PRÁCTICO 6

ANÁLISIS ESTADÍSTICO DE DATOS SIMULADOS.

Ejercicio 1: Genere n valores de una variable aleatoria normal estándar de manera tal que se cumplan las condiciones: $n \geq 100$ y $S/\sqrt{n} < 0{,}1$, siendo S el estimador de la desviación estándar de los n datos generados.

a) ¿Cuál es el número de datos generados efectivamente?

b) ¿Cuál es la media muestral de los datos generados?

c) ¿Cuál es la varianza muestral de los datos generados?

Ejercicio 2: Estime mediante el método de Monte Carlo la integral

$$\textbf{i)} \int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{2x}}\,dx, \qquad \textbf{ii)} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp(-x^2)\,dx.$$

a) Genere al menos 100 valores y deténgase cuando la desviación estándar muestral S del estimador sea menor que 0,01.

Ejercicio 3: Calcule mediante un método de Monte Carlo las siguientes integrales:

$$\textbf{i)} \int_{\pi}^{2\pi} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right) dx \qquad \textbf{ii)} \int_0^{\infty} \frac{3}{3+x^4}$$

a) Obtenga mediante simulación en computadora el valor de la integral deteniendo la simulación cuando el semi-ancho del intervalo de confianza del 95 % sea justo inferior a 0,001.

b) Indique cuál es el número de simulaciones N_s necesarias en la simulación realizada para lograr la condición pedida y complete con los valores obtenidos la siguiente tabla (usando **4** decimales):

N^o de sim.	$\bar{I}$	S	IC(95 %)
1 000			
5 000			
7 000			
$N_s =$			

Ejercicio 4: Para $U_1, U_2, \ldots$ variables aleatorias uniformemente distribuidas en el intervalo $(0,1)$, se define:

$$N = \text{Mínimo}\left\{ n : \sum_{i=1}^{n} U_i > 1 \right\}$$

Esto es, N es igual a la cantidad de números aleatorios que deben sumarse para exceder a 1.

a) Estimar e a partir de la media muestral $\bar{N}$ con 1000 simulaciones.

b) Dar el valor obtenido de la varianza muestral de $\bar{N}$ correspondiente a 1000 ejecuciones de la simulación.

c) Dar una estimación de e mediante un intervalo de confianza de 95 % con longitud a lo sumo 0.025.

Ejercicio 5: Considere una sucesión de números aleatorios $\{U_i\}_i$ y sea M el primer n tal que la variable U_n es menor que su variable predecesora. Es decir,

$$M = n \quad \text{tal que} \quad U_1 \leq U_2 \leq \cdots \leq U_{n-1} \text{ y } U_n < U_{n-1}$$

a) Justifique que $P(M > n) = 1/n!$, $n \geq 0$.

b) Utilice la identidad
$$E[M] = \sum_{n=0}^{\infty} P(M > n)$$
para mostrar que $E[M] = e$.

c) Utilice el resultado del item anterior para dar un estimador de $E[M]$, calcule el valor de su varianza muestral. Mediante una simulación estime el valor de e deteniéndose cuando la varianza muestral sea menor que 0,01.

d) Dé una estimación de e mediante un intervalo de ancho menor que 0,1 y con una confianza del 95 %

Ejercicio 6: Estime π sorteando puntos uniformemente distribuidos en el cuadrado cuyos vértices son: $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$, $(1,-1)$, y contabilizando la fracción que cae dentro del círculo inscrito de radio 1.

a) Utilice un algoritmo para estimar la proporción de puntos que caen dentro del círculo y deténgase cuando la desviación estandar muestral del estimador sea menor que 0,01.

b) Obtenga un intervalo de ancho menor que 0,1, el cual contenga a π con el 95 % de confianza. ¿Cuántas ejecuciones son necesarias?

Ejercicio 7: Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias i.i.d., con media desconocida μ. Para constantes $a < b$, se quiere estimar $p = P(a < \sum_{i=1}^{n} X_i/n - \mu < b)$. Estimar p if $n = 10$ y los valores de X_i son 56, 101, 78, 67, 93, 87, 64, 72, 80 y 69. Tomar $a = -5$, $b = 5$.

Ejercicio 8: Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con varianza σ^2 desconocida. Se planea estimar σ^2 mediante la varianza muestral

$$S^2 = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2/(n-1)$$

.

a) Si $n = 2$, $X_1 = 1$ y $X_2 = 3$, ¿cuál es la estimación "bootstrap" de $\text{Var}(S^2)$?

b) Si $n = 15$, los datos son:
$$5,\ 4,\ 9,\ 6,\ 21,\ 17,\ 11,\ 20,\ 7,\ 10,\ 21,\ 15,\ 13,\ 16,\ 8$$
¿Cómo se calcula la estimación bootstrap en este caso? Dé un valor posible de la estimación.

Ejercicio 9: Considerar un sistema de un único servidor que recibe solicitudes de ejecución de acuerdo a un proceso de Poisson no homogéneo. La función de intensidad $\lambda(t)$ es inicialmente de 4 requerimientos por hora, y luego crece de manera lineal durante 5 horas hasta llegar a 19 requerimientos por hora. Luego decrece linealmente durante 5 horas hasta alcanzar una tasa de 4 requerimientos por hora.

Este comportamiento de la función de intensidad se repite de manera indefinida, esto es:

$$\lambda(t+10) = \lambda(t), \qquad t \geq 0.$$

Suponer que:

- El tiempo de servicio del servidor se distribuye de manera exponencial, con una tasa de 25 servicios por hora.
- Siempre que el servidor completa un trabajo y no encuentra trabajos para realizar, deja de funcionar por un tiempo uniformemente distribuido en el intervalo $(0, 0{,}3)$.
- Si al retomar no encuentra trabajos para realizar, vuelve a detenerse con la misma distribución.

Se pide:

a) Desarrollar un programa que simule el proceso durante un tiempo T.

b) Realizar 5000 simulaciones para estimar el tiempo esperado que el servidor está fuera de funcionamiento en las primeras 100 horas de operación.

c) Representar en un histograma la distribución de los tiempos de parada.