Tarea 2: Estimadores y Eficiencia

Estadística Matemática

Mauricio Vazquez Moran

Aitana Acosta

Giancarlo De La Rosa

19 de Marzo de 2024

Tarea 2

Thursday, March 7, 2024 10:35 AM

1. Considere $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ una $m.$ $a.$ de $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$. Sea $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2)$. Determine que el estimador de máxima verosimilitud de $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)$, donde

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \text{y} \qquad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

y compruebe que $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ correponde a un máximo verificando que la matriz hessiana $\mathcal{H}\left(\ell(\hat{\boldsymbol{\theta}})\right)$ es definida negativa.

Sol. :

$$L(\theta; \underline{x}) = f(\underline{x}; \theta) \overset{\text{ind.}}{=} \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}} =$$

$$\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \prod_{i=1}^{n} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\Rightarrow \ell(\theta; \underline{x}) = \log\left[\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \prod_{i=1}^{n} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right] =$$

$$n\log\left[(\sigma\sqrt{2\pi})^{-1}\right] + \sum_{i=1}^{n} \log\left[e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right] =$$

$$-n\log(\sigma\sqrt{2\pi}) + \sum_{i=1}^{n} -\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2} = -n\log(\sigma\sqrt{2\pi}) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 =$$

$$-n\log(\sigma) - \frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

$$\Rightarrow \text{i)}\ \frac{\partial}{\partial\mu}\ell(\theta; \underline{x}) = -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\mu}(x_i-\mu)^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) =$$

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{n\mu}{\sigma^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{n\mu}{\sigma^2} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = n\mu$$

$$\Leftrightarrow \quad \hat{\mu}_{EMV} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}$$

ii) $$\frac{\partial}{\partial \sigma} \ell(\theta ; \underline{x}) = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{\mu})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{n}{\sigma} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = n$$

$$\Leftrightarrow \quad \hat{\sigma}^2_{EMV} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

$$\therefore \quad \hat{\theta}_{EMV} = (\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2) = \left(\overline{X}, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\right)$$

Verificamos si $\hat{\theta}$ corresponde a un máximo:

Por i) y ii):

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \ell(\theta ; \underline{x}) = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{n\mu}{\sigma^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \ell(\theta ; \underline{x}) = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$$

Luego:

a) $$\frac{\partial^2}{\partial \mu^2} \ell(\theta ; \underline{x}) = -\frac{n}{\sigma^2}$$

b) $\frac{\partial^2}{\partial \sigma \partial \mu} \ell(\theta ; \underline{X}) = -\frac{2}{\sigma^3} \sum_{i=1}^{n} X_i + \frac{2n\mu}{\sigma^3} = \frac{2}{\sigma^3}\left(n\mu - \sum_{i=1}^{n} X_i\right)$

c) $\frac{\partial^2}{\partial \mu \partial \sigma} \ell(\theta ; \underline{X}) = \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^{n} -2(X_i - \mu) = -\frac{2}{\sigma^3} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)$

d) $\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} \ell(\theta ; \underline{X}) = \frac{2n}{\sigma^2} - \frac{3}{\sigma^4} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2$

Luego:

$$\mathcal{H}(\ell(\theta)) = \begin{pmatrix} -\frac{n}{\sigma^2} & \frac{2}{\sigma^3}\left(n\mu - \sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\ -\frac{2}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu) & \frac{2n}{\sigma^2} - \frac{3}{\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{n^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} - \frac{3}{\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \det{}_{\mathcal{H}} = -\frac{2n^3}{\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})\right]^2} + \frac{3n^2}{\frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right]} < 0$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{H}$ es definida negativa

$\therefore$ $\hat{\theta}$ es un máximo $\blacksquare$

2. Sea $X_1, \dots, X_n$ una muestra aleatoria (*m. a.*) de una población X con función de densidad de probabilidad (*f. d. p.*) dada por

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{2\sqrt{3}\sigma}\mathbb{1}_{[\mu-\sqrt{3}\sigma,\ \mu+\sqrt{3}\sigma]}(x)$$

Muestre que los estimadores de máxima verosimilitud de μ y σ están dados por

$$\hat{\mu}_{MV} = \frac{1}{2}(X_{(1)} + X_{(n)}), \qquad \hat{\sigma}_{MV} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(X_{(n)} - X_{(1)})$$

donde $X_{(i)}$ denota el i-ésimo estadístico de orden de la muestra.

→ Primero, sabemos que $f \sim U(\mu-\sqrt{3}\sigma,\ \mu+\sqrt{3}\sigma)$ $\quad E(X)=\mu \quad \operatorname{var}(X) = \frac{(2\sqrt{3}\sigma)^2}{12} = \frac{4\cdot 3\sigma^2}{12} = \sigma^2$

- La función de verosimilitud está dada por:

$$L(x;\mu,\sigma) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{3}\sigma}\mathbb{1}_{[\mu-\sqrt{3}\sigma,\ \mu+\sqrt{3}\sigma]}(x_i) = \left(\frac{1}{2\sqrt{3}\sigma}\right)^n \mathbb{1}_{[\mu-\sqrt{3}\sigma,\ \mu+\sqrt{3}\sigma]}(x_i)$$

$$= \left(\frac{1}{2\sqrt{3}\sigma}\right)^n \mathbb{1}_{(-\infty,\ \mu+\sqrt{3}\sigma)}(x(1))\, \mathbb{1}_{(\mu-\sqrt{3}\sigma,\ \infty)}(x(n))$$

$$\Rightarrow \mu-\sqrt{3}\sigma \le x(1) \cap x(n) \le \mu+\sqrt{3}\sigma \Rightarrow \frac{\mu-x(1)}{\sqrt{3}} \le \sigma \cap \frac{x(n)-\mu}{\sqrt{3}} \le \sigma$$

Vemos que $L(x;\mu,\sigma)$ será mayor mientras más chico sea σ

$$\therefore \frac{\mu-x(1)}{\sqrt{3}} = \frac{x(n)-\mu}{\sqrt{3}} \Rightarrow 2\mu = x(1)+x(n) \Rightarrow \hat{\mu}_{MV} = \frac{x(1)+x(n)}{2} \ //$$

- Análogamente $x(1)+\sqrt{3}\sigma = \mu \cap \mu = x(n)-\sqrt{3}\sigma$

$$x(1)+\sqrt{3}\sigma = x(n)-\sqrt{3}\sigma \Rightarrow \hat{\sigma}_{MV} = \frac{x(n)-x(1)}{2\sqrt{3}} \ //$$

3. En Canvas/Archivos/Tareas/tarea2.dat encontrara asociada a su clave única la muestra observada de tamaño n=30, proveniente de una población que es modelada mediante una distribución gamma, $X \sim Ga(\alpha, \lambda)$, con función de densidad

$$f(x; \alpha, \lambda) = \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}; \ \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x)$$

con parámetro de forma $\alpha > 0$ y el parámetro tasa $\lambda > 0$.

Para cada uno de los miembros del equipo responda los siguientes incisos:

a) Encuentre los estimadores de momentos EMM, $\hat{\alpha}\ y\ \hat{\lambda}$.

$$\hat{\alpha}_{MoM_{Mau}} = 0.0977$$
$$\hat{\lambda}_{MoM_{Mau}} = 0.01437$$

$$\hat{\alpha}_{MoM_{Aitana}} = 0.07264$$
$$\hat{\lambda}_{MoM_{Aitana}} = 0.00962$$

$$\hat{\alpha}_{MoM_{Gianca}} = 0.16376$$
$$\hat{\lambda}_{MoM_{Gianca}} = 0.01977$$

b) Mediante algún método numérico encuentre $\hat{\alpha}\ y\ \hat{\lambda}$, los correspondientes estimadores por máxima verosimilitud EMV. Incluya los detalles de los primeros 5 pasos de su algoritmo de optimización. A saber,

Tabla 1. Mauricio Vazquez 000191686

k	$\mathcal{L}_k$	ℓ_k	$\hat{\alpha}_k$	$\hat{\lambda}_k$	Δ_k
1	4.21717e-51	-115.99267	0.18261	0.02683	0
2	6.41769e-46	-104.05986	0.33317	0.04896	6.417648e-46
3	9.32272e-42	-94.47612	0.59124	0.08688	9.322078e-42
4	1.04639e-38	-87.45289	1.00709	0.14798	1.045458e-38
5	6.94356e-37	-83.25783	1.59154	0.23386	6.838921e-37

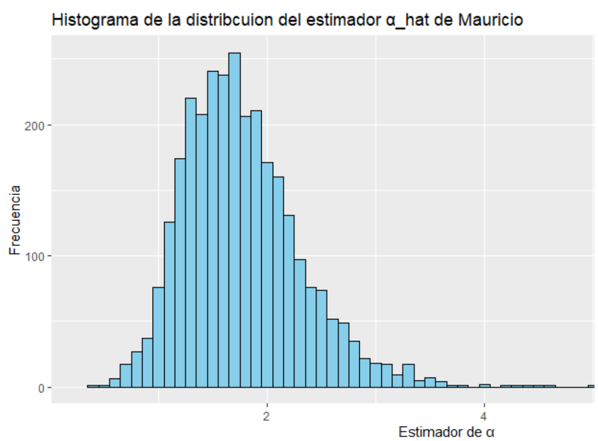
Tabla 2. Aitana Acosta 000194674

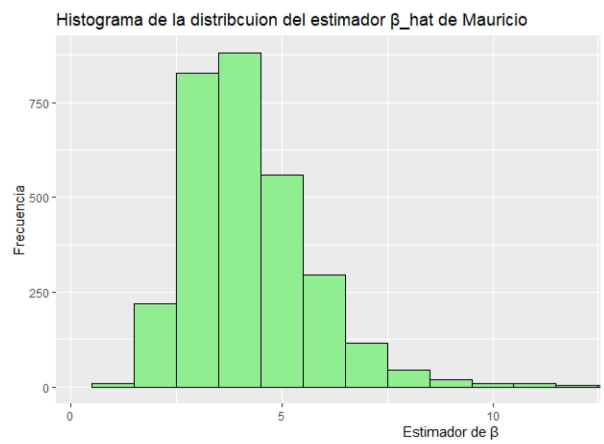
k	$\mathcal{L}_k$	ℓ_k	$\hat{\alpha}_k$	$\hat{\lambda}_k$	Δ_k
1	3.21447e-54	-123.17255	0.13649	0.01808	0
2	8.91811e-49	-110.63859	0.25000	0.03311	8.918078e-49
3	1.89671e-44	-100.67362	0.44324	0.05871	1.896621e-44
4	2.3688e-41	-93.54358	0.74952	0.09927	2.366903e-41
5	1.43211e-39	-89.44167	1.16911	0.15485	1.408422e-39

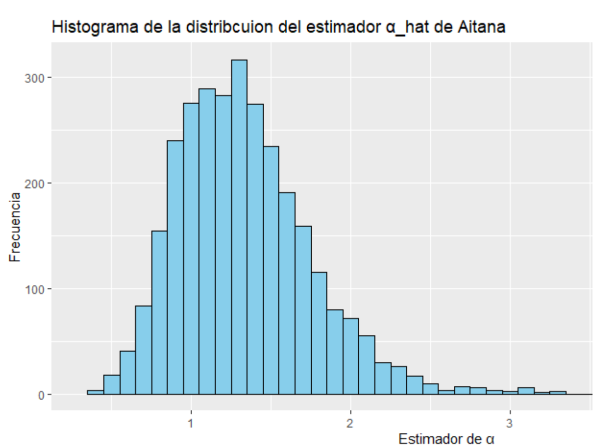
Tabla 3. Giancarlo De La Rosa 000200672

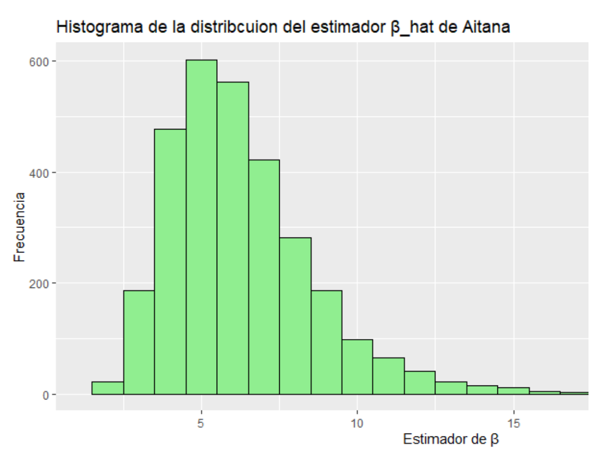
k	$\mathcal{L}_k$	ℓ_k	$\hat{\alpha}_k$	$\hat{\lambda}_k$	Δ_k
1	5.06569e-50	-113.506764	0.30269	0.03653	0
2	2.67582e-45	-102.63207	0.54950	0.06632	2.675769e-45
3	1.93042e-41	-93.74825	0.97760	0.11799	1.930152e-41
4	1.49694e-38	-87.09481	1.67832	0.20257	1.49501e-38
5	8.35349e-37	-83.07297	2.67183	0.32248	8.203796e-37

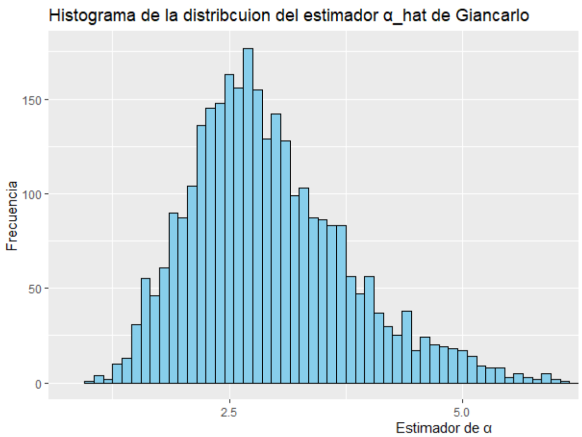
c) Construya un histograma de la distribución de cada uno de sus estimadores del parámetro de forma $\hat{\alpha}$ y del parámetro de escala $\hat{\beta} = 1/\hat{\lambda}$ para una simulación de $\mathrm{N} = 3000$. Comente.

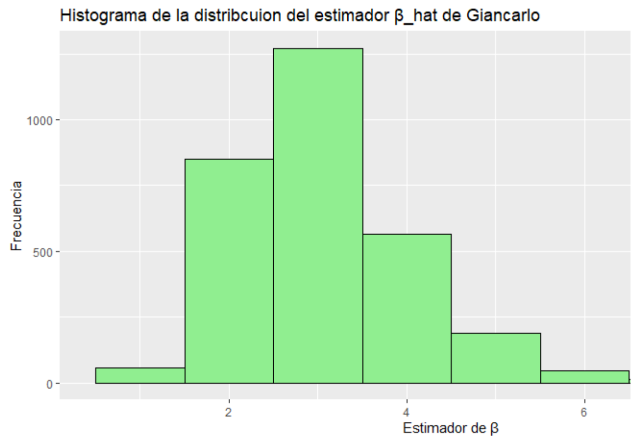









Histograma de la distribcuion del estimador α_hat de Giancarlo
150
100
50
0
Frecuencia
2.5
5.0
Estimador de α


Histograma de la distribcuion del estimador β_hat de Giancarlo
1000
500
0
Frecuencia
2
4
6
Estimador de β

El ángulo θ al cual son emitidos los electrones en el decaimiento de *muones* tiene una función de densidad dada por

$$f(x;\alpha) = \frac{1+\alpha x}{2}\,\mathbb{1}_{[-1,+1]}(x) \tag{1}$$

donde $x = \cos(\theta)$. El parámetro α está relacionado con la polarización. Consideraciones físicas indican que $|\alpha| \le 1/3$, pero se puede ver que $f(x;\alpha)$ es una función de densidad *propia* para $|\alpha| \le 1$.

Muestre que los estimadores por el método de momentos ($\tilde{\alpha}$) y el de máxima verosimilitud ($\hat{\alpha}$) están dados respectivamente por

$$\tilde{\alpha} = 3\bar{X} \qquad \text{y} \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{1+\hat{\alpha}x_i} = 0$$

a) Muestre que

$$\mathrm{var}(\tilde{\alpha}) = \frac{3-\alpha^2}{n}$$

MOM

$$E(x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x+\alpha x^2\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}+\frac{\alpha x^3}{3}\Big|_{-1}^{1}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{3}-\left(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{3}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{2\alpha}{3}\right] = \frac{\alpha}{3}$$

$$m_1 = \frac{\alpha}{3} = \bar{x} \Rightarrow \hat{\alpha}_{mom} = 3\bar{x} \;//$$

$$E(\hat{\alpha}) = E(3\bar{x}) = 3E(x) = \alpha$$

MV

$$L(x;\alpha) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2}+\frac{\alpha x}{2} = \frac{1}{2^n}\prod(1+\alpha x_i)$$

$$\ell(x;\alpha) = -n\ln(2) + \sum \ln(1+\alpha x_i)$$

$$\frac{d}{d\alpha} = \sum \frac{1}{1+\alpha x_i}(x_i) \Rightarrow \sum \frac{x_i}{1+\hat{\alpha}x_i} = 0 \;//$$

a) $$E(x^2) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2+\alpha x^3\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}+\frac{\alpha x^4}{4}\Big|_{-1}^{1}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}+\frac{\alpha}{4}-\left[-\frac{1}{3}+\frac{\alpha}{4}\right]\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

$$Var(x) = \frac{1}{3}-\frac{\alpha^2}{9}$$

$$Var(\hat{\alpha}) = var(3\bar{x}) = 9\,var(\bar{x}) = \frac{9}{n^2}\sum var(x_i) = \frac{9n}{n^2}var(x) = \frac{9}{n}var(x) = \frac{9}{n}\left[\frac{1}{3}\left(1-\frac{\alpha^2}{3}\right)\right]$$
$$= \frac{3}{n}\left(1-\frac{\alpha^2}{3}\right) = \frac{3-\alpha^2}{n} \;//$$

b) Utilice el Teorema Central de Límite para aproximar la distribución de $\tilde{\alpha}$. Si $n = 25$ y $\alpha = 0$, determine $\mathbb{P}(|\tilde{\alpha}| > 0.5)$.

$$1-P(|\hat{\alpha}|\le .5) = 1-P(-.5\le\hat{\alpha}\le .5) = 1-P\left(\frac{-.5-\alpha}{\sqrt{\frac{3-\alpha^2}{n}}} \le Z \le \frac{.5-\alpha}{\sqrt{\frac{3-\alpha^2}{n}}}\right)$$

$\alpha=0$
$n=25$

TCL

$$= 1-P(-1.4434\le Z\le 1.4434) = 1-\left[P(Z\le 1.4434)-P(Z\le -1.4434)\right] = 1-\left[\Phi(1.4434)-\left[1-\Phi(1.4434)\right]\right]$$
$$= 1-\Phi(1.4434)+1-\Phi(1.4434) = 2-2\Phi(1.4434) = 2-2(.925546) = .148908$$

c) Muestre que la **varianza asintótica** de $\hat{\alpha}$ está dada por $\text{var}(\hat{\alpha}) \approx 1/nI(\alpha)$, donde

$$I(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^3}\left[\log\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right) - 2\alpha\right]$$

- Por definición, $I(\alpha) = -E\left[\frac{d\ell^2}{d\alpha^2}\right] = E\left[\left(\frac{d\ell}{d\theta}\right)^2\right]$ con $\ell(x;\theta) = \log f(x;\theta)$

- En este caso: $\frac{d\ell^2}{d\alpha^2} = \sum \frac{-(x_i)(x_i)}{(1+\alpha x_i)^2} = \sum \frac{-x_i^2}{(1+\alpha x_i)^2} \Rightarrow \text{var}(\hat{\alpha}) \approx \frac{1}{n\sum E\left[\frac{x^2}{(1+\alpha x)^2}\right]}$

$$E\left[\frac{x^2}{(1+\alpha x)^2}\right] = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{1+\alpha x}\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\alpha x(\alpha x-2)+2\ln(\alpha x+1)}{2\alpha^3}\Big|_{-1}^{1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\alpha(\alpha-2)+2\ln(\alpha+1)}{2\alpha^3} - \left[\frac{\overset{\alpha^2+2\alpha}{-\alpha(-\alpha-2)}+2\ln(1-\alpha)}{2\alpha^3}\right]\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\cancel{\alpha^2}-2\alpha+2\ln(\alpha+1)-\cancel{\alpha^2}-2\alpha-2\ln(1-\alpha)}{2\alpha^3}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\cancel{2}(-2\alpha+\ln(\alpha+1)-\ln(1-\alpha))}{\cancel{2}\alpha^3}\right] = \frac{1}{2\alpha^3}\left[\ln\left(\frac{\alpha+1}{1-\alpha}\right)-2\alpha\right] \;//$$

ツ

4.-

d) ¿Cuál es la **eficiencia relativa** del estimador de α de momentos con respecto al de máxima verosimilitud?

$$\breve{\alpha} = 3\bar{X} \quad \wedge \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{1+\hat{\alpha}X_i} = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{Var}(\breve{\alpha}) = \frac{3-\alpha^2}{n}$$

$$\operatorname{Var}(\hat{\alpha}) \simeq \frac{1}{nI(\alpha)} = \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{I(\alpha)}\right) = \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{2\alpha^3}{\ln\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)-2\alpha}\right) =$$

$$\frac{2\alpha^3}{n\left[\ln\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)-2\alpha\right]}$$

Luego:

$$\operatorname{eff}(\breve{\alpha}:\hat{\alpha}) = \frac{\operatorname{Var}(\hat{\alpha})}{\operatorname{Var}(\breve{\alpha})} = \frac{\dfrac{2\alpha^3}{n\left[\ln\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)-2\alpha\right]}}{\dfrac{3-\alpha^2}{\cancel{n}}} =$$

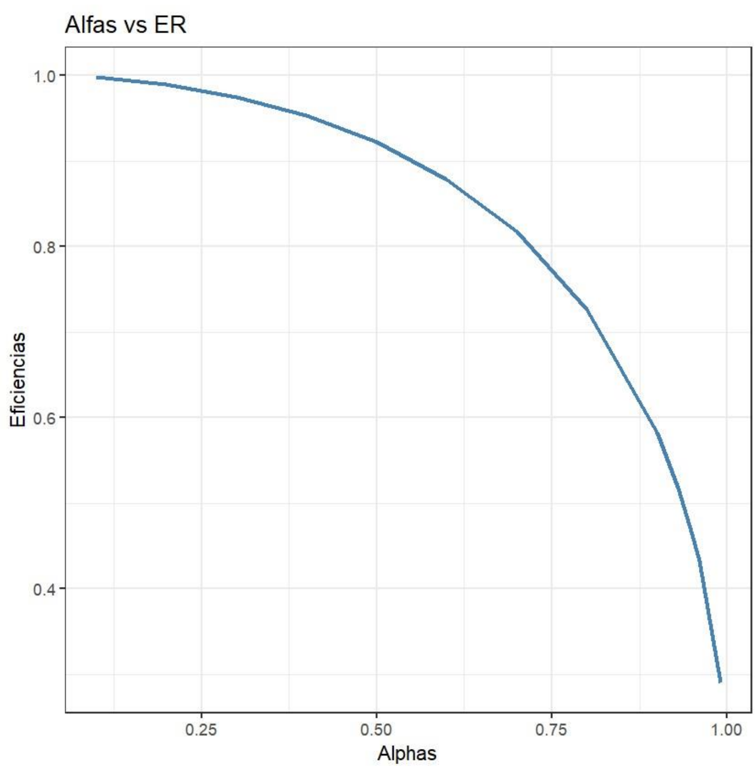
$$\frac{2\alpha^3}{(3-\alpha^2)\left[\ln\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)-2\alpha\right]} = \frac{2\alpha^3}{(3-\alpha^2)\left[\ln(1+\alpha)-\ln(1-\alpha)-2\alpha\right]} =$$

$$\frac{2\alpha^3}{3\ln(1+\alpha)-3\ln(1-\alpha)-6\alpha-\alpha^2\ln(1+\alpha)+\alpha^2\ln(1-\alpha)+2\alpha^3}$$

f) Emplear Sympy

e) La eficiencia relativa depende del verdadero valor de α. Construya una tabla para distintos valores de α y la correspondiente eficiencia relativa (ER). Grafíque sus resultados. Esto es, grafique $\mathrm{ER}(\alpha)$ *vs.* α.

	Alphas	Eficiencias
1	0.10	0.9973175
2	0.20	0.9890757
3	0.30	0.9746572
4	0.40	0.9529062
5	0.50	0.9218840
6	0.60	0.8783753
7	0.70	0.8168138
8	0.80	0.7265245
9	0.90	0.5817291
10	0.93	0.5172097
11	0.95	0.4635624
12	0.96	0.4317648
13	0.99	0.2899642



f) Genere $N = 5000$ muestras de tamaño $n = 30$ de una población distribuida angularmente con parámetro $\alpha = 0.75$ (*f. d. p.* dada por la expresión (1)). Construya los correspondiente histogramas para las colecciones $\{\widetilde{\alpha}_i\}_{i=1}^{N}$ y $\{\widehat{\alpha}_i\}_{i=1}^{N}$. Comente sus resultados.