“Búsqueda paramétrica usando Algoritmos Evolutivos para la proyección de tasas de interés mediante modelo Vasicek unifactorial”

Integrantes: Aguilera Serrano Hugo

Mendoza Ortiz Tania Estefani

Quijada Jiménez Mauricio

Introducción:

Una de las principales funciones de un área de administración de riesgos dentro de una institución financiera es vigilar, administrar, medir, controlar y mitigar continuamente los riesgos a los que se encuentra expuesta la compañía. Dentro de la administración de riesgos, existen una subrama encargada de la medición de posibles desviaciones en las tasas de interés del mercado y/o rendimiento, provocando una perdida en el valor de los portafolios de inversión a lo que se le denomina riesgo de tasas de interés para riesgo de mercado.

Uno de los modelos mas ocupados en las instituciones para medir el riesgo de tasas de interés es el modelo Vasicek el cual es un modelo de regresión a la media, se define mediante la ecuación diferencial estocástica

$$dr(t) = \mu\big(t, r(t)\big)dt + \sigma\big(t, r(t)\big)dB(t)$$

Donde μ y σ representan la tendencia y volatilidad del proceso de tipo de interés r(t) respectivamente y B(t) denota el movimiento Browniano. $\mu\big(t, r(t)\big)dt$ es una función lineal del tipo de interés r(t) con la propiedad que dicha función induce un comportamiento asintóticamente estable hacia el valor medio μ y $\sigma\big(t, r(t)\big)$se asume constante, tal que

$$\mu\big(t, r(t)\big) = \alpha\big(r_e - r(t)\big) \qquad y \qquad \sigma\big(t, r(t)\big) = \sigma$$

Utilizando el cálculo de Itō se resuelve la ecuación obteniendo la siguiente expresión

$$r(t) =^{d} \mu + (r_0 - \mu)e^{-\alpha t} + \frac{\sigma e^{-\alpha t}\sqrt{e^{2\alpha t} - 1}}{\sqrt{2\alpha}} Z$$

Estimación de Parámetros:

La estimación de los parámetros se calculan utilizando la función de máxima verosimilitud de la muestra r_0, r_1, r_2,…, r_n que está dado por la función de densidad de probabilidad conjunta de la muestra: $L(\alpha, \mu, \sigma; r_0, r_1, r_2, \ldots, r_n)$. Utilizando el teorema de Bayes y derivado a que el modelo Vasicek es un proceso markoviano de primer orden, se obtiene que

$$\begin{aligned} &L(\alpha, \mu, \sigma; r_0, r_1, r_2, \ldots, r_n) \\ &\qquad = L(\alpha, \mu, \sigma; r_0) L(\alpha, \mu, \sigma; r_1 | r_0) L(\alpha, \mu, \sigma; r_2 | r_0, r_1) \ldots L(\alpha, \mu, \sigma; r_n | r_0, r_1, \ldots r_{n-1}) \\ &\qquad = L(\alpha, \mu, \sigma; r_1 | r_0) L(\alpha, \mu, \sigma; r_2 | r_1) \ldots L(\alpha, \mu, \sigma; r_n | r_{n-1}) \end{aligned}$$

$$L(\alpha, \mu, \sigma; r_0, r_1, r_2, \ldots, r_n) = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{r_{i+1}-(\mu+(r_i-\mu)e^{-\alpha t})}{\sqrt{\frac{\sigma}{2\alpha}^2(1-e^{-2\alpha t})}}\right)^2}}{\sqrt{2\pi \frac{\sigma}{2\alpha}^2 (1-e^{-2\alpha t})}} = \frac{e^{\sum_{i=0}^{n-1} -\frac{1}{2}\left(\frac{r_{i+1}-(\mu+(r_i-\mu)e^{-\alpha t})}{\sqrt{\frac{\sigma}{2\alpha}^2(1-e^{-2\alpha t})}}\right)^2}}{\left(2\pi \frac{\sigma}{2\alpha}^2 (1-e^{-2\alpha t})\right)^{\frac{n}{2}}}$$

Para volver más sencilla la estimación es equivalente hacerlo sobre la función de log-verosimilitud.

$$\begin{aligned} &\hat{L}(\alpha, \mu, \sigma; r_0, r_1, r_2, \ldots, r_n) \\ &\qquad = \frac{-n}{2}\left(\ln(2\pi) + ln\left(\frac{\sigma}{2\alpha}^2 (1-e^{-2\alpha t})\right)\right) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{r_{i+1}-(\mu+(r_i-\mu)e^{-\alpha t})}{\sqrt{\frac{\sigma}{2\alpha}^2 (1-e^{-2\alpha t})}}\right)^2 \end{aligned}$$

Intentamos encontrar a terna de variables α, σ y μ que maximicen la función de verosimilitud para la estimación de dichos parámetros del modelo.

Problema:

La función de log-verosimilitud proveniente de un modelo Vasisek es función que depende de las variables históricas observadas en el tiempo (r_i), en épocas de crisis como lo fue marzo del 2020, la búsqueda de parámetros para este tipo de proyecciones se vuelve difícil al tener funciones altamente volátiles con muchos máximos locales, cuya selección de parámetros inadecuada puede generar proyecciones inconsistentes.

Objetivo:

Encontrar mediante un algoritmo genético la terna de parámetros que maximicen lo mejor posible la función de log-verosimilitud, ya que algoritmos como descenso de gradiente, hill climbing pueden llegar a estancarse en óptimos locales fácilmente gracias a su gran número de máximos y a que la función no es suave.

Metodología:

- Se ocuparán datos del mercado mexicano real provenientes del proveedor de precios ValMer (Información privada y adquirida por un particular). Dicha información contendrá 2 años de historia para instrumentos de deuda gubernamental.
- Existe un primer modelo estadístico (Sin definir) para la proyección de la tasa esperada en un intervalo de tiempo
- Se calculan los errores del modelo y sobre ese conjunto de datos se aplica el modelo Vasisek
- Para la estimación de parámetros del modelo se ocupa un algoritmo genético de la siguiente forma
  - Algoritmo Genético
    - Codificación Real
    - Cruza SBX
    - Mutación Polinomial
    - Selección por Muestreo Estocástico
    - Proceso de Elitismo
  - Evolución Diferencia
- Se plantea analizar los resultados de ambos algoritmos evolutivos para ver la optimalidad de cada uno para cada tipo de instrumento.