PARTE (A)

P.D. $\Lambda = \dfrac{|S|^{n/2}}{\prod_{i=1}^{p} S_{ii}^{n/2}} = |R|^{n/2}$

Σ es diagonal.

- Para una muestra de "n" observaciones $X_1, \dots, X_n$ de una distribución normal multivariada $N(\mu, \Sigma)$ sabemos que:

$$L(\mu,\Sigma) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(2\pi)^{p/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(X_i-\mu)^T \Sigma^{-1} (X_i-\mu)\right)$$

- Bajo la hipótesis nula H_0 : Σ es diagonal

$\Sigma_0 = \operatorname{diag}(\sigma_{11}, \dots, \sigma_{pp})$ con $\sigma_{ij} = 0$ para $i \neq j$

$$L(\mu,\Sigma_0) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(2\pi)^{p/2} |\Sigma_0|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(X_i-\mu)^T \Sigma_0^{-1} (X_i-\mu)\right)$$

- Obtenemos la razón de verosimilitud Λ :

$$\Lambda = \frac{\prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{p} \frac{1}{\sqrt{2\pi S_{ii}}} \exp\left(-\frac{(X_{ji}-\bar{X}_i)^2}{2S_{ii}}\right)}{(2\pi)^{-np/2} |S|^{-n/2}}$$

$$= \frac{\cancel{(2\pi)^{-np/2}} \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{p} (S_{ii})^{-1/2} \exp\left(-\frac{n S_{ii}}{2 S_{ii}}\right)}{\cancel{(2\pi)^{-np/2}} |S|^{-n/2}}$$

- Simplificando la suma y eliminando la constante

$$\Lambda = \frac{|S|^{n/2}}{\left(\prod_{i=1}^{p} S_{ii}\right)^{n/2}} = \left(\frac{|S|}{\prod_{i=1}^{p} S_{ii}}\right)^{n/2}$$

- Y entonces $\Lambda = |R|^{n/2}$

- El estadístico de prueba se obtiene como:

$$-2\ln(\Lambda) \sim \chi^2_{p(p-1)/2}$$

Si el valor de $-2\ln(\Lambda)$ es mayor que el valor crítico de la distribución χ^2 para un nivel de significancia, rechazamos H_0.

PARTE (B)

- $H_0 : \Sigma = \sigma^2 I$ vs. $H_1 : \Sigma \neq \sigma^2 I$
  - ↳ I es la matriz identidad de dimensión $p \times p$.
- $L(\mu,\Sigma) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(2\pi)^{p/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(X_i-\mu)^T \Sigma^{-1} (X_i-\mu)\right)$
  - ↳ Bajo H_0 : $|\Sigma| = (\sigma^2)^p = \sigma^{2p}$, $\Sigma^{-1} = \frac{1}{\sigma^2} I$
- Maximización de la verosimilitud, bajo H_0 :
  - ↳ Usamos la estimación sugerida: $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{np} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^T (X_i - \bar{X})$

$= tr(S)/p$

- Maximización bajo el modelo general :
  - ↳ $L(\hat{\mu}, S) = \dfrac{1}{(2\pi)^{np/2} |S|^{n/2}} \exp\left(-\frac{n}{2}\right)$
- Razón de verosimilitud :

$$\Lambda = \frac{\max_{\mu,\sigma^2} L_0(\mu, \sigma^2 I)}{\max_{\mu,\Sigma} L(\mu,\Sigma)}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{(2\pi)^{p/2} (\hat{\sigma}^2)^{p/2}}\right)^n \cdot \exp\left(-\frac{np}{2}\right)}{\frac{1}{(2\pi)^{np/2} |S|^{n/2}} \cdot \exp\left(-\frac{n}{2}\right)}$$

$$= \frac{(\hat{\sigma}^2)^{-np/2} \exp(-np/2)}{|S|^{-n/2} \exp(-n/2)}$$

$$= \left(\frac{(\hat{\sigma}^2)^p}{|S|}\right)^{n/2} = \left(\frac{[tr(S)/p]^p}{|S|}\right)^{n/2}$$

- La media geométrica de los valores $\hat{\lambda}_i$ es S
  - ↳ $S = \left(\prod_{i=1}^{p} \hat{\lambda}_i\right)^{1/p}$
  - ↳ media aritmética $\frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} \hat{\lambda}_i$
- Por lo tanto, $\Lambda = \left(\dfrac{\prod_{i=1}^{p} \hat{\lambda}_i}{\left(\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} \hat{\lambda}_i\right)^p}\right)^{n/2}$

- Y, su estadístico de prueba es $-2\ln(\Lambda) \approx \chi^2_{(p+2)(p-1)/2}$