

PRÁCTICO 5

GENERACIÓN DE VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS.

Ejercicio 1. Desarrolle un método para generar una variable aleatoria cuya densidad de probabilidad es

a)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{2} & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \\ \frac{2-x/3}{2} & \text{si } 3 \leq x \leq 6 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} .$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{6(x+3)}{35} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{6x^2}{35} & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} .$$

c)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\exp(4x)}{4} & \text{si } -\infty < x \leq 0 \\ \frac{1}{4} & \text{si } 0 < x \leq \frac{15}{4} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} .$$

Ejercicio 2.

a) Desarrolle métodos para generar las siguientes variables aleatorias

i) Distribución Pareto

$$f(x) = ax^{-(a+1)} \quad 1 \leq x < \infty, \quad a > 0$$

ii) Distribución Erlang

$$f(x) = \frac{x^{k-1} \exp(-x/\mu)}{(k-1)! \mu^k} \quad 0 \leq x < \infty, \quad \mu > 0, \quad k \text{ entero}$$

iii) Distribución Weibull

$$f(x) = \frac{\beta}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda} \right)^{\beta-1} \exp(-(x/\lambda)^\beta) \quad 0 \leq x, \quad \lambda > 0, \quad \beta > 0$$

Ayuda: la distribución Pareto y la distribución Weibull tienen distribución acumulada F con forma cerrada, por lo cual puede aplicarse el método de la transformada Inversa. La distribución de Erlang pertenece a la familia de las Gammas. Puede simularse por rechazo o como suma de exponenciales.

b) Estime la media de cada variable con 10.000 repeticiones, usando los parámetros $a = 2$, $\mu = 2$, $k = 2$, $\lambda = 1$, $\beta = 2$. Busque en la web los valores de las esperanzas para cada variable con estos parámetros (cuidado con las parametrizaciones) y compare los valores obtenidos.

Ejercicio 3. Método de la composición:

- a) Suponga que es relativamente fácil generar n variables aleatorias a partir de sus distribuciones de probabilidad F_i , $i = 1, \dots, n$. Implemente un método para generar una variable aleatoria cuya distribución de probabilidad es

$$F(x) = \sum_{i=1}^n p_i F_i(x).$$

donde p_i , $i = 1, \dots, n$, son números no negativos cuya suma es 1.

- b) Genere datos usando tres exponenciales independientes con media 3, 5 y 7 respectivamente y $p = (0.5, 0.3, 0.2)$. Calcule la esperanza exacta de la mezcla y estime con 10.000 repeticiones. Tenga cuidado con la parametrización que este usando!!

Ejercicio 4. Desarrolle un método para generar la variable aleatoria con función de distribución

$$F(x) = \int_0^\infty x^y e^{-y} dy, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Piense en el método de composición del ejercicio anterior. En particular, sea F la función de distribución de X y suponga que la distribución condicional de X dado $Y = y$ es

$$P(X \leq x | Y = y) = x^y, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Ejercicio 5.

- a) Considere que es sencillo generar una variable aleatoria a partir de cualquiera de las distribuciones F_i , $i = 1, \dots, n$. Explique cómo generar variables aleatorias a partir de las siguientes distribuciones:

i) $F_M(x) = \prod_{i=1}^n F_i(x)$

ii) $F_m(x) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - F_i(x))$

Sugerencia: Si X_i , $i = 1, \dots, n$, son variables aleatorias independientes, donde X_i tiene distribución F_i , ¿cuál variable aleatoria tiene como distribución a F en cada caso?

- b) Genere una muestra de 10 valores de las variables M y m con distribuciones F_M y F_m si X_i son exponenciales independientes con parámetros 1, 2 y 3 respectivamente.

Ejercicio 6. Utilice el método del rechazo y los resultados del ejercicio anterior para desarrollar otros dos métodos, además del método de la transformada inversa, para generar una variable aleatoria con distribución de probabilidad

$$F(x) = x^n, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Analice la eficiencia de los tres métodos para generar la variable a partir de F .

Ejercicio 7.

- a) Desarrolle dos métodos para generar una variable aleatoria X con densidad de probabilidad:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } 1 \leq x \leq e \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

- i) Aplicando Transformada inversa.
- ii) Aplicando el método de aceptación y rechazo con una variable uniforme.
- b) Compare la eficiencia de ambos métodos realizando 10.000 simulaciones y comparando el promedio de los valores obtenidos. Compruebe que se obtiene un valor aproximado del valor esperado de X .
- c) Estime la probabilidad $P(X \leq 2)$ y compárela con el valor real.

Ejercicio 8.

- a) Sean U y V dos variables aleatorias uniformes en $(0, 1)$ e independientes. Pruebe que la variable $X = U + V$ tiene una densidad *triangular*:

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ 2 - x & 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- b) Desarrolle tres algoritmos que simulen la variable X :
 - i) Usando la propiedad que X es suma de dos uniformes.
 - ii) Aplicando transformada inversa.
 - iii) Con el método de rechazo.
- c) Compare la eficiencia de los tres algoritmos. Para cada caso, estime el valor esperado promediando 10.000 valores simulados, ¿Para qué valor x_0 se cumple que $P(X > x_0) = 0.125$?
- d) Compare la proporción de veces que el algoritmo devuelve un número mayor que x_0 con esta probabilidad.

Ejercicio 9. Escriba tres programas para generar un variable aleatoria normal patrón, usando

- a) generación de variables exponenciales según el ejemplo 5f del libro *Simulación* de S. M. Ross,
- b) el método polar,
- c) el método de razón entre uniformes.

Pruebe los códigos calculando la media muestral y varianza muestral de 10.000 valores generados con los tres métodos.

Ejercicio 10. Una variable aleatoria X tiene distribución de Cauchy con parámetro $\lambda > 0$ si su densidad es

$$f(x) = \frac{1}{\lambda\pi(1 + (x/\lambda)^2)}, \quad x \in \mathbb{R}$$

- a) Implemente el método de razón entre uniformes para simular X con parámetro $\lambda = 1$. Para esto:
 1. Pruebe que el conjunto $C_f = \{(u, v) \mid 0 < u < \sqrt{f(v/u)}\}$ es el semicírculo derecho centrado en $(0, 0)$ de radio $\sqrt{1/\pi}$.
 2. Desarrolle un algoritmo `CAUCHY()` que genere pares (U, V) con distribución uniforme en C_f , y devuelva $X = V/U$. Entonces X tiene la distribución deseada. ¿Es necesario utilizar el valor de π ?
- b) Pruebe que si X tiene distribución de Cauchy con parámetro 1, entonces λX tiene distribución de Cauchy con parámetro λ .

- c) Utilice esta propiedad para modificar el algoritmo anterior, e implementar CAUCHY(LAMDA) que simule una variable X con distribución de Cauchy de parámetro λ .
- d) Realice 10.000 simulaciones y calcule la proporción de veces que el resultado cae en el intervalo $(-\lambda, \lambda)$, para $\lambda = 1$, $\lambda = 2.5$ y $\lambda = 0.3$. Compare con la probabilidad teórica.

Ejercicio 11. Sea X una variable aleatoria con distribución de Cauchy de parámetro λ .

- a) Calcule la función de distribución acumulada F_X .
- b) Simule X aplicando el método de transformada inversa.
- c) Indique si es posible generar X por el método de aceptación y rechazo, rechazando con una variable aleatoria normal.
- d) Realice 10000 simulaciones y calcular la proporción de veces que el resultado cae en el intervalo $(-\lambda, \lambda)$, para $\lambda = 1$, $\lambda = 2.5$ y $\lambda = 0.3$. Compare con la probabilidad teórica.
- e) Compare la eficiencia de este algoritmo con el *método de razón entre uniformes*.

Ejercicio 12. Escriba un programa que calcule el número de eventos y sus tiempos de arribo en las primeras T unidades de tiempo de un proceso de Poisson homogéneo con parámetro λ .

Ejercicio 13. Los autobuses que llevan los aficionados a un encuentro deportivo llegan a destino de acuerdo con un proceso de Poisson a razón de cinco por hora. La capacidad de los autobuses es una variable aleatoria que toma valores en el conjunto: $\{20, 21, \dots, 40\}$ con igual probabilidad. A su vez, las capacidades de dos autobuses distintos son variables independientes. Escriba un algoritmo para simular la llegada de aficionados al encuentro en el instante $t = 1$ hora.

Ejercicio 14.

- a) Escriba un programa que utilice el algoritmo del adelgazamiento para generar el numero de eventos y las primeras unidades de tiempo de un proceso de Poisson no homogéneo con función de intensidad

i)

$$\lambda(t) = 3 + \frac{4}{t+1}, \quad 0 \leq t \leq 3$$

ii)

$$\lambda(t) = (t-2)^2 - 5t + 17, \quad 0 \leq t \leq 5$$

iii)

$$\lambda(t) = \begin{cases} \frac{t}{2} - 1 & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \\ 1 - \frac{t}{6} & \text{si } 3 \leq x \leq 6 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

en los intervalos indicados.

- b) Indique una forma de mejorar el algoritmo de adelgazamiento para estos ejemplos usando al menos 3 intervalos.