



Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo

Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
Área Académica de Matemáticas y Física

Propiedades homotópicas del operador de clanes en gráficas

T E S I S

que para obtener el título de:

Licenciado en Matemáticas Aplicadas

presenta

Mauricio Islas Gómez

bajo la dirección de

Dr. Rafael Villarroel Flores



Mineral de la Reforma, Hidalgo.
Abril 2021



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
School of Engineering and Basic Sciences

Mineral de la Reforma, Hgo., a 1 de junio de 2021

Número de control: ICBI-D/354/2021
Asunto: Autorización de impresión.

MTRO. JULIO CÉSAR LEINES MEDÉCIGO
DIRECTOR DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR DE LA UAEH

Con fundamento en lo dispuesto en el Título Tercero, Capítulo I, Artículo 18 Fracción IV; Título Quinto, Capítulo II, Capítulo V Fracción IX del Estatuto General de nuestra Institución. Por este medio le comunico que el Jurado asignado al Pasante de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas Mauricio Islas Gómez, quien presenta el trabajo de titulación "Propiedades homotópicas del operador de clanes en gráficas", después de revisar el trabajo en reunión de Sinodales ha decidido autorizar la impresión del mismo, hechas las correcciones que fueron acordadas.

A continuación, firman de conformidad los integrantes del Jurado:

Presidente: Dr. Benjamín Alfonso Itzá Ortiz

Secretario: Dr. Federico Menéndez Conde-Lara

Vocal: Dr. Rafael Villarroel Flores

Suplente: Dra. Erika Elizabeth Rodríguez Torres

Sin otro particular por el momento, reciba un cordial saludo

Atentamente
"Amor, Orden y Progreso"

Dr. Otilio Arturo Acevedo Sandoval
Director del ICBI



Ciudad del Conocimiento
Carretera Pachuca-Tulancingo km 4.5 Colonia Carboneras
Mineral de la Reforma, Hidalgo, México. C.P. 42184
Teléfono: +52 (771) 71 720 00 ext. 2231 Fax 2109
direccion_icbi@uaeh.edu.mx

www.uaeh.edu.mx

Agradecimientos

“Rodéate de personas positivas que creen en tu sueños, alentan tus ideas, apoyan tus ambiciones y sacan lo mejor de ti.”

Roy Bennett.

Quiero agradecer a las principales personas positivas que me rodean, mi familia, en especial a mis padres, Victor Islas y Guillermina Gómez, quienes son una pieza clave para todos mis logros.

También agradezco la ayuda de todos mis profesores y compañeros, principalmente a mi director de tesis, el Dr. Rafael Villarroel por todo su apoyo y paciencia durante el desarrollo de este trabajo.

Índice general

Introducción	1
1. Conceptos de teoría de gráficas	5
1.1. Gráficas	5
1.2. Isomorfismos	12
2. Complejos simpliciales y homotopía	15
2.1. Complejos simpliciales geométricos	16
2.2. Complejos simpliciales abstractos	27
2.3. Homotopía	32
3. Gráficas de clanes y gráficas clan Helly	35
3.1. Gráficas de clanes	35
3.1.1. Octaedros	37
3.2. Gráficas clan Helly	39
4. Gráficas homotópicamente invariantes	47
4.1. Colapsos	47
4.2. Ejemplos	52
4.3. Teoremas sobre invariancia de homotopía	58
4.4. Colapsos en gráficas clan completas	61
4.5. Diferencia entre los complejos	64
4.6. Colapsos en gráficas con defecto Helly 1	65
Conclusión	77
Bibliografía	79

Introducción

En este trabajo de tesis, primeramente, se hace un estudio de algunos conceptos en la topología combinatoria. Principalmente se trabaja con un complejo simplicial asociado a una gráfica (es decir, el complejo simplicial de completas de la gráfica), y luego a este complejo simplicial se le puede asociar un espacio topológico a través de su realización geométrica. De este modo asociamos conceptos topológicos a estructuras combinatorias, así, nos interesa el tipo de homotopía que tienen las gráficas. Diremos, por ejemplo, que dos gráficas tienen el mismo tipo de homotopía si sus espacios topológicos asociados son homotópicos.

Estamos interesados en ciertas propiedades homotópicas que tiene el operador de clanes en gráficas. Este operador asocia a cada gráfica otra gráfica, la cual es la gráfica de intersección de las subgráficas completas maximales de la gráfica original. Hay una amplia literatura sobre el operador de clanes y se han estudiado diversos aspectos de él. Si G es una gráfica denotamos al operador de clanes como $K(G)$. De este modo, podemos iterar el operador de clanes, y, para $n \geq 1$ definimos de forma recursiva $K^n(G) = K(K^{n-1}(G))$, donde $K^0(G) = G$.

La cuestión de caracterizar condiciones sobre una gráfica que garanticen la homotopía entre ella y su gráfica de clanes inició con el trabajo de Erich Prisner [10] en 1992, en donde este investigador mostró que si G tiene la propiedad de ser clan Helly entonces G es homotópica a $K(G)$. Antes (en 1991), Bandelt y Prisner [1] demostraron implícitamente que las gráficas desmantelables también tienen tal propiedad. En 2001, Larrión, Neumann-Lara y Pizaña [7] generalizaron el teorema de Prisner. En 2008, Larrión, Pizaña y Villarroel [8] generalizaron el resultado del 2001. A las gráficas que son homotópicas a su gráfica de clanes se les nombra *gráficas homotópicamente invariantes*.

En la figura 1 se muestra un diagrama que ilustra las contenciones de las clases de gráficas clan Helly, desmantelables y homotópicamente invariantes.

Nosotros nos ocuparemos en algunos aspectos de este problema. Una de las metas a largo plazo de este estudio es encontrar una clase de gráficas homotópicamente invariantes que abarquen a las gráficas clan Helly y las desmantelables. Por ejemplo, si se lograra mostrar que $K^n(G)$ es clan Helly para alguna $n \in \mathbb{N}$ implica

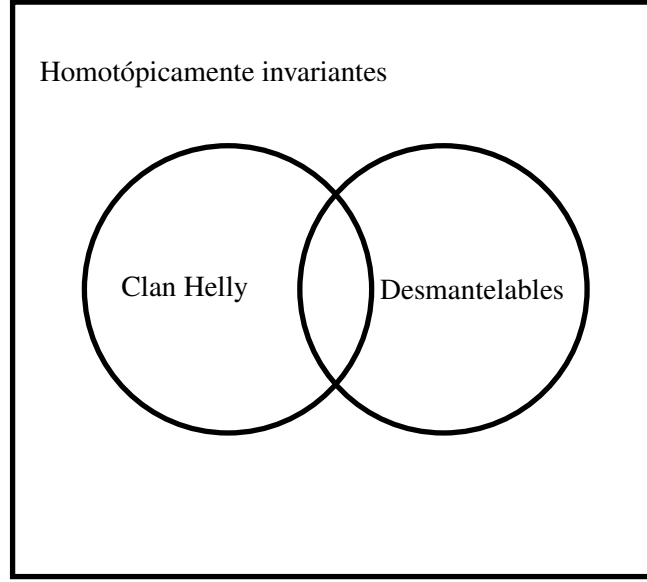


Figura 1: Diagrama de gráficas clan Helly, desmantelables y homotópicamente invariantes.

que G es homotópica a $K^m(G)$ para toda $m \in \mathbb{N}$, ésta sería una tal clase de gráficas.

Se define que G tiene defecto Helly n si n es el entero más pequeño tal que la gráfica $K^n(G)$ es clan Helly. Como se mencionó, un resultado de Prisner implica que las gráficas con defecto Helly 0 (es decir, las clan Helly) cumplen ser homotópicas a $K^m(G)$ para toda $m \in \mathbb{N}$. Esto motiva a interesarse en las gráficas con defecto Helly 1, ya que de ellas no se sabe si en general son homotópicamente invariantes.

Por otro lado, se sabe que decidir si una gráfica tiene defecto Helly 0 se puede reconocer en tiempo polinomial [11], pero reconocer las gráficas con defecto Helly 1 es un problema computacionalmente difícil, como fue demostrado en 2001 por Dourado, Protti y Szwarcfiter [2].

Una herramienta que nos sirvió para estudiar si las gráficas con defecto Helly 1 son homotópicamente invariantes fue el concepto de colapsos elementales, el cual es un concepto combinatorio que permite simplificar un complejo simplicial sin alterar su tipo de homotopía. Este concepto no había sido utilizado anteriormente en éste contexto, y nos permitió dar nuevas demostraciones a resultados conocidos, así como para comprobar computacionalmente que las gráficas pequeñas con defecto Helly 1 efectivamente son homotópicamente invariantes, como conjeturamos en 4.4.1.

En el capítulo 1, se revisan conceptos sobre teoría de gráficas, ya que las gráficas son los objetos combinatorios que se estudiarán. En el capítulo 2, se tiene como objetivo formalizar la forma en que se asocia un espacio topológico a una gráfica a través de complejos simpliciales.

Ya que el complejo simplicial que se trabaja está dado a través de las completas de la gráfica, en el capítulo 3 se trabaja con las gráficas de clanes (que son completas maximales). Y además, se analizan resultados sobre las gráficas clan Helly, ya que esta propiedad es relevante en cuanto a propiedades homotópicas.

Finalmente, en el capítulo 4, se analizan gráficas que son homotópicamente invariantes, mostrando dicha propiedad usando como herramienta los colapsos elementales, además de dar argumentos que simplifican computacionalmente el verificar que gráficas pequeñas con defecto Helly 1 son homotópicamente invariantes.

Capítulo 1

Conceptos de teoría de gráficas

En este capítulo se dan algunas definiciones, conceptos y resultados de la teoría de gráficas, además de mostrar ejemplos de representaciones de gráficas, ya que en muchas ocasiones los dibujos son de gran ayuda para entender los conceptos y los argumentos dados.

1.1. Gráficas

Definición 1.1.1 Una **gráfica** G consiste de un par de conjuntos $V(G)$ y $E(G)$, donde $V(G)$ es llamado el conjunto de **vértices** y $E(G)$ el conjunto de **aristas**, además $E(G)$ está formado por subconjuntos de dos elementos de $V(G)$.

Así, una arista la podríamos denotar como $\{x, y\}$, pero para simplificar la notación, en ocasiones la denotaremos por xy . Además, si dos vértices x, y de una gráfica G son tal que $xy \in E(G)$ decimos que son *vecinos* o que son *adyacentes* y se denota por $x \sim y$. De igual forma, en ocasiones en vez de decir que un vértice x está en $V(G)$, simplemente diremos $x \in G$, en el entendido de que x es un vértice de G .

Por ahora, todas las gráficas que se manejarán tendrán conjunto de vértices finito (por lo tanto su conjunto de aristas también es finito).

Es muy común asociarle un dibujo a una gráfica, donde los vértices los identificaremos por puntos o círculos y las aristas por arcos que unen a los vértices, por ejemplo, si G es tal que $V(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$ y

$$E(G) = \{ab, bc, cd, de, ef, fa, ad, eb\},$$

un dibujo de esta gráfica podría ser el que se muestra en la figura 1.1.

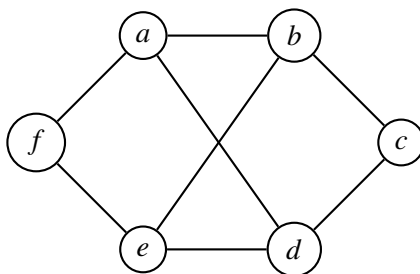


Figura 1.1: Dibujo de una gráfica.

Definición 1.1.2 Una gráfica G es una **gráfica completa** si dado cualquier par de vértices $x, y \in V(G)$ se cumple que $xy \in E(G)$, en otras palabras, si todos los vértices de G son vecinos entre sí.

Se acostumbra denotar como K_n a una gráfica completa con n vértices (ver ejemplos de dibujos en figura 1.2).

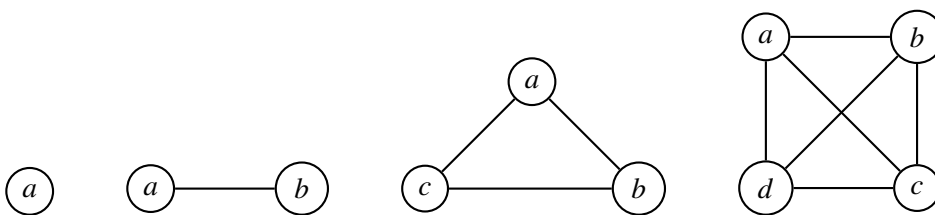


Figura 1.2: Gráficas completas de uno, dos, tres y cuatro vértices (K_1 , K_2 , K_3 y K_4).

Definición 1.1.3 Sea G una gráfica, decimos que F es una **subgráfica** de G si se cumple $V(F) \subseteq V(G)$ y $E(F) \subseteq E(G)$. Se observa que en particular F es una gráfica.

Definición 1.1.4 Si G es una gráfica y F es una subgráfica de G , se dice que F es una **subgráfica inducida** de G si dados $x, y \in V(F)$ se cumple que son adyacentes en F si y solo si son adyacentes en G .

Por ejemplo, en la figura 1.3 podemos ver varias subgráficas de la gráfica mostrada en la figura 1.1, entre las cuales la subgráfica de la izquierda no es subgráfica inducida de la gráfica original pues le falta la arista ad , pero la subgráfica de la derecha sí es subgráfica inducida.

Lema 1.1.5 Sean G una gráfica, F una subgráfica inducida de G y H una subgráfica inducida de F . Entonces H es una subgráfica inducida de G .

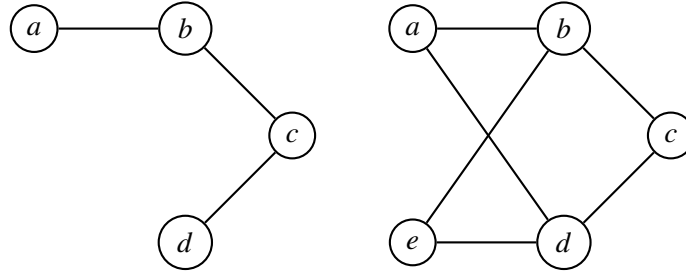


Figura 1.3: Subgráficas de la gráfica mostrada en la figura 1.1.

Demostración. Se sigue directo de la definición de subgráfica que H es una subgráfica de G , ahora veamos que es subgráfica inducida. Sean $x, y \in V(H)$. Supongamos que x, y son adyacentes en H , como H es subgráfica inducida de F entonces x, y son adyacentes en F y como F es subgráfica inducida de G entonces x, y son adyacentes en G . Ahora supongamos que x, y son adyacentes en G , como x, y también son vértices de F y al ser esta subgráfica inducida de G se tiene que x, y son adyacentes en F y por lo tanto también son adyacentes en H , probando así que en efecto H es subgráfica inducida de G . ■

Definición 1.1.6 Si G es una gráfica, decimos que F es una **completa** de G si es una subgráfica de G y es una gráfica completa.

En la figura 1.4 llamemos G a la gráfica de la izquierda y observemos que la gráfica de en medio y la de la derecha son completas de G .

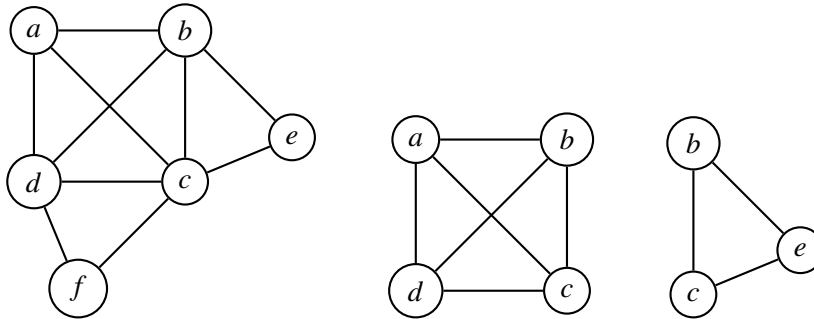


Figura 1.4: Una gráfica y dos de sus completas.

Definición 1.1.7 Un **camino** de longitud r entre dos vértices x y y de una gráfica G , es una sucesión de $r + 1$ vértices distintos de G , digamos $x = v_0, v_1, \dots, v_r = y$ tal

que $v_i \sim v_{i+1}$ para todo $i = 0, 1, \dots, r-1$. Además, si para cualesquier par de vértices en una gráfica G existe un camino, entonces decimos que G es **conexa**, en caso contrario diremos que es **disconexa**. Y una subgráfica inducida maximal es llamada una **componente conexa**.

Para ilustrar esta última definición tomemos como ejemplo la gráfica de la figura 1.5. Dicha gráfica no es conexa, tiene dos componentes conexas, una de ellas la conforman los vértices a, b, d, i y la otra los vértices c, e, h, f .

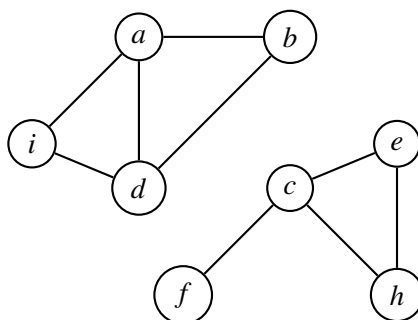


Figura 1.5: Gráfica disconexa.

Definición 1.1.8 Un **ciclo** es una gráfica conexa donde cada uno de sus vértices tiene exactamente dos vecinos, un ciclo de n vértices lo denotamos por C_n . Y una gráfica conexa es un **árbol**, si no contiene ciclos, es decir, si ninguna subgráfica de ella es un ciclo. (Ver figura 1.6).

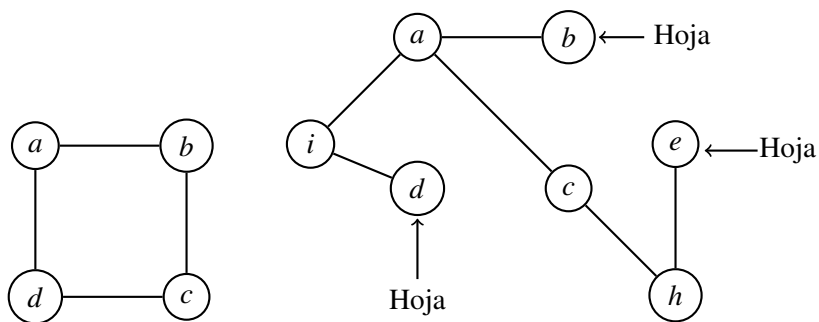


Figura 1.6: Ciclo C_4 y un árbol.

Lema 1.1.9 Una gráfica donde cada uno de sus vértices tiene al menos dos vecinos contiene al menos un ciclo.

Demostración. Supongamos que G es una gráfica donde cada uno de sus vértices tiene al menos dos vecinos, sin pérdida de generalidad podemos suponer que la gráfica es conexa (pues en caso de no serlo, podemos fijarnos en sus componentes conexas y aplicarles a cada una de ellas el resultado). Supongamos también que G tiene n vértices. Como cada uno de los vértices de G tiene al menos dos vecinos, entonces la gráfica tiene al menos tres vértices, sean $x, y \in V(G)$, como G es conexa existe un camino de x a y , digamos $x = v_0, v_1, \dots, v_r = y$, como y tiene al menos dos vecinos, entonces o uno de sus vecinos es alguno de los vértices v_0, v_1, \dots, v_{r-2} (en cuyo caso $v_i, v_{i+1} \dots v_{r-2}, v_{r-1}, y$ formarían un ciclo con $v_i \sim y$, para cada índice $i \in \{0, 1, \dots, r-2\}$) o bien existe v_{r+1} tal que $v_{r+1} \sim y$. De forma similar, como v_{r+1} tiene al menos dos vecinos entonces, o uno de sus vecinos es alguno de los vértices v_0, v_1, \dots, v_{r-1} (en este caso, de nuevo se formaría un ciclo) o bien existe otro vértice v_{r+2} tal que $v_{r+1} \sim v_{r+2}$. Así podríamos seguir sucesivamente, pero como G tiene n vértices en el peor de los casos tendríamos un camino v_0, v_1, \dots, v_{n-1} , los cuales son todos los vértices de la gráfica, entonces como cada vértice tiene al menos dos vecinos entonces v_{n-1} debe tener al menos otro vecino y necesariamente debe ser alguno de los vértices v_0, v_1, \dots, v_{n-3} y se tendría un ciclo formado por los vértices $v_i, v_{i+1}, \dots, v_{n-1}$, donde $v_i \sim v_{n-1}$ para algún $i \in \{0, 1, \dots, n-3\}$. Concluyendo que necesariamente G tiene al menos un ciclo. ■

Definición 1.1.10 Sea G un árbol, decimos que $x \in V(G)$ es una hoja si solamente tiene un vecino. Por ejemplo, en la figura 1.6 los vértices b, e y d son hojas de ese árbol.

Si G es un árbol y x una hoja de G definiremos a la gráfica $G - x$ como la subgráfica inducida de G por los vértices $V(G - x) = V(G) - \{x\}$. Afirmamos que $G - x$ es un árbol, es inmediato ver que $G - x$ no tiene ciclos, pues si los tuviese entonces G también los tendría, por lo que solo hay que mostrar que $G - x$ es conexa, supongamos que no, es decir que $G - x$ es disconexa, entonces deben existir dos vértices $v_1, v_2 \in$ tal que el camino en la gráfica G que los conecta necesariamente debe contener a x . Esto implicaría que x debe tener al menos dos vecinos, lo cual es una contradicción, pues x es una hoja, por lo que $G - x$ es un árbol.

Lema 1.1.11 Si G es un árbol con n vértices, entonces $|E(G)| = n - 1$.

Demostración. Procederemos por inducción sobre n . Si la gráfica G tiene un sólo vértice, esta no puede tener aristas, entonces $|E(G)| = 0$ cumpliéndose la proposición para $n = 1$. Ahora supongamos que la proposición es válida para $n = m \in \mathbb{N}$, es decir, que todo árbol con m vértices tiene $m - 1$ aristas y mostremos que se cumple la proposición para $n = m + 1$. Entonces supongamos que G es un árbol con $m + 1$

vértices y sea x una hoja de G (observemos que un árbol debe tener al menos una hoja porque si no fuese así entonces todos los vértices tendrían dos vecinos o más y eso implica que entonces, por el lema 1.1.9, G tiene al menos un ciclo lo cual no es posible porque G es un árbol). Por la observación que se hizo anteriormente se tiene que $G - x$ es un árbol con m vértices y por hipótesis de inducción $G - x$ tiene $m - 1$ aristas, eso quiere decir que como x es una hoja de G , entonces G tiene m aristas, mostrando lo que se quería. ■

Definición 1.1.12 Una gráfica G es **bipartita** si existen $V_1, V_2 \subset V(G)$ no vacíos, tales que $V_1 \cup V_2 = V(G)$ y cualquier arista $xy \in E(G)$ cumple que $x \in V_1$ y $y \in V_2$ o bien que $y \in V_1$ y $x \in V_2$.

Lema 1.1.13 Una gráfica es bipartita si y solo si no contiene ciclos impares.

Demostración. \Rightarrow Supongamos que X es bipartita y que contiene un ciclo C_m impar, como X es bipartita entonces existen V_1, V_2 subconjuntos de $V(X)$ tal que cada arista de X tiene un vértice en V_1 y el otro en V_2 , sea $V(C_m) = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ y $E(C_m) = \{c_i c_j : j = i + 1 \text{ con } i = 1, 2, \dots, m - 1\} \cup \{c_1 c_m\}$. Y supongamos sin pérdida de generalidad que $c_1 \in V_1$. Como $c_1 \sim c_2$ y X es bipartita, necesariamente $c_2 \in V_2$, luego como $c_2 \sim c_3$ entonces $c_3 \in V_1$, inductivamente podemos ver que si $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ y j es impar. Entonces $c_j \in V_1$, y si j es par, entonces $c_j \in V_2$, lo cual implica que c_1 y c_m están en V_1 pero $c_1 \sim c_m$, esto es una contradicción, la cual viene de suponer que X contiene un ciclo impar, por lo tanto si X es bipartita entonces no contiene ciclos impares.

\Leftarrow Supongamos ahora que X es una gráfica que no contiene ciclos impares. Observemos que basta ver que cada componente conexa de X es bipartita. Sea Y una componente conexa de X , y sea y_1 un vértice de Y y $V_1 = \{y_1\}$, ya que Y es conexa, entonces sea $B_1 = \{y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1n}\}$ el conjunto de todos los vecinos de y_1 , observemos que todos los vecinos de y_1 no pueden ser adyacentes entre ellos, pues si lo fuesen habría ciclos de tres vértices, y esto no puede pasar pues Y no tiene ciclos impares. Ahora, sea $V_2 = B_1 - \{y_1\}$, es decir, el conjunto de todos los vecinos de cada vértice en B_1 excepto y_1 , se observa que ninguno de estos vértices pueden ser adyacentes entre ellos, porque si lo fuesen se formarían ciclos impares de cinco o tres vértices, luego, sea $B_2 = V_2 - B_1$, nuevamente se observa que los vértices en B_2 no pueden ser adyacentes entre ellos ni tampoco ningún vértice de B_2 puede ser adyacente con los de B_1 , pues si lo fuesen se formarían ciclos impares. Así sucesivamente podemos seguir formando conjuntos V_i y B_j , en algún momento terminaremos, ya que el conjunto de vértices en Y es finito, supongamos que se formaron B_1, \dots, B_ℓ y V_1, \dots, V_m conjuntos, entonces, definamos $V = \bigcup_{i=1}^m V_i$ y $B = \bigcup_{i=1}^\ell B_i$, por construcción V no tiene vértices que sean vecinos y B también,

entonces toda arista de Y tiene un vértice en V y otro en B , por lo que Y es bipartita, en consecuencia X también lo es. ■

Además vamos a decir que una gráfica $G = (V_1, V_2)$ (donde V_1 y V_2 son subconjuntos de $V(G)$ que hacen bipartita a G) es **bipartita completa** si todo vértice $x \in V_1$ es vecino de todos los vértices de V_2 , y si $|V_1| = m$ y $|V_2| = n$, entonces denotamos a la gráfica bipartita por $K_{m,n}$. En la figura 1.7 podemos ver una gráfica bipartita y una gráfica bipartita completa.

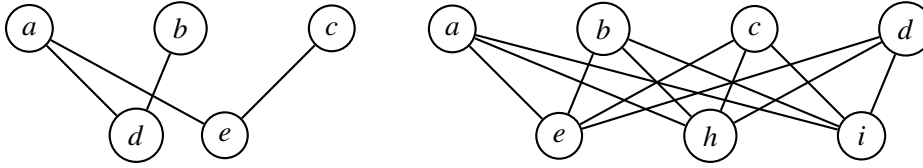


Figura 1.7: Una gráfica bipartita y una gráfica bipartita completa $K_{4,3}$.

Definición 1.1.14 La **vecindad abierta** de un vértice x en una gráfica G se denota y define como $N(x) = \{y \in V(G) : x \sim y\}$, es decir, el conjunto de todos los vértices que son vecinos de x . Y la **vecindad cerrada** de x , se denota y define como el conjunto $N[x] = N(x) \cup \{x\}$.

Definición 1.1.15 Se dice que una gráfica G es un **cono** si existe $x \in V(G)$ tal que todo vértice en G distinto de x es vecino de x . A x lo llamaremos **ápice** del cono. (Ver figura 1.8).

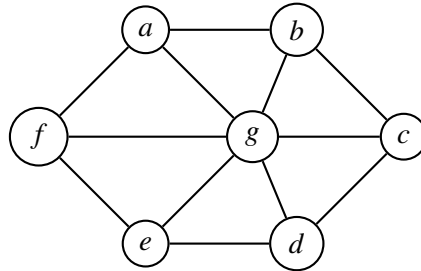


Figura 1.8: Un cono con ápice g .

Definición 1.1.16 Sea G una gráfica y $x \in V(G)$. Se dice que x es un **vértice dominado** de G si $N(x)$ es un cono. Si y es un ápice de dicho cono, decimos que y **domina** a x .

Por ejemplo, en la gráfica de la figura 1.8 se observa que el vértice g domina al vértice a , pues $N(a)$ es un cono con ápice en g . Sin embargo, g no es un vértice dominado, pues $N(g)$ no es un cono.

Definición 1.1.17 Sea G una gráfica y $x \in V(G)$. Decimos que x es un **vértice dominado** de G si existe un vértice $y \in N(x)$ tal que $N(x) \subseteq N[y]$.

Se puede mostrar que las definiciones 1.1.16 y 1.1.17 son equivalentes y que en ocasiones se usará una u otra según convenga la situación.

Si $X \subseteq V(G)$ para alguna gráfica G , denotamos por $G[X]$ a la subgráfica de G inducida por X .

Definición 1.1.18 Decimos que una gráfica G es **desmantelable**, si sus vértices pueden ser ordenados $V(G) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de tal forma que x_i es dominado por un vértice en $G[\{x_i, \dots, x_n\}]$ para todo $i = 1, 2, \dots, n - 1$.

Las gráficas dismantelables tienen ciertas propiedades que mencionaremos más adelante.

Observemos que los árboles son ejemplos de gráficas dismantelables, pues si G es un árbol con n vértices, sabemos que debe tener al menos una hoja, sea x_1 dicha hoja y sea y_1 su único vecino, como y_1 es el único vecino de x_1 entonces y_1 domina a x_1 . Ahora, $G[V(G) - x_1] = G - x_1$ también es un árbol, por lo tanto debe tener al menos una hoja, y esta va a resultar ser un vértice dominado, y así sucesivamente podemos ir encontrando hojas que van a resultar ser vértices dominados. Así entonces, sea x_i una hoja de $G[V(G) - \{x_1, \dots, x_{i-1}\}]$ para cada $i = 2, \dots, n$, entonces tenemos un ordenamiento de los vértices de G tal que x_i es dominado en $G[\{x_i, \dots, x_n\}]$ para todo $i = 1, 2, \dots, n - 1$. Por lo tanto G es dismantelable.

1.2. Isomorfismos

Definición 1.2.1 Sean G y H dos gráficas. Un **isomorfismo** de G a H es una función $f : V(G) \rightarrow V(H)$ tal que f es biyectiva y si $x, y \in V(G)$ se cumple que $x \sim y$ si y solo si $f(x) \sim f(y)$, si esto pasa decimos que G y H son isomorfas y lo denotamos por $G \cong H$. Dos gráficas isomorfas se suelen considerar como iguales.

Observemos que si $f : G \rightarrow H$ es un isomorfismo de G a H , al ser biyectivo entonces tiene inversa digamos $g = f^{-1}$ y que g es un isomorfismo de H a G .

Lema 1.2.2 Si $f : G \rightarrow H$ es un isomorfismo entre las gráficas G y H y $x \in V(G)$, entonces $|N(x)| = |N(f(x))|$.

Demostración. En efecto, pues dado $y \in N(x)$ se sigue que $f(y) \sim f(x)$ y como la función f es biyectiva entonces $|N(x)| \leq |N(f(x))|$, similarmente ya que $g = f^{-1}$ es un isomorfismo de H a G se cumple que $|N(x)| \geq |N(f(x))|$. Y por lo tanto se tiene que $|N(x)| = |N(f(x))|$. ■

Es inmediato ver que si G es una gráfica conexa y H es una gráfica que cumple $G \cong H$ entonces H también es conexa.

Capítulo 2

Complejos simpliciales y homotopía

Este apartado está basado en el libro de Munkres [9], en el capítulo 1 de dicho libro se formaliza la realización geométrica de un complejo simplicial, incluso en el caso donde el complejo simplicial es infinito, en nuestro caso solo nos interesan los complejos simpliciales finitos, entonces se adaptó este capítulo solamente para el caso finito.

Un **complejo simplicial** Δ consta de:

1. Un conjunto de **vértices** que se denota $V(\Delta)$.
2. Un **conjunto de simplejos** $S(\Delta)$ que consta de subconjuntos finitos de $V(\Delta)$, tales que si $\sigma \in S(\Delta)$ y $\tau \subseteq \sigma$, entonces $\tau \in S(\Delta)$.

En las siguientes dos secciones distinguiremos entre complejos simpliciales abstractos y complejos simpliciales geométricos, después los asociaremos entre sí para establecer lo que queremos.

El complejo simplicial que más nos interesa es el que se le asocia a una gráfica a través de sus clanes, el cuál definimos a continuación.

Definición 2.0.1 Sea G una gráfica. Denotamos como $\Delta(G)$ al complejo simplicial tal que $V(\Delta(G)) = V(G)$ y

$$S(\Delta(G)) = \{c \subseteq V(G) : c \text{ induce una gráfica completa de } G\}.$$

Si Δ es un complejo simplicial y $\sigma \in S(\Delta)$, se define la **dimensión** de σ como $\dim \sigma = |\sigma| - 1$. A los simplejos de dimensión k les llamamos k – *simplejos*. También se define la dimensión de Δ como $\dim \Delta = \max\{\dim \sigma : \sigma \in S(\Delta)\}$. En

caso de que las dimensiones de los simplejos no estén acotados, decimos que Δ tiene dimensión infinita.

En esta tesis trabajaremos solamente con complejos simpliciales finitos, es decir, donde el conjunto de vértices $V(\Delta)$ es finito. Por lo tanto, todos nuestros complejos simpliciales tienen dimensión finita.

A un complejo simplicial Δ se le puede asociar un espacio topológico a través de su **realización geométrica**, que denotaremos por $|\Delta|$. Y lo que nos interesa es estudiar lo siguiente: dada una gráfica G se le asocia el complejo simplicial $\Delta(G)$ y le asociamos el espacio topológico $|\Delta(G)|$.

Si dos gráficas F y G son tales que $|\Delta(F)| \simeq |\Delta(G)|$, es decir, sus respectivos espacios topológicos son homotópicos entonces diremos que F y G son homotópicas y lo denotaremos por $F \simeq G$. Los conceptos de homotopía se estudian en la sección 2.3.

Así como a una gráfica le podemos asociar un complejo simplicial a través de sus subgráficas completas, también podemos asociarle un complejo simplicial a un conjunto **parcialmente ordenado (copo)** P que denotaremos por $\Delta(P)$, cuyos vértices son los puntos de P y los simplejos en $\Delta(P)$ son los subconjuntos totalmente ordenados de P , o como también se les conoce, las **cadenas** de P . Además, ya que le asociamos un complejo simplicial a un copo, es natural asociarle ahora un espacio topológico a través de su realización geométrica que denotaremos por $|\Delta(P)|$.

Ahora, ya que le asociamos un espacio topológico a un copo P y también a una gráfica G , vamos a decir que son homotópicamente equivalentes $P \simeq G$ si sus espacios topológicos lo son $|\Delta(P)| \simeq |\Delta(G)|$.

2.1. Complejos simpliciales geométricos

El objetivo de esta sección es entender un poco más como es que se le asocia un espacio topológico a una gráfica a través de su complejo simplicial asociado, y para ello estudiaremos los complejos simpliciales geométricos.

A cada complejo simplicial Δ se le puede asociar un espacio topológico, el cual vamos a denotar por $|\Delta|$, este será la **realización geométrica** del complejo simplicial.

Para definir que es la realización geométrica de un espacio primero se estudiará un poco de la geometría analítica de un espacio euclidiano.

Definición 2.1.1 *Dado un conjunto de puntos $\{a_0, a_1, \dots, a_m\} \subset \mathbb{R}^n$, diremos que es **geoméricamente independiente**, si para cualquier conjunto $\{t_0, t_1, \dots, t_m\}$ de*

2.1. COMPLEJOS SIMPLICIALES GEOMÉTRICOS

números reales, las siguientes ecuaciones

$$\sum_{i=0}^m t_i = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=0}^m t_i a_i = 0$$

implican que $t_i = 0$ para todo $i = 0, 1, \dots, m$.

Lema 2.1.2 Si $m \geq 1$, el conjunto $\{a_0, a_1, \dots, a_m\} \subset \mathbb{R}^n$ es geoméricamente independiente si y sólo si los vectores $a_1 - a_0, a_2 - a_0, \dots, a_m - a_0$ son linealmente independientes.

Demostración. \Rightarrow] Supongamos que $\{a_0, a_1, \dots, a_m\} \subset \mathbb{R}^n$ es geoméricamente independiente y sea

$$S = t_1(a_1 - a_0) + t_2(a_2 - a_0) + \dots + t_m(a_m - a_0) = 0$$

una combinación lineal de $a_1 - a_0, a_2 - a_0, \dots, a_m - a_0$, observemos que

$$\begin{aligned} S &= -(t_1 + t_2 + \dots + t_m)a_0 + t_1 a_1 + t_2 a_2 + \dots + t_m a_m = 0 \\ &= t_0 a_0 + t_1 a_1 + t_2 a_2 + \dots + t_m a_m = 0, \end{aligned}$$

donde $t_0 = -(t_1 + t_2 + \dots + t_m)$. Además observemos que

$$\sum_{i=0}^m t_i = -\sum_{i=1}^m t_i + \sum_{i=1}^m t_i = 0,$$

y como el conjunto es geoméricamente independiente entonces se tiene que cumplir que $t_0 = t_1 = \dots = t_m = 0$, por lo que $a_1 - a_0, a_2 - a_0, \dots, a_m - a_0$ son linealmente independientes.

\Leftarrow] Ahora supongamos que $a_1 - a_0, a_2 - a_0, \dots, a_m - a_0$ son linealmente independientes y supongamos que se cumple que

$$\sum_{i=0}^m t_i = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=0}^m t_i a_i = 0.$$

De $\sum_{i=0}^m t_i = 0$ se sigue que $t_0 = -\sum_{i=1}^m t_i$, por lo tanto

$$\sum_{i=0}^m t_i a_i = \left(-\sum_{i=1}^m t_i \right) a_0 + \sum_{i=1}^m t_i a_i = \sum_{i=1}^m t_i (a_i - a_0) = 0.$$

Y como $a_1 - a_0, a_2 - a_0, \dots, a_m - a_0$ son linealmente independientes, entonces $t_i = 0$ para $i = 1, 2, \dots, m$ pero entonces $t_0 = -\sum_{i=1}^m t_i = 0$, concluyendo que el conjunto $\{a_0, a_1, \dots, a_m\}$ es geoméricamente independiente. ■

Así podemos ver que el conjunto formado por un punto en \mathbb{R}^n es geométricamente independiente, el conjunto con dos puntos distintos también es geométricamente independiente, así como tres puntos no colineales, cuatro puntos no coplanares, y así sucesivamente.

Definiremos el **m -plano** P generado por un conjunto geométricamente independiente $\{a_0, a_1, \dots, a_m\}$, como todos los puntos $x \in \mathbb{R}^n$ tales que

$$x = \sum_{i=0}^m t_i a_i \quad \text{con} \quad \sum_{i=0}^m t_i = 1.$$

Corolario 2.1.3 Si $\{a_i\}_{i=0}^m \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto de puntos geométricamente independientes, P es el m plano generado por dicho conjunto y $x \in P$. Entonces los escalares $\{t_i\}_{i=0}^m$ están determinados de forma única por x .

Demostración. Supongamos que $x, y \in P$ y que $x = y$, mostraremos que entonces sus escalares respectivos son iguales. Como x y y son de la forma

$$x = t_0 a_0 + t_1 a_1 + \dots + t_m a_m, \quad y = s_0 a_0 + s_1 a_1 + \dots + s_m a_m,$$

con $\sum_{i=0}^m t_i = \sum_{i=0}^m s_i = 1$ y $t_i, s_i \geq 0$ para todo $i = 0, 1, \dots, m$. Ello implica que

$$t_0 = 1 - \sum_{i=1}^m t_i, \quad s_0 = 1 - \sum_{i=1}^m s_i. \quad (2.1)$$

Así entonces

$$\begin{aligned} t_0 a_0 + t_1 a_1 + \dots + t_m a_m &= s_0 a_0 + s_1 a_1 + \dots + s_m a_m \\ \left(1 - \sum_{i=1}^m t_i\right) a_0 + t_1 a_1 + \dots + t_m a_m &= \left(1 - \sum_{i=1}^m s_i\right) a_0 + s_1 a_1 + \dots + s_m a_m \\ a_0 + t_1(a_1 - a_0) + \dots + t_m(a_m - a_0) &= a_0 + s_1(a_1 - a_0) + \dots + s_m(a_m - a_0) \\ t_1(a_1 - a_0) + \dots + t_m(a_m - a_0) &= s_1(a_1 - a_0) + \dots + s_m(a_m - a_0). \end{aligned}$$

Por el lema 2.1.2 sabemos que los vectores $\{a_i - a_0\}_{i=1}^m$ son linealmente independientes, por lo tanto se sigue que $t_i = s_i$ para todo $i = 1, 2, \dots, m$. Y de 2.1 se sigue que $t_0 = s_0$. Concluyendo así que los escalares de un elemento en P están determinados de forma única. ■

2.1. COMPLEJOS SIMPLICIALES GEOMÉTRICOS

Definición 2.1.4 Sea $A = \{a_0, a_1, \dots, a_m\} \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto geoméricamente independiente. Se define el m -simplejo geométrico σ generado por A como el conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}^n$ tales que

$$x = \sum_{i=0}^m t_i a_i \quad \text{donde} \quad \sum_{i=0}^m t_i = 1,$$

y $t_i \geq 0$ para todo $i = 0, 1, \dots, m$. Como ya hemos observado, los escalares t_i están determinados de forma única por x , y los llamamos las **coordenadas baricentricas** del punto x de σ con respecto a a_0, a_1, \dots, a_m . En este caso

$$\sum_{i=0}^m t_i a_i,$$

es llamada una **combinación convexa** de los vértices a_0, a_1, \dots, a_m .

Ahora veamos unos ejemplos de n -simplejos geométricos en las dimensiones más pequeñas. Es inmediato ver que un 0-simplejo geométrico es un punto. Un 1-simplejo geométrico es el segmento que une a a_0 con a_1 , pues ya que $t_1 + t_2 = 1$, entonces $t_2 = 1 - t_1$, por tanto los puntos $x \in \mathbb{R}^n$ en el 1-simplejo geométrico son de la forma

$$x = ta_0 + (1 - t)a_1, \quad t \in [0, 1].$$

De forma similar, un 2-simplejo geométrico generado por a_0, a_1, a_2 es un triángulo con los puntos a_0, a_1, a_2 como vértices. (Ver figura 2.1).

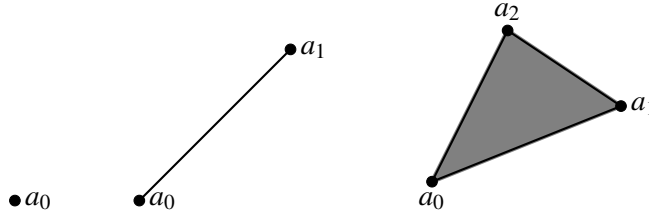


Figura 2.1: 0-simplejo, 1-simplejo y 2-simplejo geométricos.

Definición 2.1.5 Si σ es un m -simplejo geométrico generado por los puntos

$$a_0, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n,$$

estos son llamados los **vértices** de σ , el número m es la **dimensión** de σ . Además, cualquier simplejo generado por algún subconjunto de $\{a_0, a_1, \dots, a_m\}$ es llamado una **cara** de σ , en particular, la cara generada por los puntos a_1, a_2, \dots, a_m es llamada la **cara opuesta** de a_0 .

Ahora veamos algunas propiedades de los simplejos geométricos. Por el resto de esta sección cada vez que digamos “simplejo” nos estamos refiriendo a un “simplejo geométrico”, esto para simplificar un poco la notación.

Una **transformación afín** T de \mathbb{R}^n es un mapa que es una composición de traslaciones (es decir, mapas de la forma $T_1(x) = x + p$ donde p es un punto fijo), y transformaciones lineales no singulares. Notemos que una transformación afín preserva conjuntos geoméricamente independientes, y que T manda el plano P generado por a_0, a_1, \dots, a_m a el plano generado por $T(a_0), T(a_1), \dots, T(a_m)$. Además estas transformaciones son continuas por ser composición de funciones continuas.

Nota 2.1.6 Dado un conjunto $\{a_0, a_1, \dots, a_m\} \subset \mathbb{R}^n$ geoméricamente independiente. Consideremos la traslación T_1 dada por $T_1(x) = x - a_0$, se observa que la transformación T_1 manda a_i a $a_i - a_0$. Y sabemos que $a_1 - a_0, \dots, a_m - a_0$ es un conjunto linealmente independiente, entonces existe una transformación lineal no singular T_2 que manda a_i en los vectores canónicos e_i de \mathbb{R}^n para cada $i = 1, 2, \dots, m$. Entonces $S = T_2 \circ T_1$ es una transformación afín por ser composición de una traslación con una transformación lineal, además $S(a_0) = 0$ y $S(a_i) = e_i$ para $i > 0$.

Lema 2.1.7 Si σ es un m -simplejo generado por los puntos $a_0, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$ y para $x \in \sigma$ sus coordenadas baricéntricas son $t_0(x), t_1(x), \dots, t_m(x)$, entonces las funciones $t_i(x)$ para $i = 0, 1, \dots, m$ son continuas.

Demostración. Sea S la transformación afín dada como en la nota 2.1.6, es decir, tal que $S = T_2 \circ T_1$, $S(a_0) = 0$ y

$$S(a_i) = e_i, \quad \text{para todo } i = 1, 2, \dots, m.$$

Sea $x \in \sigma$, entonces es de la forma

$$x = \sum_{i=0}^m t_i a_i, \quad \text{con } \sum_{i=0}^m t_i = 1.$$

Observemos que

$$\begin{aligned} S(x) &= (T_2 \circ T_1)(x) = T_2 \left(\sum_{i=0}^m t_i a_i - a_0 \right) = T_2 \left(\sum_{i=0}^m t_i a_i - \sum_{i=0}^n t_i a_0 \right) \\ &= T_2 \left(\sum_{i=1}^m t_i (a_i - a_0) \right) = \sum_{i=1}^m t_i T_2(a_i - a_0) \\ &= \sum_{i=1}^m t_i e_i = (t_1, t_2, \dots, t_m, 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

2.1. COMPLEJOS SIMPLICIALES GEOMÉTRICOS

Como S es continua, entonces cada función t_i para $i > 0$, es la composición de S con la i -ésima proyección de \mathbb{R}^n a \mathbb{R} , por lo que t_i es la composición de funciones continuas, y entonces t_i es continua para $i > 0$. Como $\sum_{i=0}^n t_i = 1$, entonces

$$t_0 = 1 - \sum_{i=1}^n t_i.$$

Por lo tanto t_0 es la suma de funciones continuas, lo cual implica que también es continua. ■

Lema 2.1.8 Si σ es un m -simplejo generado por los puntos $a_0, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$, entonces σ es la unión de todos los segmentos que unen a a_0 con los puntos de la cara de σ opuesta a a_0 , es decir, simplejo s generado por a_1, a_2, \dots, a_m .

Demostración. Sea

$$\sigma' = \bigcup_{x \in s} \{ta_0 + x(1-t) : t \in [0, 1]\},$$

Y observemos que lo que se quiere mostrar es que $\sigma = \sigma'$. Procederemos mostrando ambas contenciones. Sea $y \in \sigma$, entonces y es de la forma

$$y = \sum_{i=0}^m t_i a_i, \quad \text{con } \sum_{i=0}^m t_i = 1 \quad \text{y } t_i \geq 0,$$

si $t_0 = 0$ se sigue directo que $y \in \sigma'$, pues en particular $y \in s \subseteq \sigma'$, si $t_0 = 1$ también se sigue directo que $y \in \sigma'$ pues en ese caso $y = a_0$. Supongamos que $t_0 \in (0, 1)$, en tal caso se tiene que

$$y = t_0 a_0 + \sum_{i=1}^m t_i a_i = t_0 a_0 + (1-t_0) \sum_{i=1}^m \frac{t_i}{1-t_0} a_i.$$

Obsérvese que y es un punto en la recta que une a a_0 con el punto $\sum_{i=1}^m \frac{t_i}{1-t_0} a_i$ y además se tiene que $t_i/(1-t_0) \geq 0$ y

$$\sum_{i=1}^m \frac{t_i}{1-t_0} = \frac{1-t_0}{1-t_0} = 1.$$

Esto último se sigue de que $\sum_{i=0}^m t_i = 1$, por lo tanto $\sum_{i=1}^m \frac{t_i}{1-t_0} a_i \in s$ y entonces se tiene que $y \in \sigma'$, es decir, $\sigma \subseteq \sigma'$.

Ahora supongamos que $y \in \sigma'$, por definición y es de la forma $ta_0 + (1-t)x$ con $t \in [0, 1]$ y $x = \sum_{i=1}^m t_i a_i$ con $\sum_{i=1}^m t_i = 1$ y $t_i \geq 0$, entonces

$$y = ta_0 + \sum_{i=1}^m (1-t)t_i a_i.$$

Observemos que $t \geq 0$ y que $(1-t)t_i \geq 0$ para $i = 1, 2, \dots, m$ y que

$$t + \sum_{i=1}^m (1-t)t_i = t + (1-t) \sum_{i=1}^m t_i = t + 1 - t = 1,$$

por lo tanto $y \in \sigma$, es decir, $\sigma' \subseteq \sigma$. Demostrando que $\sigma = \sigma'$. ■

Definición 2.1.9 Un conjunto $V \subseteq \mathbb{R}^n$ es **convexo** si para cualesquier $x, y \in V$ el segmento de recta que une a x con y está en V , es decir, $\overline{xy} \subseteq V$.

Definición 2.1.10 Un subconjunto C de \mathbb{R}^n es llamado **compacto** si es cerrado y acotado.

Lema 2.1.11 Sea σ un simplejo generado por $A = \{a_0, a_1, \dots, a_m\} \subset \mathbb{R}^n$, entonces es convexo y compacto.

Demostración. Probemos primero que es convexo. Sean $x, y \in \sigma$, estos son de la forma

$$x = \sum_{i=0}^m t_i a_i, \quad y = \sum_{i=0}^m s_i a_i, \quad \text{con } \sum_{i=0}^m t_i = \sum_{i=0}^m s_i = 1,$$

y $s_i, t_i \geq 0$. Probemos entonces que para cualquier $t \in [0, 1]$ el punto $z = tx + (1-t)y$ está en σ . En efecto, pues

$$tx + (1-t)y = t \sum_{i=0}^m t_i a_i + (1-t) \sum_{i=0}^m s_i a_i = \sum_{i=0}^m [tt_i + (1-t)s_i] a_i,$$

y además

$$\sum_{i=0}^m [tt_i + (1-t)s_i] = t \sum_{i=0}^m t_i + (1-t) \sum_{i=0}^m s_i = t + 1 - t = 1.$$

Por lo tanto $z \in \sigma$ y σ es convexo.

Ahora veamos que σ es acotado, sea $r = \max\{|a_i| : i = 0, 1, \dots, m\}$ y consideremos $B(0, 2r)$ (la bola abierta con centro en 0 y radio $2r$), nosotros queremos probar

2.1. COMPLEJOS SIMPLICIALES GEOMÉTRICOS

que $\sigma \in B(0, 2r)$. Sea $x \in \sigma$, observemos que existen $t_i \geq 0$ con $i = 0, 1, \dots, m$ tales que $\sum_{i=0}^m t_i = 1$ y

$$|x| = \left| \sum_{i=0}^m t_i a_i \right| \leq \sum_{i=0}^m |t_i| |a_i| \leq r \sum_{i=0}^m t_i = r \leq 2r.$$

Por lo cual $x \in B(0, 2r)$, lo que implica que σ es acotado.

Luego, se probará que σ es cerrado. Observemos primero que a σ lo podemos ver como un subespacio de \mathbb{R}^m . Para cada a_i consideremos el hiperplano P_i que contiene a la cara opuesta de a_i . Como dicha cara tiene $m - 1$ vértices del simplejo σ , entonces el hiperplano P_i es único, y este hiperplano divide a \mathbb{R}^m en dos semiespacios, digamos

$$E_{i1} = \{x \in \mathbb{R}^m : b^T x \leq c\}, \quad E_{i2} = \{x \in \mathbb{R}^m : b^T x > c\},$$

donde b^T es un vector en \mathbb{R}^m que representa al hiperplano P_i y c es una constante en \mathbb{R} . Observemos que E_{i1} es cerrado y E_{i2} es abierto, sin pérdida de generalidad podemos suponer que E_{i1} contiene a a_i y también a P_i para cada i , entonces los semiespacios E_{i1} son cerrados y resulta que

$$\bigcap_{i=0}^n E_{i1} = \sigma.$$

Por lo tanto σ es intersección finita de espacios cerrados (para $m = 2$ ver ejemplo en la figura 2.2), lo cual implica que es cerrado.

Y se concluye que σ es compacto. ■

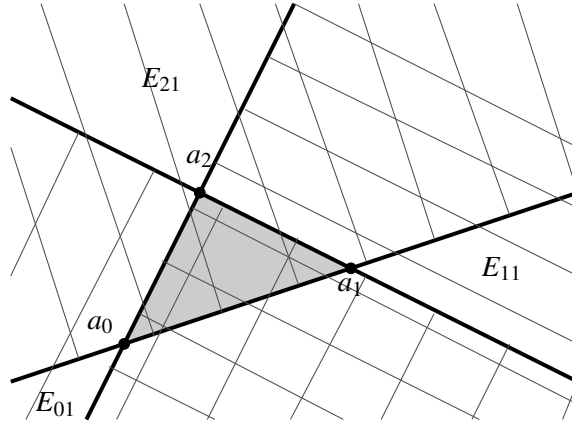


Figura 2.2: Intersección de semiespacios.

Lema 2.1.12 Si σ es un simplejo generado por $A = \{a_0, a_1, \dots, a_m\} \subset \mathbb{R}^n$ entonces es el conjunto convexo más pequeño que contiene a A .

Demostración. Definamos como σ_m el simplejo generado por el conjunto de puntos $A_m = \{a_0, a_1, \dots, a_m\} \subset \mathbb{R}^n$ y procederemos a demostrar la propiedad por inducción sobre la dimensión de σ_m .

Para el caso $m = 0$ el simplejo consta de un sólo punto, por lo tanto se cumple trivialmente la propiedad.

Si $m = 1$ entonces $A_1 = \{a_0, a_1\}$ y el simplejo $\sigma_1 = \overline{a_0 a_1}$, si σ' es un conjunto convexo que contiene a A_1 entonces necesariamente $\sigma = \overline{a_0 a_1} \subseteq \sigma'$. Ahora supongamos que se cumple la proposición para m , es decir, que si s es un simplejo generado por A_m y s' es un conjunto convexo que contiene a A_m entonces $s \subseteq s'$. Mostremos que también es válido para $m + 1$, sea σ_{m+1} generado por A_{m+1} y sea σ' convexo tal que $A_{m+1} \subseteq \sigma'$, como en particular $A_m \subseteq \sigma'$ entonces por hipótesis de inducción $\sigma_m \subseteq \sigma'$. Así, por el lema 2.1.8 se tiene que

$$\sigma_{m+1} = \bigcup_{x \in \sigma_m} \{ta_{m+1} + (1-t)x : t \in [0, 1]\},$$

y como $\{a_{m+1}\} \cup \sigma_m \subseteq \sigma'$ y σ' es convexo, entonces $\sigma_{m+1} \subseteq \sigma'$. Mostrando lo que se quería.

En otras palabras hemos mostrado que si \mathcal{F} es la familia de todos los conjuntos convexos que contienen a A , entonces

$$\sigma = \bigcap \mathcal{F}.$$

■

Lema 2.1.13 Dado un simplejo σ existe uno solo y solo un conjunto geométricamente independiente de puntos que generan a σ .

Demostración. La existencia de dichos puntos $A = \{a_0, a_1, \dots, a_m\}$ geométricamente independientes que generan a σ se cumple por definición. Observemos que si $m = 0$ el simplejo consiste de un solo punto, por lo tanto se cumple trivialmente lo que se quiere probar.

Por otro lado, supongamos que $m > 0$ y vamos a mostrar lo siguiente:

- (a) Si $x \in \sigma$ y $x \neq a_0, a_1, \dots, a_m$, entonces x está en algún segmento de línea abierto contenido en σ .
- (b) a_0 no está en ningún segmento de línea abierto.

Prueba de (a): Sea $x \in \sigma$ con $x \notin A$, procederemos por inducción sobre m , observemos que si $n = 1$, entonces $\sigma = \overline{a_0 a_1}$, como $x \neq a_0, a_1$, entonces x es de la forma $x = ta_0 + (1-t)a_1$ con $t \in (0, 1)$, por lo tanto x está en el segmento abierto de recta que une a a_0 con a_1 . Supongamos ahora que se cumple la proposición para el caso m , sea σ generado $A = \{a_0, a_1, \dots, a_{m+1}\}$ y $x \in \sigma$ con $x \notin A$. Recordemos que entonces σ es la unión de todos los segmentos de recta que unen al punto a_{m+1} con los puntos de la cara opuesta de a_{m+1} (es decir, el simplejo generado por el conjunto $A - \{a_{m+1}\}$), observemos que si x no está en el simplejo generado por el conjunto $A - \{a_{m+1}\}$, al ser $x \neq a_{m+1}$ entonces x está en un segmento abierto de línea que una a a_{m+1} con algún punto del m -simplejo generado por el conjunto $A - \{a_{m+1}\}$. Ahora vamos a suponer que x está en el simplejo generado por $A - \{a_{m+1}\}$ y en particular $x \neq a_0, a_1, \dots, a_m$ entonces por hipótesis de inducción x está en un segmento de línea abierto en σ .

Prueba de (b): Entonces supongamos que existen $x, y \in \sigma$ tal que a_0 es de la forma $a_0 = tx + (1-t)y$ y $t \in (0, 1)$, así

$$a_0 = t \sum_{i=0}^m r_i a_i + (1-t) \sum_{i=0}^m s_i a_i = \sum_{i=0}^m [tr_i + (1-t)s_i] a_i,$$

con $\sum_{i=0}^m r_i = \sum_{i=0}^m s_i = 1$. Luego, del corolario 2.1.3 se tiene $tr_0 + (1-t)s_0 = 1$ y $tr_i + (1-t)s_i = 0$ para $i = 1, 2, \dots, m$, ya que $t, 1-t \in (0, 1)$ se sigue que necesariamente $r_i = s_i = 0$ para $i = 1, 2, \dots, m$, y entonces $r_0 = s_0 = 1$, por lo tanto se sigue que $a_0 = x = y$. Similarmente sucede lo mismo con el resto de los a_i 's.

Para concluir, veamos que si existiese otro conjunto geoméricamente independiente, digamos $B = \{b_0, b_1, \dots, b_m\}$ este debe estar contenido en σ y generarlo. Y si los elementos de B son diferentes de los elementos de A , entonces por el inciso (a) deben estar en un segmento de línea abierto de σ , pero por el inciso (b), los elementos de un conjunto que generan a σ no pueden estar en un segmento de línea abierto llevándonos a una contradicción. Por lo tanto, necesariamente $A = B$, es decir, existe uno solo y solo un conjunto geoméricamente independiente de puntos que generan a σ . ■

Definición 2.1.14 Un *complejo simplicial geométrico* K en \mathbb{R}^n es una colección de simplejos geométricos en \mathbb{R}^n tal que:

1. Cualquier cara de un simplejo de K está en K .
2. La intersección de cualesquiera dos simplejos de K es una cara de cada uno de ellos.

En la figura 2.3 tenemos algunos ejemplos, K_1 es un complejo simplicial geométrico formado por un 2-simplejo y sus caras, K_2 es un complejo simplicial geométrico formado por dos 2-simplejos y sus caras, pero K_3 no es un complejo simplicial

geométrico, ya que se puede ver que la intersección de los dos 2-simplejos no es una cara de cada uno de ellos.

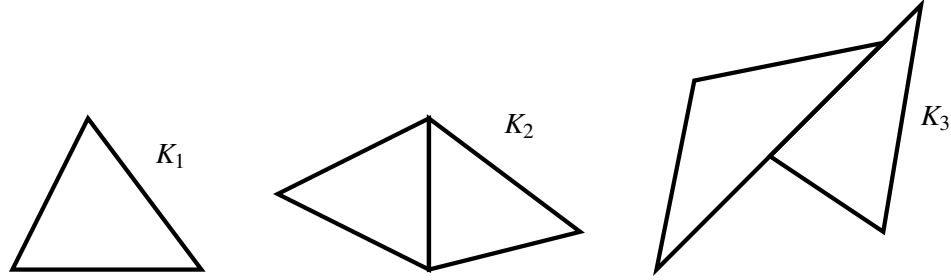


Figura 2.3: Ejemplos.

Definición 2.1.15 Si L es una subcolección de un complejo simplicial geométrico K en \mathbb{R}^n tal que contiene todas las caras de sus elementos, entonces L es un complejo simplicial geométrico y es llamado un subcomplejo geométrico de K . El p -esqueleto $K^{(p)}$ de K es la colección de todos los simplejos de K de dimensión a lo mas p ; la colección $K^{(0)}$ son llamados los vértices de K .

Definición 2.1.16 Sea K un complejo simplicial geométrico y $|K| \subseteq \mathbb{R}^n$ la unión de todos los simplejos de K , $|K|$ es llamada la **realización geométrica** de K . Como hemos mencionado, dado un simplejo es natural asociarle un espacio topológico, dicho espacio topológico será $|K|$ con la topología usual heredada de \mathbb{R}^n .

Así como en esta sección hicimos la convención de simplemente decir “simplejo” en lugar de “simplejo geométrico”, el resto de la sección también diremos simplemente “complejo simplicial” o “complejo” en lugar de “complejo simplicial geométrico”.

Notemos que si L es un subcomplejo geométrico de K , entonces $|L|$ es un subespacio cerrado de $|K|$, pues como $|K|$ y $|L|$ son cerrados en \mathbb{R}^n (pues ya vimos en lema 2.1.11 que los simplejos son cerrados y estos espacios son uniones finitas de cerrados) y un cerrado en $|K|$ es la intersección de un cerrado en \mathbb{R}^n con $|K|$, así se tiene que $|K| \cap |L| = |L|$. En particular si un simplejo $\sigma \in K$ entonces es un subespacio cerrado de $|K|$.

Lema 2.1.17 Una función $f : |K| \rightarrow X$ es continuo si y solo si $f|_{\sigma}$ es continua para cada $\sigma \in K$.

Demostración. \implies] Supongamos que f es continua, observemos entonces que si el subconjunto C es un cerrado en X , $f^{-1}(C)$ es cerrado en $|K|$ por continuidad

de f y además $f|_{\sigma^{-1}(C)} = f^{-1}(C) \cap \sigma$ y como σ es cerrado y $f^{-1}(C)$ también, entonces $f^{-1}|_{\sigma}(C)$ es cerrado, por lo que $f|_{\sigma}$ es continua.

\Leftarrow] Supongamos que $f|_{\sigma}$ es continua para cada $\sigma \in K$, sea $C \subseteq X$ cerrado y observemos que

$$f^{-1}(C) = \bigcup_{\sigma \in K} f|_{\sigma}(C).$$

Como $f|_{\sigma}(C)$ es cerrado para cada σ por continuidad de $f|_{\sigma}$, entonces $f^{-1}(C)$ es unión finita de cerrados (pues K es finito), por lo tanto $f^{-1}(C)$ es cerrado en $|K|$ y entonces f^{-1} es continua. ■

Definición 2.1.18 Si x es un punto en la realización geométrica $|K|$, entonces x está en algún simplejo de K , con ciertos vértices a_0, a_1, \dots, a_m . Así entonces,

$$x = \sum_{i=0}^m t_i a_i, \quad \text{con } t_i \geq 0 \text{ para cada } i \text{ y } \sum_{i=0}^m t_i = 1.$$

Si a es un vértice arbitrario de K , se define la **coordenada baricéntrica** $t_a(x)$ de x con respecto a a , tomando $t_a(x) = 0$ si a no es alguno de los vértices a_0, a_1, \dots, a_m , y $t_a(x) = t_i$, si $a = a_i$.

Lema 2.1.19 Para un vértice a fijo de un complejo simplicial K , la función $t_a(x)$ es continua en $|K|$.

Demostración. En efecto, si σ es un simplejo de K , $t_a|_{\sigma}(x)$ es la función idénticamente cero en σ o bien $t_a|_{\sigma}(x) = t_i(x)$, la cual por el lema 2.1.7 es continua, es decir, $t_a(x)$ es continua en cada simplejo de K . Por lo tanto, por el lema 2.1.17 t_a es continua en $|K|$. ■

Ya que en el lema 2.1.11 se mostró que un simplejo es compacto, y $|K|$ es la unión finita de conjuntos compactos, entonces $|K|$ también es compacto.

2.2. Complejos simpliciales abstractos

Ya que en principio, el complejo simplicial que obtenemos de una gráfica es un complejo simplicial abstracto y no un geométrico, en esta sección se analizará como pasar de un complejo simplicial abstracto a un complejo simplicial geométrico.

Definición 2.2.1 Un **complejo simplicial abstracto** es una colección Δ de conjuntos finitos no vacíos, tal que si S es un elemento de Δ , entonces cualquier subconjunto no vacío de S también lo es.

Los elementos de Δ son llamados **simplejos** de Δ , la **dimensión** de los simplejos es su cardinalidad menos uno, cada subconjunto de un simplejo es llamado una **cara** del simplejo. La **dimensión** de Δ es la dimensión más grande de sus simplejos (como nuestros complejos serán finitos, la dimensión es finita también). El **conjunto de vértices** V de Δ es la unión de los elementos que contienen un solo punto de Δ , o bien sus 0-simplejos. Una subcolección de Δ que es un complejo simplicial abstracto en si mismo, es llamado un **subcomplejo** de Δ .

Definición 2.2.2 *Dos complejos simpliciales abstractos Γ y Δ se dice que son isomorfos si existe una función biyectiva f entre los vértices de Γ y los vértices de Δ tal que si $\{a_0, a_1, \dots, a_m\} \in \Gamma$ entonces $\{f(a_0), f(a_1), \dots, f(a_m)\} \in \Delta$.*

Definición 2.2.3 *Si K es un complejo simplicial geométrico, sea V su conjunto de vértices. Entonces $\mathcal{E}(K)$ será la colección de todos los subconjuntos A de V tal que A genera un simplejo geométrico de K . La colección $\mathcal{E}(K)$ es llamado el **esquema de vértices** de K .*

Una observación importante es que la colección \mathcal{E} es un ejemplo de un complejo simplicial abstracto que da lugar al siguiente teorema.

Teorema 2.2.4 *Cualquier complejo simplicial abstracto Δ es isomorfo al esquema de vértices de algún complejo simplicial geométrico K .*

Demostración. Sea V el conjunto de vértices de Δ y $f : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ (con N lo suficientemente grande) una función que manda el conjunto de vértices V a un conjunto geoméricamente independiente, esto es posible, ya que como el conjunto de vértices de Δ es finito, supongamos $m \in \mathbb{N}$, bastan escoger $n = m$ para poder tener un conjunto geoméricamente independiente. Observemos que si K es el conjunto que contiene a todos los simplejos generados por $f(A)$ para cada A simplejo de Δ , entonces K es un complejo simplicial geométrico. En efecto, sea σ un simplejo de K , entonces está generado por algún conjunto geoméricamente independiente $f(A)$ con A un simplejo de Δ . Ahora, una cara de σ está generada por algún subconjunto de $f(A)$, supongamos $\{f(a_0), f(a_1), \dots, f(a_k)\} \subseteq f(A)$, entonces $A' = \{a_0, a_1, \dots, a_k\} \subseteq A$ y como el conjunto $f(A)$ es geoméricamente independiente entonces $f(A')$ también lo es, por lo tanto la cara de σ generada por $f(A')$ es un simplejo de K . Luego veamos que la intersección de dos simplejos σ y τ de K es una cara de ambos. Supongamos que σ está generado por el conjunto $A = \{f(a_0), f(a_1), \dots, f(a_m)\}$ y que τ está generado por el conjunto $B = \{f(b_0), f(b_1), \dots, f(b_r)\}$. Si $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$ entonces necesariamente $A \cap B \neq \emptyset$, porque de no ser así la intersección de σ y τ sería vacía pues $f(V)$ es un conjunto geoméricamente independiente, por lo que $f(A)$ y $f(B)$ también lo son. Esto

último implicaría que $f(A) \cap f(B) = \emptyset$ y por tanto $\sigma \cap \tau = \emptyset$, así $A \cap B \neq \emptyset$ y además $f(A) \cap f(B) \neq \emptyset$, por lo que $f(A) \cap f(B) \subseteq \sigma \cap \tau$. Observemos que si γ es el simplejo generado por $f(A) \cap f(B)$ entonces $\gamma = \sigma \cap \tau$ pues como la intersección de conjuntos convexos es un conjunto convexo, entonces $\sigma \cap \tau$ es de hecho el conjunto convexo más pequeño que contiene a $f(A) \cap f(B)$ (y por el lema 2.1.12 implica $\gamma = \sigma \cap \tau$), pues en caso de no serlo debe existir $x \in \sigma \cap \tau$ tal que

$$x = \sum_{i=0}^m t_i f(a_i) \quad \text{con} \quad \sum_{i=0}^m t_i = 1, \quad (2.2)$$

donde al menos uno de los $t_i > 0$ con $f(a_i) \in f(A) - f(B)$. O bien

$$x = \sum_{i=0}^r s_i f(b_i) \quad \text{con} \quad \sum_{i=0}^r s_i = 1, \quad (2.3)$$

donde al menos uno de los $s_i > 0$ con $f(b_i) \in f(B) - f(A)$. Si consideramos que se cumple (2.2), se tendría que x no puede estar en τ (lo cual es una contradicción pues se supuso $x \in \sigma \cap \tau$) porque por el lema 2.1.12 τ es el conjunto convexo mas pequeño que contiene a $f(B)$ pero resulta que x no puede ser expresado como combinación convexa de los elementos de $f(B)$. Similarmente si suponemos que se cumple (2.3) se llega a una contradicción. Así concluimos que $\gamma = \sigma \cap \tau$, es decir, la intersección de dos simplejos es una cara de ambos.

Para finalizar, se observa que el esquema de vértices $\mathcal{E}(K)$ de K es isomorfo al complejo simplicial abstracto Δ por definición de f . ■

Lo que se hace en la prueba del teorema anterior es mandar todos los vértices de un complejo simplicial abstracto a un conjunto geoméricamente independiente, pero veamos que esto no es necesario en ocasiones. Consideremos la gráfica G de la figura 2.4 que es conocido como un diamante, y consideremos el complejo simplicial de completas $\Delta(G)$. Sean $f, g : V(G) \rightarrow \mathbb{R}^2$ dadas por

$$\begin{aligned} f(a) &= (0, 2) & g(a) &= (2, 2) \\ f(b) &= (2, 0) & g(b) &= (2, -1) \\ f(c) &= (-2, 0) & g(c) &= (0, 0) \\ f(d) &= (0, -2) & g(d) &= (1, 1). \end{aligned}$$

Observemos entonces que f nos define un complejo simplicial en \mathbb{R}^2 tal que el esquema de vértices de dicho complejo es isomorfo a $\Delta(G)$, ya que los clanes de G son $\{a, b, c\}$ y $\{b, c, d\}$ y sus respectivas imágenes son $\{(0, 2), (2, 0), (-2, 0)\}$ y $\{(2, 0), (-2, 0), (0, -2)\}$, ambos conjuntos son geoméricamente independientes, todo subconjunto generado por ellos es un simplejo y la intersección de cualesquiera dos simplejos es una cara de cada uno de ellos. Ver figura 2.5, del lado izquierdo

para observar el complejo simplicial generado) pero $f(V(G))$ no es un conjunto geoméricamente independiente; sin embargo, hay tener cuidado, ya que por ejemplo, la función g no define un complejo simplicial cuyo esquema de vértices es isomorfo a $\Delta(G)$, pues la intersección de los dos 2-simplejos que se generan no es una cara de cada uno de ellos.

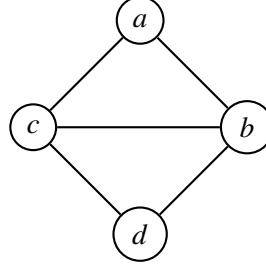


Figura 2.4: Gráfica conocida como diamante.

Recordando que dos espacios topológicos X y Y son homeomorfos si existe una función $f : X \rightarrow Y$ tal que f es biyectiva, continua y cuya función inversa f^{-1} es continua.

Teorema 2.2.5 Sean Δ un complejo simplicial abstracto con conjunto de vértices $V = \{a_0, a_1, \dots, a_m\}$, K_1 y K_2 complejos simpliciales, tal que sus esquemas de vértices $\mathcal{E}(K_1)$ y $\mathcal{E}(K_2)$ respectivamente son isomorfos a Δ , y supongamos que $f : V \rightarrow \mathbb{R}^{n_1}$ y $g : V \rightarrow \mathbb{R}^{n_2}$ son isomorfismos de Δ a $\mathcal{E}(K_1)$ y de Δ a $\mathcal{E}(K_2)$ respectivamente. Entonces K_1 es homeomorfo a K_2 .

Demostración. Observemos que dado un punto $x \in K_1$, es de la forma

$$\sum_{i=0}^m t_i f(a_i), \quad \text{con } \sum_{i=0}^m t_i = 1,$$

donde los t_i son las coordenadas baricéntricas de x . Y si $y \in K_2$ es de la forma

$$\sum_{i=0}^m s_i g(a_i), \quad \text{con } \sum_{i=0}^m s_i = 1,$$

donde los s_i son las coordenadas baricéntricas de y . Así entonces sea $F : K_1 \rightarrow K_2$ definida de la siguiente forma, si $x \in K_1$

$$F(x) = \sum_{i=0}^m t_i g(a_i).$$

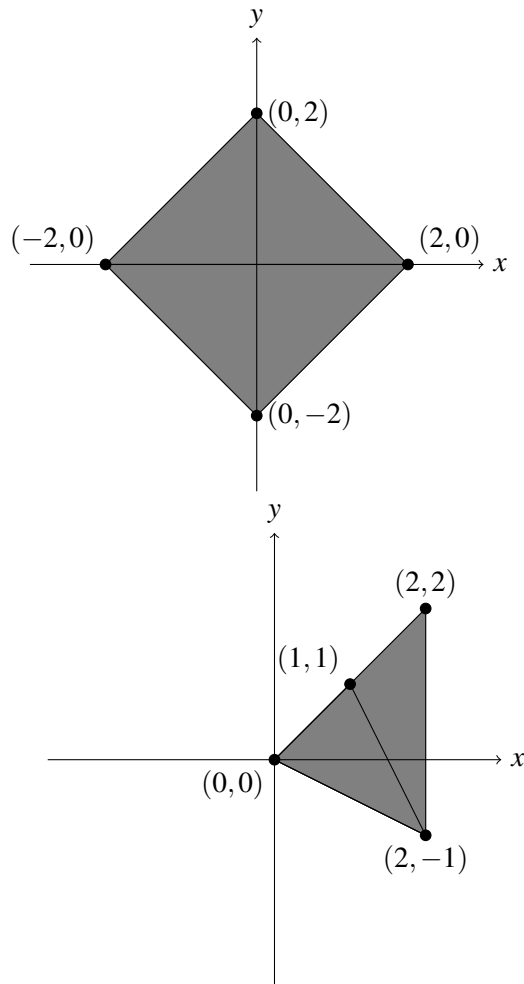


Figura 2.5: Un complejo simplicial y otro que no lo es.

Veamos que F es biyectiva y continua, sean $x_1, x_2 \in K_1$ tales que $F(x_1) = F(x_2)$, entonces

$$\sum_{i=0}^m t_i(x_1)g(a_i) = \sum_{i=0}^m t_i(x_2)g(a_i).$$

Como la representación de un elemento en K_2 es única entonces $x_1 = x_2$, ahora si $y \in K_2$, entonces

$$y = \sum_{i=0}^m s_i g(a_i),$$

entonces para $x = \sum_{i=0}^m s_i f(a_i) \in K_1$ se sigue que $F(x) = y$, por lo que F es biyectiva.

Para la continuidad observemos que F es una combinación lineal de las coordenadas baricéntricas, las cuales son continuas, por lo tanto F es continua. Finalmente notemos que $G : K_2 \rightarrow K_1$ definida como

$$G(y) = G\left(\sum_{i=0}^m s_i g(a_i)\right) = \sum_{i=0}^m s_i f(a_i),$$

es justamente la función inversa de F , y de forma similar se puede mostrar que es continua. Mostrando que en efecto K_1 y K_2 son homeomorfos. ■

Definición 2.2.6 Sea Δ un complejo simplicial abstracto. La **realización geométrica** de Δ la denotamos por $|\Delta|$ y es el complejo simplicial geométrico cuyo esquema de vértices es isomorfo a Δ .

Entonces, lo que nos interesa en esta tesis es que dada una gráfica G le podemos asociar el complejo simplicial abstracto de completas $\Delta(G)$, y a este asociarle un espacio topológico de \mathbb{R}^n , es decir, su realización geométrica que denotamos por $|\Delta(G)|$ así como hemos mostrado en los teoremas anteriores.

Por ejemplo, en la figura 2.6 tenemos una gráfica G y su realización geométrica $|\Delta(G)|$.

2.3. Homotopía

Definición 2.3.1 Dos espacios topológicos X y Y son llamados **homeomorfos** si existe una función $f : X \rightarrow Y$ tal que f es biyectiva, continua, y su función inversa $f^{-1} : Y \rightarrow X$ es continua. Dicha función f es llamada un **homeomorfismo** de X a Y .

Cuando dos espacios topológicos son homeomorfos, se suele decir que son iguales.

Vamos a denotar por I al intervalo $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ con la topología usual.

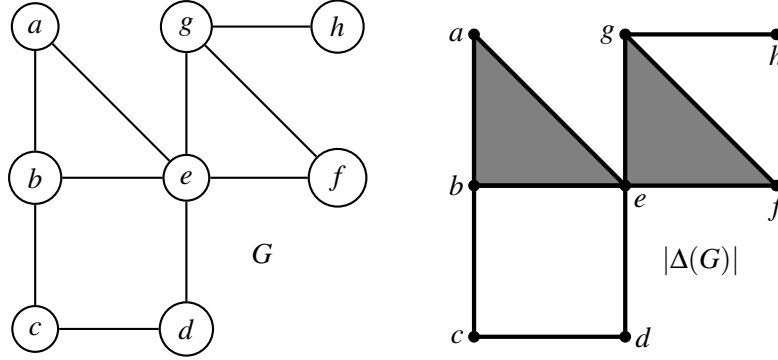


Figura 2.6: Una gráfica G y su realización geométrica $|\Delta(G)|$.

Definición 2.3.2 Sean X y Y dos espacios topológicos. Sean $f, g: X \rightarrow Y$ dos funciones continuas. Una **homotopía** entre las funciones f y g es una función continua $H: X \times I \rightarrow Y$ tal que

- $H(x, 0) = f(x)$ para todo $x \in X$,
- $H(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in X$.

Si existe una homotopía entre f y g decimos que son homotópicas, y lo denotamos por $f \simeq g$.

Recordemos que significa que dos espacios sean homotópicos.

Definición 2.3.3 Sean X, Y dos espacios y $f: X \rightarrow Y$ una función continua. Decimos que f es una **equivalencia homotópica** si existe $g: Y \rightarrow X$ continua tal que la composición $g \circ f \simeq 1_X$ (es decir, la función identidad en X) y $f \circ g \simeq 1_Y$. Si existe una equivalencia homotópica entre X y Y , decimos que son **homotópicos**, o que tienen el mismo tipo de homotopía, y lo denotamos por $X \simeq Y$.

Por ejemplo, si dos espacios topológicos X y Y son homeomorfos, entonces son homotópicos, pues existe una función $f: X \rightarrow Y$ que es continua, biyectiva y cuya función inversa $g = f^{-1}$ es continua. Por lo tanto $(g \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$, es decir, $g \circ f = 1_X$. Y por otro lado $(f \circ g)(y) = f(f^{-1}(y)) = y$, es decir, $f \circ g = 1_Y$. Concluyendo que X y Y son homotópicos.

Definición 2.3.4 Decimos que un espacio topológico X es **contraíble** si es homotópico a un punto.

Por ejemplo, un disco en \mathbb{R}^n es contraíble. Un disco en \mathbb{R}^n lo podemos representar de la forma

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq c, c > 0\}.$$

Sean $X = D$ y $Y = \{0\}$ Sea $f : D \rightarrow \{0\}$ dada por $f(x) = 0$ y $g : \{0\} \rightarrow D$ dada por $g(y) = 0$. Entonces $g \circ f = 0$ y $f \circ g = 0$.

Entonces $H : D \times I \rightarrow D$ dada por $H(x, t) = tx$. Es continua, pues es multiplicación de funciones continuas, luego $H(x, 0) = 0 = f(x)$ y $H(x, 1) = x = 1_X$, por lo tanto $f \simeq 1_X$.

Similarmente si $H : \{0\} \times I \rightarrow \{0\}$ dada por $H(y, t) = ty$. Ésta es continua, pues es multiplicación de funciones continuas, luego tenemos $H(y, 0) = 0 = g(y)$ y también $H(y, 1) = y = 1_Y$, por lo tanto $g \simeq 1_Y$.

Concluyendo que D es homotópico a un punto.

De forma gráfica y coloquial, se entiende que un disco es homotópico a un punto, pues se puede deformar e ir haciendo más pequeño de forma continua hasta llevarlo a un solo punto (ver figura 2.7).

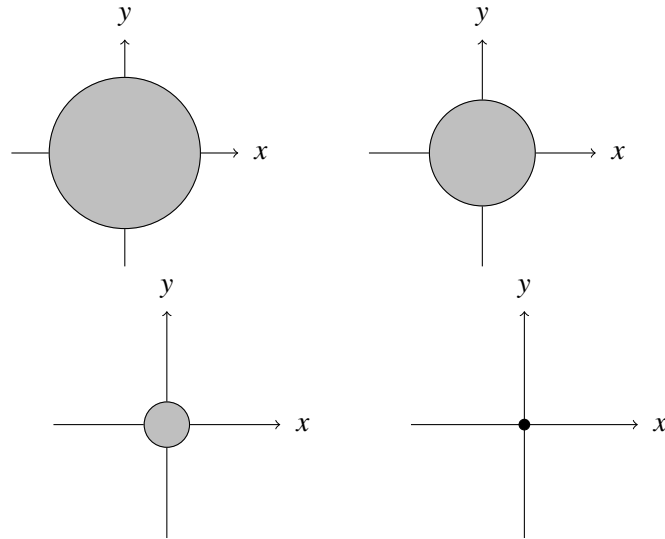


Figura 2.7: Deformación de un disco en \mathbb{R}^2 .

Capítulo 3

Gráficas de clanes y gráficas clan Helly

3.1. Gráficas de clanes

Definición 3.1.1 Decimos que q es un **clan** de una gráfica G si es una completa maximal de G . Es decir, q es tal que es completa y no existe otro vértice en $V(G) - V(q)$ que sea adyacente a todos los vértices de q .

Definición 3.1.2 Sea G una gráfica. La **gráfica de clanes** $K(G)$ de G , es tal que:

- El conjunto de vértices $V(K(G))$ está conformado por los clanes de G .
- Y decimos que dos clanes diferentes q_1, q_2 son adyacentes si se cumple que $V(q_1) \cap V(q_2) \neq \emptyset$.

A su vez, podemos obtener la gráfica de clanes de $K(G)$, es decir, $K(K(G))$, para simplificar la notación se denota por $K^2(G)$. En general podemos hacer este proceso sucesivamente, y definimos

$$K^n(G) = K(K^{n-1}(G))$$

para $n \geq 1$, donde $K^0(G) = G$. K es conocido como el **operador de clanes** en gráficas.

Veamos un ejemplo de cómo funciona el operador de clanes. Consideremos la gráfica G con conjunto de vértices $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y conjunto de aristas $E(G) = \{13, 14, 34, 24, 25, 45, 36, 56\}$ (ver figura 3.1). Así veamos que los clanes de G son $q_1 = \{1, 3, 4\}$, $q_2 = \{2, 4, 5\}$, $q_3 = \{3, 6\}$, $q_4 = \{5, 6\}$ y entonces la

gráfica $K(G)$ tiene como conjunto de vértices $V(K(G)) = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$ y como conjunto de aristas:

$$E(K(G)) = \{q_1q_2, q_1q_3, q_2q_4, q_3q_4\}.$$

Ahora, veamos que $K^2(G)$ tiene como conjunto de vértices

$$V(K^2(G)) = \{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\},$$

donde $Q_1 = \{q_1, q_2\}$, $Q_2 = \{q_2, q_4\}$, $Q_3 = \{q_3, q_4\}$, $Q_4 = \{q_1, q_3\}$ y como conjunto de aristas tenemos $E(K^2(G)) = \{Q_1Q_2, Q_2Q_3, Q_3Q_4, Q_1Q_4\}$. En la figura 3.1 podemos ver unos dibujos de G , $K(G)$ y $K^2(G)$. Se puede observar que $K^2(G)$ resulta ser isomorfa a $K(G)$.

Notemos también que los clanes q_1 y q_2 en la gráfica G de la figura 3.1 son isomorfos, sin embargo, nos dan origen a vértices distintos en la gráfica de clanes. Es decir, a pesar de que pudiera suceder que muchos de los clanes en una gráfica fueran isomorfos no nos simplifica el comportamiento de la gráfica de clanes, pues en la gráfica de clanes cada clan nos da origen a un vértice distinto.

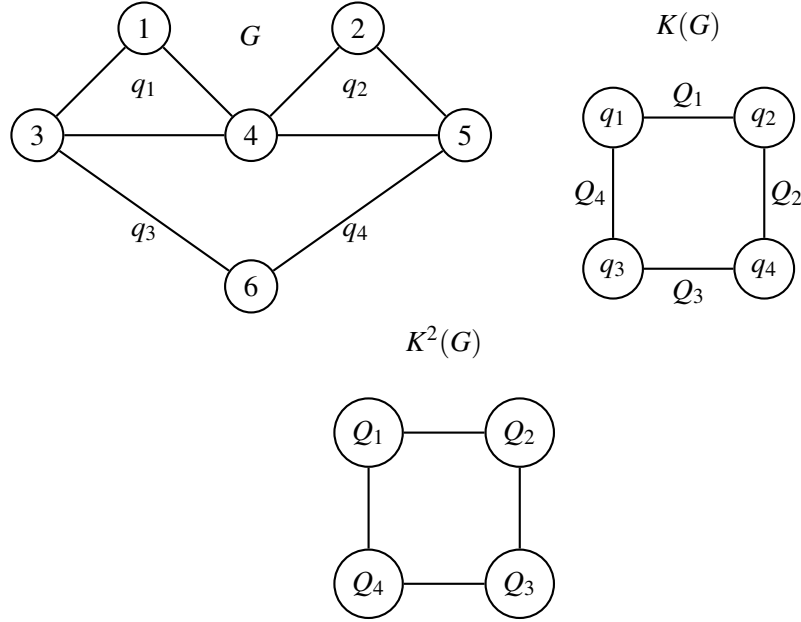


Figura 3.1: G , $K(G)$ y $K^2(G)$.

El siguiente lema es de ayuda en ocasiones para identificar clanes en una gráfica.

Lema 3.1.3 Sea G una gráfica y x un vértice tal que $N(x)$ es una completa. Entonces $q = N(x) \cup \{x\}$ es un clan de G .

Demostración. Por definición de vecindad, x es vecino de todos los vértices en $N(x)$, y por hipótesis $N(x)$ es una completa, entonces $q = N(x) \cup \{x\}$ es una completa. Supongamos que q no es un clan, entonces existe un vértice $y \notin V(q)$ tal que es vecino de todos los vértices en q , en particular de x , por lo que $y \in N(x)$, lo cual implica $y \in V(q)$, esto es una contradicción, la cual viene de suponer que q no es un clan. Por lo tanto q es un clan de G . ■

3.1.1. Octaedros

Los octaedros son una clase de gráficas que nos servirán como ejemplos en ciertas situaciones más adelante.

Primero, daremos la definición del complemento de una gráfica, y de un conjunto independiente en una gráfica.

Definición 3.1.4 Si G es una gráfica, su complemento \overline{G} , es la gráfica cuyo conjunto de vértices es el mismo que el de G y dos vértices distintos de \overline{G} son adyacentes si no son adyacentes en G . (Ver ejemplo en la figura 3.2).

Definición 3.1.5 Un **conjunto independiente** en una gráfica G es un subconjunto de $V(G)$ tal que no hay vértices adyacentes en dicho subconjunto.

Por ejemplo, si consideramos la gráfica G de la figura 3.2, el conjunto de puntos $\{b, d, f\}$ es un conjunto independiente en dicha gráfica, pues ningún par de vértices en $\{b, d, f\}$ son vecinos.

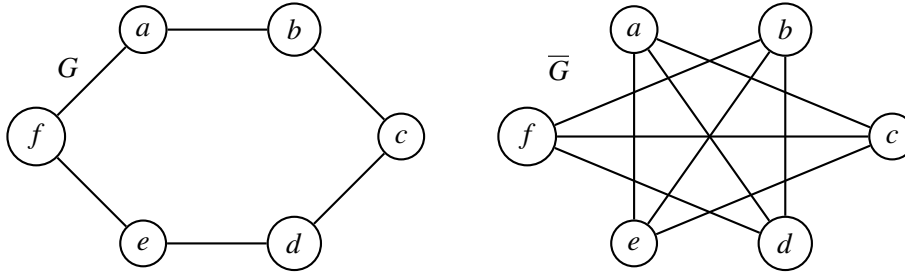


Figura 3.2: Una gráfica y su complemento.

Recordemos que K_2 es la gráfica completa de dos vértices. Cuando escribimos nK_2 para algún $n \in \mathbb{N}$, nos referimos a la gráfica que tiene n componentes conexas, donde cada componente conexa es K_2 . Se pueden observar algunos ejemplos en la figura 3.3.

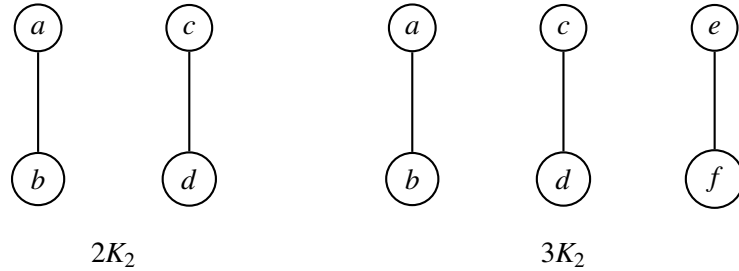


Figura 3.3: Dibujos de $2K_2$ y $3K_2$.

Definición 3.1.6 Para $n \in \mathbb{N}$ se denota como O_n al octaedro que es el complemento de nK_2 , es decir, $O_n = \overline{nK_2}$.

En la figura 3.4 se muestran los octaedros O_1 , O_2 y O_3 .

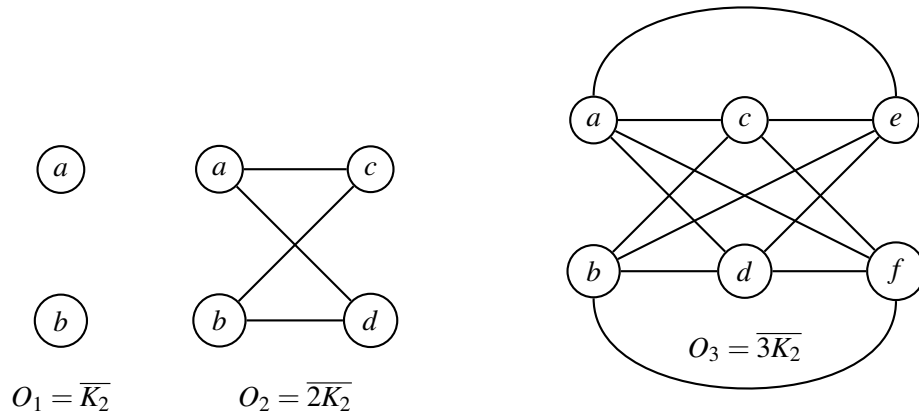


Figura 3.4: Dibujos de O_1 , O_2 y O_3 .

Observemos que un clan en O_n se corresponde con un conjunto independiente maximal en nK_2 . Dichos conjuntos independientes se obtienen tomando un solo vértice en cada componente conexas de nK_2 . Entonces, hay 2^n maneras diferentes de escoger esos vértices, por lo tanto O_n tiene 2^n clanes. Notemos entonces, que O_n tiene $2n$ vértices, es decir, la cantidad de vértices crece de forma lineal conforme n crece, pero la cantidad de clanes crece de forma exponencial. Ésto nos da indicios de que calcular los clanes de una gráfica es un problema computacionalmente difícil, pues el hecho de tratar de contarlos resulta en una cantidad exponencial (en función del número de vértices) en el caso de los octaedros.

Por otro lado, también hay clases de gráficas cuyo número de clanes no crece de forma exponencial. Un ejemplo de ello son los árboles. Ya que, como se mostró en el capítulo 1, un árbol con n vértices, tiene $n - 1$ aristas. En este caso las aristas son sus clanes, pues como un árbol es una gráfica que no tiene ciclos, en particular no puede tener ciclos de tres vértices, es decir, no existen tres vértices adyacentes entre sí, por lo tanto las completas de un árbol deben ser sus aristas. Notando así que un árbol con n vértices tiene $n - 1$ clanes, es decir, conforme el número de vértices en esta clase de gráficas crece de forma lineal, el número de clanes también.

Así entonces, podemos decir que en general, determinar la lista de todos los clanes en una gráfica es un problema computacionalmente difícil. Es decir, existen clases de gráficas donde es computacionalmente difícil enumerar los clanes y otras donde es computacionalmente fácil.

3.2. Gráficas clan Helly

Las gráficas clan Helly tienen propiedades relevantes respecto a su tipo de homotopía, es por eso el interés de estudiarlas.

En la siguiente definición se usa una convención usual en gráficas que es identificar las subgráficas por medio de sus vértices, por ejemplo, si F y G son subgráficas inducidas de una gráfica H identificaremos como $F \cap G$ a la subgráfica inducida de H cuyos vértices son $V(F) \cap V(G)$. En el caso de los clanes de una gráfica, es conveniente identificar a los clanes ya sea como conjuntos de vértices o bien como subgráficas inducidas (ver definición 1.1.4 de subgráfica inducida).

Definición 3.2.1 Gráfica clan Helly. Decimos que una colección C de subconjuntos de un conjunto X es **intersecante** si cualesquiera dos elementos de C tienen intersección no vacía. Una colección C tiene la **propiedad de Helly** si toda subcolección intersecante $C' \subseteq C$ satisface que $\bigcap C' \neq \emptyset$. Se dice que una gráfica G es **clan Helly** si la colección de clanes de G tiene la propiedad de Helly.

Podría pensarse que verificar que una gráfica G tiene la propiedad de Helly es computacionalmente difícil, pues habría que comprobar que toda colección intersecante de clanes tiene intersección no vacía y obtener los clanes de una gráfica es computacionalmente difícil como ya se discutió al final de la sección 3.1.1. Sin embargo, más adelante veremos un criterio, el cual nos proporciona un algoritmo polinomial para determinar si una gráfica es clan Helly, dicho resultado es conocido como el criterio del triángulo extendido.

Observemos que las gráficas de la figura 3.5 no son clan Helly, pues en todos los casos los triángulos (es decir, subgráficas completa con tres vértices)

$$T_1 = \{y_2, x_3, x_2\}, T_2 = \{x_3, y_3, x_1\}, T_3 = \{x_1, x_2, x_3\}, T_4 = \{x_1, x_2, y_1\}$$

forman una subcolección intersecante de los clanes de cada gráfica y resulta que

$$\bigcap_{i=1}^4 T_i = \emptyset.$$

Por lo tanto, ninguna de las gráficas de la figura 3.5 es clan Helly. Por otro lado, como veremos más adelante, las gráficas sin triángulos son clan-Helly. En particular, la clase de los árboles es una clase de gráficas grande contenida en la clase de gráficas clan-Helly.

Nota 3.2.2 Si C es una colección intersecante tal que $\bigcap C = \emptyset$ entonces $|C| \geq 3$. Pues si C solo tuviese un elemento (digamos q) se tiene que $\bigcap C = q \neq \emptyset$. Y si solo tuviese dos elementos, como es una colección intersecante entonces cualesquiera dos elementos de C tienen intersección no vacía, por lo que tampoco es posible que $\bigcap C = \emptyset$.

Teorema 3.2.3 Una gráfica G con cinco vértices o menos es clan Helly.

Demostración. Supongamos que G no es clan Helly, entonces existe una colección intersecante Q de clanes de G que tiene intersección vacía. Sea $Z \subseteq Q$ minimal con tal propiedad, es decir, que $\bigcap Z = \emptyset$ y para todo $q \in Z$ se cumple $\bigcap (Z - \{q\}) \neq \emptyset$ (observar que Z debe tener al menos cardinalidad tres por la nota 3.2.2).

Supongamos que $Z = \{q_1, q_2, \dots, q_r\}$, y consideremos $x_i \in \bigcap (Z - \{q_i\})$ para $i = 1, 2, \dots, r$. Observemos que los x_i deben ser distintos entre sí, porque si algún par de ellos fuesen iguales, supongamos $x_\ell = x_k$ con $\ell, k \in \{1, 2, \dots, r\}$ y $\ell \neq k$, entonces como $x_k \in \bigcap (Z - \{q_k\})$ y como $x_k = x_\ell$ entonces $x_k \in \bigcap (Z - \{q_\ell\})$, esto implica que $x_k \in \bigcap Z \neq \emptyset$ lo cual sería una contradicción. Además notese que los x_i forman una completa, ya que si $x_i \neq x_j$, y como Z tiene al menos tres elementos entonces $x_i, x_j \in q_k$ para algún $k \neq i, k \neq j$. Ahora, cada clan de Z debe tener al menos r vértices, pues si $q_j \in Z$, q_j contiene a todos los x_i excepto a x_j y si q_j tuviese solo $r - 1$ elementos, como x_j es vecino del resto de los x_i entonces $q_j \cup \{x_j\}$ sería una completa que contiene propiamente a q_j , lo cual estamos suponiendo que no pasa pues q_j es un clan. Entonces, para cada $q_j \in Z$ debe existir un $y_j \in q_j$ distinto de los x_i , pero además podemos suponer que los y_i son distintos entre ellos, pues si se diera el caso de que tuviéramos $y_j \in q_j$ (distinto de los x_i) y $y_k \in q_k$ (distinto de los x_i) con $y_j = y_k = y$, entonces x_k sería vecino de todos los elementos de q_k y entonces $q_k \cup \{x_k\}$ es una completa que contiene propiamente al clan q_k , lo cual es una contradicción. Por lo cual, podemos suponer también que los y_k son distintos entre sí.

Finalmente observemos que entonces $|G| \geq r + r$ pues todos los x_i y los y_i son distintos entre sí y de cada uno de ellos se tienen r elementos, ahora, como Z tiene

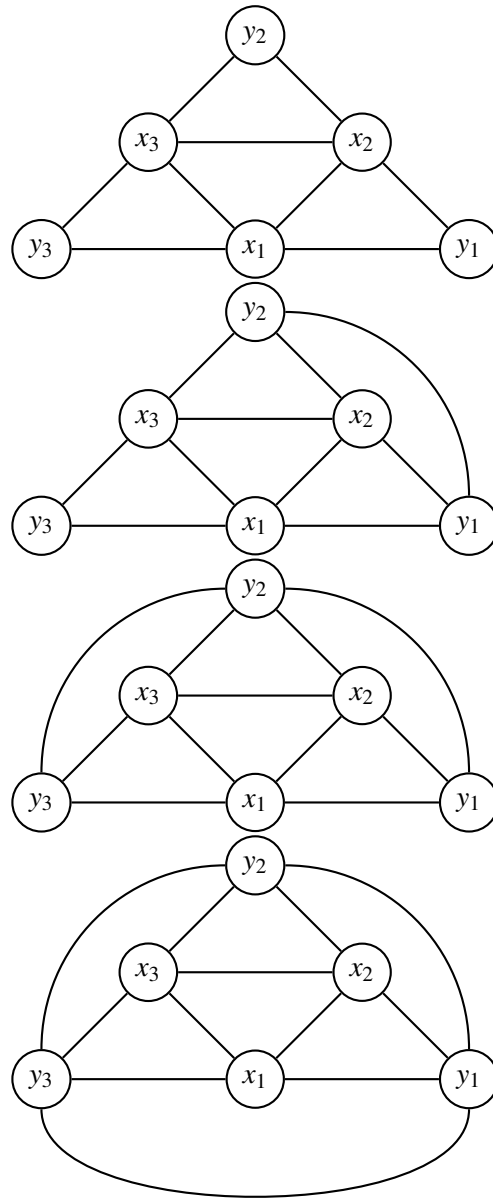


Figura 3.5: Gráficas de 6 vértices que no son clan Helly.

al menos cardinalidad 3, entonces $|G| \geq 3 + 3 = 6$, es decir, si G no es clan Helly entonces debe tener al menos seis vértices, lo cual implica que todas las gráficas de cinco o menos vértices son clan Helly. ■

Definición 3.2.4 Sea T un triángulo en la gráfica G . El **triángulo extendido** \hat{T} se define como la subgráfica de G inducida por los vértices que son vecinos de al menos dos vértices de T .

Lema 3.2.5 Sea G una gráfica, T un triángulo en G y definamos

$$Q = \{q \in K(G) : |q \cap T| \geq 2\}.$$

Entonces $x \in \hat{T}$ si y solo si $x \in q$ para algún $q \in Q$.

Demostración. \Rightarrow] Si $x \in \hat{T}$ entonces por definición de \hat{T} , se tiene que x es adyacente a al menos dos de los vértices de T y dichos vértices son adyacentes entre ellos, por lo tanto x y dos de los vértices de T forman un triángulo. Dicho triángulo podría ser un clan de G , pero en caso de no serlo está contenido en uno, el cual tiene al menos dos vértices de T y contiene a x , por lo tanto está en Q , es decir, el vértice $x \in q$ para algún $q \in Q$.

\Leftarrow] Si $x \in q$ para algún $q \in Q$, entonces $|q \cap T| \geq 2$. Puede pasar que $x \in T$, pero si eso pasa entonces ya tenemos $x \in \hat{T}$. Si $x \notin T$, como $|q \cap T| \geq 2$ y $x \in q$, se sigue que x es adyacente a al menos dos vértices de T , por lo tanto $x \in \hat{T}$. ■

A continuación se incluye un resultado que demuestran Dragan [3], e independientemente, Szwarcfiter [11]. Este resultado es conocido como el **criterio del triángulo extendido**.

Teorema 3.2.6 (Dragan 1989, Szwarcfiter 1997). Una gráfica G es clan Helly si y solo si todo triángulo T de G es tal que \hat{T} es un cono.

Demostración. \Rightarrow] Supongamos que G es clan Helly y sea T un triángulo de G . Sea además Q como en el lema 3.2.5. Notemos que Q es una colección intersecante, pues todo $q \in Q$ contiene al menos dos vértices de T , por lo cual dos clanes en Q tienen al menos un vértice de T en común. Luego, como G es clan Helly entonces $\bigcap Q \neq \emptyset$. Sea $x_0 \in \bigcap Q$, por el lema 3.2.5 se tiene que $x_0 \in \hat{T}$. Ahora sea $x \in \hat{T}$ con $x \neq x_0$, de nuevo, por el lema 3.2.5 $x \in q$ para algún $q \in Q$ y como $x_0 \in \bigcap Q$, entonces $x \sim x_0$, es decir, \hat{T} es un cono con ápice en x_0 .

\Leftarrow] Supongamos que \hat{T} es un cono para todo triángulo T de G . La prueba se realizará por reducción al absurdo. Supongamos entonces que C es una colección intersecante de clanes de G tal que $\bigcap C = \emptyset$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que C es minimal (o sea, que si $q \in C$, entonces $\bigcap (C - q) \neq \emptyset$). Por la

nota 3.2.2 sabemos que $|C| \geq 3$. Sean $q_1, q_2, q_3 \in C$ diferentes entre sí. Como C es minimal entonces para cada $i = 1, 2, 3$ existe $x_i \in \bigcap (C - q_i)$. En el resto de la demostración usaremos dos afirmaciones que demostraremos al final.

Afirmación 1: Se tiene que $|\{x_1, x_2, x_3\}| = 3$. Observemos que el conjunto de vértices $T = \{x_1, x_2, x_3\}$ forman un triángulo, porque $x_1, x_2 \in q_3$, $x_1, x_3 \in q_2$ y $x_2, x_3 \in q_1$, por lo cual $x_1 \sim x_2$, $x_1 \sim x_3$ y $x_2 \sim x_3$. Por hipótesis \hat{T} es un cono, con cierto ápice $x_0 \in G$. Sean $q \in C$ y $y \in q$ con $y \neq x_0$.

Afirmación 2: El vértice y es vecino de al menos dos elementos de T . Ésta última afirmación implica que $y \in \hat{T}$ y como x_0 es ápice de \hat{T} , entonces $y \sim x_0$, es decir, hemos probado que $q \cup \{x_0\}$ es completa para todo $q \in C$, lo cual es una contradicción a menos que $x_0 \in q$ para todo $q \in C$. Pero eso también es una contradicción pues se tendría $x_0 \in \bigcap C = \emptyset$. Por lo tanto, G es clan Helly. ■

Prueba de la afirmación 1 en teorema 3.2.6: Si pasara que $x_1 = x_2$ se tendría que $x_1 \in q_1$, pues $x_2 \in \bigcap (C - q_2)$, como consecuencia $x_1 \in \bigcap C$, lo cual es una contradicción, pues se supuso que $\bigcap C = \emptyset$. Similarmente, se llega a una contradicción si suponemos que $x_1 = x_3$ o si $x_2 = x_3$.

Prueba de la afirmación 2 en teorema 3.2.6: Si $q \in \{q_1, q_2, q_3\}$ tendría al menos dos vértices del triángulo T pues cada q_i , $i = 1, 2, 3$ tiene al menos dos vértices de T , por lo que se cumpliría la afirmación. Y si $q \in (C - \{q_1, q_2, q_3\})$ entonces $x_1, x_2, x_3 \in q$ por lo cual también y sería vecino de al menos dos vértices de T .

El teorema 3.2.6 nos proporciona un algoritmo polinomial en el número de vértices que reconoce si una gráfica es clan Helly. Pues una gráfica con n vértices tiene cuando mucho $\binom{n}{3}$ triángulos. Para cada triángulo T el triángulo extendido \hat{T} se puede construir en tiempo lineal (recorriendo una sola vez la lista de vértices). Finalmente, que una gráfica es un cono igualmente se puede reconocer en tiempo lineal.

El siguiente es el teorema de Dowker, el cual se aceptará sin demostración. Una referencia es [6], Theorem 10.9.

Teorema 3.2.7 (Teorema de Dowker). Sea $B = (X, Y)$ una gráfica bipartita, donde todas las aristas de B tienen un vértice en X y otro en Y . Definimos los complejos simpliciales Δ_X y Δ_Y como sigue:

1. Un simplejo $\sigma \in \Delta_X$ consiste de un subconjunto de X tal que existe un elemento $y \in Y$ con $xy \in E(B)$ para todo $x \in \sigma$.
2. Un simplejo $\sigma \in \Delta_Y$ consiste de un subconjunto de Y tal que existe un elemento $x \in X$ con $yx \in E(B)$ para todo $y \in \sigma$.

Entonces, $\Delta_X \simeq \Delta_Y$, es decir, Δ_X y Δ_Y son homotópicos.

Recordemos que en el capítulo 2 se definió el complejo simplicial de completas $\Delta(G)$ de una gráfica G (definición 2.0.1). El siguiente resultado involucra este complejo simplicial, además de que es un resultado importante y elemental en cuanto al estudio de las gráficas homotópicamente invariantes, ya que las gráficas clan Helly resultan ser una clase grande de gráficas que son homotópicas a su gráfica de clanes.

Teorema 3.2.8 *Teorema de equivalencia homotópica para gráficas clan Helly (Prisner [10]). Sea G una gráfica clan Helly, entonces $G \simeq K(G)$.*

Demostración. Definamos la gráfica bipartita $B = (X = V(G), Y = V(K(G)))$, donde se declara a $x \in G$ como adyacente a $q \in K(G)$ si $x \in q$.

Observemos que toda completa en G está contenida en un clan de G , y además si $\sigma \in \Delta_X$ y $x, y \in \sigma$, entonces existe $q \in K(G)$ tal que $x, y \in q$, y como q es un clan de G , entonces $x \sim y$, es decir, cualquier par de elementos en σ son adyacentes, o sea que σ es una completa de G , por lo que $\Delta_X = \Delta(G)$.

Por otro lado, si $\sigma \in \Delta_Y$, existe un $x \in V(G)$ tal que cualquier elemento de σ contiene a x , por lo tanto σ consiste de una completa de $K(G)$, ahora una completa de $K(G)$ es una subcolección intersecante de G y como G es clan Helly entonces dicha subcolección se interseca en al menos un vértice de G por lo que se cumple $\Delta_Y = \Delta(K(G))$.

Así concluimos por el teorema 3.2.7 que $G \simeq K(G)$. ■

Dada la construcción de la gráfica bipartita, en la demostración anterior es conveniente que podemos identificar al complejo Δ_Y como $\Delta(K(G))$ usando que la gráfica G es clan Helly. En el capítulo siguiente aplicaremos la misma construcción de la gráfica bipartita al caso en el que G no es necesariamente clan Helly. En tal caso, Δ_Y no es igual a $\Delta(K(G))$, sin embargo buscaremos condiciones que garanticen que éstos dos últimos complejos sean homotópicos.

Definición 3.2.9 *Sea G una gráfica y x un vértice de G , denotaremos con x^* al siguiente conjunto*

$$x^* = \{q \in K(G) : x \in q\}.$$

A x^ se le llama la **estrella** de x .*

Otro resultado importante es el siguiente, mostrado por Escalante [4].

Teorema 3.2.10 (Escalante 1973). *Si G es una gráfica clan Helly, entonces $K(G)$ es clan Helly.*

Demostración. Primero observemos lo siguiente: Si G es clan Helly, y el conjunto $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_s\} \in K^2(G)$, es decir, Q es un clan de $K(G)$, entonces Q es una colección intersecante de clanes, por lo que existe $x \in \cap Q$. Notemos que en general x^* es una completa de $K(G)$, sin embargo, no necesariamente es un clan de la gráfica $K(G)$.

Como $x \in q_i$ para todo $q_i \in Q$ se sigue que $Q \subseteq x^*$ y como Q es un clan se tiene que $x^* \subseteq Q$, obteniendo que $x^* = Q$.

Ahora, sean Q_1, Q_2, \dots, Q_r una colección intersecante de clanes de $K(G)$. Y supongamos que x_1, x_2, \dots, x_r son tales que $Q_i = x_i^*$ para todo $i = 1, 2, \dots, r$. Sean también $i, j \in \{1, 2, \dots, r\}$ con $i \neq j$. Sabemos que existe $q_{ij} \in Q_i \cap Q_j$, por lo que $q_{ij} \in x_i^* x_j^*$, entonces $x_i, x_j \in q_{ij}$, es decir, $x_i \sim x_j$. De esto se sigue que dos elementos distintos en $\{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ es una completa de G , en tal caso se encuentra en un clan, supongamos que $q \in K(G)$ es dicho clan, entonces se tiene que

$$q \in \bigcap_{i=1}^r x_i^*, \text{ y por lo tanto } q \in \bigcap_{i=1}^r Q_i.$$

■

Corolario 3.2.11 *Si G es una gráfica clan Helly, entonces $G \simeq K^n(G)$ para todo número $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Se sigue de forma inductiva de los teoremas [3.2.8, 3.2.10]. ■

Un concepto que en ocasiones es de interés estudiar es la **convergencia** de una gráfica.

Definición 3.2.12 *Decimos que una gráfica G es **clan convergente** si la sucesión de ordenes de las gráficas $\{|K^n(G)| : n = 0, 1, 2, \dots\}$ es acotada. Esto es equivalente a la condición de que la sucesión $G, K(G), K^2(G), \dots$ consta, salvo isomorfismos, de un número finito de gráficas distintas, y también es equivalente a decir que existen dos números $m, n \in \mathbb{N}$ diferentes, tales que $K^m(G) = K^n(G)$. Si una gráfica no es clan convergente diremos que es **clan divergente**.*

Escalante en [4] muestra el resultado siguiente.

Teorema 3.2.13 (Escalante 1973). *Si G es clan Helly, entonces es clan convergente.*

Demostración. Se mostrará que si G es clan Helly, entonces $K^2(G)$ es isomorfa a una subgráfica de G . Esto implicaría que si n es par las gráficas $K^n(G)$ tendrían a lo más tantos vértices como G , es decir, los órdenes de las gráficas $K^n(G)$ serían

finitos, como $K(G)$ también es clan Helly entonces también se debe cumplir para los n impares y se tendría el resultado.

Sabemos que para cada $Q \in K^2(G)$ existe $x \in G$ tal que $x^* = Q$. Definimos la función $f : K^2(G) \rightarrow G$ como $f(Q) = x$, donde x es tal que $x^* = Q$. Ahora mostraremos que la subgráfica de G inducida por $f(K^2(G))$ es isomorfa a $K^2(G)$ (es decir, f es una encaje).

Veamos que f es inyectiva. Supongamos que dos clanes $Q_1, Q_2 \in K^2(G)$ son tales que $f(Q_1) = f(Q_2) = x$, entonces $x \in \bigcap Q_1$ y $x \in \bigcap Q_2$, ahora si pudiera pasar que $Q_1 \neq Q_2$ entonces $Q_1 \cup Q_2$ sería una completa de $K(G)$, que contuviera propiamente a Q_1 , pero eso es una contradicción, ya que estamos suponiendo que el conjunto Q_1 es un clan de $K(G)$. Por lo tanto, $Q_1 = Q_2$.

Supongamos ahora que $Q_1, Q_2 \in K^2(G)$ y que $Q_1 \sim Q_2$, además supongamos que $x_1 = f(Q_1)$ y $x_2 = f(Q_2)$, en ese caso existe $q \in Q_1 \cap Q_2$, luego, como $x_1 \in \bigcap Q_1$ entonces $x_1 \in q$, similarmente, como $x_2 \in \bigcap Q_2$, entonces $x_2 \in q$, es decir, $x_1 \sim x_2$.

Finalmente supongamos que $Q_1, Q_2 \in K^2(G)$, con $x_1 = f(Q_1)$ y $x_2 = f(Q_2)$, y $x_1 \sim x_2$, se tiene que $\{x_1, x_2\}$ es una completa de G , por lo que existe $q \in K(G)$ tal que $x_1, x_2 \in q$, se observa entonces que $q \in x_i^* = Q_i$ para $i = 1, 2$, concluyendo que el clan $q \in Q_1 \cap Q_2$, es decir, $Q_1 \sim Q_2$.

Acabamos de mostrar que en efecto $f : K^2(G) \rightarrow f(K^2(G))$ es un isomorfismo, por lo tanto, se tiene lo que se quería mostrar. ■

Capítulo 4

Gráficas homotópicamente invariantes

4.1. Colapsos

Como se ha discutido en el capítulo 3 las gráficas clan Helly son homotópicamente invariantes. Sin embargo, hay gráficas que a pesar de no ser clan Helly son también homotópicamente invariantes. Entonces, nos interesa encontrar gráficas de este estilo y tal que el complejo de completas de $K(G)$ se pueda colapsar al nervio de G . A continuación se muestran las definiciones y algunos teoremas que se conocen sobre colapsos.

Definición 4.1.1 Si G es una gráfica, denotamos al **nervio** de G como $\mathcal{N}(G)$ y es el complejo simplicial cuyos vértices son los clanes de G y que tiene como simplejos todas las colecciones Q de clanes de G tales que $\bigcap Q \neq \emptyset$.

Tanto el nervio de G como el complejo de completas de $K(G)$ son complejos simpliciales cuyos vértices son los clanes de G , que coinciden exactamente cuando la gráfica G es clan Helly. En caso de que G no sea clan Helly, del teorema de Dowker (teorema 3.2.7) se sigue de todos modos que $\Delta(G) \simeq \mathcal{N}(G)$, considerando la gráfica bipartita que se usó en la demostración del teorema 3.2.8. Una observación es que si $\Delta(K(G)) \simeq \mathcal{N}(G)$ entonces $G \simeq K(G)$, y en ocasiones podemos mostrar que $\Delta(K(G)) \simeq \mathcal{N}(G)$ a través de colapsos elementales, herramienta que estudiaremos en esta sección.

Definición 4.1.2 Sea Δ un complejo simplicial. Decimos que $\tau \in \Delta$ es una **cara libre** si es una cara no maximal que está contenida en una sola cara maximal σ , donde $\dim \tau = \dim \sigma - 1$.

Lema 4.1.3 Sea Δ un complejo simplicial formado por una sola cara maximal σ y todas su caras, supongamos que $\sigma = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$.

Entonces existe una función $f: |\Delta| \rightarrow |\Delta|$ tal que:

- Es continua,
- $f(y) = y$ para todo $y \in |\Delta - \{\sigma, \sigma - a_0\}|$,
- $f(|\Delta|) = |\Delta - \{\sigma, \sigma - a_0\}|$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que

$$\mathcal{E}(|\Delta|) = \{0, e_1, e_2, \dots, e_n\},$$

de tal modo que a_0 se corresponde con el vector $e_0 = 0$, y cada a_i se corresponde con los vectores canónicos e_i para $i = 1, \dots, n$.

Observemos lo siguiente:

1. Si $x \in |\sigma - e_0|$, entonces x está en la cara opuesta de e_0 . Por lo tanto, si

$$x = \sum_{i=0}^n t_i e_i,$$

entonces $t_0 = 0$.

2. Si $x \in |\Delta - \{\sigma, \sigma - e_0\}|$, entonces x está en la cara opuesta de algún e_i con $i = 1, 2, \dots, n$. Lo cual implica que si

$$x = \sum_{i=0}^n t_i e_i,$$

alguno de los $t_i = 0$ para algún $i = 1, 2, \dots, n$.

Ahora, recordemos que las coordenadas baricéntricas de un punto en un simplejo geométrico están determinadas de forma única. Es decir, si $x \in |\Delta|$, entonces es de la forma:

$$\sum_{i=0}^n t_i(x) e_i, \quad \text{con } t_i(x) \geq 0 \text{ y } \sum_{i=0}^n t_i(x) = 1.$$

Así, podemos representar al elemento $x \in |\Delta|$ a través de sus coordenadas baricéntricas con el vector $T(x) = (t_0(x), t_1(x), \dots, t_n(x))$. Entonces, basta dar una función $f: T(|\Delta|) \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ que cumpla las condiciones que se quieren, donde las coordenadas de los vectores son las coordenadas baricéntricas de cada punto en el simplejo.

Definamos entonces a f por

$$f(t_0(x), t_1(x), \dots, t_n(x)) = (t_0(x) + nt'(x), t_1(x) - t'(x), \dots, t_n(x) - t'(x)),$$

donde $t'(x) = \min\{t_1(x), t_2(x), \dots, t_n(x)\}$. Como las coordenadas baricéntricas son continuas y el mínimo de funciones continuas es una función continua, entonces cada coordenada de f es suma, resta y multiplicación de funciones continuas. Lo anterior implica que f es continua.

Además de la definición de f veamos que

$$\begin{aligned} t_0(x) + nt'(x) + t_1(x) - t'(x) + t_2(x) - t'(x) + \dots + t_n(x) - t'(x) \\ = nt'(x) - nt'(x) + \sum_{i=1}^n t_i(x) = 1. \end{aligned}$$

Además, por definición de mínimo se tiene que $t_i(x) - t'(x) \geq 0$ para todo $i > 0$ y $t_0(x) + t'(x) \geq 0$. Es decir, $f(x) \in |\Delta|$.

Si $y \in |\Delta - \{\sigma, \sigma - e_0\}|$ entonces para algún $i > 0$ se cumple $t_i(y) = 0$, en ese caso $t'(y) = 0$, y por tanto de la definición de f se sigue que $f(y) = y$.

Finalmente, como $t'(x)$ es alguno de los $t_i(x)$ para algún $i > 0$, entonces para dicho i se cumple $t_i(x) - t'(x) = 0$, entonces $f(x) \in |\Delta - \{\sigma, \sigma - e_0\}|$. Como ya se probó que $f(y) = y$ para todo $y \in |\Delta - \{\sigma, \sigma - e_0\}|$ se sigue que

$$f(|\Delta|) = |\Delta - \{\sigma, \sigma - e_0\}|.$$

Probando lo que se quería mostrar. ■

Veamos un ejemplo para $n = 2$, entonces el $|\Delta|$ es el triángulo con vértices en $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$.

Observemos que si $x \in |\Delta|$ y está sobre la identidad, entonces $t_1 = t_2$, por lo que $t_1 - t' = 0$, $t_2 - t' = 0$ y $t_0 + 2t' = 1$, por lo tanto $f(x) = (0,0)$, es decir, todos los puntos sobre la identidad se mapean al origen.

Luego, si x está por encima de la identidad, es decir, $t_2 > t_1$, entonces $t_1 - t' = 0$, eso quiere decir que $f(x) = (0, r)$ donde $r = t_2 - t_1 > 0$, entonces f mapea los puntos por encima de la identidad en un punto sobre la recta $x = 0$. Pero además también observemos que todos los puntos que cumplen $t_2 - t_1 = c$ para alguna constante $c \in (0, 1]$ se mapean al mismo punto. Dichos puntos están en una recta con pendiente uno. Esto también se puede ver de forma similar cuando $t_1 > t_2$.

De forma más concreta veamos que si $a = (0.25, 0.75)$, este se mapea al punto $b = (0, 0.5)$ bajo f , junto con todos los puntos en el segmento que une al punto b con a . El punto $d = (0.5, 0.5)$ se mapea al punto e_0 bajo f , junto con todos los puntos en el segmento que une a d con e_0 . El punto $e = (0.75, 0.25)$ se mapea al

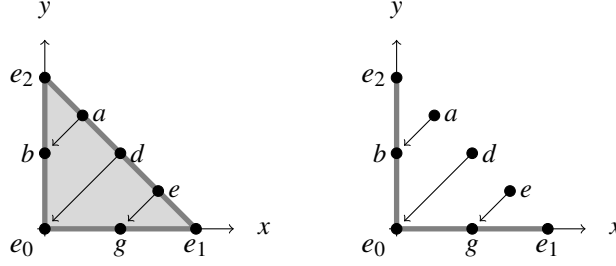


Figura 4.1: $|\Delta|$ y $f(|\Delta|)$.

punto $g = (0.5, 0)$ bajo f , junto con todos los puntos en el segmento que une a e con g . (Ver figura 4.1).

Ahora se define **retracto fuerte por deformación**.

Definición 4.1.4 Sea X un espacio, y sea $Y \subseteq X$ un subespacio. Sea $D: X \times I \rightarrow X$ continua, donde I es un intervalo de \mathbb{R} tal que:

- $D(x, 0) = x$ para todo $x \in X$,
- $D(x, 1) \in Y$ para todo $x \in X$,
- $D(y, t) = y$ para todo $y \in Y$, $t \in I$.

Decimos que D define un **retracto fuerte por deformación** de X en Y .

Teorema 4.1.5 Si $Y \subseteq X$ y D es un retracto fuerte por deformación de X en Y , entonces $X \simeq Y$.

Demostración. Definamos $f: X \rightarrow Y$ y $g: Y \rightarrow X$ dada por $f(x) = D(x, 1)$ y g la función inclusión, es decir $g(y) = y$.

La continuidad de f se sigue de la continuidad de D y como g es la función inclusión, se sabe que es continua.

Luego, si $y \in Y$ se tiene que

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(y) = D(y, 1) = y.$$

Es decir, $f \circ g = 1_Y$.

Sea $x \in X$, entonces

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(D(x, 1)) = D(x, 1).$$

Observemos que D es una homotopía entre 1_X y $g \circ f$, pues

- $D(x, 0) = x = 1_X(x),$
- $D(x, 1) = (g \circ f)(x).$

Por lo tanto X y Y son homotópicos. ■

Teorema 4.1.6 *En el contexto del lema 4.1.3 $\Delta \simeq \Delta - \{\sigma, \sigma - a_0\}.$*

Demostración. Consideremos la función del lema 4.1.3.

Definamos $D : |\Delta| \times [0, 1] \rightarrow |\Delta|$ por

$$D(x, t) = (1 - t)x + tf(x).$$

Al ser f continua y D multiplicación y suma de funciones continuas, entonces es continua.

Veamos que $D(x, 0) = (1 - 0)x + (0)f(x) = x$ para todo $x \in |\Delta|.$

Luego, $D(x, 1) = f(x)$, y del lema 4.1.3 sabemos que $f(x) \in |\Delta - \{\sigma, \sigma - a_0\}|.$ Finalmente veamos que $D(y, t) = (1 - t)y + tf(y) = y$ para $y \in |\Delta - \{\sigma, \sigma - a_0\}|$ y para todo $t \in [0, 1].$ En efecto, si $y \in |\Delta - \{\sigma, \sigma - a_0\}|,$ por el lema 4.1.3 se tiene que $f(y) = y.$ Y así

$$D(y, t) = (1 - t)y + tg(y) = (1 - t)y + ty = y.$$

Por lo tanto, D es un retracts fuerte por deformación y entonces podemos concluir que $\Delta \simeq \Delta - \{\sigma, \sigma - a_0\}.$ ■

Para $n = 2$ se muestran dibujos en la figura 4.2, donde para distintos valores de t se ve como se va realizando el retracto.

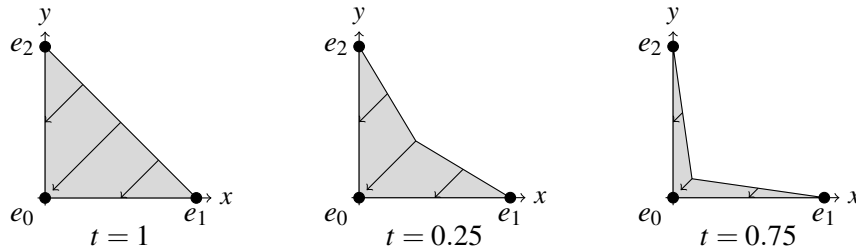


Figura 4.2: Retracto fuerte por deformación para $n = 2.$

La equivalencia homotópica que se ha obtenido en el teorema 4.1.6, es un caso particular de un colapso elemental. A continuación se enuncia el teorema de colapso elemental.

Teorema 4.1.7 *Si τ es una cara libre que solo está contenida en la cara maximal σ de un complejo simplicial Δ , entonces $\Delta \simeq \Delta - \{\tau, \sigma\}$. (Esta operación de quitar una cara libre junto la única cara maximal en la que está contenida se llama un **colapso elemental**).*

Demostración. Sea S el complejo simplicial que tiene como única cara maximal a σ . Por el teorema 4.1.6, $|S| \simeq |S - \{\tau, \sigma\}|$. Sea $D_1: |S| \times [0, 1] \rightarrow |S|$ el retracto fuerte por deformación que es testigo de $|S| \simeq |S - \{\tau, \sigma\}|$.

Definamos $D: |\Delta| \times [0, 1] \rightarrow \Delta$ por

$$D(x, t) = \begin{cases} D_1(x, t) & \text{si } x \in |S|, \\ x & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Ya que τ es una cara libre se observa que D es una función continua, pues tanto D_1 como la función x son continuas. Luego, $D(x, 0) = x$ en cualquier caso. Si $x \in |S|$, entonces $D(x, 1) = D_1(x, 1)$ que está en $|S - \{\tau, \sigma\}|$, y

$$|S - \{\tau, \sigma\}| \subseteq |\Delta - \{\tau, \sigma\}|. \quad (4.1)$$

Así $D(x, 1) \in |\Delta - \{\tau, \sigma\}|$ y si $x \in |\Delta| - |S|$, entonces se tiene que $D(x, 1) = x$, y $x \in |\Delta - \{\tau, \sigma\}|$.

Observemos que $|\Delta - \{\tau, \sigma\}| = |S - \{\tau, \sigma\}| \cup (|\Delta| - |S|)$. Sea $y \in |\Delta - \{\tau, \sigma\}|$, ahora, si $y \in |S - \{\tau, \sigma\}|$ entonces $D(y, t) = D_1(y, t) = y$. Y si $y \in |\Delta| - |S|$ entonces $D(y, t) = y$.

Por lo tanto D es un retracto fuerte por deformación y entonces podemos concluir que $|\Delta| \simeq |\Delta - \{\tau, \sigma\}|$, que es lo que se quería mostrar. ■

En la presente tesis usaremos colapsos para probar varias equivalencias homotópicas, algunas nuevas y otras ya conocidas. La ventaja de los colapsos sobre otras maneras de probar equivalencias homotópicas radica en que es una herramienta combinatoria y elemental, factible de ser comprobada en la computadora.

4.2. Ejemplos

Veamos algunos ejemplos en donde una gráfica G cumple que $\Delta(K(G))$ se puede colapsar al nervio $\mathcal{N}(G)$ y por tanto $G \simeq K(G)$.

Ejemplo 1: Sea G la gráfica de la figura 4.3. Observemos que el complejo simplicial $\Delta(G)$ consta de cuatro caras maximales de tres vértices y sus caras, dichas caras maximales son $q_1 = \{a, b, c\}$, $q_2 = \{b, d, e\}$, $q_3 = \{b, c, e\}$, $q_4 = \{c, e, f\}$ y la realización geométrica $|\Delta(G)|$ la podemos observar también en la figura 4.3. Notemos también que G no es clan Helly, pues sus clanes que son q_1 , q_2 , q_3 y q_4 se

intersectan dos a dos pero la intersección de todos ellos es no vacía. Además tenemos que la gráfica de clanes de G es una completa de cuatro vértices K_4 , por lo que la realización geométrica de $\Delta(K(G))$ es un “tetraedro relleno” (ver figura 4.4). Sin embargo, el nervio $\mathcal{N}(G)$ tiene como caras maximales las caras

$$\{q_1, q_2, q_3\}, \{q_1, q_3, q_4\}, \{q_2, q_3, q_4\},$$

por lo que su realización geométrica es un “tetraedro hueco” con una cara hueca (ver figura 4.4). Si a $\Delta(K(G))$ le hacemos un colapso elemental con $\tau = \{q_1, q_2, q_4\}$, entonces la cara maximal en la que está contenida es $\sigma = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$, por lo que se tiene $\Delta(K(G)) - \{\tau, \sigma\} = \mathcal{N}(G)$, del teorema 4.1.7 se sigue que

$$\Delta(G) \simeq \Delta(K(G)) \simeq \mathcal{N}(G).$$

Aunque para este caso se ve directamente que tanto G como $K(G)$ son homotópicas a un punto.

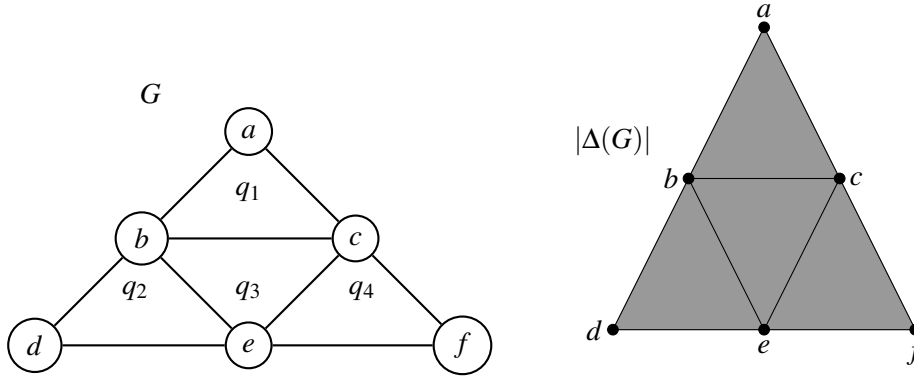


Figura 4.3: Gráfica no clan Helly y su realización geométrica.

Ejemplo 2: Para este ejemplo consideremos la gráfica G (la cual no es clan Helly) de la figura 4.5. Podemos ver que esta es homotópica a un punto observando su realización geométrica $|\Delta(G)|$ en la figura 4.5. Por otra parte G tiene cinco clanes, los cuales son $q_1 = \{a, b, c\}$, $q_2 = \{b, d, e\}$, $q_3 = \{b, c, e\}$, $q_4 = \{c, e, f\}$, $q_5 = \{a, c, f\}$, además se puede ver que los clanes q_1, q_2, q_3, q_4 forman una clan en la gráfica $K(G)$ igual que los clanes q_1, q_3, q_4, q_5 , entonces $K(G)$ tiene dos clanes de cuatro vértices (por lo tanto $K(G)$ es clan Helly). Esto nos indica que $|\Delta(K(G))|$ es un complejo simplicial formado por dos 3-simplejos y sus caras, además la intersección de estos dos simplejos es un 2-simplejo (Ver figura 4.6). Consideremos también el nervio $\mathcal{N}(G)$, notemos que

$$\bigcap \{q_1, q_3, q_4, q_5\} = \{c\} \neq \emptyset \quad \text{y} \quad \bigcap \{q_1, q_2, q_3, q_4\} = \bigcap \{q_1, q_2, q_4\} = \emptyset,$$

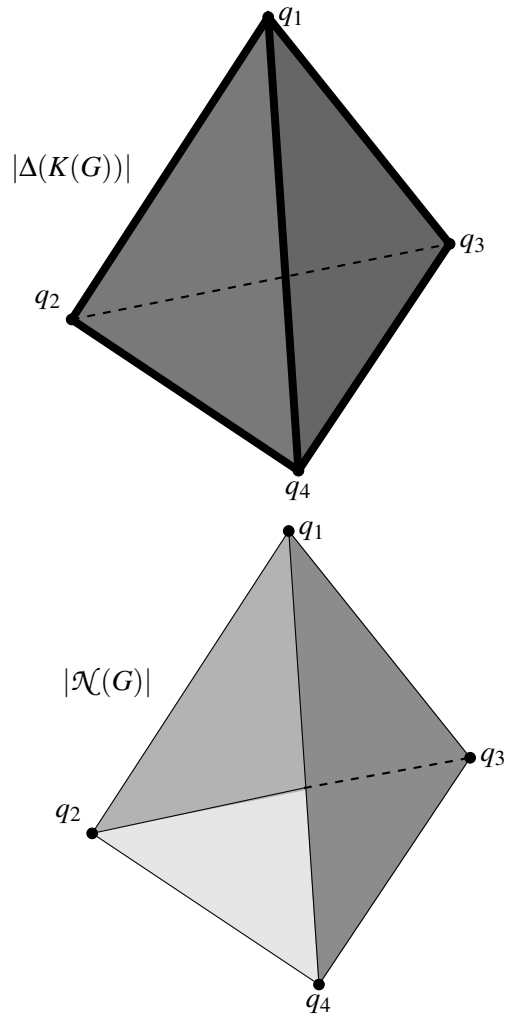


Figura 4.4: Realizaciones geométricas $|\Delta(K(G))|$ y $|\mathcal{M}(G)|$.

Así, $\mathcal{N}(G)$ tiene caras maximales $\{q_1, q_3, q_4, q_5\}, \{q_2, q_3, q_4\}, \{q_1, q_2, q_3\}$, de esta forma, haciendo un colapso elemental a $\Delta(K(G))$ con la cara $\tau = \{q_1, q_2, q_4\}$ y con $\sigma = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$ se tiene

$$\Delta(K(G)) \simeq \Delta(K(G)) - \{\tau, \sigma\} = \mathcal{N}(G) \simeq \Delta(G),$$

por lo tanto $\Delta(K(G)) \simeq \Delta(G)$.

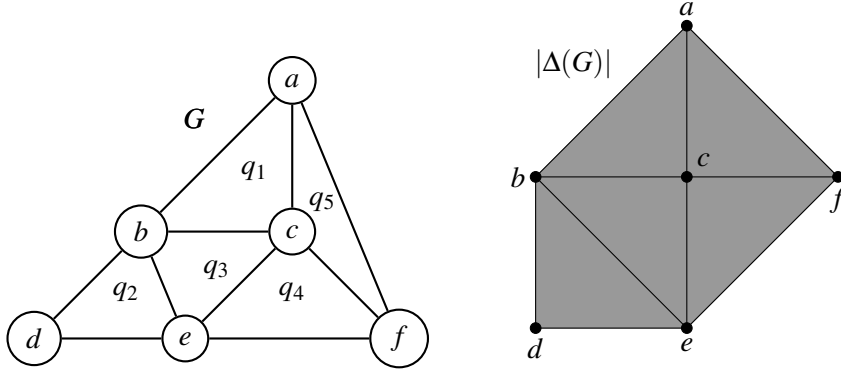


Figura 4.5: Gráfica G y su realización geométrica $|\Delta(G)|$.

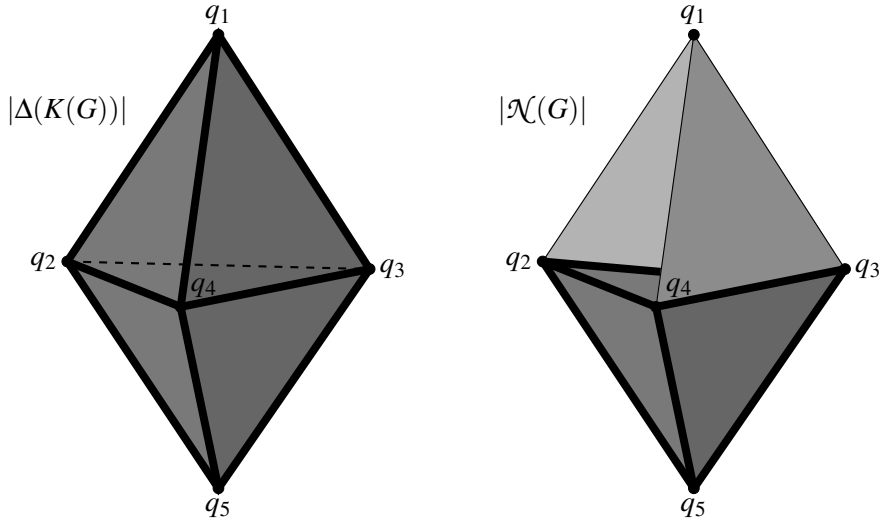


Figura 4.6: Realizaciones geométricas $|\Delta(K(G))|$ y $|\mathcal{N}(G)|$.

Ejemplo 3: Si G es la gráfica de la figura 4.7 se observa que es homotópica a un punto si vemos su realización geométrica $|\Delta(G)|$ en la figura 4.7. Notemos que G

como clanes $q_1 = \{a, b, c\}$, $q_2 = \{b, e, d\}$, $q_3 = \{b, c, e\}$, $q_4 = \{c, e, f\}$, $q_5 = \{a, c, f\}$ y $q_6 = \{a, b, d\}$. Así, se tiene que $Q_1 = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$ es un clan en $K(G)$, al igual que $Q_2 = \{q_1, q_3, q_4, q_5\}$ y $Q_3 = \{q_1, q_2, q_3, q_6\}$, por lo que $K(G)$ tiene tres clanes de cuatro vértices. Y observemos que los clanes Q_1 , Q_2 y Q_3 se intersectan dos a dos, además $Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3 = \{q_1, q_3\}$, por lo que $K(G)$ es clan Helly, de aquí se tiene que $|\Delta(K(G))|$ es un complejo simplicial formado por tres 3-simplejos y sus caras, vease la figura 4.8. Consideremos también el nervio $\mathcal{N}(G)$, el cual solo difiere de $\Delta(K(G))$ en dos simplejos ($\sigma = Q_1$, $\tau = Q_1 - \{q_3\}$), ya que

$$\bigcap Q_2 \neq \emptyset, \quad \bigcap Q_3 \neq \emptyset, \quad \bigcap Q_1 = \bigcap (Q_1 - \{q_3\}) = \emptyset.$$

Entonces, haciendo un colapso se tiene que

$$\Delta(K(G)) \simeq \Delta(K(G)) - \{\sigma, \tau\} \simeq \Delta(G).$$

Concluyendo que en efecto $\Delta(K(G)) \simeq \Delta(G)$.

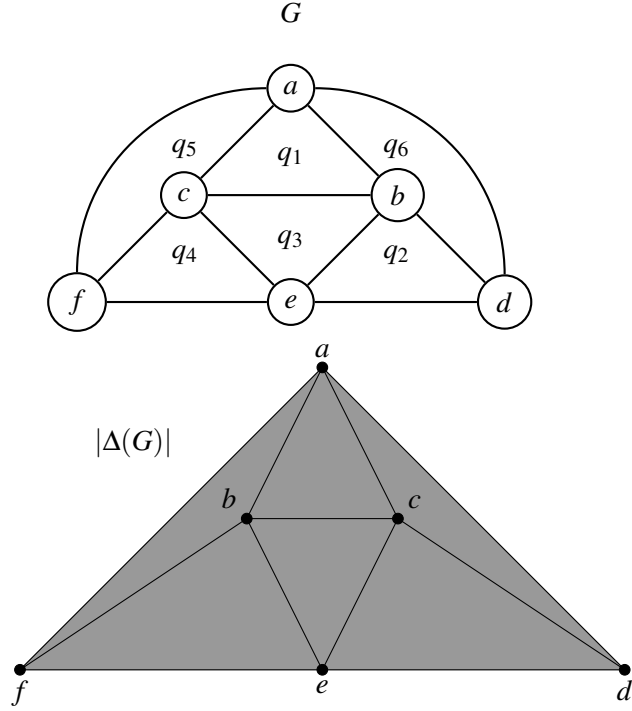


Figura 4.7: Gráfica G y su realización geométrica $|\Delta(G)|$.

Estos tres ejemplos pasados son las tres gráficas conexas de seis vértices que no son clan Helly, pero que su gráfica de clanes sí lo es. Como podemos observar se

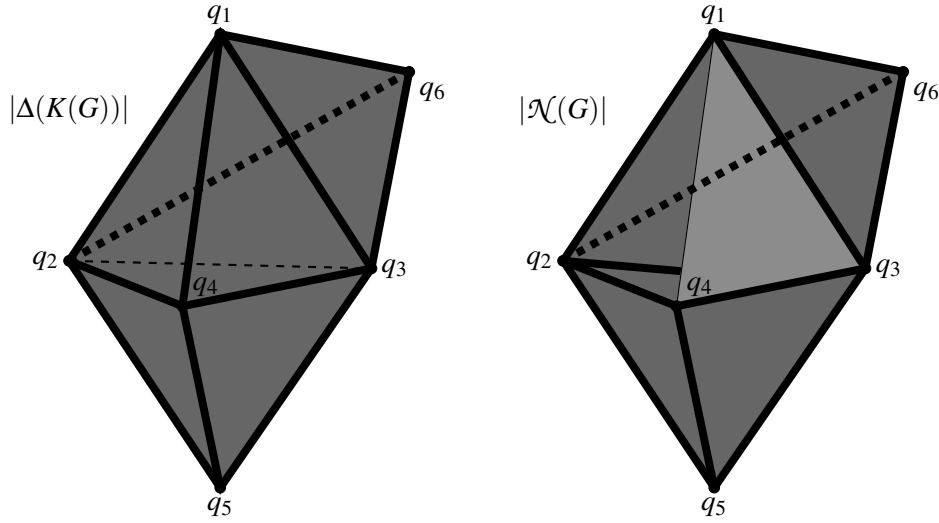


Figura 4.8: Realizaciones geométricas $|\Delta(K(G))|$ y $|\mathcal{N}(G)|$.

cumple que dichas gráficas son homotópicamente invariantes (pues el complejo de completas de $K(G)$ se colapsa al nervio). Además como se mostró en una sección anterior, las gráficas de cinco o menos vértices son todas clan Helly, por lo tanto, estas tres gráficas pasadas son las gráficas más pequeñas que cumplen la hipótesis de no ser clan Helly y que su gráfica de clanes sí lo sea.

Ejemplo 4: Sea G la gráfica construida de la siguiente forma: es tal que tiene una completa de $n \geq 3$ vértices, digamos $V(K_n) = \{1, 2, \dots, n\}$ y agregamos n vértices independientes a_1, a_2, \dots, a_n tal que a_i es vecino de todos los vértices del conjunto $V(K_n) - \{i\}$. Observemos que esta gráfica tiene exactamente $n + 1$ clanes, los cuales son

$$\begin{aligned} q_0 &= K_n, \\ q_1 &= (V(K_n) - \{1\}) \cup \{a_1\}, \\ q_2 &= (V(K_n) - \{2\}) \cup \{a_2\}, \\ &\vdots \\ q_n &= (V(K_n) - \{n\}) \cup \{a_n\}. \end{aligned}$$

Pues, K_n sigue siendo un clan, ya que no se le pueden añadir ninguno de los a_i porque a_i no es vecino de i . Luego, por construcción, la vecindad abierta de a_i es

una completa, entonces por el lema 3.1.3 $q_i = (V(K_n) - \{i\}) \cup \{a_i\}$ es un clan.

Ahora veamos que no hay más clanes. Si un clan q no contuviese a algún a_i entonces necesariamente $q \subseteq K_n$, pero como q es un clan, entonces $q = K_n$. Y si q contuviese a algún a_i , entonces $q \subseteq N(a_i) \cup \{a_i\} = q_i$, el cual es un clan, por lo que $q = q_i$.

Observemos que G no es clan Helly, ya que si C es la colección de clanes de G se sigue que C es una colección intersecante con $\bigcap C = \emptyset$, por lo tanto se tiene que $K(G) = K_{n+1}$. Además se tiene que: $\bigcap (C - \{K_n\}) = \emptyset$ y $\bigcap (C - \{q_i\}) \neq \emptyset$, por lo que $\mathcal{N}(G)$ es el complejo simplicial

$$\Delta(K(G)) - \{\{q_0, q_1, q_2, \dots, q_n\}, \{q_1, q_2, \dots, q_n\}\}.$$

Entonces notemos que $\Delta(K(G))$ está descrito por una sola cara maximal, que es $\{q_0, q_1, q_2, \dots, q_n\}$, así cualquier $(n-1)$ -cara es una cara libre, en particular la cara $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$. Luego, por el teorema 4.1.7

$$\Delta(K(G)) - \{\{q_0, q_1, q_2, \dots, q_n\}, \{q_1, q_2, \dots, q_n\}\} = \mathcal{N}(G),$$

es homotópico a $\Delta(K(G))$. Por lo tanto $\Delta(G) \simeq \mathcal{N}(G) \simeq \Delta(K(G))$.

El ejemplo anterior muestra que existen gráficas G arbitrariamente grandes que no son Helly, pero $K(G)$ sí lo es.

4.3. Teoremas sobre invariancia de homotopía

En esta sección se mencionan una serie de teoremas sobre equivalencias homotópicas en gráficas, los cuales son utilizados para mostrar algunos resultados en la tesis.

El siguiente es un teorema bastante conocido que se muestra en [10], de hecho ahí se muestra un resultado más general.

Teorema 4.3.1 (Prisner 1992). *Si G es una gráfica y x es un vértice dominado de G entonces $G \simeq G - x$, es decir, quitar un vértice dominado no altera el tipo de homotopía de una gráfica.*

Demostración. Supongamos que a domina a x . Primero observemos que la diferencia $\Delta(G) - \Delta(G - x)$ consiste de todas las completas de G que contienen a x , como a domina a x por cada completa que contiene a x pero no contienen a a le podemos añadir a , es decir, en la diferencia hay una cantidad par de simplejos. Así, todo complejo maximal q en la diferencia debe contener a a , además el simplejo $q - a$ solo está contenido en q , por lo tanto podemos colapsar a $q - a$ y q . Podemos continuar con este proceso en lo que queda usando que cada simplejo que no contiene a a está emparejado con el simplejo al que se le añade a . ■

Recordemos de la definición 1.1.18 que una gráfica desmantelable es una gráfica tal que al hacer el proceso de remover sucesivamente vértices dominados llegamos a la gráfica de un vértice. Del teorema 4.3.1 se sigue que una gráfica desmantelable es homotópica a un punto, es decir, contraíble.

Para una gráfica G y una subgráfica inducida H de G denotamos por $N_G(H)$ a todos los vértices de G que son vecinos de todos los vértices de H .

Los siguientes teoremas y proposiciones son casos particulares de algunos resultados que se demuestran en [5].

Teorema 4.3.2 (Frías-Armenta, Neumann-Lara y Pizaña 2004). *Si x es un vértice dominado de G , entonces $K(G - x)$ es homotópica a una subgráfica inducida de $K(G)$.*

Demostración. Definamos la función $\Phi : K(G - x) \rightarrow K(G)$ por:

$$\Phi(q) = \begin{cases} q \cup \{x\} & \text{si } x \in N_G(q), \\ q & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Sea $q \in K(G - x)$, como $x \notin q$ se sigue que $\Phi(q)$ es un clan de G . Ahora veamos que Φ es inyectiva, entonces supongamos que $\Phi(q) = \Phi(q')$, si $x \in \Phi(q)$ entonces

$$\Phi(q) = \Phi(q') = q \cup \{x\} = q' \cup \{x\}.$$

De donde se sigue que $q = q'$ y si $x \notin \Phi(q)$ entonces

$$\Phi(q) = \Phi(q') = q = q',$$

por lo tanto Φ es inyectiva.

Luego, como $q \subseteq \Phi(q)$ es inmediato ver que $q \sim q'$ implica $\Phi(q) \sim \Phi(q')$. Por último, supongamos que $\Phi(q) \sim \Phi(q')$. Si x no estuviese en alguna de las imágenes entonces existe un elemento distinto de x en $\Phi(q) \cap \Phi(q')$ y por la definición de Φ se seguiría que $q \cap q' \neq \emptyset$, es decir, $q \sim q'$. Pero supongamos que $\Phi(q) = q \cup \{x\}$ y que $\Phi(q') = q' \cup \{x\}$, en ese caso como x es vértice dominado de G , supongamos que y es un vértice que domina a x , y como $\Phi(q)$ y $\Phi(q')$ son clanes de G todos los vértices de esos dos clanes son vecinos de x y también de y . Por lo tanto, se tiene que $y \in \Phi(q) \cap \Phi(q')$ lo cual implica que $y \in q \cap q'$, esto muestra que en efecto Φ es un isomorfismo de $K(G - x)$ a $\Phi(K(G - x))$. ■

Proposición 4.3.3 *En el contexto del teorema 4.3.2, cualquier vértice de $K(G)$ que no está en $\Phi(K(G - x))$ es dominado por un vértice en $\Phi(K(G - x))$.*

Demostración. Sea q en la diferencia $K(G) - \Phi(K(G-x))$, nuestro plan es mostrar que existe $q' \in \Phi(K(G-x))$ que domina a q en $K(G)$. Tenemos que necesariamente $x \in q$ porque si no pasara eso q sería un clan de $G-x$ y por tanto $q \in \Phi(K(G-x))$. Ahora, $q-x$ no puede ser un clan de $G-x$, pues si lo fuese como $x \in N_G(q-x)$ se tendría $\Phi(q-x) = q$, es decir, $q \in \Phi(K(G-x))$, y estamos suponiendo que eso no pasa. Pero $q-x$ si es una completa de $G-x$ y debe estar contenido propiamente en algún clan q' de $G-x$. Entonces $x \notin q'$. Si $q' \cup \{x\}$ fuera completa en G , tendríamos que $q = (q-x) \cup \{x\} \subseteq q' \cup \{x\}$, pero como q es clan de la gráfica G se debe tener que $q = q' \cup \{x\}$, de donde $q-x = q'$, lo cual contradice que la inclusión de $q-x$ en q' es propia. Es decir, $q' \in K(G)$ y como $x \notin q'$, se tiene que $q' \neq q$ y como el conjunto $q' \cup \{x\}$ no es completa, se tiene que $q' = \Phi(q')$, por lo que se concluye que $q' \in \Phi(K(G-x))$.

Mostraremos que q' domina a q en $K(G)$. Si c es un clan de G tal que $c \cap q \neq \emptyset$, entonces si $x \notin c \cap q$ es inmediato que $c \cap q' \neq \emptyset$, pues $q-x \subset q'$. Si $x \in c \cap q$, entonces supongamos que y es un vértice que domina a x , en ese caso y es vecino de todos los elementos en q y en c , por lo tanto $y \in c \cap q$, y como $y \in q-x \subset q'$ se tiene que $y \in c \cap q'$, por lo que $c \sim q'$ en $K(G)$. Con esto, hemos probado que q' domina a q en $K(G)$. ■

Teorema 4.3.4 *Si una gráfica G es desmantelable entonces $K(G)$ es desmantelable.*

Demostración. La prueba se realizará por inducción sobre n , donde n es la cardinalidad de $V(G)$. Si $n = 1$, entonces G consiste de un solo vértice y por tanto $K(G)$ también consiste de un vértice, por lo que $K(G)$ es desmantelable.

Supongamos ahora que el teorema es válido para n y sea H una gráfica desmantelable con $|H| = n+1$. Sea z un vértice dominado en H . Entonces $H-z$ es desmantelable y tiene n vértices, por hipótesis de inducción $K(H-z)$ es desmantelable, por el teorema 4.3.2, $K(H)$ contiene una copia isomorfa de $K(H-z)$ y por la proposición 4.3.3 cualquier vértice en $K(H) - K(H-z)$ es dominado en $K(H)$ por algún vértice en $K(H-z)$. Es decir, los vértices de la diferencia $K(H) - K(H-z)$ se pueden remover sucesivamente hasta llegar a $K(H-z)$. De esto se sigue que la gráfica $K(H)$ es desmantelable. ■

Como consecuencia, se tiene que las gráficas desmantelables son homotópicamente invariantes.

Teorema 4.3.5 *Si G es una gráfica con vértice dominado x , entonces $K(G-x) \simeq K(G)$.*

Demostración. Por el teorema 4.3.2 $K(G-x)$ es isomorfo a una subgráfica inducida de $K(G)$, luego por la proposición 4.3.3 todo vértice que no está en $K(G-x)$ es

dominado en $K(G)$ por un vértice en $K(G - x)$, y por el teorema 4.3.1 sabemos que quitar vértices dominados no altera el tipo de homotopía de una gráfica, por lo tanto $K(G - x) \simeq K(G)$. ■

Lema 4.3.6 *Si G es una gráfica clan Helly y x es un vértice dominado de G , entonces $G - x$ es clan Helly.*

Demostración. Usaremos el criterio del triángulo extendido para probar este lema. Observemos que si T es un triángulo en $G - x$ entonces también es un triángulo en G . Consideremos el triángulo extendido \hat{T} en G , el cual tiene ápice, digamos u (pues G es clan Helly). Si u no es x , es inmediato que u es ápice del triángulo extendido en $G - x$. Pero si $u = x$, entonces, supongamos que x es dominado por y en G , como y es vecino de todos los vecinos de x , entonces y también es ápice del triángulo extendido en G y como $y \neq x$ entonces y es ápice del triángulo extendido en $G - x$, por lo tanto $G - x$ es clan Helly. ■

Teorema 4.3.7 *Si G es una gráfica tal que $K(G)$ es clan Helly y x es un vértice dominado de G , entonces $K(G - x)$ es clan Helly.*

Demostración. Por el teorema 4.3.2 y la proposición 4.3.3 se tiene que todo vértice en $K(G)$ que no está en $K(G - x)$ es dominado por un vértice en $K(G - x)$, es decir, podemos obtener la gráfica $K(G - x)$ quitando vértices dominados de $K(G)$, y por el lema 4.3.6 se sigue que $K(G - x)$ es clan Helly. ■

4.4. Colapsos en gráficas clan completas

Una gráfica G es clan completa si $K(G)$ es una gráfica completa. En [8], se demuestra que las gráficas clan completas son homotópicamente invariantes. En ésta sección se mostrará el mismo resultado para algunas gráficas clan completas usando la herramienta de colapsos.

Como se puede observar, muchas gráficas que se han puesto de ejemplo hasta ahora, son gráficas que no son clan Helly, pero que su gráfica de clanes sí lo es. Esto nos lleva a pensar en una conjetura:

Conjetura 4.4.1 *Todas la gráficas con defecto Helly 1 son homotópicamente invariantes.*

Las gráficas no Helly clan completas son un caso particular de las gráficas con defecto Helly 1, de ahí nuestro interés en estudiarlas.

Lema 4.4.2 *Si G es una gráfica tal que $K(G) = K_n$ con $n = 1, 2, 3$ entonces se tiene que $\mathcal{N}(G) = \Delta(K(G))$.*

Demostración. Los casos $n = 1, 2$ son triviales, pues a lo más se tienen dos clanes y estos se deben intersectar, es decir, para tener una colección de clanes que esté en $\Delta(K(G))$ pero no en $\mathcal{N}(G)$ se necesita tener al menos tres clanes de G .

Supongamos ahora que $n = 3$, y supongamos que q_1, q_2, q_3 son los clanes de G , si pasara que $\mathcal{N}(G) \neq \Delta(K(G))$ entonces necesariamente $\bigcap \{q_1, q_2, q_3\} = \emptyset$, pero eso no puede pasar, pues existen $x \in q_1 \cap q_2, y \in q_1 \cap q_3, z \in q_2 \cap q_3$, los cuales deben ser distintos entre sí, y forman un triángulo T , si no fueran diferentes se tendría que $\bigcap \{q_1, q_2, q_3\} \neq \emptyset$ lo cual estamos suponiendo que no pasa. Por lo tanto, el triángulo T debe estar en algún clan de G , pero este solo tiene tres clanes y en cualquiera de los tres que estuviera implicaría $\bigcap \{q_1, q_2, q_3\} \neq \emptyset$, por lo que podemos concluir que necesariamente $\mathcal{N}(G) = \Delta(K(G))$. ■

Proposición 4.4.3 *Supongamos que una gráfica G no es clan Helly y que C es la colección de clanes de G . Ya que G no es clan Helly, entonces existe una colección intersecante $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_m\} \subseteq C$ tal que $\bigcap Q = \emptyset$. Entonces pasa una de las siguientes cosas o ambas:*

1. *Existe $q_{m+1} \in C - Q$ tal que $Q \cup \{q_{m+1}\}$ es una colección intersecante y se observa que $\bigcap (Q \cup \{q_{m+1}\}) = \emptyset$.*
2. *Existe al menos un $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ tal que $\bigcap (Q - \{q_i\}) = \emptyset$.*

La proposición anterior está inspirada en que se trató de buscar una gráfica G que no fuese clan Helly, que $K(G)$ fuese una completa de cuatro vértices y que $\mathcal{N}(G)$ fuese igual a el complejo de completas de $K(G)$ pero sin la cara maximal de cuatro vértices. Sin embargo, eso no puede pasar, ya que si suponemos que el conjunto de clanes de G es $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$, que se intersectan dos a dos, que $\bigcap Q = \emptyset$ y que además

$$\begin{aligned} I_1 &= q_1 \cap q_2 \cap q_3 \neq \emptyset \\ I_2 &= q_1 \cap q_2 \cap q_4 \neq \emptyset \\ I_3 &= q_1 \cap q_3 \cap q_4 \neq \emptyset \\ I_4 &= q_2 \cap q_3 \cap q_4 \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Es decir, estamos suponiendo que no se cumple el punto 2 de la proposición anterior. Veamos que entonces deben existir $x \in I_1, y \in I_2, z \in I_3, w \in I_4$ distintos entre sí, deben ser distintos porque si por ejemplo pasase que $x = y$, entonces se

tendría que $x \in \bigcap Q$ lo cual es una contradicción, similarmente se puede ver para el resto de los casos. Además se tiene que todos los vértices x, y, z, w son adyacentes entre sí, porque $x, y \in q_1$, $x, z \in q_1$, $x, w \in q_2$, $y, z \in q_1$, $y, w \in q_2$, $z, w \in q_3$, por lo tanto x, y, z, w están en un clan de G , pero este clan no puede ser ninguno de los q_i , por ejemplo, si $x, y, z, w \in q_1$, entonces $w \in q_1$ y por estar en I_4 se seguiría que $x \in \bigcap Q$ y esto es una contradicción. Los demás casos también nos llevan a una contradicción. Entonces, debe existir un clan $q \neq q_i$ que además interseca a todos los q_i , pero se suponía que G solo tenía cuatro clanes, entonces debe suceder que al menos uno de los conjuntos I_1, I_2, I_3, I_4 es vacío.

Concluimos así lo siguiente: Si $\bigcap Q = \emptyset$ entonces al menos uno de los conjuntos I_1, I_2, I_3, I_4 es vacío, o bien existe un clan $q \in K(G) - Q$ tal que $Q \cup \{q\}$ es una colección intersecante tal que $\bigcap (Q \cup \{q\}) = \emptyset$.

Demostración. (De la proposición 4.4.3) Si tenemos que $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_m\}$ es una colección intersecante de clanes de G (es decir, Q es una completa de $K(G)$) tal que $\bigcap Q = \emptyset$ y pasara que $\bigcap (Q - \{q_i\}) \neq \emptyset$ para todo $i = 1, 2, \dots, m$. Se deduce que existen x_1, x_2, \dots, x_m en $Q - \{q_1\}, Q - \{q_2\}, \dots, Q - \{q_m\}$ respectivamente distintos entre sí y que además son adyacentes entre ellos, por lo que se encuentran en algún clan que no puede ser ninguno de los q_i (pues si eso pasara se tendría que $\bigcap Q \neq \emptyset$), dicho clan, llamémoslo q , interseca a todos los q_i . Por lo tanto, $Q \cup \{q\}$ es una colección intersecante tal que $\bigcap (Q \cup \{q\}) = \emptyset$. Ahora, si Q fuese un clan de $K(G)$, puesto que no se le puede añadir un nuevo clan de tal manera que se forme una colección más grande, entonces al menos uno de los conjuntos $\bigcap (Q - \{q_i\})$ tiene que ser vacío. ■

Lema 4.4.4 *Supongamos que G es una gráfica tal que $K(G) = K_4$ y que G no es clan Helly, entonces podemos obtener a $\mathcal{N}(G)$ haciendo colapsos a $\Delta(K(G))$.*

Demostración. Sean q_1, q_2, q_3, q_4 los vértices de $K(G)$. Como G no es clan Helly, entonces $\bigcap V(K(G)) = \emptyset$. De la proposición 4.4.3 podemos ver que existe al menos un clan de G tal que $\bigcap (V(K(G)) - q_i) = \emptyset$. Sin pérdida de generalidad supongamos que dicho clan es q_4 , sabemos que existen $x \in q_1 \cap q_2$, $y \in q_1 \cap q_3$, $z \in q_2 \cap q_3$, observemos que x, y, z forman un triángulo T en G y que estos vértices deben ser distintos entre sí, pues si pasara que algunos de ellos fueran iguales entonces se tendría que $q_1 \cap q_2 \cap q_3 \neq \emptyset$ y estamos suponiendo que eso no pasa. Luego, dicho triángulo debe estar en algún clan, pero observemos que ese clan no puede ser ninguno de los q_i con $i = 1, 2, 3$, pues eso también nos llevaría a que $q_1 \cap q_2 \cap q_3 \neq \emptyset$, por lo que necesariamente T debe estar en q_4 , eso significa que los vértices x, y y z cumplen $x \in q_1 \cap q_2 \cap q_4$, $y \in q_1 \cap q_2 \cap q_3$ y $z \in q_2 \cap q_3 \cap q_4$. Por lo tanto, el nervio de G es necesariamente

$$\mathcal{N}(G) = \Delta(K(G)) - \{\{q_1, q_2, q_3\}, \{q_1, q_2, q_3, q_4\}\}.$$

Es decir, se tiene que podemos colapsar las caras $\{q_1, q_2, q_3\}, \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$ del complejo $\Delta(K(G))$ y obtenemos el nervio $\mathcal{N}(G)$ justo como se quería mostrar. ■

4.5. Diferencia entre los complejos

La sección anterior mostró que existen casos en los que el complejo $\Delta(K(G))$ se puede colapsar al subcomplejo $\mathcal{N}(G)$ cuando la diferencia entre ellos no es complicada. En ésta sección analizaremos con detalle la situación cuando ésta diferencia tiene cardinalidad pequeña.

Corolario 4.5.1 *La cardinalidad $|\Delta(K(G)) - \mathcal{N}(G)| \neq 1$.*

Demostración. Se sigue directamente de la proposición 4.4.3. ■

Proposición 4.5.2 *Si G es una gráfica tal que $\mathcal{D} = \Delta(K(G)) - \mathcal{N}(G)$, entonces la cardinalidad de \mathcal{D} no puede ser tres, es decir, $|\mathcal{D}| \neq 3$.*

Demostración. Supongamos que X, Y y Z son completas de la gráfica $K(G)$ tal que $\bigcap X = \bigcap Y = \bigcap Z = \emptyset$. Podría pasar que $X \subset Y \subset Z$, entonces existe $q \in Z \setminus Y$, así $X \cup \{q\} \not\subseteq Y$ y $\bigcap(X \cup \{q\}) = \emptyset$ entonces \mathcal{D} tiene al menos cuatro elementos.

También podría pasar que $X \subseteq Y$ y $X \subseteq Z$ con $Y \not\subseteq Z$ y $Z \not\subseteq Y$, esto quiere decir que X no es maximal y además existen $q_1 \neq q_2$ con $q_1 \in Y$ y $q_2 \in Z$, en ese caso $Y_1 = X \cup \{q_1\}$ y $Z_1 = X \cup \{q_2\}$ son completas de $K(G)$ y $\bigcap Y_1 = \bigcap Z_1 = \emptyset$ si $Z_1 \neq Z$ o $Y_1 \neq Y$ entonces se tendrían más de tres elementos en \mathcal{D} . Entonces, supongamos que $Y = Y_1$ y $Z = Z_1$, en ese caso Z y Y solo difieren entre si por los elementos q_1 y q_2 y deben ser maximales pues en caso de no serlo podríamos tener más elementos en \mathcal{D}). Además, si suponemos que solamente \mathcal{D} tiene tres elementos, entonces existe $x_i \in \bigcap(X - q'_i)$ para cada elemento $q'_i \in X$, observemos que los x_i forman una completa de G , la cual debe estar en algún clan q de G , este clan no puede ser ninguno de los elementos de X , pero interseca a todos ellos, si dicho clan no fuese q_1 o q_2 se tendría un elemento más en \mathcal{D} . Ahora, sin pérdida de generalidad supongamos que $q = q_1$, si $q_1 \sim q_2$ esto nos llevaría a una contradicción, entonces supongamos que $q_1 \not\sim q_2$. Como X, Y, Z son los únicos elementos en \mathcal{D} entonces existen $w_i \in \bigcap((X - q'_i) \cup q_2)$, para cada $q'_i \in X$, pero los vértices w_i no pueden ser iguales a los x_i , pues si al menos uno de ellos fuese igual a algún x_i se tendría $q_1 \sim q_2$, lo cual estamos suponiendo que no pasa. Pero observemos que la unión de los x_i con los w_i forman una completa y está contenida tanto en q_1 como en q_2 , esto implicaría que $q_1 = q_2$, lo cual es una contradicción que viene de suponer que \mathcal{D} tiene tres elementos.

Otro caso más que pudiese ocurrir es que $X, Y \subseteq Z$, donde sin pérdida de generalidad podemos suponer que Z es maximal, que la cardinalidad de X y Y es la misma y la cardinalidad de Z es igual a la de X mas uno (en caso de no ser así se puede ver que existirían más elementos en \mathcal{D}). Supongamos entonces que $Z = \{q_1, q_2, \dots, q_m, q_y, q_x\}$ y que $Y = Z - \{q_z\}$, $X = Z - q_y$. Ahora, definamos $x_i \in \cap(X - \{q_i\})$, para $i = 1, 2, \dots, m, x$, se tiene que los x_i forman una completa de G y que deben estar en algún clan que no puede ser ninguno de los elementos de X , en ese caso necesariamente deberían estar en q_y , pero si eso pasa, entonces $x_x \in \cap\{q_1, q_2, \dots, q_m\}$ y $x_x \in q_y$. Es decir, se tendría que $\cap(Y) \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción, la contradicción viene de suponer que \mathcal{D} tiene solamente tres elementos.

Finalmente si se tuviese al menos una cara aislada de las otras dos, es decir, que no estuviera contenida o que no contuviera a alguna de las otras dos, por la proposición 4.4.3 se tendría al menos una cara más que la contuviera o que estuviese contenida en ella, concluyendo así que \mathcal{D} no puede tener tres elementos. ■

De las demostraciones anteriores, se observan ciertas construcciones que se pueden usar en demostraciones futuras.

Proposición 4.5.3 *Si G es una gráfica que no es clan Helly y se tienen $X, Y, Z \in \mathcal{D}$, donde $\mathcal{D} = \Delta(K(G)) - \mathcal{N}(G)$ y $X \subset Y \subset Z$, entonces existe al menos otro elemento en \mathcal{D} de la cardinalidad de Y .*

Demostración. Supongamos que $|Y| = m$ y $|X| = \ell$, observemos que si $m > \ell + 1$, podemos extender a X añadiendo elementos en $Y - X$ tal que el nuevo conjunto que llamaremos X' sea tal que $|X'| = m - 1$ y que $X' \subset Y$, ahora, como la contención de Y a Z es propia, existe $q \in Z - Y$, este q es vecino de todos los elementos de X' y además $\cap(X' \cup \{q\}) = \emptyset$. Además $|X' \cup \{q\}| = m$, es decir, $X' \cup \{q\}$ es un elemento de \mathcal{D} de la cardinalidad de Y distinto de X, Y y Z . ■

4.6. Colapsos en gráficas con defecto Helly 1

En este apartado, se buscan condiciones sobre tratar de encontrar un contraejemplo mínimo para la conjetura de que una gráfica con defecto Helly 1 es homotópicamente invariante.

Proposición 4.6.1 *Al tratar de buscar un contraejemplo mínimo para la conjetura de que una gráfica con defecto Helly 1 es homotópicamente invariante podríamos excluir las gráficas con vértices dominados.*

Demostración. Supongamos que si existe al menos una gráfica G tal que no es clan Helly, $K(G)$ es clan Helly, que además x es un vértice dominado de G y que G no

es homotópica a $K(G)$, podemos suponer que G es la más pequeña de las gráficas que tienen todas las propiedades anteriores, excepto la de ser homotópica a $K(G)$

Podría suceder que $G - x$ fuese clan Helly, en ese caso sabemos que

$$G \simeq G - x \simeq K(G - x).$$

Además también es cierto que $K(G) \simeq K(G - x)$ (por teorema 4.3.5), por lo tanto $G \simeq K(G)$ lo cual es una contradicción, pues se supuso que G y $K(G)$ no son homotópicas.

También podría pasar que $G - x$ no fuera clan Helly, pero como $K(G)$ si es clan Helly, entonces $K(G - x)$ también es clan Helly (por teorema 4.3.7). Además se supuso que G era la gráfica más pequeña que cumple no ser homotópica a $K(G)$, por lo tanto $G - x \simeq K(G - x)$ y además se tiene que $G \simeq G - x$ y $K(G) \simeq K(G - x)$, todo ello implica que $G \simeq K(G)$, esto es una contradicción.

En cualquier caso se llega a una contradicción, por lo tanto al tratar de buscar un contraejemplo mínimo, podemos excluir a las gráficas con vértices dominados.

■

Ahora, observemos lo siguiente: ya hemos visto que la conjetura de que una gráfica G tal que $K(G)$ es clan Helly entonces $G \simeq K(G)$ se cumple al menos hasta el caso donde G tiene seis vértices. Si tratáramos de buscar un contraejemplo o seguir verificando que las gráficas de siete vértices también cumplen la conjetura, observemos que podríamos ignorar, primero las gráficas que si son clan Helly, ya que dichas gráficas conocemos que en efecto $G \simeq K(G)$ (por teorema 3.2.8), también podríamos excluir las gráficas que son dismantelables, ya que también se conoce que dichas gráficas son homotópicamente invariantes. Por la proposición 4.6.1 podríamos ignorar a las gráficas con vértices dominados (en particular las que son dismantelables). Por lo tanto nos tendríamos que fijar en todas las gráficas de siete vértices tal que no son clan Helly, su gráfica de clanes es clan Helly, y que no tienen vértices dominados. Usando el lenguaje Python, la librería `pycliques` (la cual está siendo desarrollada por el Dr. Rafael Villarroel) y la librería `networkx` se pudo encontrar que hay exactamente dos gráficas de siete vértices que tendríamos que verificar que cumplen o no la conjetura, antes de obtener la proposición 4.6.1 se hubiesen tenido que verificar 13 gráficas. Dichas dos gráficas resultaron ser las mostradas en la figura 4.9.

Consideremos primero la gráfica G_1 mostrada en la figura 4.9 tiene siete clanes, los cuales son

$$q_1 = \{0, 5, 6\}, q_2 = \{2, 5, 6\}, q_3 = \{2, 3, 6\}, q_4 = \{2, 3, 4\}, q_5 = \{1, 3, 4\},$$

$$q_6 = \{2, 4, 5\}, q_7 = \{0, 1\},$$

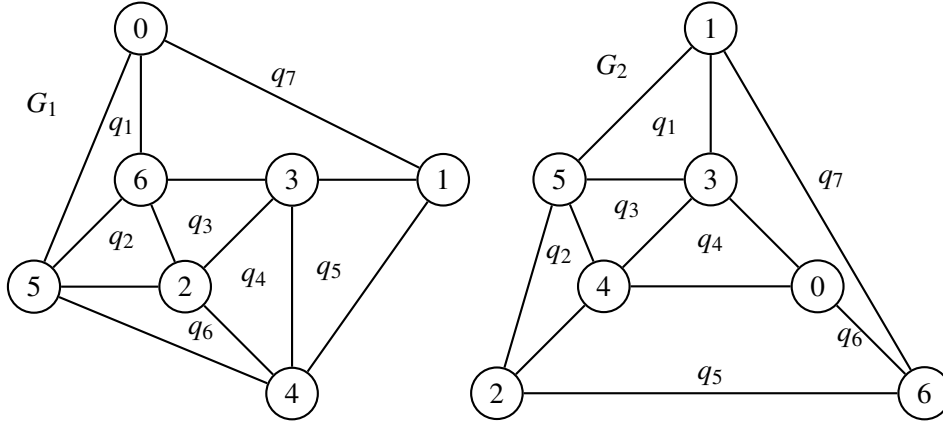


Figura 4.9: Gráficas de siete vértices, conexas, no clan Helly, con gráfica de clanes clan Helly y sin vértices dominados.

de los cuales podemos ver que

$$Q_1 = \{q_3, q_4, q_5, q_6\}, Q_2 = \{q_2, q_3, q_4, q_6\}, Q_3 = \{q_1, q_2, q_3, q_6\},$$

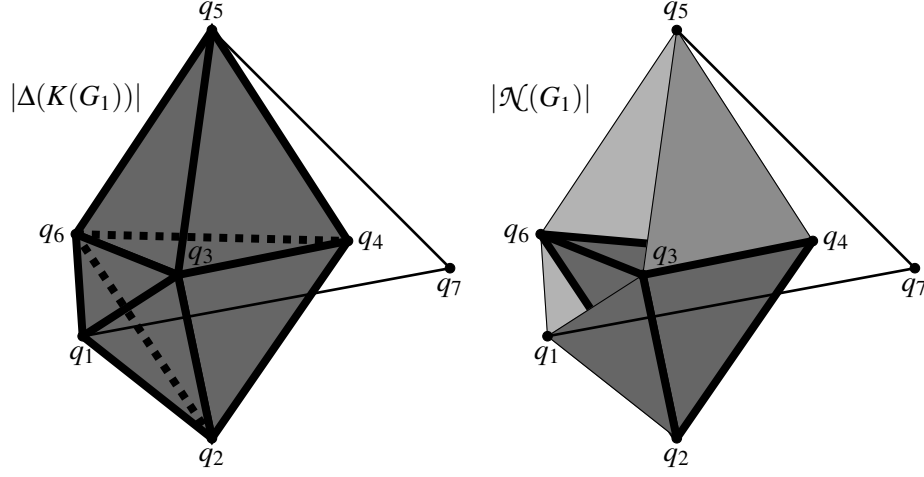
$$Q_4 = \{q_5, q_7\}, Q_5 = \{q_1, q_7\}$$

son los clanes de $K(G_1)$.

Observemos que Q_1, Q_2, Q_3 es una colección intersecante de clanes y la intersección de ellos tres es $\{q_3\}$, por lo que es no vacía, el resto de colecciones intersecantes que podemos considerar son $\{Q_4, Q_5\}$, $\{Q_4, Q_1\}$ y $\{Q_3, Q_5\}$, pero solo tienen dos elementos, concluyendo que toda colección intersecante de los clanes de $K(G_1)$ tiene intersección no vacía, por lo que $K(G_1)$ es clan Helly. Ahora, veamos que entonces $\Delta(K(G_1))$ está formado por tres 3-simplejos y dos 1-simplejos (ver figura 4.10). Si consideramos el nervio $\mathcal{N}(G_1)$, podemos ver que a este le faltarían los simplejos $\{q_3, q_5, q_6\}$, $\{q_3, q_4, q_5, q_6\}$, $\{q_1, q_3, q_6\}$, $\{q_1, q_2, q_3, q_6\}$ para ser igual a $\Delta(K(G_1))$, y de hecho se tiene que $\sigma_1 = \{q_3, q_5, q_6\}$ es una cara libre de $\Delta(K(G_1))$ que está contenida en una sola cara maximal, la cual notamos que es $\tau_1 = \{q_3, q_4, q_5, q_6\}$. Similarmente $\sigma_2 = \{q_1, q_3, q_6\}$ es una cara libre contenida en una sola cara maximal, la cual es $\tau_2 = \{q_1, q_2, q_3, q_6\}$ (ver figura 4.10). Por lo que dichas caras las podemos colapsar y de esa forma obtener el nervio de G_1 , por lo tanto

$$\Delta(K(G_1)) \simeq \Delta(K(G_1)) - \{\sigma_1, \tau_1\} \simeq \Delta(K(G_1)) - (\{\sigma_1, \tau_1\} \cup \{\sigma_2, \tau_2\}) = \mathcal{N}(G_1).$$

Por lo tanto se tiene que $\Delta(G_1) \simeq \Delta(K(G_1))$.


 Figura 4.10: Realizaciones geométricas $|\Delta(K(G_1))|$ y $|\mathcal{N}(G_1)|$.

Consideremos ahora la gráfica G_2 de la figura 4.9. Ésta tiene siete clanes, los cuales son

$$q_1 = \{1, 3, 5\}, q_2 = \{2, 4, 5\}, q_3 = \{3, 4, 5\}, q_4 = \{0, 3, 4\}, q_5 = \{2, 6\}, \\ q_6 = \{0, 6\}, q_7 = \{1, 6\}$$

de ello se obtiene que los clanes de $K(G_2)$ son

$$Q_1 = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}, Q_2 = \{q_5, q_6, q_7\}, Q_3 = \{q_3, q_5\}, \\ Q_4 = \{q_4, q_6\}, Q_5 = \{q_1, q_7\}.$$

Notemos que basta considerar las colecciones intersecantes de tres o más clanes para ver si una gráfica es clan Helly, en este caso no hay colecciones intersecantes de tres o más clanes, por lo que la gráfica $K(G_2)$ es clan Helly. Ahora veamos que $\Delta(K(G_2))$ está formada por un 3-simplejo, un 2-simplejo y tres 1-simplejos, además el nervio $\mathcal{N}(G_2)$ solamente difiere de $\Delta(K(G_2))$ en dos simplejos, los cuales son, $\sigma = \{q_1, q_2, q_4\}$ y $\tau = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$. Es decir, a $\mathcal{N}(G_2)$ le faltan σ y τ , para ser igual a $\Delta(K(G_2))$ (ver realizaciones geométricas del nervio y del complejo simplicial formado por $K(G)$ en la figura 4.11). Pero observemos que σ es una cara libre de $\Delta(K(G_2))$ que está contenido en solo una cara maximal, que es justamente τ , por lo tanto podemos colapsar estas caras sin alterar el tipo de homotopía, es decir,

$$\Delta(K(G_2)) \simeq \Delta(K(G_2)) - \{\sigma, \tau\} = \mathcal{N}(G_2).$$

Por lo tanto $G_2 \simeq K(G_2)$.

Hemos mostrado que las dos gráficas de la figura 4.9 cumplen ser homotópicas a su gráfica de clanes, es decir, hemos mostrado que la conjetura es cierta para todas las gráficas de siete vértices.

Para el caso de las gráficas de ocho vértices, sin tener la proposición 4.6.1 y preguntándole a **Python** tendríamos que verificar 731 gráficas, pero usando dicha proposición se redujo a verificar solamente 34 gráficas.

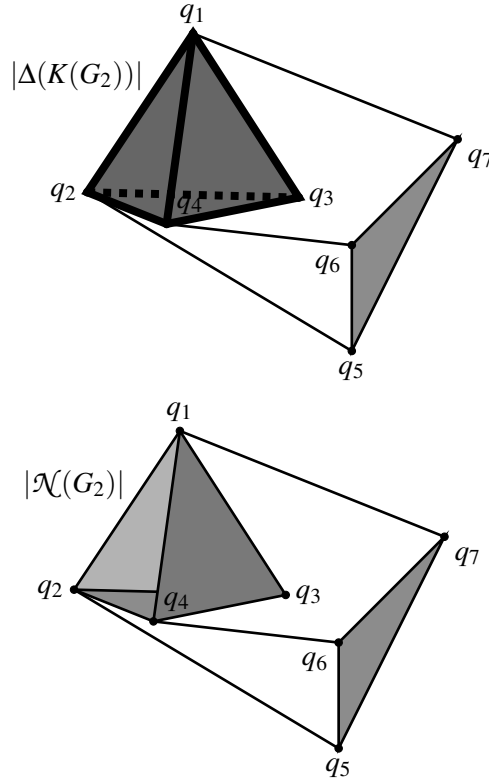


Figura 4.11: Realizaciones geométricas $|\Delta(K(G_2))|$ y $|\mathcal{N}(G_2)|$.

De observar todos éstos ejemplos que arrojó el software de **Python** se conjeturaron y demostraron las siguientes proposiciones.

Proposición 4.6.2 Sea $\mathcal{D} = \Delta(K(G)) - \mathcal{N}(G)$, donde G es una gráfica tal que cumple $|\mathcal{D}| = 2$, entonces $\Delta(K(G))$ se puede colapsar a $\mathcal{N}(G)$.

Demostración. Recordemos que $|\mathcal{D}| = 0$ si y sólo si G es clan Helly, por lo que estamos considerando gráficas que no son clan Helly. Sea $\mathcal{D} = \{X, Y\}$, sin pérdida

de generalidad podemos suponer que Y es una cara maximal en $\Delta(K(G))$, pues si ambas caras X y Y no fuesen maximales se podrían extender a una maximal y esta cumpliría estar en \mathcal{D} , lo cual no pasa porque $|\mathcal{D}| = 2$. Luego, como Y es maximal por la proposición 4.4.3 debe contener una cara Y_1 cuya cardinalidad es uno menos que la de Y tal que $\cap Y_1 = \emptyset$, como $|\mathcal{D}| = 2$ entonces necesariamente $Y_1 = X$, además X es una cara libre, pues si estuviese en otra cara maximal dicha cara también estaría en \mathcal{D} , y eso es una contradicción. Por lo tanto, podemos realizar un colapso elemental quitando a X y a Y de $\Delta(K(G))$ y eso nos da justamente $\mathcal{N}(G)$. ■

Observemos que en la proposición anterior, a G no se le está pidiendo la propiedad de que $K(G)$ sea clan Helly. De hecho, la gráfica de la figura 4.12 es tal que $K(G)$ no es clan Helly y la diferencia \mathcal{D} tiene cardinalidad dos, además tampoco tiene vértices dominados. Los clanes de esta gráfica son nueve:

$$\begin{aligned} q_1 &= \{1, 4, 7\}, \\ q_2 &= \{1, 4, 6\}, \\ q_3 &= \{0, 4, 6\}, \\ q_4 &= \{0, 3, 7\}, \\ q_5 &= \{2, 7\}, \\ q_6 &= \{2, 6\}, \\ q_7 &= \{3, 5\}, \\ q_8 &= \{1, 5\}, \\ q_9 &= \{0, 4, 7\}. \end{aligned}$$

Se puede verificar que los clanes q_1, q_3, q_4, q_9 se intersectan dos a dos pero la intersección de los cuatro es vacía, por lo que, en efecto G no es clan Helly. También podemos ver que algunos de los clanes de $K(G)$ son:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \{q_2, q_3, q_6\}, \\ Q_2 &= \{q_1, q_2, q_8\}, \\ Q_3 &= \{q_1, q_2, q_3, q_9\}, \\ Q_4 &= \{q_1, q_3, q_4, q_9\}. \end{aligned}$$

Estos se interesctan dos a dos y la intersección de todos es vacía, por lo que la gráfica $K(G)$ no es clan Helly, además notemos que

$$\Delta(K(G)) - \mathcal{N}(G) = \{\{q_1, q_3, q_4\}, \{q_1, q_3, q_4, q_9\}\}.$$

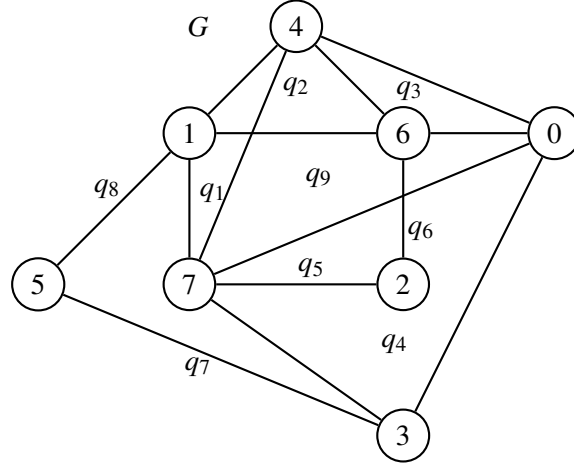


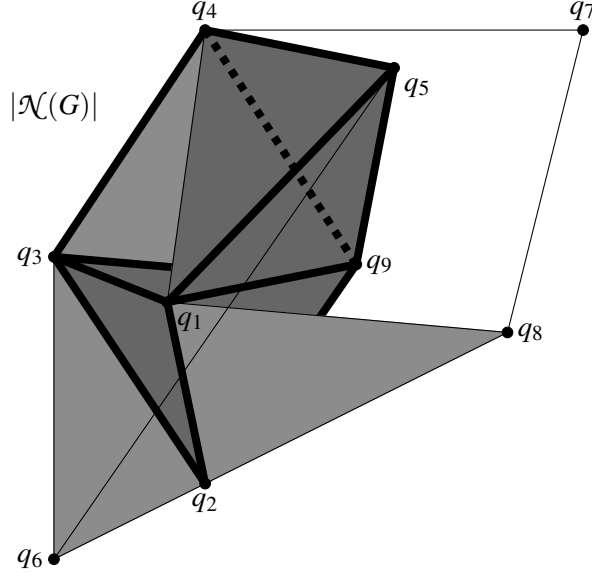
Figura 4.12: Gráfica donde G y $K(G)$ no son clan Helly y con $|\mathcal{D}| = 2$.

Y por la proposición anterior podemos obtener $\mathcal{N}(G)$ colapsando a $\Delta(K(G))$. (Ver figura 4.13 de la realización geométrica de $\mathcal{N}(G)$).

Lema 4.6.3 Si $X, Y, Z \in \mathcal{D} = \Delta(K(G)) - \mathcal{N}(G)$, donde G es una gráfica entonces no puede pasar que Y y Z sean maximales, $X \subset Y$, $X \subset Z$, $|Z| = |Y| = |X| + 1$ y que el resto de las caras de Z y de Y tengan intersección no vacía.

Demostración. Supongamos que si se puede dar dicha situación, entonces supongamos que $X = \{q_1, q_2, \dots, q_m\}$, que $Y = X \cup \{q_y\}$ y que $Z = X \cup \{q_z\}$, como el resto de las caras de Y y Z son no vacías, existen $x_i \in \cap(X - \{q_i\})$ para cada índice $i = 1, 2, \dots, m$. Similarmente existen $y_i \in \cap(Z - \{q_i\})$ para $i = 1, 2, \dots, m$. Se observa que todo los x_i son vecinos entre ellos, al igual que los y_i , además de que los x_i son diferentes de todos los y_i , pues si algún par de ellos fuesen iguales entonces se tendría que hay un mismo elemento en q_y y en q_z , es decir, $q_y \sim q_z$, lo cual no puede suceder porque entonces Y no sería maximal, ya que q_z sería vecino de todos los elementos en Y . Entonces, observemos que la unión de los vértices x_i con los y_i es una completa, por lo que debe estar en algún clan, el cual solo puede ser q_y o q_z por que si estuviesen en algún elemento de X se seguiría que $\cap X \neq \emptyset$, pero en cualquier caso se llega a una contradicción, pues esto implica que $q_y \sim q_z$ o bien que $q_y = q_z$. Por lo tanto se cumple lo que se quería mostrar. ■

Proposición 4.6.4 Sea $\mathcal{D} = \Delta(K(G)) - \mathcal{N}(G)$, donde G es una gráfica tal que cumple $|\mathcal{D}| = 4$, entonces $\Delta(K(G))$ se puede colapsar a $\mathcal{N}(G)$.


 Figura 4.13: Realización geométrica $|\mathcal{N}(G)|$.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{D} = \{W, X, Y, Z\}$. Es directo ver que al menos un elemento de \mathcal{D} debe ser maximal en $K(G)$, sin pérdida de generalidad supongamos que Z es maximal, también sin pérdida de generalidad, por la Conjetura 4.4.3 podemos suponer que $Y \subset Z$ y $|Z| = |Y| + 1$. Ahora, si X o W fuese alguna de ellas maximal que no contiene a Y (supongamos que X es maximal), de nuevo por la conjetura 4.4.3 se tendría que cumplir que $W \subseteq X$ y que $|X| = |W| + 1$, por lo tanto podríamos aplicar primero un colapso quitando a Y y Z y luego a W y X , pero en caso de que X fuese maximal y $Y \subset X$, una cosa que en principio podría pasar es que $Y \subset W \subset X$. Sin embargo, por la proposición 4.5.3 obtendríamos un elemento extra en \mathcal{D} , por lo tanto debería suceder que $|X| = |Z|$, entonces podemos suponer que

$$Y = \{q_1, q_2, \dots, q_m\}, \quad Z = Y \cup \{q_z\}, \quad X = Y \cup \{q_x\},$$

donde $q_x \approx q_z$. Algo que podría suceder es que $|W| = |Y|$ y $W \subset Z$ o bien $W \subset X$, pero en cualquier caso podríamos colapsar primero a W con Z o X y luego a Y con X o Z según sea el caso. Una situación más que veremos que no ocurrir es que el simplejo W fuese maximal y que $Y \subset W$, pues en ese caso, X, Y, Z cumplen las hipótesis del lema 4.6.3, es decir, dicho caso no puede ocurrir. Tampoco podría ocurrir que $W \subset Y$, pues entonces por la proposición 4.5.3 se tendría un elemento más de la cardinalidad de Y en \mathcal{D} .

Finalmente, nos queda suponer que Z es la única cara maximal. Entonces si pa-

sara que $X \subset Y \subset Z$ por la proposición 4.5.3 W quedaría completamente determinado por $W = x \cup \{q_z\}$, donde $q_z \in Z - Y$, y podríamos colapsar a Y con Z y luego a X con W . Pero que tal si pasara $Y \subset Z$, $X \subset Z$ y $|Y| = |X|$, podemos suponer entonces que $Z = \{q_1, q_2, \dots, q_m\}$, $X = Z - \{q_{m-1}\}$, $Y = Z - \{q_m\}$. Ahora observemos que debe existir $q \in Y$ tal que $\bigcap(Y - \{q\}) = \emptyset$ (similarmente pasa lo mismo con X), pues de no ser así existen $y_i \in \bigcap(Y - \{q_i\})$ para cada $i = 1, 2, \dots, m-1$. Sabemos que los y_i forman una completa, y que dicha completa debe estar en algún clan que no puede ser ninguno de los elementos de Y , entonces necesariamente los y_i están en q_m . Esto nos llevaría a que $\bigcap((Y - \{q\}) \cup \{q_m\}) \neq \emptyset$ para todo $q \in Y$, en particular si $q = q_{m-1}$, entonces

$$\bigcap((Y - \{q_{m-1}\}) \cup \{q_m\}) = \bigcap X \neq \emptyset.$$

Lo cual es una contradicción, por lo tanto existe $q' \in Y$ tal que $\bigcap(Y - \{q'\}) = \emptyset$. Por un argumento similar existe $q'' \in X$ tal que $\bigcap(X - \{q''\}) = \emptyset$, pero como solo hay cuatro elementos en \mathcal{D} , entonces necesariamente

$$W = Y - \{q'\} = X - \{q''\},$$

y eso solo puede pasar si $W = \{q_1, q_2, \dots, q_{m-2}\}$, por lo que $W \subset X$ y $W \subset Y$, de esta forma podemos colapsar primero a Y con Z y luego a W con X . ■

También se conocen gráficas sin vértices dominados, que ni ella ni su gráfica de clanes son clan Helly y que \mathcal{D} tiene cardinalidad cuatro y que por la proposición anterior se sabe que son homotópicamente invariantes. Un ejemplo de éstas gráficas es la de la figura 4.14.

Definición 4.6.5 *Una superficie es un espacio topológico tal que todo punto tiene una vecindad homeomorfa a \mathbb{R}^2 . Una gráfica G es una triangulación de la superficie S si $\Delta(G) \cong S$.*

Se puede demostrar que una gráfica es una triangulación de una superficie si y sólo si la vecindad abierta de todo vértice es un ciclo de longitud mayor o igual a 4.

En la figura 4.15 tenemos la gráfica O_3 conocida como el octaedro (ver definición 3.1.6 en capítulo anterior) y la gráfica G conocida como la suspensión de C_5 , ambas gráficas se puede mostrar que son homeomorfas a una esfera S^2 .

En el artículo [7] Larrión, Neumann-Lara, Pizaña demuestran que las triangulaciones de superficies diferentes al octaedro son homotópicamente invariantes. A continuación se da una demostración de este hecho usando las herramientas del presente capítulo.

Teorema 4.6.6 *Si G es una triangulación de una superficie entonces podemos colapsar $\Delta(K(G))$ al nervio $\mathcal{N}(G)$, en particular $G \simeq K(G)$.*

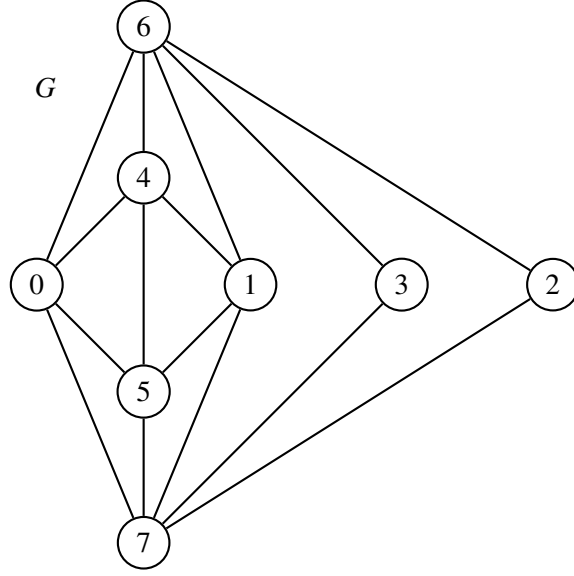


Figura 4.14: Gráfica donde G y $K(G)$ no son clan Helly y con $|\mathcal{D}| = 4$.

Demostración. Observemos que una triangulación de una superficie que no es el octaedro (O_3 figura 4.15) se puede ver en cada parte como en la figura 4.16. Entonces cuando se tiene un conjunto de tres clanes de G que se intersectan dos a dos y cuya intersección de los tres es vacía necesariamente se ven de la forma en que se ven q_1, q_3, q_5 en la figura 4.16, y esa completa de tres se puede extender solo con un clan más, que en este caso es el q_4 , pues como la superficie no es el octaedro no puede haber otro clan más con quién extender a la completa de tres. Además q_1, q_3, q_4, q_5 ya es un clan, observemos entonces que como q_1, q_3, q_5 solo está en la completa maximal q_1, q_3, q_4, q_5 , es una cara libre y entonces podemos colapsar estas dos caras, y esto lo podemos hacer con cada completa de tres clanes cuya intersección sea vacía, por lo tanto concluimos que en efecto podemos colapsar $\Delta(K(G))$ al nervio $\mathcal{N}(G)$. ■

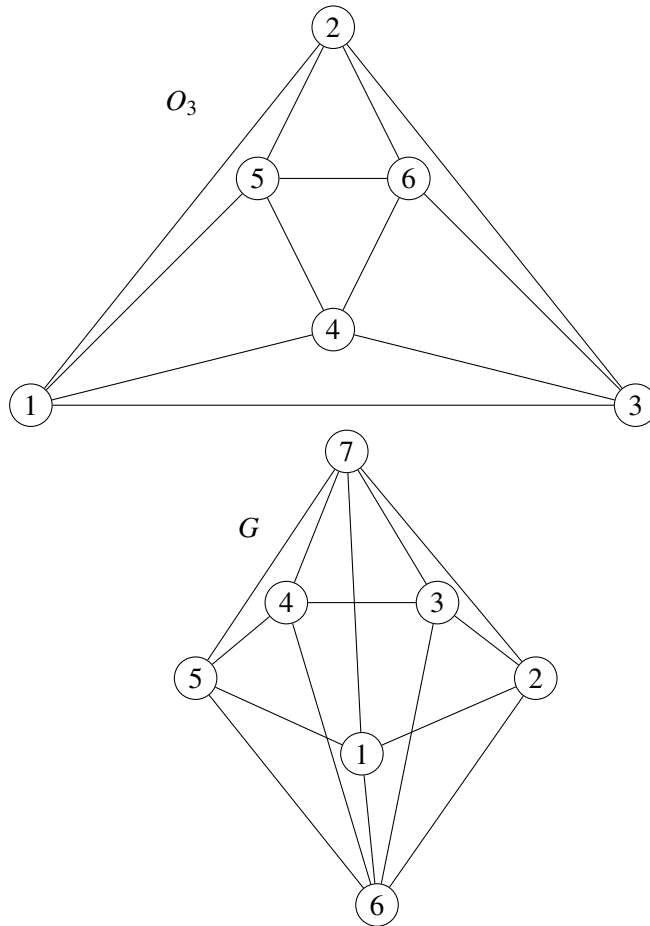


Figura 4.15: O_3 y suspensión de C_5 .

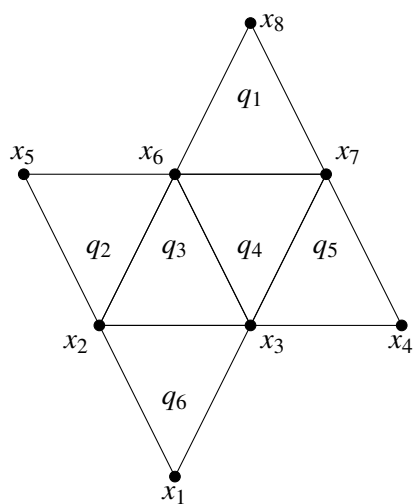


Figura 4.16: Parte de una triangulación de una superficie.

Conclusión

Después de analizar algunas gráficas con defecto Helly 1 y ver que en todos esos casos pudimos colapsar el complejo de completas de una gráfica de clanes al nervio de dicha gráfica, se concluye que estas gráficas son homotópicas a su gráfica de clanes. A pesar de que decidir si una gráfica tiene defecto Helly 1 es un problema NP-difícil, se conjetura que tales gráficas tienen un buen comportamiento con respecto a preservar el tipo de homotopía cuando se aplica el operador de clanes.

La presente tesis sugiere la idea de que tal vez se pueda mostrar a través de colapsos, ya que se verificaron todos los posibles casos hasta gráficas de ocho vértices y en todos resultó ser cierto. Con ayuda de algunos resultados mostrados en este trabajo se lograron reducir bastantes casos. Además, si dicha conjetura se lograra mostrar, se tendría una clase más grande de gráficas homotópicas invariantes que incluya propiamente a las gráficas clan Helly.

Cabe notar que también pudimos aplicar la herramienta de colapsos para probar equivalencias homotópicas que habían sido demostradas usando otras técnicas. Ésto es relevante, pues los colapsos son una herramienta combinatoria con la que se puede trabajar en la computadora, a diferencia de los teoremas usuales de la topología combinatoria. Por otro lado, los colapsos determinan la llamada relación de homotopía simple, la cual es más estricta que la homotopía usual de espacios topológicos.

Bibliografía

- [1] H. J. Bandelt and E. Prisner. Clique graphs and helly graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 51(1):34–45, 1991.
- [2] M. C. Dourado, F. Protti, and J. L. Szwarcfiter. On the Helly defect of a graph. *SciELO Analytics*, 7(3):48–52, 2001.
- [3] F. F. Dragan. *Centers of graphs and the Helly property*. PhD thesis, Moldova State University, 1989.
- [4] F. Escalante. Über iterierte clique-graphen. *Abh. Math. sem. Univ. Hamburg*, 39:59–68, 1973.
- [5] M. E. Frías-Armenta, V. Neumann-Lara, and M. A. Pizaña. Dismantlings and iterated clique graphs. *Discrete Mathematics*, 282:263–265, 2004.
- [6] R. L. Graham, M. Grötschel, and L. Lovász, editors. *Handbook of combinatorics. Vol. 2*. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 1995.
- [7] F. Larrión, V. Neumann-Lara, and M. A. Pizaña. On the homotopy type of the clique graph. *Journal of the Brazilian Computer Society*, 7:69 – 73, 00 2001.
- [8] F. Larrión, M. A. Pizaña, and R. Villarreal-Flores. Contractibility and the clique graph operator. *Discrete Math.*, 308(16):3461–3469, 2008.
- [9] J. R. Munkres. *Homology Groups of a Simplicial Complex*, chapter 1, pages 2–20. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1984.
- [10] E. Prisner. Convergence of iterated clique graphs. *Discrete Math*, 103(2):199–207, 1992.
- [11] J. L. Szwarcfiter. Recognizing clique-Helly graphs. *Ars Combin.*, 45:29–32, 1997.