maestro” sobre el plano $x_1 - x_2$ en una forma más general que la usada hasta ahora. La idea es interpolar la geometría del elemento usando aproximaciones similares a las usadas para interpolar las variables nodales, es decir si describimos la geometría del elemento mediante

$$\mathbf{x}(\xi, \eta) = \sum_{I=1}^{NN} N^I(\xi, \eta) \mathbf{x}^I$$

Haciendo uso del concepto ya conocido de las funciones de forma resulta que:

- Un nudo definido sobre el elemento maestro con coordenadas (ξ^I, η^I) se corresponderá en el plano con el par coordenado \mathbf{x}^I .
- Las coordenadas del contorno quedan definidas exclusivamente por las coordenadas de los nudos que forman el lado, lo que asegura continuidad de la geometría entre elementos sin solapamientos ni brechas

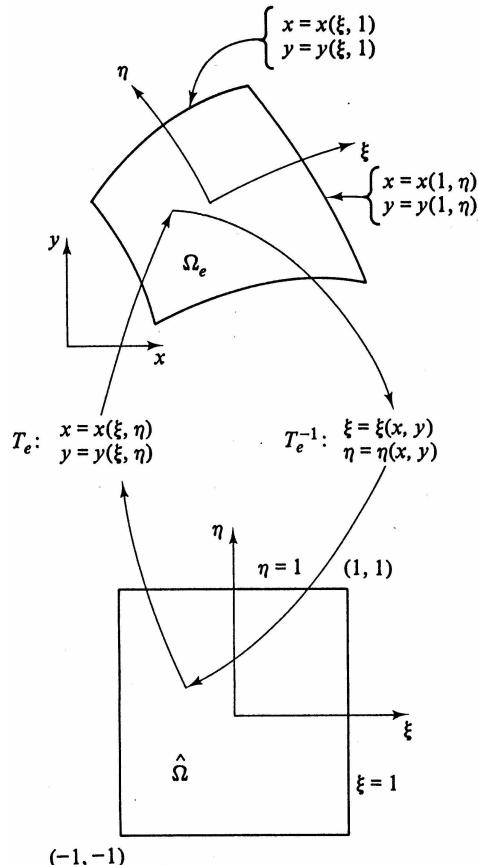


Figura 4 Elemento finito Ω^e en el plano (x, y) obtenido como la imagen del mapeamiento T_e del correspondiente elemento maestro $\hat{\Omega}$ en el plano (ξ, η) . También se indica el mapeamiento inverso T_e^{-1} de Ω^e a $\hat{\Omega}$.

En el caso del triángulo (lineal) de 3 nodos esto no representa ningún cambio práctico pero si desde el punto de vista formal, en tanto que para el cuadrilátero bilineal si hay un cambio substancial que permite utilizar ahora elementos cuadriláteros de forma arbitraria (aunque veremos más adelante que los ángulos interiores no deben superar los 180° en ningún caso) y ya no exclusivamente rectangulares.

Resulta entonces posible ahora utilizar elementos de lados curvos (en elementos con más de dos nudos en cada lado), en particular esto resulta útil en los contornos exteriores de la geometría del problema, ya que para la interface entre elementos es conveniente utilizar contornos rectos.

Veamos como interviene esta parametrización de la geometría (el dominio) en la generación de las ecuaciones del problema. Para la obtención del gradiente de la variable tendremos ahora que:

$$\nabla \mathbf{u} = \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_2} \right) = \left(\sum_{I=1}^{NN} \frac{\partial N^I(\xi, \eta)}{\partial x_1} \mathbf{u}^I, \sum_{I=1}^{NN} \frac{\partial N^I(\xi, \eta)}{\partial x_2} \mathbf{u}^I \right)$$

donde la aplicación de la regla de la cadena supone

$$\frac{\partial N^I(\xi, \eta)}{\partial x_1} = \frac{\partial N^I(\xi, \eta)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_1} + \frac{\partial N^I(\xi, \eta)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_1}$$

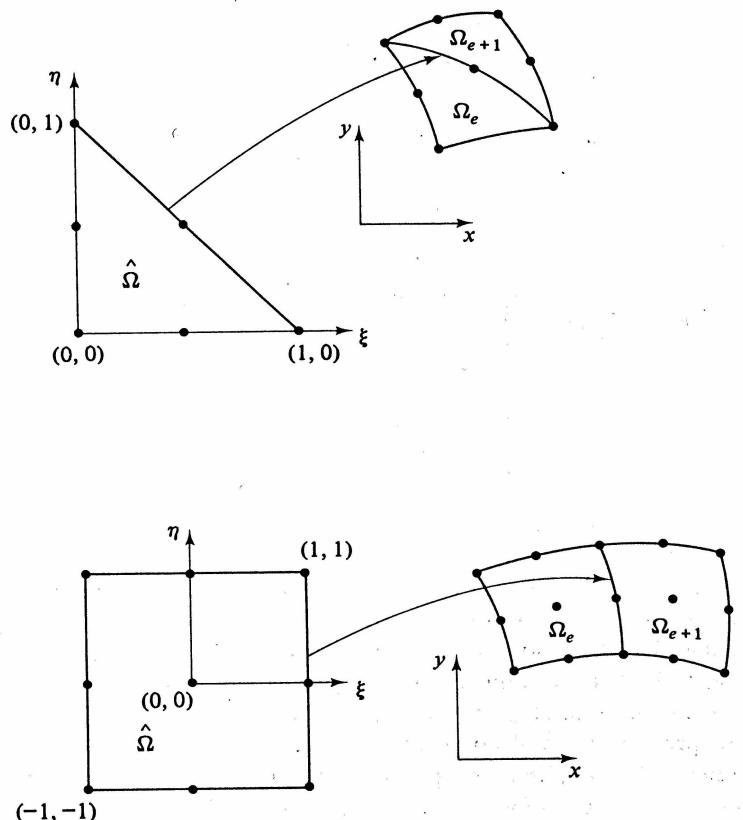


Figura 5 Mapeamientos para funciones de forma cuadráticas sobre los elementos maestros triángulo y cuadrado. La curva cuadrática entre dos elementos en el plano \$(x, y)\$ queda definida únicamente por el mapeamiento.

$$\frac{\partial N^I(\xi, \eta)}{\partial x_2} = \frac{\partial N^I(\xi, \eta)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_2} + \frac{\partial N^I(\xi, \eta)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_2}$$

que escrito en forma matricial es

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N^I(\xi, \eta)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N^I(\xi, \eta)}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x_1} & \frac{\partial \eta}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \xi}{\partial x_2} & \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N^I(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N^I(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

o en forma compacta

$$\begin{bmatrix} N'_{11} \\ N'_{12} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} N'_{\xi} \\ N'_{\eta} \end{bmatrix}$$

donde \mathbf{J} es la matriz jacobiana de la transformación T_e

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \eta} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

El cálculo de la matriz de coeficientes (rigidez) en un problema gobernado por la ecuación de
ÍNDICE GENERAL

Laplace resulta entonces

$$\begin{aligned} K^{IJ} &= \int_{\Omega^e} \left[\begin{array}{cc} N'_{11}^I & N'_{12}^I \\ N'_{21}^I & N'_{22}^I \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} N'_{11}^J \\ N'_{21}^J \end{array} \right] d\Omega^e \\ &= \int_{\Omega^e} \left[\begin{array}{cc} N'_{\xi}^I & N'_{\eta}^I \\ N'_{\xi}^{\eta} & N'_{\eta}^{\eta} \end{array} \right] \mathbf{J}^{-T} \left[\begin{array}{cc} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{array} \right] \mathbf{J}^{-1} \left[\begin{array}{c} N'_{\xi}^J \\ N'_{\eta}^J \end{array} \right] d\Omega^e \end{aligned}$$

donde hemos puesto de evidencia la dependencia de la integral del mapeamiento geométrico utilizando a través de la inversa de la matriz jacobiana. De esta forma es posible expresar todas las variables dentro de la integral en función de las variables locales (ξ, η) , por lo cual resulta conveniente al momento de realizar la integral, modificar los límites y el diferencial $d\Omega^e = |\mathbf{J}| d\xi d\eta$. Respecto a esta última expresión (fórmula que escribiremos sin demostración) relaciona el diferencial de área en el plano (x_1, x_2) con el diferencial de área en el elemento maestro a través del determinante jacobiano. Claramente para que esta expresión tenga sentido físico resulta necesario que el determinante jacobiano sea siempre positivo, en el caso de cuadriláteros esto impone la condición de que los ángulos internos sean menores a 180° y para elementos cuadráticos es necesario que los nudos sobre los lados estén ubicados en el tercio central del lado.

Notar que la existencia de la inversa de la matriz jacobiana hace muy difícil (tal vez imposible) realizar la integral indicada en forma explícita y resulta en general necesario recurrir a técnicas de integración numérica.

La inversa de la matriz jacobiana puede evaluarse en forma explícita en la medida en que esta sea constante en todo el elemento, así ocurre para triángulos de lados rectos (lineales) o paralelogramos.

Las reglas de integración numérica en dominios bidimensionales son similares conceptualmente a las de dominios unidimensionales. Las reglas de cuadratura para elementos cuadriláteros se derivan usualmente tratando la integración sobre el elemento maestro como una doble integral. Si escribimos

$$\int_{\hat{\Omega}} G(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int_{-1}^{-1} \left[\int_{-1}^1 G(\xi, \eta) d\xi \right] d\eta$$

y aproximamos las integrales con respecto a ξ y con respecto a η usando una regla de integración unidimensional con N puntos como se discutiera antes, se tiene:

$$\int_{\hat{\Omega}} G(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{m=1}^N \left[\sum_{n=1}^N G(\xi_n, \eta_m) w_n \right] w_m$$

donde los ξ_n y η_m son las coordenadas de los puntos de muestreo y las w_n y w_m los respectivos pesos. Estas reglas de integración, evalúan en forma exacta polinomios de grado $(2N - 1)$ en cada dirección. Notar que el integrando $G(\xi, \eta)$ incluye dos veces la inversa de la matriz jacobiana (una función racional en general) y no resulta obvio el grado del polinomio involucrado. Los puntos de muestreo y sus respectivos pesos se dan a continuación para una dimensión

Elemento	ξ_l	w_l
Lineal	0,0	2,0
Cuadrático	$-1/\sqrt{3}$	1,0
	$1/\sqrt{3}$	1,0
Cúbico	$\sqrt{3}/5$	5/9
	0,0	8/9
	$\sqrt{3}/5$	5/9

Para elementos triangulares las reglas de integración no pueden deducirse de la regla unidimensional. Los puntos de muestreo y su respectivos pesos se dan a continuación en forma de tabla.

Elemento	(L^1, L^2, L^3)	w_l
Lineal	$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$	$\frac{1}{2}$
Cuadrático	$\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{6}$
	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$	$\frac{1}{6}$
	$\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{6}$
Cúbico	$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$	$-\frac{27}{96}$
	$\left(\frac{2}{15}, \frac{2}{15}, \frac{11}{15}\right)$	$\frac{25}{96}$
	$\left(\frac{11}{15}, \frac{2}{15}, \frac{2}{15}\right)$	$\frac{25}{96}$
	$\left(\frac{2}{15}, \frac{11}{15}, \frac{2}{15}\right)$	$\frac{25}{96}$
	$\left(\frac{11}{15}, \frac{11}{15}, \frac{11}{15}\right)$	$\frac{25}{96}$

6.6. Aplicación a la ecuación de Laplace

A continuación se presentan en forma más detallada las expresiones necesarias para resolver la ecuación de Laplace en un dominio bidimensional. La forma débil de la ecuación de transferencia del calor tiene la forma

$$\int_{\Omega} [\nabla \mathbf{v} \cdot (\mathbf{k} \nabla \mathbf{u}) + b v u - v f] d\Omega - \int_{\partial\Omega} v (\mathbf{k} \nabla u) \cdot \boldsymbol{\nu} d\partial\Omega = 0$$

La variable incógnita u se interpola como

$$u = \sum_{I=1}^{NN} \phi^I(\xi, \eta) u^I$$

donde NN es el número de nudos del elemento considerado. u^I es la temperatura de cada nodo y las ϕ^I son las funciones de interpolación elegidas convenientemente. Para la función de peso proponemos una interpolación similar.

$$v = \sum_{I=1}^{NN} \phi^I(\xi, \eta) v^I$$

Ambas aproximaciones pueden escribirse matricialmente como el producto entre dos vectores

$$u(\xi, \eta) = [\phi^1(\xi, \eta), \phi^2(\xi, \eta), \dots, \phi^{NN}(\xi, \eta)] \begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^{NN} \end{bmatrix} = \Phi(\xi, \eta) \mathbf{u}_e$$

$$v(\xi, \eta) = \Phi(\xi, \eta) \mathbf{v}_e$$

El gradiente de u resulta

$$\nabla u_{(2 \times 1)} = \left[\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{array} \right]_{(2 \times 1)} \Phi(\xi, \eta)_{(1 \times NN)} \mathbf{u}_{e(1 \times NN)} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial \phi^1}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi^2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \phi^{NN}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \phi^1}{\partial x_2} & \frac{\partial \phi^2}{\partial x_2} & & \frac{\partial \phi^{NN}}{\partial x_2} \end{array} \right]_{(2 \times NN)} \mathbf{u}_{e(1 \times NN)}$$

Donde como se explicara antes, las derivadas de las funciones de forma resultan

$$\begin{bmatrix} \phi'_1 \\ \phi'_2 \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \phi'_{\xi} \\ \phi'_{\eta} \end{bmatrix}$$

Notar las dimensiones de las matrices y vectores involucrados en la expresión del gradiente. En forma completamente similar es posible expresar al gradiente de la función de ponderación

Reemplazando en la forma débil las expresiones anteriores para un elemento genérico, las integrales necesarias son

$$\left[\begin{array}{c} v^1 \\ v^2 \\ \dots \\ v^{NN} \end{array} \right]^T \int_{\Omega_e} \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial \phi^1}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi^1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \phi^2}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi^2}{\partial x_2} \\ \dots & \dots \\ \frac{\partial \phi^{NN}}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi^{NN}}{\partial x_2} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cccc} \frac{\partial \phi^1}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi^2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \phi^{NN}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \phi^1}{\partial x_2} & \frac{\partial \phi^2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \phi^{NN}}{\partial x_2} \end{array} \right] \mathbf{u}_e + \\ b \left[\begin{array}{c} \phi^1 \\ \phi^2 \\ \dots \\ \phi^{NN} \end{array} \right] [\phi^1, \phi^2, \dots, \phi^{NN}] \mathbf{u}_e - \left[\begin{array}{c} \phi^1 \\ \phi^2 \\ \dots \\ \phi^{NN} \end{array} \right] f \end{array} \right\} d\Omega_e$$

Se ha sacado fuera de la integral al vector \mathbf{v}_e , cuyos valores no dependen de la integral, de la misma forma puede hacerse con el vector \mathbf{u}_e . En la integral aparecen tres términos

1. Es el que resulta del producto punto de los gradientes (a través de la matriz de conductividad \mathbf{k}), que da lugar a una matriz cuadrada simétrica de orden NN que multiplica al vector de incógnitas del elemento \mathbf{u}_e , es el término habitual que proviene del Laplaciano.

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega_e} \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial \phi^1}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi^1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \phi^2}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi^2}{\partial x_2} \\ \dots & \dots \\ \frac{\partial \phi^{NN}}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi^{NN}}{\partial x_2} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cccc} \frac{\partial \phi^1}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi^2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \phi^{NN}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \phi^1}{\partial x_2} & \frac{\partial \phi^2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \phi^{NN}}{\partial x_2} \end{array} \right] d\Omega_e$$

2. Es el que resulta del producto bvu , este es un término “no estándar” en la ecuación de Laplace. Da lugar también a una matriz cuadrada simétrica de orden NN que multiplica a \mathbf{u}_e . Formalmente la expresión que tiene esta segunda matriz es igual a la matriz de masa que aparece en problemas dependientes del tiempo

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega_e} b \left[\begin{array}{c} \phi^1 \\ \phi^2 \\ \dots \\ \phi^{NN} \end{array} \right] [\phi^1, \phi^2, \dots, \phi^{NN}] d\Omega_e$$

3. El último término no está asociado a las incógnitas \mathbf{u}_e , y forma parte del segundo miembro (término independiente) del sistema de ecuaciones a resolver. Es un vector (columna) de orden NN .

$$- \int_{\Omega_e} \left[\begin{array}{c} \phi^1 \\ \phi^2 \\ \dots \\ \phi^{NN} \end{array} \right] f d\Omega_e$$

La integral sobre el contorno se realiza sólo sobre aquellos elementos que efectivamente tienen un lado sobre el contorno del dominio. El contorno $\partial\Omega$ a su vez se ha dividido en una parte donde u es conocido ($\partial\Omega_u$) y otra parte donde el flujo σ es conocido ($\partial\Omega_\sigma$). En la primera parte al ser conocido u , la función de peso v se anula, lo cual anula la integral en esta parte. En tanto que la segunda parte se reemplaza el valor del flujo conocido, $\sigma = -(\mathbf{k}\nabla u) \cdot \boldsymbol{\nu}$ de tal forma que la integral resulta

$$- \int_{\partial\Omega_\sigma} v (\mathbf{k}\nabla u) \cdot \boldsymbol{\nu} d\partial\Omega_\sigma = \int_{\partial\Omega_\sigma} v \sigma d\partial\Omega_\sigma$$

En cada elemento que tenga una parte común con el contorno del dominio resulta necesario realizar esta integral. Dado un elemento en estas condiciones la función de ponderación v , resulta

ahora dependiente sólo del valor de los parámetros v^I , de los nudos ubicados sobre dicho contorno. En el caso de elementos lineales (triángulos de 3 nudos o cuadriláteros de 4 nudos), la función de peso se expresa en cada lado exclusivamente en función de las funciones de forma de los nudos extremos del lado. De esta forma, denominando con 1 y 2 a tales nudos, con s a la coordenada a lo largo del lado resulta

$$v(s) = [\phi^1(s), \phi^2(s)] \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \end{bmatrix}$$

y la integral es

$$\int_{\partial\Omega_\sigma} v \sigma d\partial\Omega_\sigma = [v^1, v^2] \int_S \begin{bmatrix} \phi^1(s) \\ \phi^2(s) \end{bmatrix} \sigma(s) ds = [v^1, v^2] \begin{bmatrix} f^1 \\ f^2 \end{bmatrix}$$

De tal forma que los valores calculados f^I sumarán al término independiente en las ecuaciones asociadas a los v^I correspondientes.

6.7. Aplicación a problemas de elasticidad lineal

Trataremos de fijar las ideas anteriores abordando el problema de elasticidad lineal en base al Principio de Trabajos Virtuales. Restrinjamos entonces nuestra atención a un subdominio (elemento). Supongamos que los campos de desplazamientos virtuales que vamos a considerar tienen la forma

$$\delta\mathbf{u} = \sum_{I=1}^{NN} \phi^I \delta\mathbf{u}^I$$

donde NN es el número de nudos del elemento considerado. $\delta\mathbf{u}^I$ son los desplazamientos virtuales del nodo y las ϕ^I son las funciones de interpolación elegidas convenientemente. Para el campo de desplazamientos reales proponemos una interpolación similar.

$$\mathbf{u} = \sum_{I=1}^{NN} \phi^I \mathbf{u}^I$$

Notar que esta definición del campo de desplazamientos virtuales representa una restricción a las ecuaciones de T.V. ya que el P.T.V. exige que la igualdad se satisfaga para cualquier desplazamiento y aquí estamos proponiendo un campo de desplazamientos que depende de un número finito de parámetros y por ende no puede representar todos los campos de desplazamientos virtuales posibles. Esto, de hecho, es lo que ocurre en cualquier discretización numérica.

Recordemos que una de las condiciones pedidas a las funciones de interpolación era que deben ser continuas y derivables hasta por lo menos el orden de derivación en que aparecen en las ecuaciones a resolver. Por ejemplo en la ecuación de Trabajos virtuales aparece

$$\delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\delta u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j} \right)$$

por lo que los $\delta\mathbf{u}$ deben poderse derivar al menos una vez. Además se les pedirá que el cuadrado de la derivada integrado en el subdominio o elemento conduzca a un valor finito.

Resulta importante hacer notar que si bien se han propuesto campos similares para la interpolación de los desplazamientos reales y virtuales, en los puntos donde los desplazamientos reales son conocidos (S_d) los desplazamientos virtuales son nulos (recordar definición de campo de desplazamientos virtuales). En consecuencia en dichos puntos ni el desplazamiento real es incógnita del problema, ni el desplazamiento virtual tiene ecuación de equilibrio asociada.

6.7.1. Deformaciones y tensiones, notación matricial

Definido el campo de desplazamientos es posible encontrar las deformaciones asociadas

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \frac{1}{2} \sum_{I=1}^{NN} \left(\frac{\partial \phi^I}{\partial x_j} u_i^I + \frac{\partial \phi^I}{\partial x_i} u_j^I \right)$$

Por razones de conveniencia escribiremos las deformaciones ε_{ij} en forma de un arreglo unidimensional (vector)

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \end{bmatrix} = \sum_{I=1}^{NN} \begin{bmatrix} \phi'_1 & \phi'_2 & \phi'_3 \\ \phi'_2 & \phi'_1 & \phi'_3 \\ \phi'_3 & \phi'_3 & \phi'_2 \\ \phi'_1 & \phi'_1 & \phi'_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^I \\ u_2^I \\ u_3^I \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{I=1}^{NN} \mathbf{B}^I \mathbf{u}^I = \mathbf{B} \mathbf{u}_e$$

donde hemos usado la notación $\phi'_i = \frac{\partial \phi^I}{\partial x_i}$ y se han agrupado los desplazamientos nodales del elemento en un vector $\mathbf{u}_e^T = [\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \dots, \mathbf{u}^{NN}]$. La matriz \mathbf{B} que relaciona deformaciones con desplazamientos se obtiene agrupando en forma similar las \mathbf{B}^I :

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}^1, \mathbf{B}^2, \dots, \mathbf{B}^{NN}]$$

En cuanto a las deformaciones virtuales, dada la similitud de las definiciones de $\delta \mathbf{u}$ y \mathbf{u} resulta:

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \delta \mathbf{u}_e$$

A continuación resulta necesario incluir las relaciones constitutivas del problema. Aquí nos restringiremos a un material isótropo lineal elástico, sin embargo es posible utilizar cualquier relación elasto-plástica válida (es decir que satisfaga las leyes de la termodinámica). Para el caso de que la relación constitutiva fuera no lineal, es necesario un proceso incremental iterativo. Al igual que con las deformaciones, agrupemos las componentes del tensor de tensiones en un vector

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{bmatrix} = \frac{E}{1+\nu} \begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \end{bmatrix} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}$$

De esta forma se ha escrito la relación entre dos tensores de segundo orden, que involucra al tensor constitutivo que es de cuarto orden, como una relación entre vectores a través de una matriz.

6.7.2. Matrices de rigidez elemental y global

Veamos entonces como introducir estas definiciones en la expresión del T.V.Interno, recordemos que el Trabajo Virtual Interno es

$$\int_v \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dv = \int_v (\sigma_{11} \delta \varepsilon_{11} + \sigma_{22} \delta \varepsilon_{22} + \sigma_{33} \delta \varepsilon_{33} + 2\sigma_{12} \delta \varepsilon_{12} + 2\sigma_{23} \delta \varepsilon_{23} + 2\sigma_{13} \delta \varepsilon_{13}) dv$$

donde hemos hecho uso de la simetría de los tensores de tensión y deformación. Es fácil ver que a partir de la definición de los vectores $\boldsymbol{\varepsilon}$ y $\boldsymbol{\sigma}$ en las ecuaciones precedentes podemos escribir

$$\int_v \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dv = \int_v \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dv = \sum_{e=1}^{NE} \delta \mathbf{u}_e^T \int_{v_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dv \mathbf{u}_e$$

donde NE es el número de elementos en que se ha dividido el dominio. La integral indicada en el último miembro es una matriz simétrica (lo que surge de que \mathbf{D} es simétrica), se la denomina matriz de rigidez elemental y se la denota por:

$$\mathbf{K}_e = \int_{v_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dv$$

El trabajo virtual interno del sólido a partir de la suma de las contribuciones elementales resulta

$$\int_v \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dv = \sum_{e=1}^{NE} \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{u}_e = \delta \mathbf{u}_G^T \mathbf{K} \mathbf{u}_G$$

donde \mathbf{u}_G es un vector donde se han ordenado los desplazamientos de todos los nudos y \mathbf{K} es la matriz de rigidez global del sólido, la cual se obtiene mediante un proceso de ensamble de las matrices elementales.

6.7.3. Trabajo virtual externo, vector de cargas nodales

La contribuciones al trabajo virtual externo (fuerzas másicas y de contorno) resultan:

6.7.3.1. Fuerzas másicas

$$\int_v \mathbf{F} \delta \mathbf{u} dv = \sum_{e=1}^{NE} \int_{v_e} \mathbf{F} \delta \mathbf{u} dv$$

Supongamos para las fuerzas másicas una variación dentro del elemento similar a la de los desplazamientos (normalmente las fuerzas másicas son uniformes, constantes, de valor igual al peso específico del material y con la dirección del campo gravitatorio), esto es:

$$\mathbf{F} = \sum_{I=1}^{NN} \phi^I \mathbf{F}^I = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{F}_e$$

en forma desarrollada

$$\mathbf{F} = \underbrace{\begin{bmatrix} \phi^1 & & \phi^2 & & & \phi^{NN} & \\ & \phi^1 & & \phi^2 & & & \phi^{NN} \\ & & \phi^1 & & \phi^2 & & \phi^{NN} \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots & \ddots & \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\Phi}} \underbrace{\begin{bmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 \\ F_3^1 \\ \vdots \\ \vdots \\ F_1^{NN} \\ F_2^{NN} \\ F_3^{NN} \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}_e}$$

donde las F_i^I es el valor de la fuerza másica por unidad de volumen en la dirección i evaluada en las coordenadas del nudo I . De esta forma el trabajo virtual de las fuerzas másica resulta

$$\int_{v_e} \mathbf{F} \delta \mathbf{u} dv = \delta \mathbf{u}_e^T \int_{v_e} \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi} dv \mathbf{F}_e = \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{M} \mathbf{F}_e = \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{G}_e$$

donde hemos introducido la matriz $\mathbf{M} = \int_{v_e} \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi} dv$

6.7.3.2. Fuerzas de contorno

El trabajo virtual de las fuerzas de contorno, sólo se considera sobre aquellos elementos que tengan un lado o cara coincidente con el contorno donde se conocen las fuerzas exteriores. Sea entonces un elemento cualquiera sobre el contorno del cuerpo que tiene cargas actuantes sobre una de sus caras. Dicha cara estará definida por un subconjunto de los nudos del elemento NC . Notar que debido a las exigencias impuestas sobre las funciones de interpolación, los desplazamientos sobre una cara del elemento dependen sólo de los nudos sobre la cara es decir sobre el subconjunto NC . Los desplazamientos virtuales pueden entonces escribirse:

$$\delta\mathbf{u} = \sum_{I=1}^{NC} \phi^I \delta\mathbf{u}^I$$

De la misma forma es posible describir la carga externa

$$\mathbf{f} = \sum_{I=1}^{NC} \phi^I \mathbf{f}^I$$

$$\mathbf{f} = \underbrace{\begin{bmatrix} \phi^1 & \phi^2 & \dots & \phi^{NC} \\ \phi^1 & \phi^2 & \dots & \phi^{NC} \\ \phi^1 & \phi^2 & \dots & \phi^{NC} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi^1 & \phi^2 & \dots & \phi^{NC} \end{bmatrix}}_{\Phi(\xi)} \underbrace{\begin{bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \\ f_3^1 \\ \vdots \\ f_1^{NC} \\ f_2^{NC} \\ f_3^{NC} \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}_e}$$

Reemplazando en la expresión del trabajo virtual de las fuerzas de contacto, tenemos que:

$$\int_{S_e} \mathbf{f} \delta\mathbf{u} dS_e = \delta\mathbf{u}_e^T \int_{S_e} \tilde{\Phi}^T \tilde{\Phi} dS \mathbf{f}_e = \delta\mathbf{u}_e^T \tilde{\mathbf{M}} \mathbf{f}_e = \delta\mathbf{u}_e^T \mathbf{g}_e$$

Similarmente al caso de la matriz de rigidez, se obtiene un vector global de cargas nodales equivalentes \mathbf{r} ensamblando las contribuciones de las fuerzas básicas elementales y de las fuerzas de contacto. El trabajo virtual externo puede escribirse en forma compacta como:

$$-\int_v \mathbf{F} \delta\mathbf{u} dv - \int_{S_\sigma} \mathbf{f} \delta\mathbf{u} dS_\sigma = -\delta\mathbf{u}_G^T \mathbf{r}$$

Sumando entonces trabajo virtual interno mas externo e igualando a 0.

$$\int_v \sigma_{ij} \delta\varepsilon_{ij} dv - \int_v \mathbf{F} \delta\mathbf{u} dv - \int_{S_\sigma} \mathbf{f} \delta\mathbf{u} dS_\sigma \cong \delta\mathbf{u}_G^T \mathbf{K} \mathbf{u}_G - \delta\mathbf{u}_G^T \mathbf{r} = 0$$

Finalmente la condición impuesta por el P.T.V. requiere que los $\delta\mathbf{u}_G$ puedan tomar cualquier valor en forma independiente lo que conduce al siguiente sistema de ecuaciones lineales algebraicas simultáneas

$$\mathbf{K} \mathbf{u}_G = \mathbf{r}$$

6.8. Elemento cuadrilátero de cuatro nodos

Como ejemplo de un elemento sencillo obtendremos la matriz de rigidez y el vector de cargas nodales equivalentes de un elemento cuadrilátero de 4 nodos para estados planos (problemas bidimensionales)

6.8.1. Funciones de interpolación, geometría y desplazamientos

Lo primero que haremos será recordar el elemento maestro definido por un cuadrado de lado 2 centrado en el origen, sobre el que se definen dos coordenadas locales (ξ, η) . Sobre este cuadrado resulta sencillo definir funciones de interpolación que satisfagan los requisitos pedidos. Para ello utilizaremos los polinomios de Lagrange de grado 1 (que tienen la característica de valer 1 en el punto al que está asociado el polinomio y 0 en el resto de los puntos que lo definen) que tienen la forma indicada en la figura

$$L^1 = \frac{1}{2}(1 - \xi)$$

$$L^2 = \frac{1}{2}(1 + \xi)$$

Como explicáramos antes el producto de los polinomios de Lagrange expresadas en ambas coordenadas locales permite obtener las 4 funciones de interpolación

$$\phi^1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)$$

$$\phi^2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)$$

$$\phi^3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)$$

$$\phi^4 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)$$

Tales que se satisface que $\phi^I(\xi^J, \eta^J) = \delta_{IJ}$, y además son continuas y lineales a lo largo del contorno.

Podemos ahora definir la geometría del elemento a partir de las coordenadas de los nodos. Esto es establecer una correspondencia entre las coordenadas locales (ξ, η) y las coordenadas físicas (x_1, x_2)

$$\mathbf{x}(\xi, \eta) = \sum_{I=1}^4 \phi^I(\xi, \eta) \mathbf{x}^I$$

Existirá una relación biunívoca entre (x_1, x_2) y (ξ, η) si y sólo si el determinante de la matriz de la transformación (jacobiana) es positivo en todo punto.

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \eta} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

Si el determinante de \mathbf{J} es positivo en todo punto, lo que ocurrirá siempre que todos los ángulos internos del cuadrilátero sean menores que π , es posible calcular la matriz inversa

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x_1} & \frac{\partial \eta}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \xi}{\partial x_2} & \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

Para los desplazamientos usaremos la misma aproximación, es decir las mismas funciones de interpolación

$$\mathbf{u}(\xi, \eta) = \sum_{I=1}^4 \phi^I(\xi, \eta) \mathbf{u}^I$$

que en forma desarrollada podemos escribir

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi^1 & \phi^2 & \phi^3 & \phi^4 \\ \phi^1 & \phi^2 & \phi^3 & \phi^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_1^3 \\ u_2^3 \\ u_1^4 \\ u_2^4 \end{bmatrix} = \Phi \mathbf{u}_e$$

En un estado plano de tensión o deformación las deformaciones que interesan son:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \end{bmatrix}$$

Notemos que

$$\frac{\partial (\)}{\partial x_1} = \frac{\partial (\)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_1} + \frac{\partial (\)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_1}$$

luego

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial (\)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial (\)}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial (\)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial (\)}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

En consecuencia si queremos calcular

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \sum_{I=1}^4 \frac{\partial \phi^I}{\partial x_j} u_i^I$$

para lo cual necesitamos las $\frac{\partial \phi^I}{\partial x_j}$ que podemos calcular mediante la regla de la cadena

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \phi^I}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \phi^I}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi^I}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \phi^I}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad \equiv \quad \begin{bmatrix} \phi'_1^I \\ \phi'_2^I \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \phi'_\xi^I \\ \phi'_\eta^I \end{bmatrix}$$

6.8.2. Cálculo de la matriz de rigidez elemental

Reemplazando la anteúltima expresión en las deformaciones, estas se pueden escribir

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \phi'_1^1 & \phi'_1^2 & \phi'_1^3 & \phi'_1^4 \\ \phi'_2^1 & \phi'_2^2 & \phi'_2^3 & \phi'_2^4 \\ \phi'_1^2 & \phi'_1^1 & \phi'_2^2 & \phi'_1^3 \\ \phi'_2^1 & \phi'_2^1 & \phi'_1^2 & \phi'_2^3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}(\xi, \eta)} \mathbf{u}_e = \mathbf{B} \mathbf{u}_e$$

En un Estado de Tensión Plana las ecuaciones constitutivas lineales para un material elástico e isotropo son:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{E}{1+\nu} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}$$

Siguiendo el procedimiento descripto anteriormente la matriz de rigidez elemental se obtiene como la integral

$$\mathbf{K}_e = \int_v \mathbf{B}^T(\xi, \eta) \mathbf{D} \mathbf{B}(\xi, \eta) dv$$

Siendo todas las variables constantes en el espesor h entonces

$$\int_v (\quad) dv = h \int_A (\quad) dA$$

La matriz \mathbf{B} es función de (ξ, η) luego resulta necesario cambiar las variables de integración, para ello es necesario reconocer que $dA = |\mathbf{J}| d\xi d\eta$, reemplazando y cambiando los límites de integración correspondientes resulta

$$\mathbf{K}_e = h \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T(\xi, \eta) \mathbf{D} \mathbf{B}(\xi, \eta) |\mathbf{J}| d\xi d\eta$$

En general la matriz \mathbf{J} cambia de punto a punto (salvo que el cuadrilátero sea un paralelepípedo) por lo que el determinante $|\mathbf{J}|$ y \mathbf{B} serán variables. Esto hace imposible evaluar la integral en forma explícita por lo que es necesario recurrir a técnicas de integración numérica para el cálculo de \mathbf{K}_e , en general para un elemento bilineal será necesario y suficiente usar una regla de integración de 2×2 puntos

6.8.3. Cálculo de las fuerzas nodales equivalentes

Supongamos un valor uniforme de la fuerza másica en la dirección $-x_2$.

$$\mathbf{F} = \rho g \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\int_v \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{F} dv = \delta \mathbf{u}_e^T h \rho g \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \Phi^T \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} |\mathbf{J}| d\xi d\eta = \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{G}_e$$

Puede verse que el vector de fuerzas másicas resulta

$$\mathbf{G}_e = -\rho g h \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [0 \ \phi^1 \ 0 \ \phi^2 \ 0 \ \phi^3 \ 0 \ \phi^4]^T |\mathbf{J}| d\xi d\eta$$

6.9. Problemas de convección-difusión

Analicemos ahora un problema con un operador diferencial que no es auto-adjunto. La aplicación del método de residuos ponderados sobre la ecuación diferencial de convección difusión conduce a

$$\int_{S_\sigma} \varphi [\bar{\sigma}_\nu - \rho \mathbf{u} \phi \cdot \boldsymbol{\nu}] dS_\sigma + \int_A \varphi (\rho \mathbf{u}) \cdot \nabla \phi dA + \int_A \nabla \varphi \cdot \Gamma \nabla \phi dA + \int_A \varphi q dA = 0$$

Utilizando una aproximación

$$\begin{aligned} \phi &= \sum_{I=1}^{NN} N^I(\xi, \eta) \phi^I = [N^1, \dots, N^{NN}] \begin{bmatrix} \phi^1 \\ \dots \\ \phi^{NN} \end{bmatrix} = \mathbf{N}\Phi \\ \varphi &= \sum_{I=1}^{NN} W^I(\xi, \eta) \varphi^I = [W^1, \dots, W^{NN}] \begin{bmatrix} \varphi^1 \\ \dots \\ \varphi^{NN} \end{bmatrix} = \mathbf{W}\Psi \end{aligned}$$

Donde habitualmente en este tipo de problemas no se adopta la aproximación de Galerkin ($N^I = W^I$). En el contorno S_ϕ se ha impuesto como siempre que la solución propuesta satisface identicamente $\phi = \bar{\phi}$ y consecuentemente allí $\varphi = 0$, de tal forma que la integral sobre el contorno sólo aparece la parte donde se conoce el flujo

$$\int_{S_\sigma} \varphi [\bar{\sigma}_\nu - \rho \mathbf{u} \phi \cdot \boldsymbol{\nu}] dS_\sigma$$

El gradiente de la variable incógnita ϕ y de la función de ponderación se escribe

$$\nabla\phi = \begin{bmatrix} N'_1 & \dots & N'_1^{NN} \\ N'_2 & \dots & N'_2^{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi^1 \\ \dots \\ \phi^{NN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}'_1 \\ \mathbf{N}'_2 \end{bmatrix} \Phi = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{N}'_\xi \\ \mathbf{N}'_\eta \end{bmatrix} \Phi$$

$$\nabla\varphi = \begin{bmatrix} W'_1 & \dots & W'_1^{NN} \\ W'_2 & \dots & W'_2^{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi^1 \\ \dots \\ \varphi^{NN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}'_1 \\ \mathbf{W}'_2 \end{bmatrix} \Psi = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{W}'_\xi \\ \mathbf{W}'_\eta \end{bmatrix} \Psi$$

Las integrales sobre el dominio de los términos convectivo y difusivo toman la forma

$$\int_A \rho [\varphi^1, \dots, \varphi^{NN}]_{1 \times NN} \begin{bmatrix} W^1 \\ \dots \\ W^{NN} \end{bmatrix}_{NN \times 1} [u_1 \ u_2]_{1 \times 2} \begin{bmatrix} N'_1 & \dots & N'_1^{NN} \\ N'_2 & \dots & N'_2^{NN} \end{bmatrix}_{2 \times NN} \begin{bmatrix} \phi^1 \\ \dots \\ \phi^{NN} \end{bmatrix}_{NN \times 1} dA$$

$$+ \int_A [\varphi^1, \dots, \varphi^{NN}]_{1 \times NN} \begin{bmatrix} W'_1 & W'_2 \\ \dots & \dots \\ W'_1^{NN} & W'_2^{NN} \end{bmatrix}_{NN \times 2} \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{bmatrix}_{2 \times 2} \begin{bmatrix} N'_1 & \dots & N'_1^{NN} \\ N'_2 & \dots & N'_2^{NN} \end{bmatrix}_{2 \times NN} \begin{bmatrix} \phi^1 \\ \dots \\ \phi^{NN} \end{bmatrix}_{NN \times 1} dA$$

o en forma compacta

$$\Psi^T \int_A \{ \rho \mathbf{W}^T \mathbf{u}^T + [\mathbf{W}'_1, \mathbf{W}'_2]^T \boldsymbol{\Gamma} \} \begin{bmatrix} \mathbf{N}'_1 \\ \mathbf{N}'_2 \end{bmatrix} dA \Phi = \Psi^T [\mathbf{C} + \mathbf{D}] \Phi$$

con

$$\mathbf{C} = \int_A \rho \mathbf{W}^T \mathbf{u}^T \begin{bmatrix} \mathbf{N}'_1 \\ \mathbf{N}'_2 \end{bmatrix} dA$$

$$\mathbf{D} = \int_A [\mathbf{W}'_1, \mathbf{W}'_2]^T \boldsymbol{\Gamma} \begin{bmatrix} \mathbf{N}'_1 \\ \mathbf{N}'_2 \end{bmatrix} dA$$

Notar que aunque se utilice la aproximación de Galerkin, el término convectivo conduce a una matriz de coeficientes no simétrica. La asimetría si bien representa un mayor costo computacional, no es un problema importante, el mayor problema se da en los problemas fuertemente convectivos (\mathbf{C} dominante) que presentan grandes inestabilidades numéricas.

El término debido a fuentes internas (q) admite múltiples aproximaciones, la más sencilla es suponer que dentro de un elemento el valor es constante, en tal caso la integral resulta

$$\int_A \varphi q dA = \Psi^T \int_A \mathbf{W}^T dA q$$

Una segunda posibilidad es interpolar el valor de q en la misma forma que ϕ , en tal caso

$$q = \mathbf{N} \begin{bmatrix} q^1 \\ \dots \\ q^{NN} \end{bmatrix}$$

donde q^I es el valor de la fuente interna (distribuida) en el nudo I , luego

$$\int_A \varphi q dA = \Psi^T \int_A \mathbf{W}^T \mathbf{N} \begin{bmatrix} q^1 \\ \dots \\ q^{NN} \end{bmatrix} dA$$

Interpolaciones de mayor orden para el término de fuente no tienen mucho sentido. Finalmente si lo que existe es una fuente puntual Q , lo más sencillo es hacer coincidir un nudo de la malla

(el I por ejemplo) con dicha fuente puntual, de tal forma que el término correspondiente resulta sencillamente

$$\varphi^I Q$$

La integral sobre el contorno puede dividirse en dos partes

$$\int_{S_\sigma} \varphi [\bar{\sigma}_\nu - \rho \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu}] dS_\sigma = \int_{S_\sigma} \varphi \bar{\sigma}_\nu dS_\sigma - \int_{S_\sigma} \varphi \rho \phi \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu} dS_\sigma$$

Las aproximaciones sobre el contorno de ϕ , φ , \mathbf{u} , resultan de particularizar las aproximaciones sobre el dominio de cada elemento al contorno correspondiente. Recordar que las funciones de forma utilizadas conducen a que el valor de las variables dependa sólo de las variables sobre el contorno.

En el primer término aparecen todos valores conocidos, definido el flujo $\bar{\sigma}_\nu$ su integral es inmediata y contribuye al término independiente. El segundo término implica valores de la incógnita del problema, por lo cual contribuye a la matriz de coeficientes del problemas, este término resulta

$$-\int_{S_\sigma} \varphi \rho \phi \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu} dS_\sigma = -\Psi^T \int_{S_\sigma} (\rho \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu}) \mathbf{W}^T \mathbf{N} dS_\sigma \Phi$$

El término entre paréntesis no es otra cosa que el flujo de masa a través del contorno.

Particularizado para el caso de elementos lineales, donde cada contorno elemental está formado por una segmento de dos nudos, localmente los designaremos con 1 y 2, de coordenadas \mathbf{x}^1 y \mathbf{x}^2 , en los cuales los valores del flujo y la velocidad son respectivamente $\bar{\sigma}_\nu^1 \mathbf{u}^1$ y $\bar{\sigma}_\nu^2 \mathbf{u}^2$. El orden en que se definen los nudos 1 y 2 supone que al moverse del nudo 1 al 2 el dominio del problema está a la izquierda, esto conduce a que

$$\begin{aligned} l &= \|\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1\| \\ \boldsymbol{\nu} &= \frac{\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1}{l} \end{aligned}$$

Las aproximaciones (lineales) sobre el contorno son (con ξ en $[0,1]$)

$$\begin{aligned} \phi &= (1 - \xi) \phi^1 + \xi \phi^2 \\ u_\nu &= (1 - \xi) (\mathbf{u}^1 \cdot \boldsymbol{\nu}) + \xi (\mathbf{u}^2 \cdot \boldsymbol{\nu}) \\ \bar{\sigma}_\nu &= (1 - \xi) \bar{\sigma}_\nu^1 + \xi \bar{\sigma}_\nu^2 \\ \varphi &= \bar{W}^1(\xi) \varphi^1 + \bar{W}^2(\xi) \varphi^2 \end{aligned}$$

Luego la integral del primer término resulta

$$\int_{S_\sigma} \varphi \bar{\sigma}_\nu dS_\sigma = [\varphi^1, \varphi^2] \int_0^1 \begin{bmatrix} \bar{W}^1 \\ \bar{W}^2 \end{bmatrix} [(1 - \xi), \xi] \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_\nu^1 \\ \bar{\sigma}_\nu^2 \end{bmatrix} l d\xi$$

y la del segundo

$$-\int_{S_\sigma} \varphi \rho \phi \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu} dS_\sigma = -[\varphi^1, \varphi^2] \int_0^1 \rho [(1 - \xi) u_\nu^1 + \xi u_\nu^2] \begin{bmatrix} \bar{W}^1 \\ \bar{W}^2 \end{bmatrix} [(1 - \xi), \xi] l d\xi \begin{bmatrix} \phi^1 \\ \phi^2 \end{bmatrix}$$

Capítulo 7 Aspectos generales asociados a la implementación

por F. Flores

7.1. Generación de mallas

En la modelización por elementos finitos, la tarea que más tiempo consume y la más costosa, corresponde a la generación del conjunto de datos necesarios para describir al modelo. Esto es así porque requiere del tiempo del analista que en general es caro frente al costo computacional, que ha bajado en forma vertiginosa en la última década dada la alta velocidad de proceso y el fácil acceso a la memoria central con que cuentan las computadoras actuales.

En general la mayoría de los programas de elementos finitos (PEFs) han sido diseñados para leer los datos del modelo en forma ordenada y con una estructura (sintaxis) no muy flexible desde un fichero ASCII. La mayoría de los PEFs no tienen opciones de generación de mallas, y cuando las tienen son muy limitadas y sencillas. En general para la definición geométrica del modelo se utilizan programas específicos para tal fin (similares a sistemas CAD en muchos aspectos) y luego esos mismos programas presentan un menú de opciones que permitan trasladar el modelo generado a un archivo ASCII que pueda ser leído por el PEF propiamente dicho. Muchos de estos programas de generación de datos tienen la suficiente flexibilidad como para que el usuario indique como deben ser presentados estos datos para que puedan ser correctamente leídos por el PEF. Actualmente muchos PEFs presentan un ambiente de trabajo integrado para generar el modelo, para realizar el análisis por elementos finitos y visualizar los resultados, lo que se presenta como un único programa, sin embargo esto no es así internamente, en general las distintas partes de los paquetes están desarrolladas por grupos diferentes.

Dado el alto grado de avance que han logrado los PEFs para resolver problemas multifísica, ha resultado imprescindible el desarrollo de interfaces suficientemente inteligentes que permitan a usuarios no muy calificados desarrollar, dentro de un ambiente amigable y con muchas facilidades, el modelo deseado. De esta forma algunos PEFs denominados de Propósito General, es decir que pueden resolver problemas muy variados (dentro de digamos el área de mecánica de sólidos), pueden tener más de una interfaz de acuerdo al tipo de problema que se esté intentando modelar. La necesidad de la existencia de una interfaz suficientemente inteligente, está no sólo asociada a la generación de la malla, si no a presentar las mejores opciones de los parámetros que gobiernan el modelo numérico. Esto es particularmente cierto en procesos no-lineales u otros procesos complejos, que requieren el ajuste de un conjunto de valores, lo cual requeriría por parte del usuario un conocimiento de los algoritmos y una especialización no muy comunes en un usuario medio.

En problemas complejos suelen haber distintos “dominios” ligados entre sí, por ejemplo si interesa estudiar el comportamiento completo de la estructura de un edificio, esto puede abarcar la combinación de diferentes medios, con diferentes modelos de comportamiento. Así por ejemplo puede ser necesario incluir el suelo, la estructura de hormigón, la cual puede estar formada por elementos de viga y tabiques que puede ser necesario modelar como láminas, los entresuelos, que pueden considerarse como flexibles o rígidos, los cerramientos laterales en caso de que quiera estudiarse su influencia en el comportamiento, etc. El modelado requieren entonces dividir al objeto en estudio en sus distintas partes, definir claramente cada una de ellas, describir su comportamiento material, discretizar (mallar) cada parte y luego unir coherenteamente las mismas. Para cada parte, en general asociada a un único material constitutivo, se siguen en general las siguientes etapas:

1. Descripción de la geometría. Esto es similar a cualquier sistema CAD.

- a) se empieza por la definición de puntos,
 - b) se sigue con la definición de líneas y/o curvas para lo cual se utilizan como referencia los puntos previos
 - c) luego se definen planos y/o superficies cuyos contornos son las líneas o curvas definidas previamente
 - d) finalmente se definen volúmenes delimitados por las superficies hasta entonces descriptas.
2. Para la imposición de condiciones de contorno, sean esenciales o naturales, se definen puntos, líneas o superficies donde se vayan a imponer tales condiciones. También aquí es necesario considerar como cada parte se va a unir con otras partes del modelo global, para satisfacer condiciones de compatibilidad.
 3. Se elige un tipo de elemento finito adecuado (Por ejemplo en problemas 2-D, pueden ser triángulos o cuadriláteros, lineales, cuadráticos, etc.)
 4. Se indica el tamaño de los elementos que se quiere utilizar. Este tamaño puede ser uniforme o no, en general deben usarse elementos más pequeños donde se esperan mayores gradientes, y pueden usarse discretizaciones más gruesas donde los gradientes son menores. Esto por supuesto requiere por parte del usuario un criterio basado en el conocimiento ‘a priori’ del comportamiento de lo que se quiere modelar, de forma que pueda indicar en los distintos puntos valores razonables para el tamaño de los elementos
 5. Finalmente el generador de malla en función del tipo de elemento y la definición del tamaño de los elementos procede a discretizar el dominio. Los procesos de mallado siguen la misma secuencia de la definición geométrica, empiezan discretizando las curvas (respetando la posición de los puntos específicamente descriptos), luego discretizan las superficies (para lo cual ya disponen de las discretizaciones de sus contornos) y finalmente discretizan los volúmenes encerrados por las superficies.

El traspaso de los datos del mallador al PEF implica básicamente tres aspectos asociados a la topología de la malla y las condiciones de contorno:

- las coordenadas de cada nudo necesario para la definición del modelo, a cada nudo debe asignársele una etiqueta (un número)
- las conectividades de los elementos, es decir cuales son los nudos (sus etiquetas o números) que definen cada elemento (el que a su vez también se etiqueta). El orden en que dan estos nudos es importante, cada tipo de elemento requiere un orden especial. Por ejemplo si se trata de un cuadrilátero, si tiene 4 nudos (sus vértices), estos deben darse siguiendo el perímetro del mismo en sentido antihorario. No tiene habitualmente importancia con cual se empieza , pero sí su orden. Si el elemento fuese un cuadrilátero de 8 nudos (vértices y nudos sobre los lados), hay distintas posibilidades (lo cual está definido en el manual de usuario y debe consultarse este), podría ser que se dieran los 8 nudos en sentido antihorario en la forma que aparecen empezando por un vértice, o podría ser que primero deban entrarse los vértices y luego los medios (empezando por el que está entre los primeros dos vértices)
- los puntos sobre los que se han impuesto condiciones de contorno esenciales (desplazamientos o velocidades en problemas de mecánica de sólidos) indicando las condiciones asociadas. Los puntos, líneas o superficies con condiciones naturales (fuerzas puntuales, de línea o presiones respectivamente, en problemas de mecánica de sólidos)

7.2. Imposición de restricciones nodales

En esta sección intentaremos mostrar como imponer condiciones de borde esenciales de una cierta generalidad. Si bien hablamos de “condiciones de contorno” las técnicas que se describen corresponden al tratamiento de restricciones cinemáticas que pueden tener interpretaciones más generales, y permiten imponer hasta hipótesis de comportamiento en el modelo. Supondremos que esta condición puede escribirse de la siguiente forma:

$$u_k = \bar{u}_k + \sum_{i \neq k} a_i u_i \quad (7.1)$$

esta expresión dice que un grado de libertad genérico u_k puede escribirse como una constante \bar{u}_k más una combinación lineal de otros grados de libertad (donde por supuesto no aparece el grado de libertad u_k) a través de coeficientes a_i (que eventualmente pueden ser 0 la mayoría o todos ellos). Este tipo de restricción puede representar muchos casos prácticos entre ellos:

- Desplazamiento prescripto de valor \bar{u}_k ($a_i = 0$ en tal caso)
- Apoyos que no coinciden con las direcciones del sistema global de coordenadas.
- Nudos maestros
- Modelado de dominios con simetría cíclica.
- Unión de elementos finitos con distintos grados de interpolación en el contorno o con diferentes grados de libertad.
- Articulaciones en pórticos
- Rigidizadores de láminas

En la expresión que define la restricción (7.1) si introducimos un coeficiente $a_k = -1$ la podemos escribir

$$\bar{u}_k + \sum a_i u_i = \bar{u}_k + \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (7.2)$$

Existen diferentes formas de imponer este tipo de restricciones en el sistema de ecuaciones, con diferentes ventajas y desventajas. Notemos antes que no es posible simplemente adicionar al sistema de ecuaciones existente esta nueva ecuación pues tendríamos más ecuaciones que incógnitas.

7.2.1. Imposición exacta de la condición

Dado que u_k no resulta independiente el problema puede verse como de orden $n-1$. De acuerdo a la formulación utilizada para obtener nuestro sistema de ecuaciones podemos suponer que la función de ponderación asociada, o el desplazamiento virtual, o la variación de desplazamiento tiene la misma dependencia, es decir

$$\begin{aligned} v_k &= \sum_{i \neq k} a_i v_i & \delta u_k &= \sum_{i \neq k} a_i \delta u_i \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{0} & \mathbf{a} \cdot \delta \mathbf{u} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones de que disponemos puede escribirse

$$\mathbf{v}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{v}^T \mathbf{f} = 0$$

en forma desarrollada

$$[v_1, \dots, v_k, \dots, v_n] \left\{ \begin{bmatrix} k_{11} & \dots & k_{1k} & \dots & k_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ k_{k1} & \dots & k_{kk} & \dots & k_{kn} \\ \vdots & & & & \vdots \\ k_{n1} & \dots & k_{nk} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_k \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_1 \\ f_k \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \right\} = \mathbf{0}$$

pero ahora v_k y u_k no son independientes y podemos reemplazarlos por su definición anterior:

$$\left[v_1, \dots, \sum_{i \neq k} a_i v_i, \dots, v_n \right] \left\{ \begin{bmatrix} k_{11} & \dots & k_{1k} & \dots & k_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ k_{k1} & \dots & k_{kk} & \dots & k_{kn} \\ \vdots & & & & \vdots \\ k_{n1} & \dots & k_{nk} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ \bar{u}_k + \sum_{i \neq k} a_i u_i \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_k \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \right\} = 0$$

Si operamos sobre la expresión anterior, podemos escribir

$$\left[v_1, \dots, v_{k-1}, v_{k+1}, \dots, v_n \right] \left\{ \begin{bmatrix} \bar{k}_{11} & \dots & \bar{k}_{1(k-1)} & \bar{k}_{1(k+1)} & \dots & \bar{k}_{1n} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \bar{k}_{(k-1)1} & \dots & \bar{k}_{(k-1)(k-1)} & \bar{k}_{(k-1)(k+1)} & \dots & \bar{k}_{(k-1)n} \\ \bar{k}_{(k+1)1} & \dots & \bar{k}_{(k+1)(k-1)} & \bar{k}_{(k+1)(k+1)} & \dots & \bar{k}_{(k+1)n} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ k_{n1} & \dots & \bar{k}_{n(k-1)} & \bar{k}_{n(k+1)} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{k-1} \\ u_{k+1} \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{f}_1 \\ \vdots \\ \bar{f}_{k-1} \\ \bar{f}_{k+1} \\ \vdots \\ \bar{f}_n \end{bmatrix} \right\} = 0$$

que corresponde a un sistema de $(n - 1)$ ecuaciones con $(n - 1)$ incógnitas donde en forma explícita tenemos

$$\begin{aligned} \bar{k}_{ij} &= k_{ij} + a_i k_{kj} + k_{ik} a_j + a_i k_{kk} a_j \\ \bar{f}_i &= f_i + a_i f_i - k_{ik} \bar{u}_k \end{aligned}$$

7.2.2. Técnica de penalización

Esta técnica es muy utilizada porque requiere una lógica de programación más sencilla y si bien las restricciones no se imponen en forma exacta se puede obtener resultados suficientemente buenos.

Para darle una interpretación matemática sencilla, supongamos que nuestro sistema de ecuaciones resultó de la minimización del siguiente funcional

$$\Pi(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{f}$$

Aumentemos este funcional con un término de la forma

$$\frac{1}{2\epsilon} (\bar{u}_k + \mathbf{a} \cdot \mathbf{u})^2$$

que no es otra cosa que la restricción elevada al cuadrado. Donde ϵ es un valor constante suficientemente pequeño (coeficiente de penalización) de forma tal que si ahora escribimos un funcional aumentado

$$\hat{\Pi}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{f} + \frac{1}{2\epsilon} (\bar{u}_k + \mathbf{a} \cdot \mathbf{u})^2$$

la minimización de este nuevo funcional conducirá a la solución de nuestro problema. El grado de cumplimiento de la restricción impuesta dependerá del valor de ϵ . Cuando este valor tiende a 0, un mínimo incumplimiento de la restricción incrementa notoriamente el valor de $\hat{\Pi}$, por lo que la condición de mínimo está gobernada por la primera parte del funcional. Por otra parte valores muy pequeños de ϵ (y en consecuencia muy grandes de su inversa) pueden producir problemas numéricos debido a la precisión de las computadoras. La condición de mínimo resulta ahora

$$\frac{\partial \hat{\Pi}(\mathbf{u})}{\partial u_i} = \sum_{j=1}^n k_{ij} u_j - f_i + \frac{a_i}{\epsilon} \left[\bar{u}_k + \sum_{j=1}^n a_j u_j \right] = 0$$

si el nuevo sistema se escribe

$$\bar{\mathbf{K}} \mathbf{u} = \bar{\mathbf{f}}$$

entonces

$$\begin{aligned}\bar{k}_{ij} &= k_{ij} + \frac{1}{\epsilon} a_i a_j \\ \bar{f}_i &= f_i - \frac{a_i}{\epsilon} \bar{u}_k\end{aligned}$$

El caso sencillo de un desplazamiento prescripto $u_k = \bar{u}_k$ conduce a los siguientes cambios

$$\begin{aligned}\bar{k}_{kk} &= k_{kk} + \frac{1}{\epsilon} \\ \bar{f}_k &= f_k + \frac{\bar{u}_k}{\epsilon}\end{aligned}$$

Notar que en este caso el sistema de ecuaciones se mantiene de orden n .

7.2.3. Método de multiplicadores de Lagrange

Una tercera posibilidad muy utilizada es la siguiente: agregar al sistema de ecuaciones inicial la ecuación de restricción e incluir una nueva variable de forma de igualar número de ecuaciones ($(n + 1)$ ahora) con el número de incógnitas. Para ello similarmente al caso anterior agreguemos al funcional $\Pi(\mathbf{u})$ un término de la forma:

$$\lambda (\bar{u}_k + \mathbf{a} \cdot \mathbf{u})$$

luego el funcional aumentado es ahora

$$\hat{\Pi}(\mathbf{u}, \lambda) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{f} + \lambda (\bar{u}_k + \mathbf{a} \cdot \mathbf{u})$$

La nueva variable incorporada λ se conoce en la literatura como “multiplicador de Lagrange” ya que multiplica a la ecuación de restricción y muchas veces es posible asignarle una interpretación física (por ejemplo es la reacción en el caso de un desplazamiento prescripto). El nuevo sistema de ecuaciones resulta ahora de

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{\Pi}(\mathbf{u}, \lambda)}{\partial u_i} &= \sum_{j=1}^n k_{ij} u_j - f_i + \lambda a_i = 0 \\ \frac{\partial \hat{\Pi}(\mathbf{u}, \lambda)}{\partial \lambda} &= \bar{u}_k + \sum_{j=1}^n a_j u_j = 0\end{aligned}$$

La segunda ecuación no es otra cosa que la ecuación de restricción, por lo que la resolución del sistema de ecuaciones la cumplirá en forma exacta. El sistema de ecuaciones sigue siendo simétrico, el costo adicional proviene de que hay una ecuación más y que esta tiene un cero en la diagonal, lo que puede en algunos casos puede traer problemas. El sistema resultante tiene entonces la siguiente forma

$$\left[\begin{array}{cc} \mathbf{K} & \mathbf{a} \\ \mathbf{a}^T & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{u} \\ \lambda \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{f} \\ -\bar{u}_k \end{array} \right]$$

7.3. Una aplicación no-estándar

En esta sección se mostrará como las ideas expresadas antes pueden utilizarse con diferentes objetivos, obteniendo en forma consistente las modificaciones necesarias en la matriz de coeficientes y el término independiente.

Analicemos como pasar la matriz de rigidez de una viga espacial de su sistema local al sistema global. Para realizar un cambio de coordenadas entre dos sistemas es posible observar (ver figura) que las relaciones que ligan ambos sistemas tienen para cada nodo la forma

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{u}}^i &= \mathbf{R} \mathbf{u}^i \\ \bar{\theta}^i &= \mathbf{R} \theta^i\end{aligned}$$

donde la matriz rotación \mathbf{R} es

$$\mathbf{R} = [t_1 \ t_3 \ t_3]$$

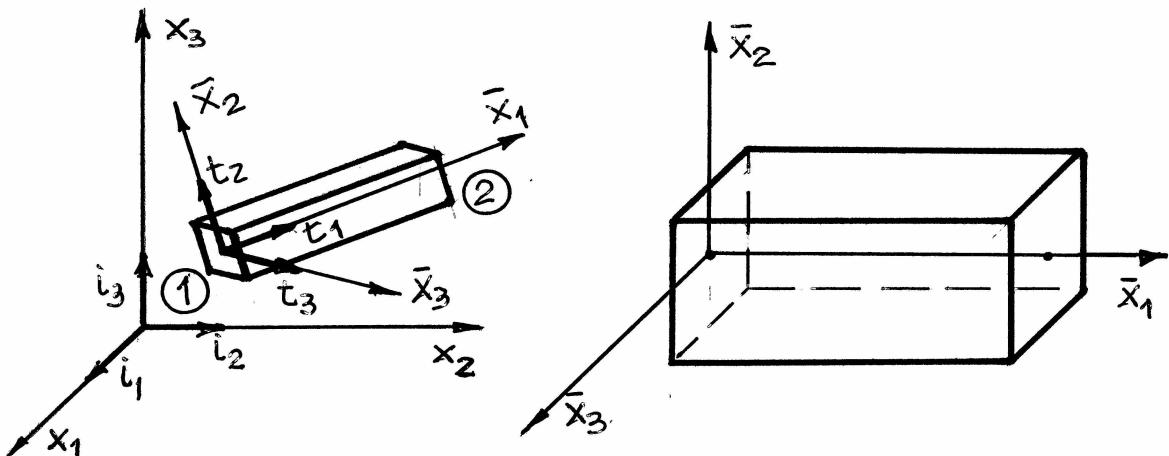


Figura 1 Cambio de sistema en una viga

La matriz de transformación Λ resulta entonces de

$$\bar{\mathbf{u}}^e = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}^1 \\ \bar{\theta}^1 \\ \bar{\mathbf{u}}^2 \\ \bar{\theta}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & & & \\ & \mathbf{R} & & \\ & & \mathbf{R} & \\ & & & \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^1 \\ \theta^1 \\ \mathbf{u}^2 \\ \theta^2 \end{bmatrix} = \Lambda \mathbf{u}^e$$

Las expresiones de cambio de la matriz de rigidez y el vector de términos independientes tienen la forma vista antes, es decir:

$$\mathbf{K} = \Lambda^T \bar{\mathbf{K}} \Lambda \quad \mathbf{f} = \Lambda^T \bar{\mathbf{f}}$$

Notar que la relación $\bar{\mathbf{u}}^e = \Lambda \mathbf{u}^e$ puede verse como doce relaciones de restricción de los grados de libertad en $\bar{\mathbf{u}}^e$ en función de los grados de libertad en \mathbf{u}^e . La aplicación de la primera de las metodologías explicadas para tratar restricciones conduce a las mismas expresiones obtenidas aquí.

Conceptualmente la misma idea puede aplicarse a otras condiciones o dependencias. Veamos un ejemplo de características distintas. Sea la intersección ortogonal de un elemento de viga (horizontal) con otros dos verticales (columnas), dentro de un pórtico plano

La discretización habitual supone a los elementos unidos en la intersección de sus respectivos ejes baricéntricos. Obviamente esto no es así en la realidad. La utilización de la longitud de cada elemento como la distancia entre los nudos conduce a que

1. se incluya más masa que la real al haber un solapamiento de los dominios (parte sombreada)
2. la viga resulte más flexible debido a que la longitud de cálculo L es mayor que la real.

Supongamos que la rigidez de las columnas es significativamente mayor que la de la viga, una mejora en la formulación consiste en evaluar las rigideces de las columnas usando la distancia

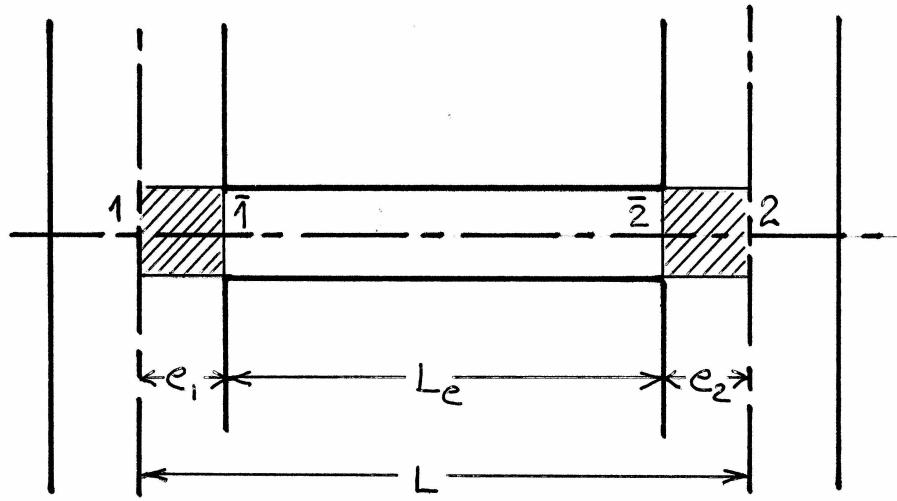


Figura 2 viga flexible entre columnas

entre nudos L y para las vigas usar como longitud de cálculo la distancia efectivamente libre entre columna y columna. Llamemos como hasta ahora $\bar{\mathbf{K}}$ y $\bar{\mathbf{M}}$ las matrices de rigidez y masa del elemento de viga usando la longitud efectiva L_e , que estarán referidas a los desplazamientos (y giros) de los puntos $\bar{1}$ y $\bar{3}$ (\bar{u}^1, \bar{u}^2). Desde el punto de vista operativo los nudos $\bar{1}$ y $\bar{3}$ son sólo auxiliares y no intervienen en el sistema de ecuaciones a resolver que sólo incluye los nodos ubicados en la intersección de los ejes de vigas y columnas. Resulta entonces necesario determinar la relación que existe entre los desplazamientos de estos nudos ficticios y los de los nudos 1 y 2.

Observemos en la siguiente figura como dependen los desplazamientos del nudo $\bar{1}$ de los del nudo 1. Notar que por las hipótesis de Navier, la línea que une los nudos 1 y $\bar{1}$ se mantiene recta y normal a la curva deformada de la columna

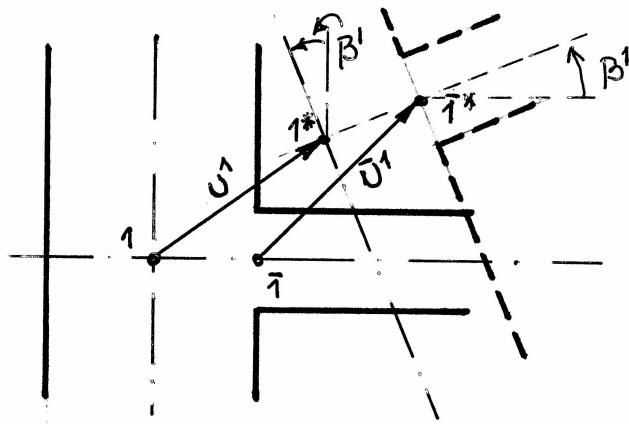


Figura 3 relación entre grados de libertad

En base a consideraciones geométricas sencillas tenemos que

$$\begin{aligned}\bar{u}_1^1 &= u_1^1 + e^1 (\cos \beta^1 - 1) \\ \bar{u}_2^1 &= u_2^1 + e^1 \sin \beta^1\end{aligned}$$

en tanto que la hipótesis de pequeños desplazamientos y giros conduce a las siguientes relaciones lineales

$$\begin{aligned}\bar{u}_1^1 &= u_1^1 \\ \bar{u}_2^1 &= u_2^1 + \beta^1 e^1 \\ \bar{\beta}^1 &= \beta^1\end{aligned}$$

En forma similar en el extremo opuesto tendremos las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}\bar{u}_1^2 &= u_1^2 \\ \bar{u}_2^2 &= u_2^2 - \beta^2 e^2 \\ \bar{\beta}^2 &= \beta^2\end{aligned}$$

La matriz de transformación Λ resulta entonces

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & e^1 & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \\ & & & & 1 \\ & & & & & -e^2 \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Notar que en este caso Λ no es ya una simple matriz de rotación y de hecho su inversa no es igual a su traspuesta.

7.4. Solución del sistema de ecuaciones

La matriz de coeficientes \mathbf{K} de los sistema de ecuaciones resultantes ($\mathbf{Kx} = \mathbf{f}$) en el método de elementos finitos (en problemas autoadjuntos basados en la aproximación de Galerkin en el método de residuos ponderados), normalmente goza de las siguientes propiedades:

1. Es simétrica $k_{ij} = k_{ji}$
2. Está bien condicionada, por lo que no requiere de cuidados especiales en la resolución.
3. Es definida positiva $\mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x} > 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
4. Muchos de sus coeficientes son nulos, y los coeficientes no nulos forman una banda alrededor de la diagonal

La resolución de este sistema de ecuaciones puede hacerse por métodos directos o iterativos (gradientes conjugados). Los directos están basados en el algoritmo de Gauss, consistente en convertir el sistema de ecuaciones a una forma triangular superior mediante operaciones de fila y una posterior sustitución hacia atrás. Los métodos iterativos tienen mayor competencia en problemas tridimensionales con gran cantidad de coeficientes nulos (matrices ralas) y tienen la ventaja de que no requieren la construcción de la matriz, lo que puede ser muy importante cuando no se dispone de suficiente memoria. Los métodos directos tienen la ventaja de que permiten resolver con el mismo esfuerzo computacional múltiples estados de carga y para el caso bidimensional resultan en general más económicos. En los métodos directos resulta de particular importancia la numeración de los grados de libertad del problema, pues esto afecta a la demanda de memoria necesaria para almacenar la matriz \mathbf{K} por un lado y por otro a la cantidad de operaciones necesaria para resolver el sistema. Esto es importante cuando se resuelven sistemas con gran cantidad de grados de libertad o problemas no-lineales, por ello existen algoritmos que optimizan la numeración de las incógnitas a los fines de disminuir tanto la necesidad de almacenamiento como el tiempo necesario para resolver el sistema. Estos algoritmos de optimización están presentes en la mayoría de los códigos a este efecto y de tal forma que el usuario no tenga que preocuparse por como numerar los nudos.

De los métodos directos el más utilizado es el de factorización que consiste en los siguiente:

1. Descomponer la matriz \mathbf{K} en factores

$$\mathbf{K} = \mathbf{L} \mathbf{D} \mathbf{U}$$

donde

D Matriz diagonal (definida positiva en este caso)

$$\begin{cases} d_{ii} > 0 \\ d_{ij} = 0 & i \neq j \end{cases}$$

L Matriz triangular inferior

$$\begin{cases} l_{ii} = 1 \\ l_{ij} = 0 & i < j \end{cases}$$

U Matriz triangular superior

$$\begin{cases} u_{ii} = 1 \\ u_{ij} = 0 & i > j \end{cases}$$

que para el caso de **K** simétrica resulta $\mathbf{U} = \mathbf{L}^T$

2. Modificar el término independiente mediante una sustitución hacia adelante

$$\begin{aligned} (\mathbf{LDU})\mathbf{x} &= \mathbf{f} \\ (\mathbf{LD})(\mathbf{Ux}) &= \mathbf{f} \\ (\mathbf{LD})\mathbf{y} &= \mathbf{f} \end{aligned}$$

en la última expresión el producto **(LD)** es una matriz triangular inferior y la obtención de la variable intermedia **y** es inmediata mediante una sustitución hacia adelante.

3. Resolver **x** mediante una sustitución hacia atrás

$$\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$$

En el caso que nos interesa ($\mathbf{U} = \mathbf{L}^T$) el detalle de los pasos es el siguiente:

1-Descomposición en factores

$$k_{ij} = \sum_{r=1}^n l_{ir} \sum_{s=1}^n d_{rs} u_{sj} = \sum_{r=1}^i l_{ir} \sum_{s=j}^n d_{rs} u_{sj}$$

los cambios en los límites de las sumatorias surgen de las características de **L** y **U**. Introduciendo ahora el hecho que **D** es diagonal y la simetría de la matriz $u_{sj} = l_{js}$, tenemos

$$k_{ij} = \sum_{r=1}^{\min(i,j)} l_{ir} d_{rr} l_{jr}$$

Veamos como calcular los coeficientes l_{ir} y d_{rr} . Para ello tomemos la parte inferior de **K** es decir $i \geq j$, la expresión anterior puede escribirse ($l_{jj} = 1$)

$$k_{ij} = l_{ij} d_{jj} + \sum_{r=1}^{j-1} \underbrace{l_{ir} d_{rr} l_{jr}}_{g_{ir}}$$

luego separando los casos en que los índices son iguales y cuando no lo son

$$\begin{aligned} i &= j & k_{ii} &= d_{ii} + \sum_{r=1}^{i-1} g_{ir} l_{ir} \\ i &> j & k_{ij} &= l_{ij} d_{jj} + \sum_{r=1}^{j-1} g_{ir} l_{jr} \end{aligned}$$

Siguiendo ahora un orden creciente para j primero (bucle externo de 1 a n) y para i después (interno de j a n) podemos ir evaluando cada término de la factorización. Es decir para la primera columna $j = 1$

$$\begin{aligned} d_{11} &= k_{11} \\ l_{i1} &= k_{i1}/d_{11} \end{aligned}$$

para cada columna posterior j se conocen entonces todos los valores de d_{kk} y l_{ik} de las columnas anteriores ($k < j$). Podemos escribir

$$l_{ij} = \frac{1}{d_{jj}} \left[k_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} g_{ik} l_{jk} \right]$$

pero todavía no conocemos d_{jj} por ello en vez de calcular l_{ij} evaluemos primero para i de 1 a $j - 1$

$$g_{ij} = l_{ij} d_{jj} = \left[k_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} g_{ik} l_{jk} \right] \quad (1)$$

y una vez obtenidos los valores de la columna completa podemos ahora calcular

$$\begin{aligned} d_{jj} &= k_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} g_{jk} l_{jk} \\ l_{ij} &= g_{ij}/d_{jj} \end{aligned}$$

y pasar a la siguiente columna hasta completar el cálculo de todos los coeficientes. Resulta muy importante notar en este algoritmo que en (1) g_{ij} será nulo si inicialmente k_{ij} y todos los términos previos de la fila $k = 1, j - 1$ son nulos, es decir que la matriz **K** y **L** tendrán el mismo perfil. Además una vez calculado el valor de l_{ij} no resulta ya necesario mantener el correspondiente valor de k_{ij} y por lo tanto puede utilizarse las posiciones de memoria de **K** para guardar los de **L**. Finalmente los coeficientes de la matriz diagonal **D** pueden guardarse en las posiciones diagonales de **K** ya que los elementos diagonales de **L** valen 1 y no requieren ser recordados.

2-Substitución hacia adelante para i de 1 a n

$$y_i = f_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} y_k$$

3-Substitución hacia atrás para i de n a 1

$$x_i = \frac{1}{d_{ii}} \left[y_i - \sum_{k=n}^{i+1} l_{ki} x_k \right]$$

Una descripción más detallada de la base teórica del presente algoritmo y su programación en códigos de elementos finitos puede verse en las referencias

- K.J.Bathe y E.L.Wilson, Numerical methods in finite element analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1976.
- T.R.Chandrupatla y A.D.Belegundu, Introduction to finite element in engineering, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1991.

El presente algoritmo no está condicionado a que la matriz sea definida positiva y sólo requiere que sea no-singular. También puede adaptarse a matrices no simétrica sin ninguna dificultad.

7.5. Suavizado de Variables

En el método de elementos finitos se asegura continuidad de las variables principales del problema (los desplazamientos en un problema de elasticidad), pero en general las variables derivadas resultan discontinuas entre elementos. Resulta necesario, a los fines de visualizar las variables o estimar errores de la solución, un valor único y continuo de las variables derivadas de la misma forma que uno conoce las variables principales. El flujo σ en los nodos puede calcularse directamente de la relación

$$\sigma(\mathbf{x}^I) = \sigma^I = \mathbf{DB}(\mathbf{x}^I) \mathbf{u}^e$$

sin embargo es más común su evaluación a partir de extrapolaciones desde los puntos de integración debido a que son los puntos óptimos (en el sentido de que tienen el menor error) de evaluación de las variables derivadas.

- Sean σ_G los valores de las variables que interesa suavizar evaluadas en los puntos de integración.
- Sea $\tilde{\sigma}(\xi)$ con valores dentro de cada elemento, las variables extrapoladas a partir de los valores σ_G

$$\tilde{\sigma}(\xi) = \sum_{G=1}^{NG} \Phi^G(\xi) \sigma_G$$

donde NG es el número de puntos de integración en el elemento y las Φ^G son funciones de forma definidas similarmente a las funciones nodales pero ahora con la condición:

$$\Phi^G(\xi^A) = \begin{cases} 1 & \text{si } A = G \\ 0 & \text{si } A \neq G \end{cases}$$

con A un punto de integración.

Interesa obtener las variables derivadas en los nudos en función de las variables en los puntos de integración. Denominaremos con σ^I a las variables suavizadas, (incógnitas por ahora) en los nudos. Dentro de un elemento cualquiera, el valor de estas variables se puede interpolar en la forma:

$$\hat{\sigma}(\xi) = \sum_{G=1}^{NN} N^I(\xi) \sigma^I$$

donde NN es el número de nudos del elemento y las N^I son las típicos funciones de interpolación nodales.

Debemos ahora fijar algún criterio que nos permita obtener las σ^I a partir de las σ_G . Dicho criterio puede ser que resulte mínima la integral del cuadrado de la diferencia entre las variables interpoladas a partir de los valores nodales y a partir de los valores en los puntos de integración, es decir minimizar:

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2} \int_V (\hat{\sigma} - \tilde{\sigma})^2 dV \\ R &= \frac{1}{2} \sum_{E=1}^{NE} \int_{V^E} \left[\sum_{I=1}^{NN} N^I \sigma^I - \sum_{G=1}^{NG} \Phi^G \sigma_G \right]^2 dV^E \end{aligned}$$

donde NE es el número de elementos en la discretización. La condición de mínimo es:

$$\frac{\partial R}{\partial \sigma^I} = 0 = \sum_{E=1}^{NE} \int_{V^E} N^I \left[\sum_{I=1}^{NN} N^J \sigma^J - \sum_{G=1}^{NG} \Phi^G \sigma_G \right] dV^E$$

Por supuesto para cada valor nodal σ^I la suma se realiza sobre los elementos donde sea no trivial, es decir que incluyan al nodo I (proceso de ensamble habitual). La condición de mínimo puede escribirse una vez realizadas las integrales como:

$$\frac{\partial R}{\partial \sigma^I} = \sum_{E=1}^{NE} M^{IJ} \sigma^J - Q^I$$

donde

$$M^{IJ} = \int_{V^E} N^I N^J dV^E$$

$$Q^I = \int_{V^E} N^I \tilde{\sigma} dV^E$$

Integrando numéricamente las expresiones de M^{IJ} y Q^I notemos que si usamos la misma regla de integración que para la evaluación de las variables σ_A resulta:

$$Q^I = \sum_{A=1}^{NG} N^I(\xi_A) \tilde{\sigma}(\xi_A) \text{Jac}_A W_A$$

y que siendo $\tilde{\sigma}(\xi_A) = \sigma_A$ no resulta necesario conocer en forma explícita las funciones Φ^G definidas anteriormente, luego:

$$Q^I = \sum_{A=1}^{NG} N^I(\xi_A) \sigma_A \text{Jac}_A W_A$$

Por otro lado la evaluación consistente de M^{IJ} conduce a un sistema de N (número de nudos en la discretización) ecuaciones con N incógnitas. Para evitar tanto cálculo, se suele aproximar la matriz M^{IJ} como diagonal. Una forma muy usada de realizar esto es sumando sobre la diagonal todos los elementos de la fila (o columna), es decir:

$$D^{II} = \sum_{J=1}^{NN} M^{IJ}$$

$$= \int_{V^E} N^I \underbrace{\sum_{J=1}^{NN} N^J}_{1} dV^E$$

$$= \sum_{A=1}^{NG} N^I(\xi_A) \text{Jac}_A W_A$$

de esta forma el sistema de ecuaciones a resolver es diagonal, resulta de un ensamble muy sencillo y su resolución es inmediata.

Capítulo 8 Elementos de placas y láminas

por F. Flores

8.1. Introducción

El desarrollo de elementos finitos eficientes y confiables para el análisis de láminas ha sido un tema de investigación constante desde los comienzos del método. Esto debido a un conjunto de problemas numéricos que surgen de la discretización de las ecuaciones de gabinete. A su vez las aplicaciones cada vez más complejas demandan una mayor robustez en diferentes condiciones de comportamiento. Elementos que muestra un buen comportamiento en ciertas condiciones, no lo hacen en otros. Así elementos confiables en régimen lineal, pueden no ser fácilmente expandibles a comportamiento no-lineal (geométrico o material), o elementos que muestran buen comportamiento en mallas estructuradas con elementos con buena relación de aspecto, no lo hacen cuando las mallas presentan elementos distorsionados.

En régimen lineal en general es posible distinguir elementos de placa (inicialmente planos, con sólo flexión) y elementos de lámina (en general de doble curvatura, con esfuerzos de flexión y esfuerzos membranales). En régimen no lineal (salvo no linealidades muy bajas) un elemento de placa se convierte en una lámina de doble curvatura y no es necesario hacer distinción alguna, sin embargo de acuerdo al tipo de formulación, el partir de una configuración original plana tiene algunas ventajas.

Los diferentes aspectos que deben considerarse en el desarrollo (o en su elección para modelar) de un elemento de lámina están condicionados por los objetivos que se trate de cumplir, por ejemplo:

- Esbeltez de la lámina, asociado a la relación entre el espesor de la lámina y la menor dimensión en el plano $\frac{h}{a}$ o el menor radio de curvatura $\frac{h}{R_{\min}}$. De acuerdo a esto puede ser necesario considerar la influencia de las deformaciones cortantes en caso de láminas gruesas. En general la influencia de las deformaciones cortantes es muy baja.
- No linealidad geométrica asociado a problemas con grandes desplazamientos y giros. En estructuras esbeltas no puede prescindirse de la no-linealidad, pues debe recordarse que las teorías lineales son válidas para desplazamientos menores que el espesor. El estudio de problemas de pandeo o inestabilidad requiere la utilización de elementos que sean capaces de representar adecuadamente grandes desplazamientos y rotaciones sin que aparezcan deformaciones espurias.
- Nivel de deformaciones y no linealidad material. El modelado de embutición de láminas metálicas, por ejemplo, requiere poder considerar niveles altos de deformación, o el estudio de estructuras inflables donde se utilizan elementos membranales que representan un caso particular de láminas.
- Capacidad para poder combinar elementos de láminas con elementos estructurales de otras características. En estructuras laminares es muy común el uso de rigidizadores, que suelen modelarse utilizando elementos de vigas, en tal caso debe ser posible compatibilizar los desplazamientos de ambos. También suele ser necesaria la existencia de elementos de transición desde láminas delgadas a elementos de sólidos, por ejemplo si se modela una cubierta de hormigón para grandes luces que se engrosa sustancialmente en la zona de apoyo.
- Quiebres, cambios de espesor u otras discontinuidades en la superficie media.

Difícilmente se pueda encontrar un elemento que pueda satisfacer todas las aplicaciones posibles, por ello algunos son adecuados para algunos modelos y otros no.

8.2. Elementos de placa basados en la teoría de Kirchhoff

Desde el punto de vista del MEF, la teoría de placas clásica, esto es sin deformaciones transversales por corte, presenta el importante inconveniente de requerir continuidad C^1 . Por lo tanto requiere, no sólo que los desplazamientos transversales sean continuos, sino que además deben ser continuas sus derivadas (giros). Esto está asociado a la necesidad de mantener la continuidad estructural pues los desplazamientos en el plano de placa fuera de la superficie media dependen de los giros. Es decir a lo largo de una fibra normal a la placa

$$u(z) = \beta_x z = -\frac{\partial w}{\partial x} z$$

$$v(z) = \beta_y z = -\frac{\partial w}{\partial y} z$$

La continuidad C^1 aparece también en problemas de teoría clásica de vigas, sin embargo allí debido a que las vigas dependen de una única variable espacial y la unión entre elementos se realiza en puntos (nudos) y no a lo largo de una curva (lados), el problema es de solución sencilla. En tal caso es posible imponer la continuidad de los giros en los nudos fácilmente, colocando precisamente como variable nodal la derivada o giro.

En problemas de placas la continuidad C^1 implica dos cosas:

1. debe satisfacerse a lo largo de los contornos inter-elementos, es decir que deben coincidir las interpolaciones a lo largo de una curva.
2. debe satisfacerse para ambas direcciones del plano. En el contorno esto a su vez puede expresarse localmente exigiendo la continuidad de la derivada en la dirección al contorno y la derivada normal al contorno.

Para que se cumpla estas condiciones es necesario que a lo largo de cualquier lado del elemento, el desplazamiento w y sus derivadas dependan exclusivamente de los parámetros nodales asociados a los nodos que conforman el lado. Esto trae en general consecuencias insalvables para elementos de geometría arbitraria, en particular en lo que se refiere a la derivada normal al contorno que involucra a la interpolación del desplazamiento en el interior del elemento, lo cual hace necesario utilizar como incógnitas nodales las derivadas segundas (cruzadas) del desplazamiento transversal. Esto último sólo resuelve el problema en mallas estructuradas (por ejemplo en elementos rectangulares), pero no en elementos con geometría arbitraria.

Si bien es posible la definición de elementos de placa “conforme”, es decir que satisfagan todas las condiciones de continuidad C^1 , esto no asegura un buen comportamiento y puede convertirlo en un elemento oneroso desde el punto de vista computacional. Esto ha llevado a la búsqueda de otro tipo de soluciones, entre las que se encuentran: a) las aproximaciones “mixtas”, en el sentido de que no todas las incógnitas son desplazamientos, sino que aparecen deformaciones o tensiones como incógnitas; b) elementos “no conformes”, que no satisfacen en forma explícita todas las condiciones de continuidad. Por ejemplo pueden satisfacer la continuidad del desplazamiento w (y con ello implícitamente la derivada en la dirección del contorno) pero sólo satisfacen en forma discreta (digamos en los nudos y a la mitad del lado) la condición de continuidad de la derivada normal al contorno. Lo importante en estos casos es mostrar que al refinar la malla las soluciones obtenidas convergen a la solución correcta.

Un análisis detallado del problema de continuidad C^1 y de las distintas soluciones propuestas escapa al objetivo de estas notas y puede verse en distintos textos del método, por ejemplo:

- Oñate Eugenio, Cálculo de Estructuras por el Método de Elementos Finitos, CIMNE, Barcelona, 1992.

- Zienkiewics, O.C. y Taylor R.L., The Finite Element Method, 4ta edición, Vol II, Mc. Graw Hill, Londres, 1991.

8.2.1. La prueba de la parcela (“patch test”)

En problemas sencillos y con aproximaciones estándar como los vistos en los capítulos anteriores, los elementos finitos presentados cumplen con un conjunto de condiciones que aseguran su convergencia al refinar la malla. Cuando las ecuaciones que gobiernan el comportamiento son más complejas y particularmente cuando se proponen soluciones que no satisfacen en forma exacta los requisitos previos, es necesario demostrar que el comportamiento del elemento es satisfactorio y que converge a la solución correcta. Una de las pruebas más sencillas para evaluar esto se conoce como “prueba de la parcela”. En general cuando se aumenta la discretización para un problema dado, se espera que en el límite el estado de deformaciones (y tensiones) dentro de un elemento sea constante. Por ello se impone como condición básica que todo elemento sea capaz de representar un estado de deformación constante y más aún, que un pequeño grupo (parcela) de elementos, sometido a fuerzas asociadas a un estado tensional uniforme, pueda hacerlo. Se toma entonces una problema muy sencillo (un dominio rectangular por ejemplo), con un estado de carga que conduzca a un estado tensional constante y se pide que la parcela sea capaz de reproducirlo. Habitualmente se intenta mostrar que al distorsionar los elementos dentro de dominio, no se deteriore el comportamiento.

8.3. Elementos de placa basados en la teoría de Reissner

A diferencia de la teoría de Kirchhoff, la teoría de Reissner-Mindlin conduce a problemas de continuidad C^0 , por lo cual los problemas asociados a la continuidad de la derivada mencionados anteriormente no aparecen y es posible satisfacer con facilidad las condiciones de continuidad inter-elementos. Esto debido a que las variables independientes del problema son ahora no sólo el desplazamiento transversal w sino también los giros $\boldsymbol{\theta}$, que son independientes entre sí. En consecuencia cualquiera de las aproximaciones utilizadas para problemas 2-D presentadas oportunamente pueden ser utilizadas y pasan la prueba de la parcela pues es posible representar estados de deformación (curvatura) constante.

Debe hacerse notar que al aproximar ahora tres variables (w , θ_1 y θ_2) en vez de una (w), la cantidad de parámetros necesarios para obtener una solución similar aumenta considerablemente. Por lo tanto para lograr aproximaciones similares resulta necesario utilizar mallas más densas. Por otro lado los elementos de continuidad C^1 , utilizan en general polinomios de mayor orden lo que conduce naturalmente a una mejor aproximación con menor cantidad de elementos, es decir convergen más rápidamente, por lo cual desde el punto de vista de la cantidad de grados de libertad, la utilización de elementos de tipo C^0 resulta doblemente inconveniente.

La utilización de elementos basados en esta teoría presentan la ventaja de considerar la influencia de la deformación del corte transversal. Esto es efectivamente una ventaja cuando esta influencia es realmente apreciable. Por el contrario cuando la influencia del corte empieza a ser despreciable (placas esbeltas y muy esbeltas) se convierte en una desventaja que incluso conduce a hacer inservibles estos elementos debido a que se produce un “bloqueo” numérico (hay formas de solucionar esto). Este bloqueo numérico se produce debido a la imposibilidad de las funciones de forma de acomodar adecuadamente la condición

$$\nabla w - \boldsymbol{\theta} \cong 0$$

lo que se traduce en un aumento espurio de la energía de deformación debida al corte transversal. Esto puede verse en los distintos términos que componen la energía interna de deformación de una placa, donde la rigidez a la flexión está definida por $D = \frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)}$ en tanto que la rigidez al corte es $C = Gh$. En función de la mínima dimensión de la placa L es posible definir un coeficiente adimensional

$$\alpha = \frac{C}{D} L^2 = \frac{12Gh L^2 (1 - \nu^2)}{Eh^3} \approx \left(\frac{L}{h}\right)^2$$

que para el caso de placas esbeltas ($\frac{L}{h} \simeq 100$), conduce a valores de α del orden de 10.000.

Este problema fue rápidamente detectado y se propusieron distintas aproximaciones para solucionarlo

- Subvaluar el término asociado al corte. Esto se conoce como “integración reducida”. Habitualmente las matrices de rigidez de los elementos se obtienen por integración numérica, donde la cantidad de puntos de integración depende del orden de los polinomios a integrar y se elige de tal forma de integrarlos en forma lo más exacta posible, de tal forma de evitar modos de deformación espurios sin energía asociada. Integrar en forma reducida consiste en usar menor cantidad de puntos que los necesarios, lo que puede verse como disminuir el valor de energía asociada o como permitir la existencia de modos de deformación con baja energía asociada. Esta “subintegración” se realiza exclusivamente sobre los términos asociados al corte pues de otra manera conduce a singularidades (modos de cuerpo rígido) mayores que las necesarias. Esta técnica fue ampliamente utilizada (y lo sigue siendo en muchos casos) pero no funciona en todos los casos, resultando en elementos que no son robustos.
- Aproximaciones mixtas. Tienen una mejor fundamentación desde el punto de vista teórico, por lo cual permiten una mayor justificación. Los resultados obtenidos son en general muy buenos y han dado lugar a un avance significativo de este tipo de elementos, que en general se presentan como los de uso estándar a pesar de las desventajas mencionadas.

Finalmente se hace notar que en general los elementos que incluyen deformaciones transversales de corte, son más sencillo de llevar al rango no-lineal geométrico. Por otro lado los elementos más eficientes en el análisis de problemas elasto-plásticos son aquellos de bajo orden de interpolación.

8.3.1. Elemento de placa con deformaciones por corte

Debido a que la formulación resulta de continuidad C^0 su desarrollo no presenta ninguna dificultad. Observemos como obtener las expresiones para un elemento isoparamétrico en general y para un cuadrilátero de cuatro nudos en particular.

Para una aproximación isoparamétrica tendremos (con NN el número de nudos)

$$\begin{bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} = \sum_{I=1}^{NN} N^I(\xi, \eta) \begin{bmatrix} w^I \\ \theta_x^I \\ \theta_y^I \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \sum_{I=1}^{NN} N^I(\xi, \eta) \begin{bmatrix} x^I \\ y^I \end{bmatrix}$$

La relación deformación-desplazamiento puede escribirse como

$$\begin{bmatrix} \chi_{11} \\ \chi_{22} \\ \chi_{12} \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} & -1 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} & -1 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & -1 \end{bmatrix} \sum_{I=1}^{NN} N^I(\xi, \eta) \begin{bmatrix} w^I \\ \theta_x^I \\ \theta_y^I \end{bmatrix}$$

$$= \mathbf{B} \mathbf{u}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_b \\ \mathbf{B}_s \end{bmatrix} \mathbf{u}_e$$

donde el vector \mathbf{u}_e ($3NN \times 1$) incluye las variables nodales incógnitas del elemento y en la matriz \mathbf{B} se han distinguido la parte asociada a la flexión (\mathbf{B}_b) y la parte asociada al corte (\mathbf{B}_s). Para el elemento de cuatro nudos estas matrices resultan

$$[\mathbf{B}_b]_{3 \times 12} = \begin{bmatrix} 0 & N_x^1 & 0 & 0 & N_x^2 & 0 & 0 & N_x^3 & 0 & 0 & N_x^4 & 0 \\ 0 & 0 & N_y^1 & 0 & 0 & N_y^2 & 0 & 0 & N_y^3 & 0 & 0 & N_y^4 \\ 0 & N_y^1 & N_x^1 & 0 & N_y^2 & N_x^2 & 0 & N_y^3 & N_x^3 & 0 & N_y^4 & N_x^4 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{B}_s]_{2 \times 12} = \begin{bmatrix} N_x^1 & -N^1 & 0 & N_x^2 & -N^2 & 0 & N_x^3 & -N^3 & 0 & N_x^4 & -N^4 & 0 \\ N_y^1 & 0 & -N^1 & N_y^2 & 0 & -N^2 & N_y^3 & 0 & -N^3 & N_y^4 & 0 & -N^4 \end{bmatrix}$$

La matriz que relaciona esfuerzos integrados en el espesor con las deformaciones generalizadas tiene la forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 3} & Gh\kappa \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_{11} \\ \chi_{22} \\ \chi_{12} \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}$$

Finalmente la matriz de rigidez resulta de la integral

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \int_A \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dA = \int_A [\mathbf{B}_b^T, \mathbf{B}_s^T] \begin{bmatrix} \mathbf{D}_b & 0 \\ 0 & \mathbf{D}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_b \\ \mathbf{B}_s \end{bmatrix} dA \\ &= \int_A \mathbf{B}_b^T \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b dA + \int_A \mathbf{B}_s^T \mathbf{D}_s \mathbf{B}_s dA \\ &= \mathbf{K}_b + \mathbf{K}_s \end{aligned}$$

Donde pueden distinguirse las distintas contribuciones de flexión y corte a la matriz de rigidez.

8.3.2. Técnica de deformaciones impuestas.

Como se mencionó anteriormente el elemento descripto presenta problemas de bloqueo numérico debido al corte transversal para placas delgadas. Una de las técnicas utilizadas para aliviar este problema se conoce como “Técnica de Deformaciones Impuestas”, que se describe suavemente a continuación.

El basamento teórico de este tipo de aproximaciones se encuentra en la utilización de funcionales de tres campos, conocidos como funcionales de Hu-Washizu. En el caso general de un sólido elástico es posible escribir a la energía potencial total como

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}) &= \int_V \left\{ w(\varepsilon_{ij}) - \sigma_{ij} \left[\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \right\} dV - \mathcal{V}(\mathbf{u}) \\ &= \int_V \left\{ \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\sigma}^T [\boldsymbol{\varepsilon} - \nabla^S \mathbf{u}] \right\} dV - \mathcal{V}(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

donde w es la energía interna de deformación por unidad de volumen y $\mathcal{V}(\mathbf{u})$ es el potencial de fuerzas externas. Notar que el segundo término dentro de la integral se anula si las deformaciones ε_{ij} satisfacen las ecuaciones cinemáticas.

La solución del problema se obtiene como la condición de minimización del funcional respecto a los distintos campos de variables involucrados (\mathbf{u} , $\boldsymbol{\sigma}$ y $\boldsymbol{\varepsilon}$), así resulta

$$\begin{aligned} \delta_{\mathbf{u}} \Pi &= \int_V \sigma_{ij} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \right) \right] dV - \delta \mathcal{V}(\mathbf{u}) = 0 \\ \delta_{\boldsymbol{\varepsilon}} \Pi &= \int_V \left[\delta \varepsilon_{ij} \left(\frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}} - \sigma_{ij} \right) \right] dV = 0 \\ \delta_{\boldsymbol{\sigma}} \Pi &= \int_V \delta \sigma_{ij} \left[\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] dV = 0 \end{aligned}$$

Notar que la primera ecuación es sencillamente la condición de mínimo de la energía potencial total escrita en función de tensiones y desplazamientos. La segunda ecuación indica que para

cualquier variación de deformaciones debe satisfacerse la definición de las tensiones a partir de la energía interna de deformación, esto es las ecuaciones constitutivas del problema. En tanto que la tercera condición indica que para cualquier variación de tensiones deben satisfacerse las ecuaciones cinemáticas. En definitiva que para que un conjunto de valores $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma})$ sean solución del problema, deben satisfacerse idénticamente las condiciones de equilibrio, constitutivas y cinemáticas. Planteado así el problema establecido es formalmente idéntico al reemplazo habitual de constitutivas y cinemáticas sobre la energía potencial total a los fines de que esta quede expresada sólo en función de los desplazamientos. Sin embargo el mantener en forma independiente los tres campos de variables permite distintas aproximaciones numéricas a la solución del problema.

La técnica de deformaciones impuestas consiste en:

1. Establecer una interpolación independiente para el campo de deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}$,
2. Escribir al campo de tensiones en función de las constitutivas. En tal caso estas se cumplen en forma exacta y las tensiones no son una variable independiente.
3. Relacionar las deformaciones con los desplazamiento en un conjunto de puntos arbitrariamente elegidos. Esto permite eliminar a las deformaciones como variables globales, quedando el problema final exclusivamente en término de los desplazamientos.

Mostraremos como ejemplo como aplicar la técnica bosquejada para el término de corte transversal en un elemento cuadrilátero de placa de cuatro nudos (bilineal).

Consideremos el elemento maestro correspondiente al cuadrilátero, es decir un cuadrado de lado dos. En este elemento impondremos la siguiente interpolación para las deformaciones transversales de corte

$$\begin{bmatrix} \gamma_\xi \\ \gamma_\eta \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1-\eta & 0 & 1+\eta \\ 1-\xi & 0 & 1+\xi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_\eta^A \\ \gamma_\xi^B \\ \gamma_\eta^C \\ \gamma_\xi^D \end{bmatrix} = \mathbf{P}(\xi, \eta) \hat{\gamma} \quad (8.1)$$

donde las deformaciones de corte han sido definidas en el sistema de coordenadas locales (ξ, η) del elemento maestro, en función de las deformaciones tangenciales al contorno en cuatro puntos indicados como A($\xi = -1, \eta = 0$), B($\xi = 0, \eta = -1$), C($\xi = 1, \eta = 0$) y D($\xi = 0, \eta = 1$) (ver Figura 1). Según se ve cada componente de deformación se mantiene constante en una dirección y varía linealmente en la otra.

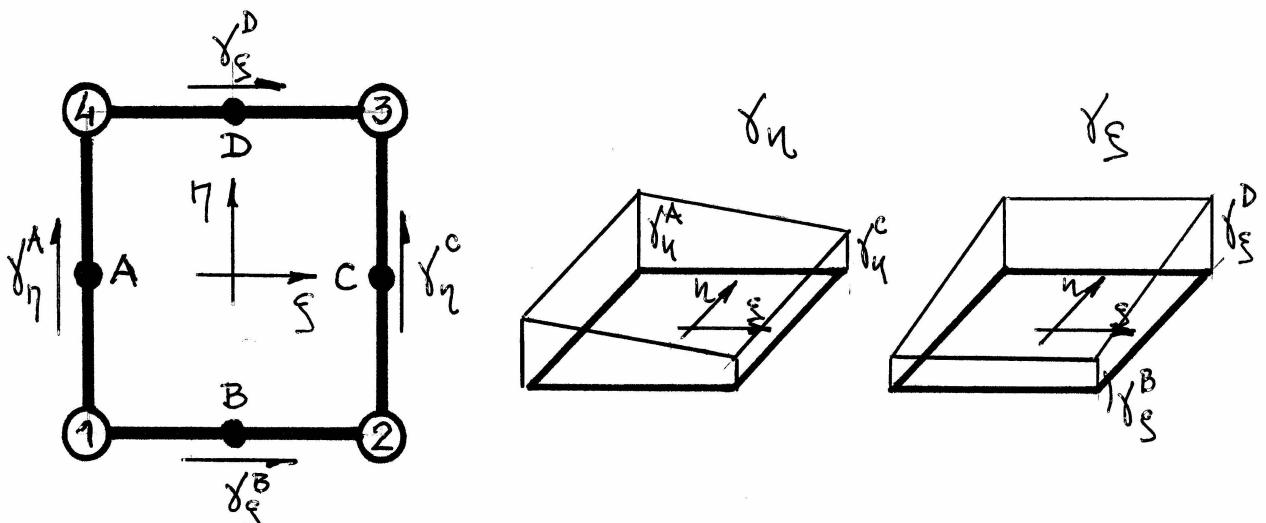


Figura 1 Puntos de evaluación del corte transversal en cuadriláteros

A continuación veremos como expresar estas deformaciones respecto al sistema coordenado físico, observemos que la definición de las deformaciones respecto al sistema natural son:

$$\begin{bmatrix} \gamma_\xi \\ \gamma_\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial \xi} - \theta_\xi \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} - \theta_\eta \end{bmatrix} = \nabla_{(\xi, \eta)} w - \boldsymbol{\theta}' = \boldsymbol{\gamma}'$$

con el cambio local de coordenadas

$$\begin{bmatrix} \theta_\xi \\ \theta_\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} = \mathbf{J}\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}'$$

en tanto que las deformaciones respecto al sistema cartesiano resultan:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_\xi \\ \gamma_\eta \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \gamma_\xi \\ \gamma_\eta \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{J}^{-1} [\nabla_{(\xi, \eta)} w - \boldsymbol{\theta}'] = \mathbf{J}^{-1} \nabla_{(\xi, \eta)} w - \boldsymbol{\theta} \end{aligned} \quad (8.2)$$

Las deformaciones en el sistema natural en los puntos de muestreo (A,B,C y D) son

$$\begin{bmatrix} \gamma_\eta^A \\ \gamma_\xi^B \\ \gamma_\eta^C \\ \gamma_\xi^D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w'_{\eta}(\xi = -1, \eta = 0) - \theta_{\eta}(\xi = -1, \eta = 0) \\ w'_{\xi}(\xi = 0, \eta = -1) - \theta_{\xi}(\xi = 0, \eta = -1) \\ w'_{\eta}(\xi = 1, \eta = 0) - \theta_{\eta}(\xi = 1, \eta = 0) \\ w'_{\xi}(\xi = 0, \eta = 1) - \theta_{\xi}(\xi = 0, \eta = 1) \end{bmatrix} \quad (8.3)$$

Evaluando en los puntos de muestreo resultan

$$\begin{bmatrix} \gamma_\eta^A \\ \gamma_\xi^B \\ \gamma_\eta^C \\ \gamma_\xi^D \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & x^4 - x^1 & y^4 - y^1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & x^2 - x^1 & y^2 - y^1 & 1 & x^2 - x^1 & y^2 - y^1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & x^3 - x^2 & y^3 - y^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^1 \\ \theta_x^1 \\ \theta_y^1 \\ w^2 \\ \theta_x^2 \\ \theta_y^2 \\ w^3 \\ \theta_x^3 \\ \theta_y^3 \\ w^4 \\ \theta_x^4 \\ \theta_y^4 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}} = \hat{\mathbf{B}} \mathbf{u}_e \quad (8.4)$$

de esta forma, hasta ahora, hemos escrito las deformaciones (naturales) en los puntos de muestreo en función de las coordenadas nodales y los desplazamientos nodales.

Las deformaciones de corte transversales respecto al sistema cartesiano resultan de reemplazar las 8.4 en las 8.1 y estas en las 8.2

$$\boldsymbol{\gamma}(\xi, \eta) = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{P}(\xi, \eta) \hat{\mathbf{B}} \mathbf{u}_e = \bar{\mathbf{B}}_s(\xi, \eta) \mathbf{u}_e \quad (8.5)$$

donde se ha introducido la matriz \mathbf{B} substituta o $\bar{\mathbf{B}}$ (B-barra)

$$\bar{\mathbf{B}}_s(\xi, \eta) = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{P}(\xi, \eta) \hat{\mathbf{B}}$$

Los esfuerzos transversales de corte valen

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = Gh\kappa \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \end{bmatrix} = \mathbf{D}_s \bar{\mathbf{B}}_s \mathbf{u}_e$$

Finalmente la energía interna de deformación resulta

$$\begin{aligned} W_s &= \frac{1}{2} \int_A \mathbf{u}_e^T \bar{\mathbf{B}}_s^T \mathbf{D}_s \bar{\mathbf{B}} \mathbf{u}_e dA \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{u}_e^T \hat{\mathbf{B}}^T \int_A \mathbf{P}^T(\xi, \eta) \mathbf{J}^{-T} \begin{bmatrix} Gh\kappa & 0 \\ 0 & Gh\kappa \end{bmatrix} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{P}(\xi, \eta) dA \hat{\mathbf{B}} \mathbf{u}_e \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{u}_e^T \mathbf{K}_s \mathbf{u}_e \end{aligned}$$

donde \mathbf{K}_s es la contribución del corte transversal a la matriz de rigidez, que se calcula usando integración numérica estándar como:

$$\mathbf{K}_s = \hat{\mathbf{B}}^T \int_A \mathbf{P}^T(\xi, \eta) \mathbf{J}^{-T} \begin{bmatrix} Gh\kappa & 0 \\ 0 & Gh\kappa \end{bmatrix} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{P}(\xi, \eta) dA \hat{\mathbf{B}}$$

o si se escribe en función de la matriz substituta $\bar{\mathbf{B}}_s$ directamente

$$\mathbf{K}_s = \int_A \bar{\mathbf{B}}_s^T(\xi, \eta) \begin{bmatrix} Gh\kappa & 0 \\ 0 & Gh\kappa \end{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_s(\xi, \eta) dA$$

8.4. Elementos de lámina

El desarrollo de elementos de lámina presenta, por lo menos, los mismos problemas que el desarrollo de elementos de placa. Lo interesante es que habitualmente las soluciones son las mismas, por lo que en general lo que hay que solucionar son nuevos problemas si los hubiere. Una forma de generar elementos de lámina es precisamente tomar un buen elemento de placa y agregarle la contribución membranal. Esto es inmediato en elementos triangulares de 3 nodos, que son planos.

Básicamente existen tres aproximaciones para el desarrollo de elementos de láminas, dos asociados a las teorías vistas para placas planas y una tercera asociada a la imposición de restricciones cinemáticas en elementos de sólido. Tenemos entonces

- Elementos basados en la teoría de láminas clásica (Love-Kirchhoff)
- Elementos que incluyen deformaciones transversales de corte (Reissner-Mindlin)
- Elementos de sólido degenerado, que resultan muy similares a los basados en la teoría de Reissner-Mindlin

Algunas características distintivas de los teorías de láminas respecto a las de placas planas es que:

1. Requieren la definición de un sistema coordenado curvilíneo. Habitualmente este sistema coordenado se particulariza en un sistema cartesiano local (dos ejes sobre el plano tangente a la lámina y el tercero normal a la lámina) en los puntos de integración. Esto debe interpretarse cómo que el sistema coordenado no queda definido en forma explícita en todo el elemento sino sólo en los puntos de integración.

2. Los elementos tienen curvatura inicial, lo que traduce en dos aspectos: a) un acoplamiento del comportamiento flexional y membranal y b) en la forma de medir las deformaciones como el cambio de curvatura.
3. En elementos inicialmente curvos, es necesario que la definición de los desplazamientos permita los movimientos de cuerpo rígido sin la aparición de energía. Esto es difícil de lograr si los desplazamientos se definen en los sistemas de coordenadas locales y aún cuando se definen en sistemas globales es posible un aumento espurio de la energía de deformación membranal (“bloqueo membranal”) cuando no se pueden modelar correctamente los movimientos de cuerpo rígido. Este último problema aparece en elementos inicialmente curvos, no en elementos inicialmente planos.

Dado el carácter introductorio de estas notas, no se avanzará más sobre el tema.

Capítulo 9 Combinación de Elementos Finitos y Volúmenes Finitos

por F. Flores

9.1. Introducción

A continuación se presenta una formulación para la solución numérica de un problema de convección difusión, en la cual se utiliza la noción de volúmenes de control para establecer las ecuaciones de balance y se utiliza una malla de elementos finitos arbitraria a los fines de definir los volúmenes de control y las contribuciones correspondiente. Esta técnica numérica puede verse como una combinación de la técnica de volúmenes finitos, en la cual se discretiza el dominio en subdominios a los fines de que en tales subdominios se cumpla la ecuación de balance, y la técnica de elementos finitos, donde se discretiza el dominio, en subdominios a los fines de evaluar las contribuciones de equilibrio en cada nudo de la malla. Como se verá en este caso, no son los elementos finitos los volúmenes de control (podría plantearse de esa manera), si no que los volúmenes de control están asociados a los nudos de la malla.

Básicamente consiste en:

1. Plantear una malla arbitraria de E.F., en general “no estructurada”
2. En cada elemento definir funciones de interpolación, las estándar del MEF, a los fines de aproximar la variable incógnita
3. Alrededor de cada nudo de la malla definir un Volumen Finito sobre el cual plantear la ecuación de balance
4. Para la evaluación de las integrales que dan lugar a la ecuación de balance se utilizan las aproximaciones del punto 2.

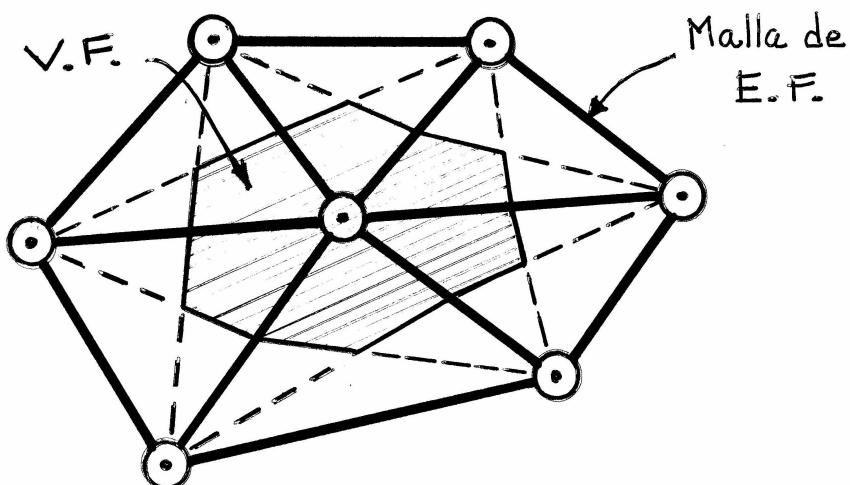


Figura 1 Definición de la celda elemental

9.2. Aproximaciones

Normalmente se usan aproximaciones sencillas. En Problemas 2-D, la aproximación más sencilla y versátil es el triángulo lineal. Si denominamos con ϕ a la incógnita (escalar) del problema

$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^3 L^I \phi^I$$

en tanto que las velocidades (conocidas) pueden escribirse

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^3 L^I \mathbf{u}^I$$

donde

ϕ^I : son las incógnitas nodales

L^I : son las coordenadas triangulares (ξ, η, ζ)

\mathbf{u}^I : son las velocidades en los nudos (conocidas), que satisfacen $\nabla \mathbf{u} = 0$

Para cada elemento finito triangular hay que calcular las 3 contribuciones correspondientes a las celdas de volumen finito asociadas a cada nudo del triángulo. Estas contribuciones corresponden a las interfaces internas indicadas como 1, 2 y 3 en la Figura 2

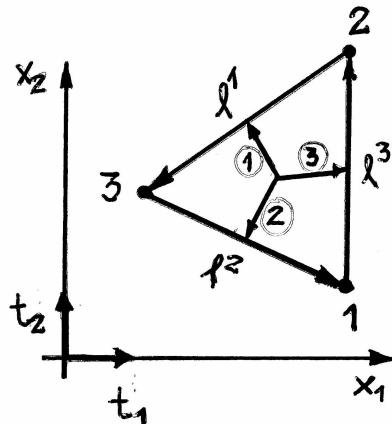


Figura 2 Interfaces internas de cada triángulo

A su vez cada una de esas contribuciones se sumará o restará en cada nudo según la definición que se utilice de la normal a la interfaz.

Denominando con \mathbf{x}^I al par coordenado de cada nudo y orientando los lados del triángulo en sentido antihorario

$$\mathbf{l}^1 = \mathbf{x}^3 - \mathbf{x}^2 \quad \mathbf{l}^2 = \mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^3 \quad \mathbf{l}^3 = \mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1$$

y llamando a^I y b^I a las proyecciones del lado I según las direcciones coordenadas

$$\begin{aligned} a^I &= \mathbf{l}^I \cdot \mathbf{t}_1 & b^I &= \mathbf{l}^I \cdot \mathbf{t}_2 \\ a^1 &= x_1^3 - x_1^2 & b^1 &= x_2^3 - x_2^2 \\ a^2 &= x_1^1 - x_1^3 & b^2 &= x_2^1 - x_2^3 \\ a^3 &= x_1^2 - x_1^1 & b^3 &= x_2^2 - x_2^1 \end{aligned}$$

En base a las definiciones anteriores es fácil demostrar que el doble del área del triángulo vale

$$2A = a^1 b^2 - a^2 b^1$$

y además que para un punto genérico de coordenadas (x_1, x_2) las funciones de forma valen

$$\begin{aligned} L^1 &= \frac{1}{2A} [-b^1 x_1 + a^1 x_2 + b^1 x_1^2 - a^1 x_2^2] = \xi(x_1, x_2) \\ L^2 &= \frac{1}{2A} [-b^2 x_1 + a^2 x_2 + b^2 x_1^3 - a^2 x_2^3] = \eta(x_1, x_2) \\ L^3 &= \frac{1}{2A} [-b^3 x_1 + a^3 x_2 + b^3 x_1^1 - a^3 x_2^1] = \zeta(x_1, x_2) \end{aligned}$$

En la Figura 1 la definición de la celda o volumen finito se ha hecho en función de las “medianas” de cada triángulo que parten de la mitad de cada lado y se cortan en el centro del elemento. Esto hace que a lo largo de cada mediana dos de las coordenadas triangulares (asociadas a los nudos extremos del lado) tengan el mismo valor ($\frac{1}{2}$ sobre el lado y $\frac{1}{3}$ en el centro del elemento), en tanto que la coordenada triangular restante varíe entre 0 (sobre el lado) y $\frac{1}{3}$ en el centro del elemento.

Las coordenadas del centro del triángulo son

$${}^C\mathbf{x} = \frac{1}{3} (\mathbf{x}^1 + \mathbf{x}^2 + \mathbf{x}^3)$$

en tanto que las del centro de cada lado son sencillamente (notar que con un supraíndice a la derecha se indican valores nodales, como se ha hecho habitualmente, y con supraíndice izquierdo se indican las coordenadas del centro del lado, opuesto al nudo correspondiente)

$$\begin{aligned} {}^1\mathbf{x} &= \frac{1}{2} (\mathbf{x}^2 + \mathbf{x}^3) \\ {}^2\mathbf{x} &= \frac{1}{2} (\mathbf{x}^3 + \mathbf{x}^1) \\ {}^3\mathbf{x} &= \frac{1}{2} (\mathbf{x}^1 + \mathbf{x}^2) \end{aligned}$$

A partir de estas coordenadas, cada interfaz queda definida por el vector orientado del centro del triángulo al centro del lado

$$\begin{aligned} \mathbf{s}^1 &= {}^1\mathbf{x} - {}^C\mathbf{x} = -\frac{1}{3}\mathbf{x}^1 + \frac{1}{6}\mathbf{x}^2 + \frac{1}{6}\mathbf{x}^3 \\ \mathbf{s}^2 &= {}^2\mathbf{x} - {}^C\mathbf{x} = -\frac{1}{3}\mathbf{x}^2 + \frac{1}{6}\mathbf{x}^3 + \frac{1}{6}\mathbf{x}^1 \\ \mathbf{s}^3 &= {}^3\mathbf{x} - {}^C\mathbf{x} = -\frac{1}{3}\mathbf{x}^3 + \frac{1}{6}\mathbf{x}^1 + \frac{1}{6}\mathbf{x}^2 \end{aligned}$$

A la longitud de cada interfaz la denominarse como $|s^I|$ en tanto que el vector normal a la misma se expresa como

$$\mathbf{n}^I = \frac{1}{|s^I|} (-s_2^I, s_1^I) = (n_1^I, n_2^I) \quad (9.1)$$

de tal forma que el producto $\mathbf{s}^I \times \mathbf{n}^I$ sea saliente al plano.

Observando el elemento maestro y el elemento en el plano real resulta

$$\begin{array}{lll} \text{Interfaz 1} & \xi \text{ en } [\frac{1}{3}, 0] & \eta \text{ en } [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}] \\ \text{Interfaz 2} & \xi \text{ en } [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}] & \eta \text{ en } [\frac{1}{3}, 0] \\ \text{Interfaz 3} & \xi \text{ en } [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}] & \eta \text{ en } [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}] \end{array} \quad \eta = \frac{1}{2}(1 - \xi)$$

Tenemos entonces definidas las interfaces.

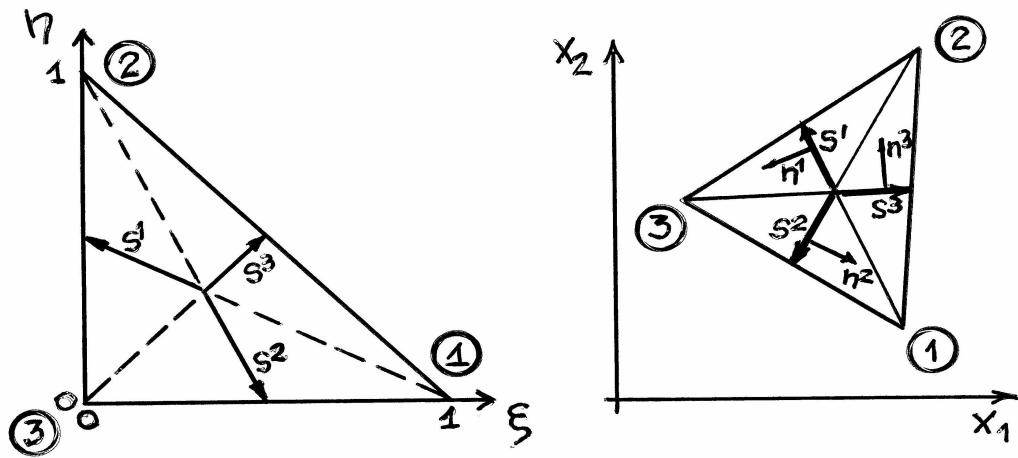


Figura 3 η como función de ξ en cada interfaz interna

9.3. Ecuación de balance, integración

La ecuación de balance en cada volumen finito o celda es:

$$\int_S [\rho \phi \mathbf{u} - \boldsymbol{\Gamma} \nabla \phi] \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

\mathbf{u} y ϕ hemos visto que varían en forma lineal, en tanto que $\nabla \phi$ es constante para cada elemento (pero tiene valores distintos dentro de la celda)

$$\nabla \phi = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} -b^1 & -b^2 & -b^3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi^1 \\ \phi^2 \\ \phi^3 \end{bmatrix}$$

Consideremos la interfaz 1

$$\int_{s^1} [\rho \phi \mathbf{u} - \boldsymbol{\Gamma} \nabla \phi] \cdot \mathbf{n}^1 dS = \int_{\frac{1}{3}}^0 [\rho^1 \phi^1 (\mathbf{u}^1 \cdot \mathbf{n}^1) - \mathbf{n}^1 \cdot \boldsymbol{\Gamma} \nabla \phi] 3|s^1| d\xi$$

donde hemos realizado el cambio de variable de integración y hemos introducido las definiciones

$$\begin{aligned} {}^1\phi(\xi) &= \xi \phi^1 + \frac{1}{2} (1 - \xi) \phi^2 + \left[1 - \xi - \frac{1}{2} (1 - \xi) \right] \phi^3 \\ &= \xi \phi^1 + \frac{1}{2} (1 - \xi) \phi^2 + \frac{1}{2} (1 - \xi) \phi^3 \\ {}^1\mathbf{u}(\xi) &= \xi \mathbf{u}^1 + \frac{1}{2} (1 - \xi) \mathbf{u}^2 + \frac{1}{2} (1 - \xi) \mathbf{u}^3 \end{aligned}$$

correspondientes a los valores de ϕ y \mathbf{u} a lo largo de la interfaz 1 (por ello el supraíndice izquierdo asociado)

El primer término de la integral puede expresarse

$$\rho^1 \phi^1 (\mathbf{u}^1 \cdot \mathbf{n}^1) = \rho (n_1^1, n_2^1) \begin{bmatrix} u_1^1 & u_1^2 & u_1^3 \\ u_2^1 & u_2^2 & u_2^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\xi}{(1-\xi)} \\ \frac{(1-\xi)}{2} \\ \frac{(1-\xi)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi^1 \\ \phi^2 \\ \phi^3 \end{bmatrix}$$

En tanto que el segundo término es

$$-\mathbf{n}^1 \cdot \boldsymbol{\Gamma} \nabla \phi = - (n_1^1, n_2^1) \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{21} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b^1 & -b^2 & -b^3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi^1 \\ \phi^2 \\ \phi^3 \end{bmatrix}$$

En esta última integral todo es constante luego la integral vale sencillamente

$$\int_{\frac{1}{3}}^0 -\mathbf{n}^1 \cdot \boldsymbol{\Gamma} \nabla \phi 3|s^1| d\xi = \frac{|s^1|}{2A} (n_1^1, n_2^1) \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{21} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b^1 & -b^2 & -b^3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi^1 \\ \phi^2 \\ \phi^3 \end{bmatrix}$$

Que contribuye al balance del nudo 2 con el signo que está y al balance del nudo 3 cambiándole el signo. Recordar además la relación entre las componentes del vector normal y la interfaz (ecuación 9.1).

La integral del primer término es más laboriosa pero sencilla. Puede escribirse como

$$\rho(s_2^1, -s_1^1) \begin{bmatrix} u_1^1 & u_1^2 & u_1^3 \\ u_2^1 & u_2^2 & u_2^3 \end{bmatrix} \int_0^{\frac{1}{3}} \begin{bmatrix} \xi^2 & \frac{(1-\xi)\xi}{2} & \frac{(1-\xi)\xi}{2} \\ \frac{(1-\xi)\xi}{2} & \frac{(1-\xi)^2}{4} & \frac{(1-\xi)^2}{4} \\ \frac{(1-\xi)\xi}{2} & \frac{(1-\xi)^2}{4} & \frac{(1-\xi)^2}{4} \end{bmatrix} d\xi \begin{bmatrix} \phi^1 \\ \phi^2 \\ \phi^3 \end{bmatrix}$$

Observando que

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{3}} \xi^2 d\xi &= \left[\frac{\xi^3}{3} \right]_0^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{81} \\ \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{(1-\xi)\xi}{2} d\xi &= \left[\frac{\xi^2}{4} - \frac{\xi^3}{6} \right]_0^{\frac{1}{3}} = \frac{7}{324} \\ \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{(1-\xi)^2}{4} d\xi &= \left[\xi - \xi^2 + \frac{\xi^3}{3} \right]_0^{\frac{1}{3}} = \frac{19}{324} \end{aligned}$$

La integral del primer término puede escribirse ahora

$$\int_{\frac{1}{3}}^0 [\rho^1 \phi ({}^1 \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}^1)] 3|s^1| d\xi = \rho(s_2^1, -s_1^1) \begin{bmatrix} u_1^1 & u_1^2 & u_1^3 \\ u_2^1 & u_2^2 & u_2^3 \end{bmatrix} \frac{1}{108} \begin{bmatrix} 4 & 7 & 7 \\ 7 & 19 & 19 \\ 7 & 19 & 19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi^1 \\ \phi^2 \\ \phi^3 \end{bmatrix}$$

En forma similar, a lo largo de la interfaz 2 es posible definir

$$\begin{aligned} {}^2 \phi(\xi) &= \xi \phi^1 + (1-2\xi) \phi^2 + \xi \phi^3 \\ {}^2 \mathbf{u}(\xi) &= \xi \mathbf{u}^1 + (1-2\xi) \mathbf{u}^2 + \xi \mathbf{u}^3 \end{aligned}$$

La forma de la parte difusiva es similar al caso anterior

$$\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} -\mathbf{n}^2 \cdot \boldsymbol{\Gamma} \nabla \phi 6|s^2| d\xi = \frac{1}{2A} (-s_2^2, s_1^2) \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{21} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b^1 & -b^2 & -b^3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi^1 \\ \phi^2 \\ \phi^3 \end{bmatrix}$$

que contribuye al nudo 3 y al nudo 1 (cambiada de signo). En tanto que la parte convectiva resulta de

$$\rho(s_2^2, -s_1^2) \begin{bmatrix} u_1^1 & u_1^2 & u_1^3 \\ u_2^1 & u_2^2 & u_2^3 \end{bmatrix} 6 \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} \xi^2 & \xi - 2\xi^2 & \xi^2 \\ \xi - 2\xi^2 & (1-2\xi)^2 & \xi - 2\xi^2 \\ \xi^2 & \xi - 2\xi^2 & \xi^2 \end{bmatrix} d\xi \begin{bmatrix} \phi^1 \\ \phi^2 \\ \phi^3 \end{bmatrix}$$

Realizando las integrales tenemos

$$\rho(s_2^2, -s_1^2) \begin{bmatrix} u_1^1 & u_1^2 & u_1^3 \\ u_2^1 & u_2^2 & u_2^3 \end{bmatrix} \frac{1}{108} \begin{bmatrix} 19 & 7 & 19 \\ 7 & 4 & 7 \\ 19 & 7 & 19 \end{bmatrix} d\xi \begin{bmatrix} \phi^1 \\ \phi^2 \\ \phi^3 \end{bmatrix}$$

Finalmente en la interfaz 3 las partes difusiva y convectiva resultan respectivamente

$$\frac{1}{2A} (-s_2^3, s_1^3) \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{21} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b^1 & -b^2 & -b^3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi^1 \\ \phi^2 \\ \phi^3 \end{bmatrix}$$

$$\rho(s_2^3, -s_1^3) \begin{bmatrix} u_1^1 & u_1^2 & u_1^3 \\ u_2^1 & u_2^2 & u_2^3 \end{bmatrix} \frac{1}{108} \begin{bmatrix} 19 & 19 & 7 \\ 19 & 19 & 7 \\ 7 & 7 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi^1 \\ \phi^2 \\ \phi^3 \end{bmatrix}$$

De esta forma, agrupando los resultados obtenidos para cada interfaz, las contribuciones resultan:

■ Parte Difusiva

$$\frac{1}{2A} \begin{bmatrix} s_2^2 - s_2^3 & s_1^3 - s_1^2 \\ s_2^3 - s_2^1 & s_1^1 - s_1^3 \\ s_2^1 - s_2^2 & s_1^2 - s_1^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{21} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b^1 & -b^2 & -b^3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi^1 \\ \phi^2 \\ \phi^3 \end{bmatrix} \quad (9.2)$$

■ Parte Convectiva: Definiendo

$$\begin{aligned} v^{1I} &= (s_2^3 - s_2^2) u_1^I + (s_1^2 - s_1^3) u_2^I \\ v^{2I} &= (s_2^1 - s_2^3) u_1^I + (s_1^3 - s_1^1) u_2^I \\ v^{3I} &= (s_2^2 - s_2^1) u_1^I + (s_1^1 - s_1^2) u_2^I \end{aligned}$$

donde los supraíndices en v^{IJ} están asociados a I : interfaz, J : nudo. Tendremos

$$\frac{\rho}{108} \left\{ \begin{bmatrix} v^{11} & v^{12} & v^{13} \\ v^{21} & v^{22} & v^{23} \\ v^{31} & v^{32} & v^{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 7 & 7 \\ 7 & 19 & 19 \\ 7 & 19 & 19 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 19 & 7 & 19 \\ 7 & 4 & 7 \\ 19 & 7 & 19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19 & 19 & 7 \\ 19 & 19 & 7 \\ 7 & 7 & 4 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \phi^1 \\ \phi^2 \\ \phi^3 \end{bmatrix}$$

En la parte difusiva es posible incluir una “difusión de balance” Γ_b para mejorar el comportamiento numérico. Esta puede calcularse de la siguiente forma

$$\Gamma_b = \beta [\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}]$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} \\ \alpha &= \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{u}| h}{\Gamma} = \text{Pe} \\ \beta &= \coth(\alpha) - \frac{1}{\alpha} \end{aligned}$$

Como \mathbf{u} es variable punto a punto, Γ_b también lo será. Sin embargo utilizaremos un valor único en cada elemento. Razonablemente el valor a utilizar será el del centro del elemento

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}} &= \frac{1}{3} (\mathbf{u}^1 + \mathbf{u}^2 + \mathbf{u}^3) \\ |\bar{\mathbf{u}}| &= [\bar{u}_1^2 + \bar{u}_2^2]^{\frac{1}{2}} \\ \bar{\mathbf{n}} &= \frac{\bar{\mathbf{u}}}{|\bar{\mathbf{u}}|} \end{aligned}$$

El valor de h (dimensión del elemento en la dirección $\bar{\mathbf{n}}$) puede aproximarse por

$$h = \frac{1}{2} \sum_{I=1}^3 |\mathbf{l}^I \cdot \bar{\mathbf{n}}|$$

Finalmente notar que

$$\begin{aligned} s^3 - s^2 &= -\frac{1}{3}\mathbf{x}^3 + \frac{1}{6}\mathbf{x}^1 + \frac{1}{6}\mathbf{x}^2 + \frac{1}{3}\mathbf{x}^2 - \frac{1}{6}\mathbf{x}^1 - \frac{1}{6}\mathbf{x}^3 = \frac{1}{2}(\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^3) = -\frac{\mathbf{l}^1}{2} = -\frac{1}{2}(b^1, a^1) \\ s^1 - s^3 &= -\frac{\mathbf{l}^2}{2} = -\frac{1}{2}(b^2, a^2) \\ s^2 - s^1 &= -\frac{\mathbf{l}^3}{2} = -\frac{1}{2}(b^3, a^3) \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{bmatrix} s_2^2 - s_2^3 & s_1^3 - s_1^2 \\ s_2^3 - s_2^1 & s_1^1 - s_1^3 \\ s_2^1 - s_2^2 & s_1^2 - s_1^1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -b^1 & a^1 \\ -b^2 & a^2 \\ -b^3 & a^3 \end{bmatrix}$$

Lo cual, reemplazado en 9.2 muestra la simetría de la parte difusiva

9.4. Condiciones de contorno

En los triángulos que están en contacto con el contorno del dominio hay que considerar las condiciones de contorno del problema que allí existan.

Básicamente el contorno lo podemos dividir en dos partes

- S_ϕ donde se conoce el valor de la variable ϕ
- S_σ donde el valor de la variables ϕ es incógnita. Esta parte puede a su vez dividirse en dos partes
 - donde se conoce el valor del flujo $\bar{\sigma}_\nu$ (incluida aquella parte donde $\bar{\sigma}_\nu = 0$)
 - donde se conoce el valor de $\nabla\phi \cdot \boldsymbol{\nu}$ pero no ϕ misma. Habitualmente $\nabla\phi \cdot \boldsymbol{\nu} = 0$ en el “campo lejano”

En S_ϕ se trabaja de la siguiente manera

1. No es necesario plantear el balance en dicho punto. Luego no hay ecuación de balance asociado a los puntos donde ϕ es conocido.
2. Un triángulo que esté asociado con un contorno así tendrá en general tres contribuciones (a cada uno de sus vértices) en la forma

$$\begin{bmatrix} \text{Contr. 1} \\ \text{Contr. 2} \\ \text{Contr. 3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi^1 \\ \phi^2 \\ \phi^3 \end{bmatrix}$$

Supongamos que $\phi^2 = \bar{\phi}$ es conocido, entonces la segunda fila (la que contribuye alrededor del nudo 2) no es necesaria. Las contribuciones $C_{12}\bar{\phi}$ (al nudo 1) y $C_{32}\bar{\phi}$ (al nudo 3) al ser valores conocidos pasan al término independiente

En S_σ tenemos dos posibilidades

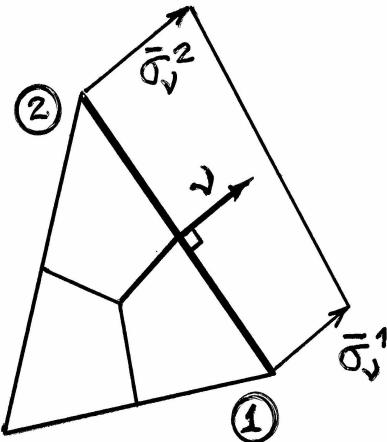


Figura 4 Borde donde el flujo σ_v es conocido

1. Conocemos σ_v : Interpolamos linealmente el valor de σ_v entre los nudos del lado del elemento. Llamando (ver figura 4) $|l| = |x^2 - x^1|$, la contribución a cada celda o volumen es

$$\begin{aligned} \text{nudo 1} &: \frac{|l|}{6} (2\sigma_v^1 + \sigma_v^2) \\ \text{nudo 2} &: \frac{|l|}{6} (\sigma_v^1 + 2\sigma_v^2) \end{aligned}$$

que contribuye al término independiente. El signo de σ_v depende de que el flujo conocido sea entrante o saliente.

2. El caso $\nabla\phi \cdot \nu = 0$ conduce a considerar sólo la influencia del término convectivo. La contribución al nudo 1 resulta

$$\begin{aligned} |l| \int_0^{\frac{1}{2}} \rho [(1-\xi) u_\nu^1 + \xi u_\nu^2] [(1-\xi) \phi^1 + \xi \phi^2] d\xi \\ |l| \rho [u_\nu^1, u_\nu^2] \int_0^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} (1-\xi)^2 & \xi(1-\xi) \\ \xi(1-\xi) & \xi^2 \end{bmatrix} d\xi \begin{bmatrix} \phi^1 \\ \phi^2 \end{bmatrix} \\ \frac{|l|\rho}{24} [u_\nu^1, u_\nu^2] \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi^1 \\ \phi^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

similarmente la contribución al nudo 2 resulta

$$\frac{|l|\rho}{24} [u_\nu^1, u_\nu^2] \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi^1 \\ \phi^2 \end{bmatrix}$$

Estas contribuciones son dependientes de las incógnitas ϕ^1 y ϕ^2 y se suman sobre la matriz de coeficientes

Ejemplo

Con el objetivo de mostrar el comportamiento de la formulación presentada se considera el transporte de una cantidad escalar en un campo de velocidades conocido. Este último está dado por $u_x = x$ y $u_y = -y$ que representa el flujo cerca de un punto de estancamiento. Las líneas de corriente son líneas de $xy = \text{cte.}$ y cambian de dirección respecto a la grilla cartesiana. El dominio considerado es un cuadrado de lado unitario. Las condiciones de borde a ser aplicadas son (ver figura 6)

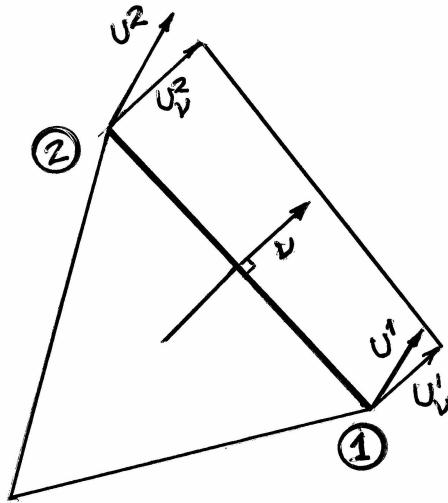


Figura 5 Borde donde el gradiente es nulo

1. $\phi = 0$ a lo largo del borde superior (entrada)
2. variación lineal de ϕ desde $\phi = 0$ en $y = 1$ hasta $\phi = 1$ en $y = 0$ a lo largo del borde izquierdo
3. condición de simetría (gradiente nulo a través del contorno) en el borde inferior
4. gradiente nulo en la dirección del flujo en el borde de salida (derecha)

Se ha discretizado el dominio con dos mallas uniforme de 800 elementos y 3200 elementos respectivamente. En las figuras 7 y 8 se muestran las curvas de igual concentración. Se observa un fuerte gradiente en la zona cercana a los ejes coordenados, en tanto que lejos de ellos el valor de la variable es casi nulo. En base al conocimiento de la zona de mayores gradientes es posible definir que la malla sea más densa donde los gradientes son importantes y que la malla sea más gruesa donde el gradiente es bajo. En la figura 9 se muestran las curvas de nivel para una malla no-uniforme de 832 elementos. El esfuerzo computacional en este caso es similar al de la primera malla uniforme y los resultados son mejores.

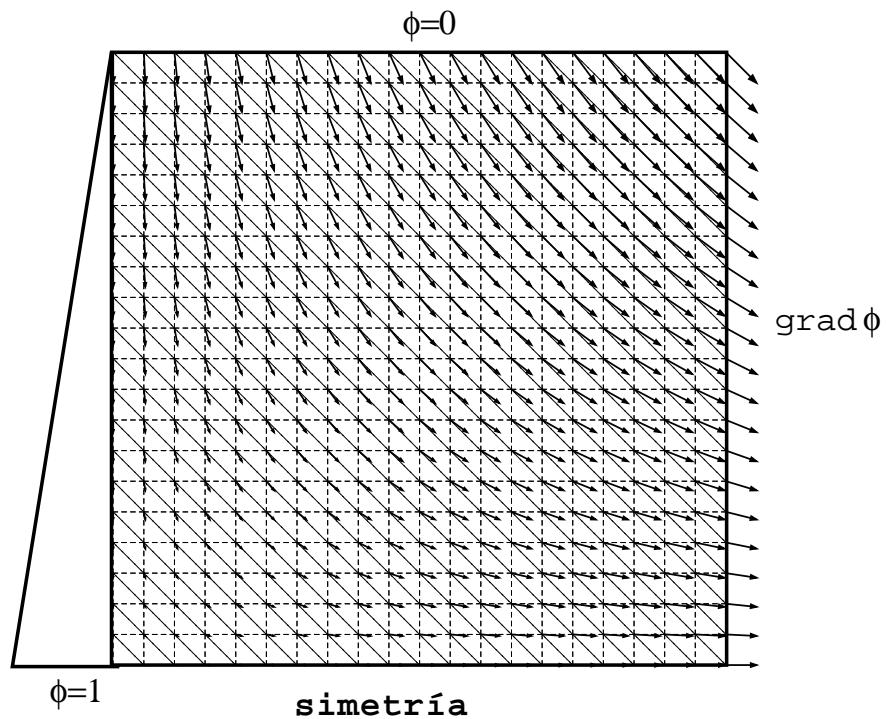


Figura 6 Campo de velocidades y condiciones de borde

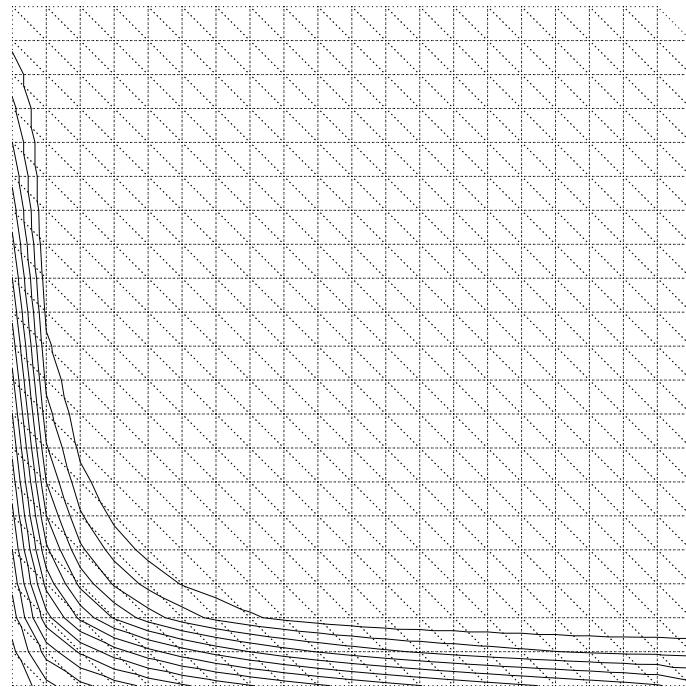


Figura 7 Curvas de nivel de la concentración para la primera malla uniforme

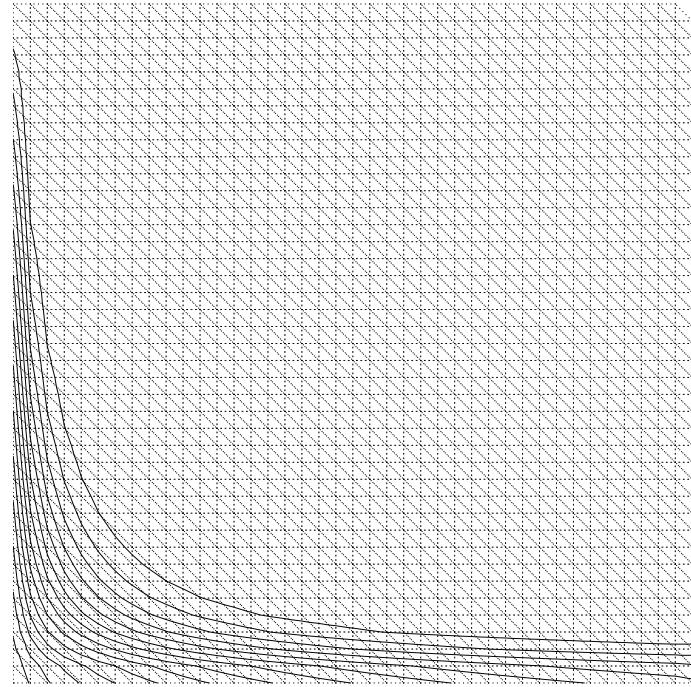


Figura 8 Curvas de nivel de la concentración para la segunda malla uniforme

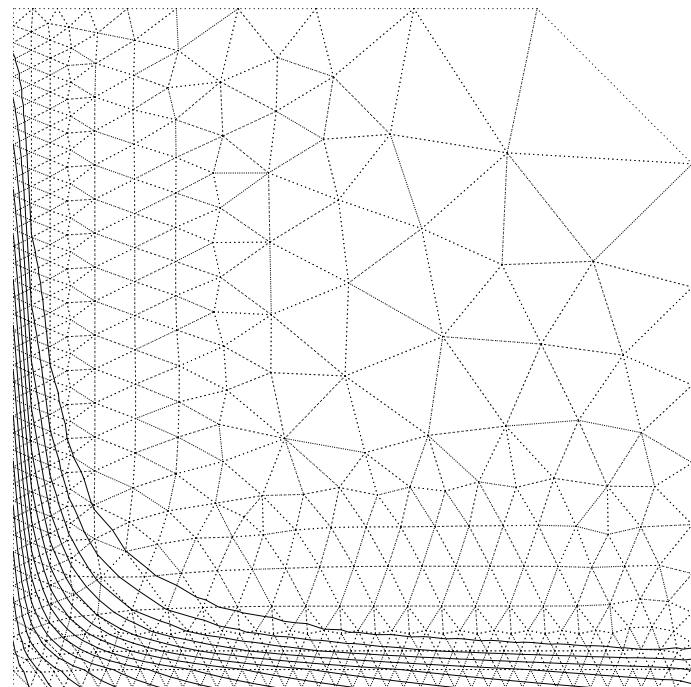


Figura 9 Curvas de nivel de la concentración para la malla no-uniforme

Capítulo 10 Apéndice: Descripción del programa GAMMA

por F. Flores

10.1. Introducción

Los desarrollos del método de Elementos Finitos están íntimamente ligados con la forma de programarlo (codificarlo), y no es posible una comprensión cabal del método sin programarlo, o por lo menos entender claramente como se lo hace y cuales son las dificultades que surgen y la forma de solucionarlas.

El lenguaje de programación que tradicionalmente se ha usado para el M.E.F. ha sido el FORTRAN (FORmula TRANslation), que es un lenguaje de alto nivel. El lenguaje ha ido progresando paulatinamente aunque más lentamente que otros lenguajes. Desde el original FORTRAN IV (o 66) pasando por el FORTRAN'77 que intenta ser ya un lenguaje estructurado, más fácil de depurar de errores, hasta el actual FORTRAN'90 que ha tomado muchos elementos de lenguajes más versátiles lo cual lo convierte actualmente en muy potente. La evolución del lenguaje, y de la forma de programar, puede verse en los distintos textos de elementos finitos, donde en general aparecen programas demostrativos en lenguaje FORTRAN. En esos textos puede también notarse una serie de falencias, en lo que a técnicas de programación se refiere, de quienes codificaron el método, muchas veces debido a la limitaciones intrínsecas del lenguaje, otras debido a una tradición en la forma en que se venía haciendo y que no ha sido fácil modificar.

Existen múltiples formas de programar el M.E.F., lo que depende de una serie de aspectos, entre ellos:

1. El tipo de resovedor de ecuaciones que se vaya a utilizar, que condiciona la forma de almacenar los elementos de la matriz de coeficientes que generalmente resulta muy voluminosa, además de ocupar en problemas significativos el mayor tiempo de C.P.U. en la solución del problema.
2. La variedad de elementos que se intente incluir, la factibilidad de usar modelos mixtos.
3. La generalidad de las condiciones de borde esenciales y la posibilidad de combinar estados de solicitudes.
4. Posibilidades futuras de ampliar el código a otro tipo de problemas.
5. Grado de eficiencia requerida (en tiempo de C.P.U. o en requerimiento de memoria R.A.M.)
6. Portabilidad del código, independencia de sistemas operativos o extensiones locales de los lenguajes.

GAMMA es un programa de elementos finitos orientado a resolver problemas bidimensionales (es decir dominios planos) lineales (las coeficientes de la ecuación diferencial no dependen del valor de la variable). El programa GAMMA ha sido codificado en FORTRAN'90, el presente texto no intenta explicar el lenguaje, de manera que para un comprensión del mismo deberán dirigirse a textos especializados o los manuales de referencia del lenguaje.

Se ha intentado mantener una cierta claridad de programación sin renunciar a la eficiencia de la misma. Se ha tratado de hacer eficiente sólo las partes más importantes (en este caso el resolvedor

de ecuaciones), de tal forma de hacer más sencilla la comprensión de la mayor parte del código para facilitar la ampliación por parte de usuarios no-expertos.

El código que se presenta aquí está de alguna forma incompleto con el objetivo de que el estudiante genere las partes que pudieran faltar a manera de ejercicio. Esas partes faltantes corresponden a:

- Generación automática de datos y verificaciones previas.
- Generación del vector de términos independiente debido a condiciones de contorno naturales o debido al término independiente de la ecuación diferencial.
- Evaluación del flujo o estado tensional en los puntos de integración una vez conocidas las variables nodales y evaluación de los valores nodales mediante suavizado.
- Evaluación del error aproximado y con él los valores del tamaño de la malla para generar una malla adaptable.

Básicamente se han incluido la posibilidad de analizar los siguientes problemas físicos:

- Ecuación de Laplace, que representa una buena cantidad de problemas dependiendo del significado que se le den a los coeficientes y a sus condiciones de borde (flujo irrotacional, flujo en un medio poroso, torsión sin restricción de alabeo ya sea usando la función de alabeo o la de tensión, transmisión del calor, etc.)
- Elasticidad bidimensional, incluyendo típicamente los casos de:
 1. Tensión Plana
 2. Deformación Plana
 3. Sólidos Axilsimétricos
- Flexión de placas planas incluyendo deformaciones de corte transversales

10.2. Base de datos

De hecho una parte imprescindible para entender un programa es saber como están almacenados los datos. La presente versión del programa incluye sólo dos elementos finitos, un triángulo de seis nodos y un cuadrilátero de nueve nodos, ambos cuadráticos (en este caso el programa no está orientado a tener una variada biblioteca de elementos sino que se supone que sólo tendrá estos dos). En base a ello se definen algunas variables escalares, las que pueden ser parámetros independientes del tipo de problema, parámetros dependientes del tipo de problema, o variables dependientes de la características geométricas de la malla o de las condiciones de borde y del material constitutivo. Se definen las siguientes:

10.2.1. parámetros

DIMEN indica la dimensión espacial del problema, que en este caso está restringido a 2 (bidimensional), esta variable y otras, aunque no son imprescindibles, se definen por una cuestión de orden y de claridad de lectura del código.

NODET es el número de nudos que tiene el triángulo que es 6.

NODEQ es el número de nudos que tiene el cuadrilátero que es 9.

TYPEP indica el tipo de problema físico que se intenta resolver

0 Ecuación de Laplace

- 1** Estado plano de tensión
- 2** Estado plano de deformación
- 3** Estado de deformación axilsimétrica
- 4** Flexión de placas

NDOFN es el número de grados de libertad que puede haber en cada nudo, este valor depende del tipo de problema, en general para problemas de continuidad C^0 corresponde al número de variables del problema.

- 1** Ecuación de Laplace
- 2** Estado plano de tensión
- 2** Estado plano de deformación
- 2** Estado de deformación axilsimétrica
- 3** Flexión de placas

NSTRE es el número de variables que definen el flujo en cada punto

- 2** Ecuación de Laplace
- 3** Estado plano de tensión
- 3** Estado plano de deformación
- 4** Estado de deformación axilsimétrica
- 5** Flexión de placas

NRENU bandera que indica si se desea optimizar la numeración de las ecuaciones de forma de disminuir el tamaño del perfil del sistema de ecuaciones

10.2.2. Variables que definen el problema, introducidas al programa

NODES es el número de nudos total de nudos para el tratamiento del problema, esto puede incluir nudos auxiliares que no tengan variables asociadas pero que resulten útiles por alguna razón (por ejemplo al momento de generar la malla)

NMATY es el número de materiales con características diferentes que van a definirse

NPROP es el número de características o propiedades que tiene cada material

NTRIA es el número de triángulos que hay en la malla

NQUAD es el número de cuadriláteros que hay en la malla

NGAUT es el número de puntos de integración que van a utilizarse en los triángulos

NGAUQ es el número de puntos de integración que van a utilizarse en los cuadriláteros

NKNOW es el número de nudos de la malla donde van a introducirse condiciones esenciales de borde

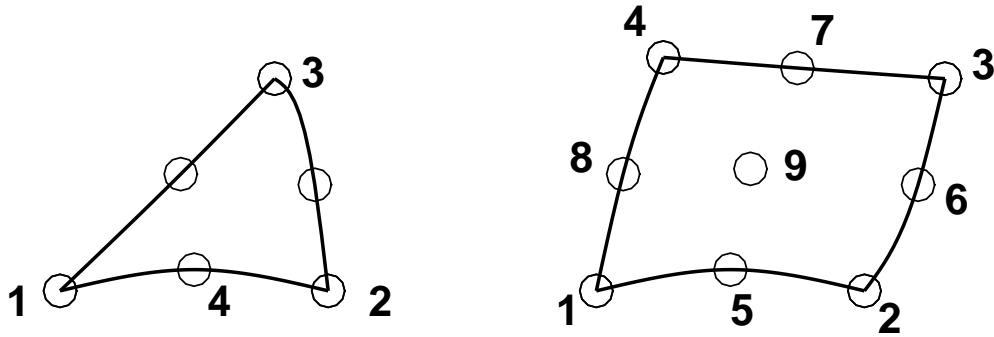


Figura 1 Orden de numeración (conectividades) de los nudos de triángulos y cuadriláteros

10.2.3. Arreglos de datos

Los arreglos que se definen a continuación contienen la información que permite realizar el análisis. Previamente a guardar información en ellos es necesario reservar el espacio de memoria para ellos. Notar que este espacio depende del problema en estudio y por lo tanto se hace en forma “dinámica” es decir una vez que se han leído los parámetros anteriores. Estos arreglos son:

COORD(dimens, nodes) son las coordenadas de los puntos que definen la malla.

CONTR(nodet, ntria) son las “conectividades” de los triángulos, es decir los nudos que definen a cada elemento. Estos nudos se definen en un orden prefijado, en este caso siguiendo un sentido antihorario y comenzando en cualquier nudo vértice van primero los tres nudos vértices y a continuación los tres nudos sobre los lados comenzando por el primer nudo consecutivo al primer vértice guardado.

CONQD(nodeq, nquad) son las “conectividades” de los cuadriláteros, es decir los nudos que definen a cada elemento. Estos nudos se definen en un orden prefijado, en este caso siguiendo un sentido antihorario y comenzando en cualquier nudo vértice van primero los cuatro nudos vértices y a continuación los cuatro nudos sobre los lados comenzando por el primer nudo consecutivo al primer vértice guardado. Finalmente va el nudo central.

MATRI(ntria) indica para cada triángulo el material del que está constituido.

MATQD(nquad) indica para cada cuadrilátero el material del que está constituido.

PROPS(nprop, nmatty) almacena para cada tipo de material las características del mismo

KNOWN(ndofn*nknow) Guarda el valor conocido de cada grado de libertad donde se ha establecido una condición de borde esencial

IDNOD(ndofn, nodes) relaciona cada grado de libertad de cada nodo con una ecuación global.

MAXAV(neq+1) Debido a la forma de almacenamiento de la matriz de coeficientes, que en este caso consiste en guardar en forma secuencial (en un arreglo unidimensional) los coeficientes ubicados debajo del perfil de la matriz, este arreglo indica la posición que ocupan los elementos de la diagonal de la matriz de coeficientes en el vector donde está almacenada.

De los últimos tres arreglos hablaremos más en detalle más adelante. Finalmente digamos que la variable escalar **NEQ** indica el número de ecuaciones independientes una vez introducidas las condiciones de borde (calculada automáticamente por el programa).

10.3. Descripción global del programa

A continuación se desarrolla una descripción del significado de cada rutina del programa según el orden en que van apareciendo. El flujo global del programa se controla desde el programa principal donde se definen las variables indicadas en la sección anterior.

10.3.1. Rutina OPENFI

Esta rutina aglutina los comandos necesarios para abrir los archivos a ser usados. Los archivos son de tipo ASCII, es decir que pueden verse y editarse con cualquier editor. Lee interactivamente los nombres de los mismos, verifica su sintaxis y les asigna las características adecuadas. Los archivos que abre son los siguientes

unit 3 Archivo de salida, el nombre de este archivo es ingresado por el usuario. Allí van a parar el eco de la entrada de datos, valores generados y resultados de las variables nodales. Posteriormente también se escriben allí las reacciones nodales, el valor del flujo en los puntos de integración y los valores suavizados en los nodos.

unit 4 Archivo de salida donde se escriben algunos mensajes de advertencia o para escribir valores auxiliares en la fase de depuración del programa.

unit 5 Archivo de datos (ingresado por el usuario) primero verifica su existencia y concatena (agrupa) los archivos en que pueden estar separados los datos en un único archivo **GAMMA.DAT**, a estos fines llama a las rutinas **GENFIL, RANDWR**

unit 7-9 Archivos ASCII de salida orientados a ser usados como interfaces con programas de visualización (Tecplot, GiD).

unit NN Archivo auxiliar

10.3.2. Rutina MATPRO

Lee de la unidad 5 las características de los materiales y las almacena en la variable **PROPS(nprop, nmaty)**. Esta rutina (como otras) se controla según el carácter que aparece en la primera columna:

- si ese carácter es una “e” o “E” entiende que se ha terminado con los datos de materiales.
- si ese carácter es una “m” o “M” entiende que se empezarán a leer datos de un nuevo material, y lee el número del material correspondiente.
- cualquier otro carácter hace que lea el valor de una característica (en forma consecutiva) del material a partir de la columna 31, sirviendo las 30 primeras columnas como un espacio para comentario.

Una vez terminada la lectura la rutina verifica que se hayan leído valores para todos los materiales (arreglo **EXIST(nmaty)**) y si no imprime una advertencia.

10.3.3. Rutina COORDG

Lee de la unidad 5 las coordenadas de los nudos y las almacena en la variable **COORD(dim, nodes)**. Esta rutina se controla según el carácter que aparece en la primera columna:

- si ese carácter es una “e” o “E” entiende que se ha terminado con los datos de coordenadas nodales.
- si ese carácter es un espacio en blanco entiende que se leerán datos de un nodo, y lee el número del nodo y su DIMEN coordenadas correspondientes.
- si el carácter no es alguno de los anteriores asume que la línea es un comentario y pasa a la siguiente.

Esto está así pensado para que luego puedan construirse alguna forma sencilla de generación de coordenadas nodales estructuradas. Lo que se controlaría con alguna letra adecuada. Por ejemplo se podría leer en la primera columna una “L” y a continuación hacer una interpolación lineal entre dos nudos previamente leídos, o una “C” e interpolar nudos sobre un arco de círculo, etc. Al respecto en la versión actual del programa hay algunas opciones de generación sencillas.

Finalmente la rutina va verificando de que nudos se ha leído o generado coordenadas y en caso de haber coordenadas faltantes (arreglo `EXIST(nodes)`) se imprime un mensaje de advertencia.

10.3.4. Rutina ELMDAT

Lee de la unidad 5 las conectividades de los elementos y las almacena en la variable `CNODS-(nnode,nelem)`. Donde `NNODE` es el número de nudos del elemento y `NELEM` es la cantidad de elementos de este tipo. Lee también el tipo de material del que está compuesto en `NUMAT(nelem)`. Esta rutina se controla según el carácter que aparece en la primera columna:

- si ese carácter es una “e” o “E” entiende que se ha terminado con los datos de conectividades elementales.
- si ese carácter es un espacio en blanco entiende que se leerán datos de un elemento, y lee el número del elemento, el material del que está constituido y sus `NNODE` nudos en el orden correspondiente.
- si el carácter no es alguno de los anteriores asume que la línea es un comentario y pasa a la siguiente.

Esto está así pensado para que luego puedan construirse alguna forma sencilla de generación de conectividades nodales estructuradas. Lo que se controlaría con alguna letra adecuada.

La rutina verifica que se hayan leído o generado las datos de todos los elementos (arreglo `EXIST(nelem)`) y si no fuese así detiene la ejecución. En caso de que las coordenadas de sus nudos medios falten se generan equidistantes de los vértices. Finalmente para cada nudo asociado a un elemento se dan de alta los `NDOFN` parámetros nodales como potenciales grados de libertad del problema en el arreglo `IDNOD(ndofn,nodes)` (condición que luego podrá cambiar al introducir las condiciones esenciales de borde).

10.3.5. Rutina KNOWNV

Esta rutina lee los valores de la variable en aquellos puntos donde es conocida (condiciones esenciales de borde). Estos valores se van ordenando en forma secuencial y para cada valor conocido, el grado de libertad asociado se da de baja. El valor conocido (nulo o no) se guarda en el arreglo `KNOWN` y en la posición correspondiente del arreglo `IDNOD` se guarda la posición en el arreglo anterior pero con signo cambiado. De esta forma en `IDNOD` tendremos hasta ahora:

- 1 grados de libertad que no han sido dados de alta
- 0 grados de libertad dados de alta (efectivos)
- ? grados de libertad con valores conocidos

Notar que las condiciones de borde aquí incluidas no son generales. Por ejemplo para problemas de elasticidad los grados de libertad que se pueden imponer deben coincidir con las direcciones del sistema global de coordenadas, es decir no es factible en la presente implementación incluir apoyos inclinados respecto a dicho sistema. Tampoco es posible incluir restricciones conocidas como nodos “maestros” o restricciones donde un grado de libertad depende de otro(s) en forma lineal.

10.3.6. Rutina SKYLIN

Esta rutina evalúa el perfil “skyline” de la matriz de coeficientes. Para ello previamente (a) llama a la rutina RENUMN que optimiza la numeración de los nudos de la malla en función de las conectividades de forma de minimizar la cantidad de elementos que existirán bajo el perfil, (b) numera los grados de libertad efectivos. Esta segunda tarea consiste en asociar a cada elemento de IDNOD con valor 0 una ecuación. Una vez numerados los grados de libertad el perfil de la matriz de coeficientes se determina con la rutina UBICMX que devuelve el número de elementos bajo el perfil MAXV y las posiciones que ocupan los elementos diagonales de la matriz de coeficientes en el vector donde se almacenan MAXAV(neq+1).

10.3.7. Rutina SOLVES

Esta rutina ordena los pasos necesarios para resolver el problema planteado. Calcula la matriz de rigidez STIFF y el término independiente asociado a los valores nodales conocidos (rutina STIFFG), lee las condiciones de borde naturales (rutina PTLOAD), que en la presente versión sólo incluye valores puntuales de cargas o fuentes. Realiza la descomposición en factores ($\mathbf{LD L^T}$) de la matriz (rutina COLSOL con índice 1), y la sustitución hacia atrás (rutina COLSOL con índice 2) que nos provee de los valores buscados de los grados de libertad efectivos. Finalmente en la rutina PRINTD se imprimen los valores de las variables nodales.

Notar que en la presente versión “faltan” algunos elementos imprescindibles en un análisis por elementos finitos, que se proponen como ejercicio de desarrollo y programación.

Las siguientes variables se definen localmente

NDOFE número de grados de libertad del elemento

POSGT(dim,ngaut) posición de los puntos de integración en el triángulo maestro.

WEIGT(ngaut) peso de los puntos de integración para triángulos

SHAPT(nodet,ngaut) funciones de forma del triángulo evaluadas en los puntos de integración

DERIT(nodet,dim,ngaut) derivadas de las funciones de forma del triángulo respecto a las coordenadas locales (ξ, η) evaluadas en los puntos de integración

POSGQ(dim,ngauq) posición de los puntos de integración en el cuadrado maestro.

WEIGQ(ngauq) peso de los puntos de integración para cuadriláteros

SHAPQ(nodeq,ngaut) funciones de forma del cuadrilátero evaluadas en los puntos de integración

DERIQ(nodeq,dim,ngauq) derivadas de las funciones de forma del cuadrilátero respecto a las coordenadas locales (ξ, η) evaluadas en los puntos de integración

STIFF(maxv) matriz de rigidez global almacenada como un vector.

F(neq) vector global de términos independientes

R(nknow) vector global de reacciones (grados de libertad restringidos)

10.3.8. Rutina STIFFG

Esta rutina ordena la evaluación de las matrices de “rigidez” elementales (rutina STIFFE), el ensamble sobre la matriz global y el ensamble sobre el término independiente debidos a condiciones esenciales de contorno. Para ello se definen localmente las siguientes variables

S(ndofe,ndofe) matriz de rigidez elemental

FL(ndofe) vector local de términos independientes debido a condiciones esenciales de contorno

LM(ndofe) arreglo que relaciona cada grado de libertad local con las ecuación global correspondiente, si es un valor positivo corresponde a un grado de libertad efectivo y si es un valor negativo corresponde a un grado de libertad restringido asociado con el correspondiente valor en **KNOWN**.

10.3.9. Rutina STIFFE

Esta rutina calcula la matriz de rigidez de un elemento por integración numérica usando la expresión

$$\mathbf{K}^e = \sum_{G=1}^{NGaus} \mathbf{B}^T(\xi_G, \eta_G) \mathbf{D} \mathbf{B}(\xi_G, \eta_G) w_G |\mathbf{J}_G|$$

Las variables definidas localmente son:

JAC determinante jacobiano de la transformación, luego multiplicado por el peso del punto de integración.

ELCOD(dim,nnod) coordenadas nodales del elemento considerado

D(nstre,nstre) matriz de elasticidad (o la correspondiente para problemas de campo) evaluada en la rutina **DMATRX** en función de las características del material. Constante en cada elemento.

B(ndofe,nstre) traspuesta de la matriz **B** en el punto de integración considerado, evaluada en la rutina **BMATRX** en función del gradiente cartesiano de las funciones de forma (y del tipo de problema)

10.3.10. Rutina BMATRX

Esta rutina evalúa en cada punto de integración el operador **B^T** que relaciona las variables nodales con las variables derivadas asociadas al flujo mediante las ecuaciones constitutivas.

Ecuación de Laplace

$$\mathbf{B}^I = \begin{bmatrix} N'_1 \\ N'_2 \end{bmatrix}$$

Estado plano de tensiones y deformaciones

$$\mathbf{B}^I = \begin{bmatrix} N'_1 & 0 \\ 0 & N'_2 \\ N'_2 & N'_1 \end{bmatrix}$$

Estado de deformación axilsimétrica

$$\mathbf{B}^I = \begin{bmatrix} N'_1 & 0 \\ 0 & N'_2 \\ N'_2 & N'_1 \\ \frac{N^1}{x_1} & 0 \end{bmatrix}$$

Flexión de placas incluyendo el corte

$$\mathbf{B}^I = \begin{bmatrix} 0 & N'_1 & 0 \\ 0 & 0 & N'_2 \\ 0 & N'_2 & N'_1 \\ N'_1 & N^I & 0 \\ N'_2 & 0 & N^I \end{bmatrix}$$

Las variables que se definen localmente son:

XJ(dimen, dimen) matriz jacobiana de la transformación y luego su inversa

XG(dimen) coordenadas del punto de integración (en el plano (x_1, x_2))

CARTD(nnode, dimen) derivadas de las funciones de forma respecto a las direcciones cartesianas en el plano (x_1, x_2) , N_i^I

10.3.11. Rutina SHAPES

Esta rutina calcula la posición de los puntos de integración para los elementos maestros y calcula las funciones de forma y sus derivadas respecto a las coordenadas locales. De acuerdo a que se trate de elementos triangulares o cuadriláteros llama respectivamente a las rutinas **SHAPE6** y **SHAPE9**.