

PRÁCTICO 3

NÚMEROS ALEATORIOS Y MÉTODO DE MONTE CARLO.

Ejercicio 1. Para el estudio mediante simulación es necesario generar muchos números aleatorios en la computadora. Estos corresponden a variables aleatorias uniformemente distribuidas en el intervalo $(0, 1)$. Existen en la literatura varias rutinas portables, optimizadas para generar enormes cantidades de números pseudo-aleatorios con velocidad razonable.

a) Determinar el período de la secuencia de von Neumann generada a partir de la semilla:

i) 3009

ii) 7600

iii) 1234

iv) 4321

b) Dar el valor de c y de a para que cada generador tenga período máximo.

$$y_{i+1} = 5y_i + c \pmod{2^5}, \quad x_{i+1} = ax_i \pmod{31}$$

Considerar el generador $z_i = y_i + x_i \pmod{2^5}$ y calcular su período.

Representar en tres gráficos separados pares (y_i, y_{i+1}) , (x_i, x_{i+1}) y (z_i, z_{i+1}) .

c) Indicar en cuáles de los siguientes casos el generador

$$y_{i+1} = ay_i + c \pmod{M}$$

genera una secuencia de período máximo.

- $a = 125, c = 3, M = 2^9$
- $a = 123, c = 3, M = 2^9$
- $a = 5, c = 0, M = 71$
- $a = 7, c = 0, M = 71$

d) Utilice el generador RANDU

$$u_i = a \cdot u_{i-1} \pmod{M}, \quad a = 2^{16} + 3, \quad M = 2^{31},$$

para generar puntos aleatorios en el cubo $[0, M] \times [0, M] \times [0, M]$, de la forma:

$$(u_1, u_2, u_3), (u_4, u_5, u_6), \dots$$

y estimar el porcentaje de puntos que caen en la esfera centrada en $(M/2, M/2, M/2)$ de radio $M/10$.

Repetir el procedimiento con el generador

$$y_i = a \cdot y_{i-1} \pmod{M}, \quad a = 7^5, \quad M = 2^{31} - 1.$$

¿Cuál de los dos generadores estima mejor el valor real?

Ejercicio 2. Se propone el siguiente juego en el cual todas las variables aleatorias que se generan son **independientes** e idénticamente distribuidas $\mathcal{U}(0, 1)$: Se simula la variable aleatoria U . Si $U < \frac{1}{2}$, se suman dos nuevos números aleatorios $W_1 + W_2$. Pero si $U \geq \frac{1}{2}$, se suman tres números aleatorios. El resultado de la suma, en cualquiera de los casos, es una variable aleatoria X . Se gana en el juego si $X \geq 1$.

a) ¿Cuál es la probabilidad de ganar?.

- b) Implementar un algoritmo en computadora que estime la probabilidad de ganar, esto es, la fracción de veces que se gana en n realizaciones del juego. Completar la siguiente tabla:

n	100	1000	10000	100000	1000000
$P[X \geq 1]$					

Ejercicio 3. Las máquinas tragamonedas usualmente generan un premio cuando hay un acierto. Supongamos que se genera el acierto con el siguiente esquema: se genera un número aleatorio, y

- i) si es menor a un tercio, se suman dos nuevos números aleatorios
- ii) si es mayor o igual a un tercio, se suman tres números aleatorios .

Si el resultado de la suma es menor o igual a 2, se genera un acierto.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de acertar?.
- b) Implementar un algoritmo en computadora que estime la probabilidad de acertar, esto es, la fracción de veces que se acierta en n realizaciones del juego. Completar la siguiente tabla:

n	100	1000	10000	100000	1000000
$P[X \leq 2]$					

Ejercicio 4. Un supermercado posee 3 cajas. Por una cuestión de ubicación, el 40 % de los clientes eligen la caja 1 para pagar, el 32 % la caja 2, y el 28 % la caja 3. El tiempo que espera una persona para ser atendida en cada caja distribuye exponencial con medias de 3, 4 y 5 minutos respectivamente.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente espere menos de 4 minutos para ser atendido?
- b) Si el cliente tuvo que esperar más de 4 minutos. ¿Cuál es la probabilidad de que el cliente haya elegido cada una de las cajas?
- c) Simule el problema y estime las probabilidades anteriores con 1000 iteraciones.

Ejercicio 5. Calcule exactamente el valor de las siguientes integrales. Mediante una simulación de Monte Carlo con $n = 1000, 5000, 10000$ iteraciones, calcule a su vez un valor aproximado y compare con el valor exacto.

a) $\int_0^1 (1-x^2)^{3/2} dx$

b) $\int_2^3 \frac{x}{x^2-1} dx$

c) $\int_0^\infty x (1+x^2)^{-2} dx$

d) $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx$

e) $\int_0^1 \left[\int_0^1 e^{(x+y)^2} dx \right] dy$

$$f) \int_0^\infty \left[\int_0^x e^{-(x+y)} dy \right] dx$$

Ayuda: Sea: $I_y(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } y < x \\ 0 & \text{si } y \geq x \end{cases}$. Utilice esta función para igualar la integral del ítem **f)** a otra cuyos términos vayan de 0 a ∞ .

Completar la siguiente tabla:

n	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	← integral
100							
1000							
10000							
100000							
1000000							

Ejercicio 6. Es posible aproximar el valor de π calculando el área de un círculo de radio 1 centrado en 0. Para eso, se necesitan generar N puntos aleatorios en la caja $[-1, 1] \times [-1, 1]$ y contar la cantidad de veces que los mismos caen dentro del círculo. El cociente entre este número y N , multiplicado por 4 (el área del cuadrado donde está contenido el círculo) es una aproximación de π .

Completar la siguiente tabla con los valores obtenidos para distintos N y compararlos con `numpy.pi` o `math.pi`:

n	π
1000	
10000	
100000	

Ejercicio 7. Para U_1, U_2, \dots variables aleatorias uniformemente distribuidas en el intervalo $(0, 1)$, se define:

$$N = \text{Mínimo} \left\{ n : \sum_{i=1}^n U_i > 1 \right\}$$

Es decir, N es igual a la cantidad de números aleatorios que deben sumarse para exceder a 1.

a) Estimar $E[N]$ generando n valores de N y completar la siguiente tabla:

n	100	1000	10000	100000	1000000
$E[N]$					

b) Calcular el valor exacto de $E[N]$.

Ejercicio 8. Para U_1, U_2, \dots números aleatorios, se define:

$$N = \text{Máximo} \left\{ n : \prod_{i=1}^n U_i \geq e^{-3} \right\}$$

donde: $\prod_{i=1}^0 U_i = 1$. Mediante n simulaciones determinar:

a)

n	100	1000	10000	100000	1000000
$E[N]$					

b) $P(N = i)$ para $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, usando $n = 1000000$.

Ejercicio 9. Un juego consiste en dos pasos. En el primer paso se tira un dado convencional. Si sale 1 o 6 tira un nuevo dado y se le otorga al jugador como puntaje el doble del resultado obtenido en esta nueva tirada; pero si sale 2, 3, 4 o 5 en la primer tirada, el jugador debería tirar dos nuevos dados, y recibiría como puntaje la suma de los dados. Si el puntaje del jugador excede los 6 puntos entonces gana.

- Realizar un cálculo teórico de la probabilidad de que un jugador gane.
- Estime la probabilidad de que un jugador gane mediante una simulación.