# Tarea 1: Aproximaciones

Estadística Matemática


Mauricio Vazquez Moran

Aitana Acosta

Giancarlo De La Rosa

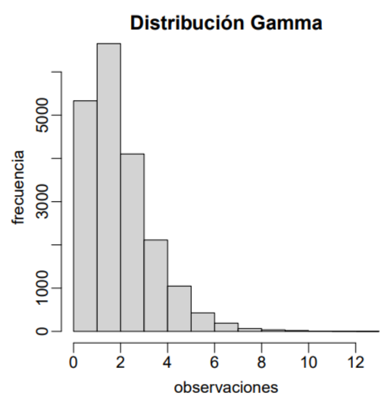

22 de Febrero de 2024

I) Calcule $n!$, su correspondiente **Aproximación de Stirling** $S(n) = n! \approx \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$, la diferencia entre ambas ($D(n) = n! - S(n)$) y, por último, la diferencia relativa ($DR(n) = \frac{D(n)}{n!}$) para n = 1, 2, …, 12.

Tabla 1: Error de aproximación *D(n)* de la aproximación de *Stirling S(n)* al factorial.

| *n* | *n!* | *S(n)* | *D(n)* | *D(n)/n!* |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0.92214 | 0.07768 | 0.07786 |
| 2 | 2 | 1.91900 | 0.081 | 0.04050 |
| 3 | 6 | 5.83621 | 0.16379 | 0.02730 |
| 4 | 24 | 23.50618 | 0.49382 | 0.02058 |
| 5 | 120 | 118.01917 | 1.98083 | 0.01651 |
| 6 | 720 | 710.07818 | 9.92182 | 0.01378 |
| 7 | 5,040 | 4,980.39583 | 59.60417 | 0.01183 |
| 8 | 40,320 | 39,902.39545 | 417.60455 | 0.01036 |
| 9 | 362,880 | 359,536.87284 | 3,343.12716 | 0.00921 |
| 10 | 3,628,800 | 3,598,695.61874 | 30,104.38126 | 0.00830 |
| 11 | 39,916,800 | 39,615,625.05058 | 301,174.94942 | 0.00755 |
| 12 | 479,001,600 | 475,687,486.47278 | 3,314,113.52722 | 0.00692 |

II) Ejecute el código anterior. Note que el objeto *out* es de clase "histogram". Investigue que componentes la lista *out*. [Nota: En este inciso no debe reportar nada pero si realizar lo indicado.]




Con base en la simulación anterior determine $\mathcal{PN} = \mathbb{P}(3 < X \leq 4)$ y compárelo con $\mathcal{P} = \mathbb{P}(3 < X \leq 4)$, la probabilidad teórica calculada con base en la distribución de *X*, $Gamma(\alpha = 2, \beta = 1)$. La diferencia entre ellas es el error de estimación, $\varepsilon = \mathcal{PN} - \mathcal{P} = 0.1079 - 1.1076 = -0.0003$

III) Calcule los errores de aproximación de la distribución normal teórica (ϕ) a la distribución del promedio de las distintas leyes de probabilidad de tabla 2 para tamaños de muestra n=30, 100, 500, indicados en la tabla 3.

Tabla 2: Tabla de funciones de densidad para distintas leyes de probabilidad.

Binomial : $f(k;n,p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \mathbb{1}_{\{0,1,\ldots,n\}}(k)$

Poisson : $f(n;\lambda) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\mathbb{1}_{\{0,1,2,\ldots\}}(n)$

Normal : $f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\mathbb{1}_{\mathbb{R}}(x)$

Gamma : $f(y;\alpha,\beta) = \frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}y^{\alpha-1}e^{-y/\beta}\mathbb{1}_{\mathbb{R}+}(y)$

Beta : $f(u;\theta_1,\theta_2) = \frac{\Gamma(\theta_1)\Gamma(\theta_2)}{\Gamma(\theta_1+\theta_2)}u^{\theta_1-1}(1-u)^{\theta_2-1}\mathbb{1}_{(0,1)}(u)$

Tabla 2: Error de aproximación de la distribución normal a la del promedio de muestras tamaño *n* para distintas distribuciones.

| distribución | parámetros | n = 30 | n = 100 | n = 500 |
|---|---|---|---|---|
| **Binomial** $Bin(25,p)$ | $p = 0.5$ | $e$ =0.1128 | $e$ =0.0901 | $e$ =0.0567 |
| | $p = 0.7$ | $e$ =0.1365 | $e$ =0.109 | $e$ =0.0370 |
| | $p = 0.9$ | $e$ =0.1580 | $e$ =0.1224 | $e$ =0.0864 |
| **Poisson** $Po(\lambda)$ | $\lambda = 1$ | $e = 0.9684$ | $e$ =0.8352 | $e = 0.7776$ |
| | $\lambda = 4$ | $e$ =0.191 | $e = 0.7264$ | $e$ =0.7643 |
| | $\lambda = 8$ | $e$ =0.0888 | $e$ =0.66 | $e$ =0.0618 |
| **Normal** $N(\mu,\sigma^2)$ | $\mu = 2, \sigma^2 = 4$ | $e$ =0.7472 | $e$ =0.7672 | $e = 0.7614$ |
| **Gamma** $Gamma(\alpha,\beta)$ | $(\alpha = 1, \beta = 3)$ | $e$ =0.2201 | $e$ =0.1108 | $e$ =0.0605 |
| | $(\alpha = 3, \beta = 1)$ | $e$ =0.1140 | $e$ =0.0889 | $e$ =0.0464 |
| | $(\alpha = 5, \beta = 5)$ | $e$ =0.1260 | $e$ =0.0645 | $e$ =0.0471 |
| **Beta** $Beta(\theta_1,\theta_2)$ | $(\theta_1 = 1, \theta_2 = 1)$ | $e$ =0.0157 | $e$ =0.0199 | $e$ =0.0144 |
| | $(\theta_1 = 1/2, \theta_2 = 2)$ | $e$ =0.0649 | $e$ =0.0344 | $e$ =0.0168 |
| | $(\theta_1 = 3, \theta_2 = 1/3)$ | $e$ =0.1013 | $e = 0.0682$ | $e$ =0.1085 |
| | $(\theta_1 = 1/2, \theta_2 = 1/2)$ | $e$ =0.0434 | $e$ =0.0513 | $e$ =0.044 |