Décomposition de Dunford et réduction de Jordan

Nous avons vu que les matrices ne sont pas toutes diagonalisables. On peut néanmoins décomposer certaines d'entre elles, en une forme la plus simple possible. Nous verrons trois décompositions.

- La trigonalisation : transformer une matrice en une matrice triangulaire.
- La décomposition de Dunford : écrire une matrice comme la somme d'une matrice diagonalisable et d'une matrice nilpotente.
- La réduction de Jordan : transformer une matrice en une matrice diagonale par blocs.

$\mathbb{K}$ sera le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Trigonalisation

Nous allons montrer que toute matrice, dont le polynôme caractéristique est scindé, est semblable à une matrice triangulaire.

1.1. Trigonalisation

On rappelle qu'une matrice $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est ***triangulaire supérieure*** si $a_{i,j} = 0$ dès que $i > j$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Les coefficients sous la diagonale sont tous nuls. Ceux sur la diagonale ou au-dessus peuvent être nuls ou pas.

Définition 1.

- Une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est ***trigonalisable*** sur $\mathbb{K}$ s'il existe une matrice inversible $P \in M_n(\mathbb{K})$ inversible telle que $P^{-1}AP$ soit triangulaire supérieure.
- Un endomorphisme f de E est ***trigonalisable*** s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f soit triangulaire supérieure.

Bien sûr, une matrice diagonalisable est en particulier trigonalisable.

Théorème 1.
Une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ (resp. un endomorphisme f) est trigonalisable sur $\mathbb{K}$ si et seulement si son polynôme caractéristique χ_A (resp. χ_f) est scindé sur $\mathbb{K}$.

On rappelle qu'un polynôme est scindé sur $\mathbb{K}$ s'il se décompose en produit de facteurs linéaires dans $\mathbb{K}[X]$.
Remarquons que si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, par le théorème de d'Alembert-Gauss, on a :

Corollaire 1.
Toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable sur $\mathbb{C}$.

Ce n'est pas le cas si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Exemple 1.
Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Alors $\chi_A(X) = X^2 + 1$. Ce polynôme n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, donc A n'est pas trigonalisable sur $\mathbb{R}$. Si on considère cette même matrice A comme élément de $M_2(\mathbb{C})$, alors elle est trigonalisable (et ici même diagonalisable) sur $\mathbb{C}$: il existe $P \in M_2(\mathbb{C})$ inversible telle que $P^{-1}AP$ soit triangulaire supérieure.

1.2. Preuve

Démonstration.

- $\Longrightarrow$. Si f est trigonalisable, il existe une base de E dans laquelle la matrice de f s'écrit
$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$
On a alors
$$\chi_f(X) = \chi_A(X) = \prod_{i=1}^{n} (a_{i,i} - X),$$
ce qui prouve que χ_f se décompose en produit de facteurs linéaires dans $\mathbb{K}[X]$.
- $\Longleftarrow$. La démonstration se fait par récurrence sur la dimension n de l'espace vectoriel E. Si $n = 1$, il n'y a rien à démontrer. Supposons le résultat vrai pour $n-1$, $n \geqslant 2$ étant arbitrairement fixé. Le polynôme χ_f ayant au moins une racine dans $\mathbb{K}$, notons λ l'une d'entre elles et v_1 un vecteur propre associé. Soit F l'hyperplan supplémentaire de la droite $\mathbb{K}v_1$: on a donc $E = \mathbb{K}v_1 \oplus F$. On considère alors une base $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ de E avec, pour $2 \leqslant i \leqslant n$, $v_i \in F$. La matrice de f dans cette base s'écrit
$$\left(\begin{array}{c|c} \lambda & \cdots \\ \hline 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{array}\right)$$
où B est une matrice carrée de taille $(n-1) \times (n-1)$. On a
$$\chi_f(X) = (\lambda - X)\det(B - XI_{n-1}) = (\lambda - X)\chi_B(X).$$
Notons g la restriction de f à F : la matrice de g dans la base $(v_2, \ldots, v_n)$ est égale à B. Par hypothèse de récurrence, g (et donc B) est trigonalisable : en effet, $\chi_f(X) = (\lambda - X)\chi_g(X)$, et comme χ_f est supposé scindé sur $\mathbb{K}$, χ_g l'est également. Par conséquent, il existe une base $(w_2, \ldots, w_n)$ de F dans laquelle la matrice de g est triangulaire supérieure. Ainsi, dans la base $(v_1, w_2, \ldots, w_n)$, la matrice de f est triangulaire supérieure.

□

1.3. Exemple

Exemple 2.
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Démontrons que A est trigonalisable sur $\mathbb{R}$ et trouvons une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit triangulaire supérieure.

1. Commençons par calculer le polynôme caractéristique de A :
$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 4 & -2 \\ 0 & 6-X & -3 \\ -1 & 4 & -X \end{vmatrix} = \cdots = (3-X)(2-X)^2$$
Comme χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$, la matrice est trigonalisable sur $\mathbb{R}$. (Nous verrons plus tard si elle est diagonalisable ou pas.)
2. Les racines du polynôme caractéristique sont les réels 3 (avec la multiplicité 1), et 2 (avec la multiplicité 2).
Déterminons les sous-espaces propres associés.
   - Soit E_3 le sous-espace propre associé à la valeur propre simple 3 : $E_3 = \{v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid Av = 3v\}$.
$$v \in E_3 \iff Av = 3v \iff \begin{cases} x + 4y - 2z &= 3x \\ 6y - 3z &= 3y \\ -x + 4y &= 3z \end{cases} \iff x = y = z$$
E_3 est donc la droite vectorielle engendrée par le vecteur $v_1 = (1, 1, 1)$.
   - Soit E_2 le sous-espace propre associé à la valeur propre double 2 : $E_2 = \{v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid Av = 2v\}$.
$$v \in E_2 \iff Av = 2v \iff \begin{cases} x + 4y - 2z &= 2x \\ 6y - 3z &= 2y \\ -x + 4y &= 2z \end{cases} \iff \begin{cases} x &= z \\ 4y &= 3z \end{cases}$$
E_2 est donc la droite vectorielle engendrée par $v_2 = (4, 3, 4)$.
La dimension de E_2 est égale à 1 alors que la multiplicité de la valeur propre 2 correspondante est égale à 2. Par conséquent, on sait que la matrice A ne sera pas diagonalisable.
   - Soit $v_3 = (0, 0, 1)$. Les vecteurs (v_1, v_2, v_3) forment une base de $\mathbb{R}^3$. La matrice de passage (constituée des v_i écrits en colonne) est
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
On a $Av_1 = 3v_1$ et $Av_2 = 2v_2$. Il reste à exprimer Av_3 dans la base (v_1, v_2, v_3) :
$$Av_3 = A(0, 0, 1) = (-2, -3, 0) = -2(-3v_1 + v_2 - v_3) - 3(4v_1 - v_2) = -6v_1 + v_2 + 2v_3.$$
3. Ainsi, l'endomorphisme qui a pour matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ a pour matrice T dans la base (v_1, v_2, v_3), où
$$T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On aurait aussi pu calculer T par la formule $T = P^{-1}AP$.

4. Note. D'autres choix pour v_3 sont possibles. Ici, n'importe quel vecteur v_3' complétant (v_1, v_2) en une base de $\mathbb{R}^3$ conviendrait. Par contre, un autre choix conduirait à une matrice triangulaire T' différente (pour la dernière colonne).

Mini-exercices.

1. La matrice $A = \begin{pmatrix} 28 & -27 \\ 12 & -8 \end{pmatrix}$ est-elle trigonalisable sur $\mathbb{R}$? Si oui, trouver P telle que $P^{-1}AP$ soit triangulaire supérieure. Même question avec :
$$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -7 & -1 & 7 \\ 5 & 2 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 3 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -7 & -14 & -3 \end{pmatrix}$$
2. Trouver deux matrices $T, T' \in M_3(\mathbb{R})$ qui soient distinctes, triangulaires supérieures et semblables.

2. Sous-espaces caractéristiques

2.1. Lemme des noyaux

Commençons par démontrer le lemme suivant :

Lemme 1 (Lemme des noyaux).
Soit f un endomorphisme de E. Soient P et Q des polynômes de $\mathbb{K}[X]$, **premiers entre eux***. Alors :*
$$\boxed{\operatorname{Ker}(PQ)(f) = \operatorname{Ker} P(f) \oplus \operatorname{Ker} Q(f)}$$

Généralisation : soient $P_1, \ldots, P_r$ des polynômes deux à deux premiers entre eux. Alors :
$$\boxed{\operatorname{Ker}(P_1 \cdots P_r)(f) = \operatorname{Ker}(P_1(f)) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker}(P_r(f))}$$

On a bien sûr des énoncés similaires avec les matrices.

Rappels.

- Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. On dit que $P(X)$ et $Q(X)$ sont ***premiers entre eux*** dans $\mathbb{K}[X]$ si les seuls polynômes qui divisent à la fois P et Q sont les polynômes constants.
- En particulier, sur $\mathbb{C}$, deux polynômes sont premiers entre eux si et seulement s'ils n'ont pas de racine commune.
- Le théorème de Bézout s'énonce ainsi :
$$P \text{ et } Q \text{ sont premiers entre eux} \iff \exists A, B \in \mathbb{K}[X] \quad AP + BQ = 1.$$

Démonstration. Soient P et Q deux polynômes premiers entre eux. Alors, d'après le théorème de Bézout, il existe des polynômes A et B tels que $AP + BQ = 1$. On a donc, pour tout endomorphisme f :
$$A(f) \circ P(f) + B(f) \circ Q(f) = \mathrm{id}_E.$$
Autrement dit, pour tout $x \in E$:
$$A(f) \circ P(f)(x) + B(f) \circ Q(f)(x) = x.$$

- Montrons que $\operatorname{Ker} P(f) \cap \operatorname{Ker} Q(f) = \{0\}$.
  Soit $x \in \operatorname{Ker} P(f) \cap \operatorname{Ker} Q(f)$. On a
  $$A(f) \circ \underbrace{P(f)(x)}_{=0} + B(f) \circ \underbrace{Q(f)(x)}_{=0} = x,$$
  donc $x = 0$, ce qui prouve $\operatorname{Ker} P(f) \cap \operatorname{Ker} Q(f) = \{0\}$.
- Montrons que $\operatorname{Ker}(PQ)(f) = \operatorname{Ker} P(f) + \operatorname{Ker} Q(f)$ par double inclusion.
  — Preuve de $\operatorname{Ker}(PQ)(f) \subset \operatorname{Ker} P(f) + \operatorname{Ker} Q(f)$.
  Soit $x \in \operatorname{Ker}(PQ)(f)$. On a, toujours en raison du théorème de Bézout,
  $$x = A(f) \circ P(f)(x) + B(f) \circ Q(f)(x).$$
  Montrons que $A(f) \circ P(f)(x) \in \operatorname{Ker} Q(f)$. En effet :
  $$Q(f) \circ A(f) \circ P(f)(x) = A(f) \circ P(f) \circ Q(f)(x) = A(f) \circ \big((PQ)(f)\big)(x) = 0.$$
  On a utilisé que les polynômes d'endomorphisme en f commutent et que $(PQ)(f)(x) = 0$.
  De même, $B(f) \circ Q(f)(x) \in \operatorname{Ker} P(f)$. Ainsi,
  $$x = \underbrace{A(f) \circ P(f)(x)}_{\in \operatorname{Ker} Q(f)} + \underbrace{B(f) \circ Q(f)(x)}_{\in \operatorname{Ker} P(f)},$$
  et donc $x \in \operatorname{Ker} P(f) + \operatorname{Ker} Q(f)$.
  — Preuve de $\operatorname{Ker} P(f) + \operatorname{Ker} Q(f) \subset \operatorname{Ker}(PQ)(f)$. Soient $y \in \operatorname{Ker} P(f)$ et $z \in \operatorname{Ker} Q(f)$. Alors :
  $$PQ(f)(y + z) = Q(f) \circ \underbrace{P(f)(y)}_{=0} + P(f) \circ \underbrace{Q(f)(z)}_{=0} = 0,$$
  et donc $y + z \in \operatorname{Ker}(PQ)(f)$.
- Conclusion : $\operatorname{Ker}(PQ)(f) = \operatorname{Ker} P(f) \oplus \operatorname{Ker} Q(f)$.

□

2.2. Sous-espaces caractéristiques

Nous avons vu que, lorsque f est diagonalisable, on a $E = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_r}$ avec $E_{\lambda_i} = \operatorname{Ker}(f - \lambda_i \operatorname{id}_E)$ le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_i. Nous allons démontrer que même si f n'est pas diagonalisable, mais si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$, on peut écrire
$$E = \operatorname{Ker}(f - \lambda_1 \operatorname{id}_E)^{m_1} \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker}(f - \lambda_r \operatorname{id}_E)^{m_r},$$
où m_i est la multiplicité de la valeur propre λ_i comme racine du polynôme caractéristique de f.

Définition 2.
Soit f un endomorphisme de E. Soit λ une valeur propre de f et soit m sa multiplicité en tant que racine de χ_f. Le *sous-espace caractéristique* de f pour la valeur propre λ est
$$\boxed{N_\lambda = \operatorname{Ker}\big((f - \lambda \operatorname{id}_E)^m\big).}$$

Pour λ valeur propre de f, on a $E_\lambda \subset N_\lambda$, car $\operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{id}_E) \subset \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{id}_E)^k$ quel que soit $k \geqslant 1$.

Exemple 3.
Soit
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 9 & -5 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}).$$

Calculons les sous-espaces caractéristiques de A.

- Pour déterminer ses valeurs propres, on calcule d'abord son polynôme caractéristique :
$$\chi_A(X) = \det(A - XI_4) = \cdots = (X-3)(X-1)^3$$
La valeur propre 3 est de multiplicité 1 et la valeur propre 1 est de multiplicité 3.
- **Sous-espace caractéristique associé à $\lambda = 3$.**
Comme la multiplicité de cette valeur propre est 1 alors le sous-espace caractéristique est aussi le sous-espace propre : $N_3 = \operatorname{Ker}(A - 3I_4)^1 = E_3$. Ainsi, $N_3 = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid (A - 3I_4)v = 0\}$. Comme $N_3 = E_3$ est de dimension 1 et $v_1 = (0,0,0,1) \in N_3$, alors
$$N_3 = \mathbb{R}v_1.$$
- **Sous-espace caractéristique associé à $\lambda = 1$.**
La multiplicité de cette valeur propre est 3, donc $N_1 = \operatorname{Ker}(A - I_4)^3$. On a :
$$A - I_4 = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & -5 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad (A - I_4)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 6 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad (A - I_4)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & -4 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$
On cherche une base de $N_1 = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid (A - I_4)^3 v = 0\}$. C'est un espace vectoriel de dimension 3, dont par exemple (v_2, v_3, v_4) est une base, avec
$$v_2 = (1,4,0,0) \qquad v_3 = (1,0,4,0) \qquad v_4 = (1,0,0,-2),$$
et donc
$$N_1 = \operatorname{Vect}(v_2, v_3, v_4).$$

Théorème 2.
Soit f un endomorphisme de E tel que χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$. Notons $\chi_f(X) = \pm(X-\lambda_1)^{m_1} \cdots (X-\lambda_r)^{m_r}$ et, pour $1 \leqslant i \leqslant r$, N_{λ_i} le sous-espace caractéristique associé à la valeur propre λ_i. Alors :

1. *Chaque N_{λ_i} est stable par f.*
2. *$E = N_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus N_{\lambda_r}$.*
3. *$\dim N_{\lambda_i} = m_i$.*

Autrement dit, l'espace vectoriel E est la somme directe des sous-espaces caractéristiques. En plus, la dimension du sous-espace caractéristique associé à la valeur propre λ est la multiplicité de λ comme racine du polynôme caractéristique.

Exemple 4.
Reprenons l'exemple 3 :

- 3 est valeur propre de multiplicité 1, et on a bien $\dim N_3 = 1$,
- 1 est valeur propre de multiplicité 3, et on a bien $\dim N_1 = 3$,
- on a bien $\mathbb{R}^4 = N_3 \oplus N_1$.

Démonstration.

1. Soit $x \in N_\lambda = \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{id}_E)^m$. On a $(f - \lambda \operatorname{id}_E)^m(x) = 0$. Or
$$(f - \lambda \operatorname{id}_E)^m \circ f(x) = f \circ (f - \lambda \operatorname{id}_E)^m(x) = 0,$$
d'où $f(x) \in N_\lambda$.

2. C'est une application du lemme des noyaux. On rappelle que
$$\chi_f(X) = \pm(X-\lambda_1)^{m_1}\cdots(X-\lambda_r)^{m_r}.$$
Les polynômes $(X-\lambda_i)^{m_i}$ sont premiers entre eux puisque les valeurs propres sont distinctes. Par le lemme des noyaux, on obtient
$$\operatorname{Ker}\chi_f(f) = \operatorname{Ker}(f-\lambda_1\operatorname{id}_E)^{m_1}\oplus\cdots\oplus\operatorname{Ker}(f-\lambda_r\operatorname{id}_E)^{m_r} = N_{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus N_{\lambda_r}.$$
Or, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $\chi_f(f)=0$, donc $\operatorname{Ker}\chi_f(f)=E$, d'où le résultat.
3. Notons $g_i = f_{|N_{\lambda_i}}$ pour $1\leqslant i\leqslant r$. Pour $i\neq j$, $N_{\lambda_i}\cap N_{\lambda_j}=\{0\}$. Or $E_{\lambda_i}\subset N_{\lambda_i}$, donc la seule valeur propre possible de g_i est λ_i. Le polynôme caractéristique de g_i est scindé (car il divise celui de f) et sa seule racine est la seule valeur propre de g_i, c'est-à-dire λ_i. Ainsi, $\chi_{g_i}(X)=\pm(X-\lambda_i)^{n_i}$ (où $n_i=\dim N_{\lambda_i}$). De plus,
$$\pm(X-\lambda_1)^{m_1}\cdots(X-\lambda_r)^{m_r} = \chi_f(X) = \chi_{g_1}(X)\cdots\chi_{g_r}(X) = \pm(X-\lambda_1)^{n_1}\cdots(X-\lambda_r)^{n_r}.$$
D'où, en identifiant les exposants des facteurs irréductibles, $n_i=\dim N_i = m_i$, pour $1\leqslant i\leqslant r$.

□

Mini-exercices.

1. Calculer les sous-espaces caractéristiques de la matrice $A=\begin{pmatrix}-2&-2&-1&-3\\0&-2&0&3\\0&1&-2&1\\0&-3&0&4\end{pmatrix}$. Même exercice avec $B=\begin{pmatrix}1&-2&2&2&2\\2&6&-5&-3&-4\\2&3&-2&-3&-5\\0&1&-1&2&0\\0&-1&1&1&4\end{pmatrix}$.
2. Soient $f\in\mathscr{L}(E)$ et $\lambda\in\mathbb{K}$. Montrer que $\operatorname{Ker}(f-\lambda\operatorname{id}_E)\subset\operatorname{Ker}(f-\lambda\operatorname{id}_E)^2\subset\operatorname{Ker}(f-\lambda\operatorname{id}_E)^3\subset\cdots$.
3. En utilisant le lemme des noyaux, prouver ce résultat du chapitre « Polynômes d'endomorphismes » :

   « **Théorème.** Un endomorphisme $f\in\mathscr{L}(E)$ est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples dans $\mathbb{K}$. »

3. Décomposition de Dunford

Nous allons montrer que toute matrice, dont le polynôme caractéristique est scindé, peut s'écrire comme somme d'une matrice diagonalisable et d'une matrice nilpotente. Autrement dit, cette matrice est semblable à la somme d'une matrice diagonale et d'une matrice nilpotente.

3.1. Énoncé

Définition 3.
On dit qu'un endomorphisme f (resp. une matrice A) est ***nilpotent(e)*** s'il existe $k\in\mathbb{N}^*$ tel que $f^k=0$ (resp. $A^k=0$).

Nous allons démontrer que les endomorphismes nilpotents et les endomorphismes diagonalisables permettent de décrire tous les endomorphismes dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$ (c'est-à-dire ceux trigonalisables).

Théorème 3 (Décomposition de Dunford).
Soit f un endomorphisme de E tel que χ_f soit scindé sur $\mathbb{K}$. Alors il existe un unique couple (n, d) d'endomorphismes tel que :
i) n est nilpotent et d est diagonalisable,
ii) $f = n + d$,
iii) $n \circ d = d \circ n$.

De plus, on pourrait montrer que d et n sont des polynômes en f. En particulier, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, cette décomposition existe toujours. Le théorème peut encore s'écrire :

Théorème 4 (Décomposition de Dunford).
Pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ ayant un polynôme caractéristique scindé sur $\mathbb{K}$, il existe une unique matrice N nilpotente et une unique matrice Δ diagonalisable telles que

$$A = N + \Delta \quad \text{et} \quad N\Delta = \Delta N.$$

Remarque importante.
Attention ! Δ est une matrice ***diagonalisable***, pas nécessairement une matrice diagonale.
Comme Δ est diagonalisable, alors il existe une matrice inversible P et une matrice ***diagonale*** D telles que $D = P^{-1}\Delta P$. Si on note $N' = P^{-1}NP$ alors N' est encore nilpotente et $N'D = DN'$. Une autre façon d'écrire la décomposition de Dunford est alors $P^{-1}AP = D + N'$. C'est dire que A est semblable à la somme d'une matrice diagonale avec une matrice nilpotente.

Comme conséquence directe :

Corollaire 2.
Soit f un endomorphisme avec une décomposition de Dunford $f = d + n$, avec d diagonalisable, n nilpotent et $d \circ n = n \circ d$. Alors :
- *f diagonalisable $\iff f = d \iff n = 0$;*
- *f nilpotent $\iff f = n \iff d = 0$.*

3.2. Lemmes

Avant de démontrer ces théorèmes, nous allons démontrer des lemmes dont les résultats nous seront utiles.

Lemme 2.
Si f est nilpotent, alors 0 est son unique valeur propre et on a

$$\chi_f(X) = (-1)^n X^n.$$

Démonstration.
- Notons A la matrice de f dans une base. Comme f est nilpotent, il existe $k \geqslant 1$ tel que $A^k = 0$. Cela implique $\det(A^k) = 0$, donc $\det(A) = 0$. La matrice A n'est donc pas inversible : cela entraîne que f n'est pas bijectif, et comme f est un endomorphisme, f n'est pas non plus injectif (la dimension de l'espace de départ égale la dimension de l'espace d'arrivée). Ainsi, $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$, ce qui est exactement dire que 0 est une valeur propre de f.
- Supposons que λ soit une valeur propre de f : il existe alors $x \neq 0$ tel que $f(x) = \lambda x$. Par récurrence sur n, $f^n(x) = \lambda^n x$. Or, f est supposé nilpotent, il existe donc $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^k = 0$. D'où $\lambda^k x = 0$, ce qui implique $\lambda^k = 0$ (car $x \neq 0$), donc $\lambda = 0$.

- Ainsi, 0 est la seule valeur propre de f, donc la seule racine de son polynôme caractéristique.
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on considère l'endomorphisme comme aussi défini sur $\mathbb{C}$. En termes de matrice, cela revient à dire que la matrice à coefficients réels A peut être vue aussi comme à coefficients complexes. Or, sur $\mathbb{C}$, un polynôme dont la seule racine est 0 est de la forme αX^n, donc $\chi_f(X) = (-1)^n X^n$ puisque le coefficient dominant d'un polynôme caractéristique est $(-1)^n$.

□

Lemme 3.
Soit f un endomorphisme de E diagonalisable. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ ses valeurs propres et $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_r}$ les sous-espaces propres correspondants. Si F est un sous-espace de E stable par f, alors on a
$$F = (F \cap E_{\lambda_1}) \oplus \cdots \oplus (F \cap E_{\lambda_r}).$$

Démonstration. Soit $x \in F$. Comme $x \in E = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_r}$, il existe $x_1, \dots, x_r$ uniques, avec $x_i \in E_{\lambda_i}$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$, tels que $x = x_1 + \cdots + x_r$.
Le sous-espace F est stable par f, donc également par $P(f)$ pour tout polynôme $P \in K[X]$. On rappelle que comme $x_i \in E_{\lambda_i}$ alors $f(x_i) = \lambda_i x_i$ et plus généralement $P(f)(x_i) = P(\lambda_i)x_i$. Pour $1 \leqslant i \leqslant r$, on définit
$$P_i(X) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{r} (X - \lambda_k).$$
On a ainsi $P_i(\lambda_j) = 0$ si $i \neq j$, et $P_i(\lambda_i) \neq 0$.
On peut alors écrire
$$P_i(f)(x) = P_i(f)(x_1 + \cdots + x_r) = P_i(\lambda_1)x_1 + \cdots + P_i(\lambda_r)x_r = P_i(\lambda_i)x_i.$$
Or $P_i(f)(x) \in F$ par stabilité de f, donc $x_i \in F$. Ainsi, pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$, $x_i \in F \cap E_{\lambda_i}$, d'où le résultat. □

Lemme 4.
Si f est diagonalisable et F est un sous-espace vectoriel de E, stable par f, alors la restriction de f à F est aussi diagonalisable.

Pour une autre preuve, voir la fin du chapitre « Polynômes d'endomorphismes ».

Démonstration. Notons g la restriction de f au sous-espace F : $g = f_{|F}$ qui est bien définie car F est stable par f. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres de f. L'endomorphisme f étant supposé diagonalisable, on a
$$E = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_r},$$
où les E_{λ_i} sont les sous-espaces propres de f. On obtient grâce au lemme 3 que
$$F = (F \cap E_{\lambda_1}) \oplus \cdots \oplus (F \cap E_{\lambda_r}).$$
Or, quel que soit $\mu \in \mathbb{K}$, $\operatorname{Ker}(g - \mu \operatorname{id}_F) = F \cap \operatorname{Ker}(f - \mu \operatorname{id}_E)$, donc les valeurs propres de g, notées $\mu_1, \dots, \mu_s$, appartiennent à l'ensemble $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$. Ces μ_i forment exactement l'ensemble des valeurs de $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ pour lesquelles $F \cap E_{\lambda_i} \neq \{0\}$. On a donc
$$F = \operatorname{Ker}(g - \mu_1 \operatorname{id}_F) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker}(g - \mu_s \operatorname{id}_F),$$
ce qui prouve que g est diagonalisable. □

Lemme 5.
Soient f et g deux endomorphismes diagonalisables. On suppose que $f \circ g = g \circ f$. Alors il existe une base commune de vecteurs propres de f et de g.

Autrement dit, si $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ sont diagonalisables et commutent, alors on peut les diagonaliser dans une base commune, c'est-à-dire qu'il existe une matrice $P \in M_n(\mathbb{K})$ inversible telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient toutes les deux diagonales.

Démonstration. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres de f. Notons $E_{\lambda_i} = \{x \in E \mid f(x) = \lambda_i x\}$. On a alors, pour $x \in E_{\lambda_i}$,

$$f(g(x)) = g(f(x)) = g(\lambda_i x) = \lambda_i g(x),$$

donc $g(x) \in E_{\lambda_i}$, ce qui prouve que E_{λ_i} est stable par g. D'après le lemme 4, la restriction de g à E_{λ_i} est donc diagonalisable. On considère, dans E_{λ_i}, une base $\mathscr{B}_i$ de vecteurs propres de g. Noter que ce sont aussi des vecteurs propres de f (car ils sont dans E_{λ_i}). Comme f est diagonalisable, on a

$$E = \underbrace{E_{\lambda_1}}_{\mathscr{B}_1} \oplus \cdots \oplus \underbrace{E_{\lambda_r}}_{\mathscr{B}_r}.$$

La base $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \cup \cdots \cup \mathscr{B}_r$ est donc une base de E formée de vecteurs qui sont des vecteurs propres à la fois pour f et pour g. □

3.3. Preuve

Passons à la démonstration du théorème de décomposition de Dunford. Voici l'idée générale :

- On décompose l'espace vectoriel E en somme des sous-espaces caractéristiques N_{λ_i}, où les λ_i sont les valeurs propres de f.
- Sur chacun de ces sous-espaces, on décompose la restriction de f en $d_i + n_i$, avec $d_i = \lambda_i \operatorname{id}_{N_{\lambda_i}}$ qui est bien sûr diagonalisable.
- On montre que n_i, qui est $f - d_i$ restreint à N_{λ_i}, est nilpotent.
- Comme d_i est λ_i fois l'identité, alors d_i commute en particulier avec n_i.

Démonstration.
Construction.

- Soit χ_f le polynôme caractéristique de f qui, par hypothèse, est scindé sur $\mathbb{K}$. Notons λ_i une valeur propre de f, et m_i sa multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique :
$$\chi_f(X) = \pm \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{m_i}.$$
- Soient $N_{\lambda_1}, \ldots, N_{\lambda_r}$ les sous-espaces caractéristiques de f. Pour $1 \leqslant i \leqslant r$, on a
$$N_{\lambda_i} = \operatorname{Ker}(f - \lambda_i \operatorname{id}_E)^{m_i} \quad \text{et} \quad E = N_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus N_{\lambda_r}.$$
- Nous allons définir l'endomorphisme d sur chaque N_{λ_i} de la manière suivante : pour tout $x \in N_{\lambda_i}$, on pose
$$d(x) = \lambda_i x.$$
L'espace vectoriel E étant somme directe des N_{λ_i}, d est défini sur E tout entier. En effet, si $x \in E$ est décomposé en $x = x_1 + \cdots + x_r$ avec $x_i \in N_{\lambda_i}$ (pour $1 \leqslant i \leqslant r$), alors
$$d(x) = d(x_1 + \cdots + x_r) = d(x_1) + \cdots + d(x_r) = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_r x_r.$$
Pour $1 \leqslant i \leqslant r$, on a $d_i = d_{|N_{\lambda_i}} = \lambda_i \operatorname{id}_{N_{\lambda_i}}$.

On pose enfin

$$n(x) = f(x) - d(x).$$

Il nous reste à vérifier que n et d conviennent.

Propriétés.

1. Par construction, d est diagonalisable. En effet, fixons une base pour chaque sous-espace N_{λ_i}. Pour chaque vecteur x de cette base, $d(x) = \lambda_i x$. Comme E est somme directe des N_{λ_i} alors, dans la base de E formée de l'union des bases des N_{λ_i} $(1 \leqslant i \leqslant r)$, la matrice de d est diagonale.
2. On a défini $n = f - d$. N_{λ_i} est stable par n (car c'est vrai pour f et d). On pose $n_i = n_{|N_{\lambda_i}} = f_{|N_{\lambda_i}} - \lambda_i \operatorname{id}_{N_{\lambda_i}}$. Alors, par définition, $N_{\lambda_i} = \operatorname{Ker}(n_i^{m_i})$, et donc $n_i^{m_i} = 0$. Ainsi, en posant $m = \max m_i$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$, puisque n^m s'annule sur chaque N_{λ_i}, alors $n^m = 0$, ce qui prouve que n est nilpotent.
3. On va vérifier que $d \circ n = n \circ d$. Si $x \in E$, il se décompose en $x = x_1 + \cdots + x_r$ avec $x_i \in N_{\lambda_i}$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$. Sur chaque N_{λ_i}, $d_{|N_{\lambda_i}} = \lambda_i \operatorname{id}_{N_{\lambda_i}}$ donc commute avec tout endomorphisme. En particulier, $d \circ n(x_i) = n \circ d(x_i)$ puisque N_{λ_i} est stable par n. On a donc

   $$d \circ n(x) = d \circ n(x_1 + \cdots + x_r) = d \circ n(x_1) + \cdots + d \circ n(x_r) = n \circ d(x_1) + \cdots + n \circ d(x_r) = n \circ d(x).$$

   Ainsi, d et n commutent.
4. Il reste à prouver l'unicité. Supposons que (n, d) soit le couple construit ci-dessus et soit (n', d') un autre couple vérifiant les propriétés (i), (ii), (iii) de la décomposition de Dunford.
   - Montrons que d et d' commutent, ainsi que n et n'.
     On a $f = d + n = d' + n'$, d'où

     $$d \circ f = d \circ (d + n) = d \circ d + d \circ n = d \circ d + n \circ d = (d + n) \circ d = f \circ d.$$

     Ainsi, f et d commutent et on montre de même que f et d' commutent. Montrons que N_{λ_i} est stable par d'. Soit $x \in N_{\lambda_i} = \operatorname{Ker}(f - \lambda_i \operatorname{id}_E)^{m_i}$. Alors

     $$(f - \lambda_i \operatorname{id}_E)^{m_i} \circ d'(x) = d' \circ (f - \lambda_i \operatorname{id}_E)^{m_i}(x) = 0.$$

     Donc $d'(x) \in N_{\lambda_i}$.
     Par construction, $d_{|N_{\lambda_i}} = \lambda_i \operatorname{id}_{N_{\lambda_i}}$, donc d et d' commutent sur chaque N_{λ_i}, donc sur E tout entier.
     Or $n = f - d$ et $n' = f - d'$ donc, comme d et d' commutent et f commute avec d et d', alors n et n' commutent également.
   - Comme d et d' commutent, d'après le lemme 5, il existe une base commune de vecteurs propres. En particulier, $d - d'$ est diagonalisable.
   - Comme les endomorphismes n et n' sont nilpotents et commutent, $n - n'$ est également nilpotent. En effet, si p et q sont des entiers tels que $n^p = 0$ et $n'^q = 0$, alors $(n - n')^{p+q} = 0$ (écrire la formule du binôme de Newton et voir que, dans chaque terme $n^k n'^{p+q-k}$, on a $k \geqslant p$ ou $p + q - k \geqslant q$).
   - Ainsi $d - d' = n' - n$ est un endomorphisme qui est à la fois diagonalisable et nilpotent. Comme il est nilpotent, sa seule valeur propre est 0 (c'est le lemme 2). Et comme il est diagonalisable, c'est nécessairement l'endomorphisme nul. On a donc $d - d' = n' - n = 0$.
   - Conclusion : $d = d'$, $n = n'$, ce qui termine la preuve de l'unicité.

$\square$

3.4. Exemples

Piège classique

Attention, une matrice triangulaire peut toujours s'écrire comme somme d'une matrice diagonale et d'une matrice nilpotente, mais, en général, celles-ci ne commutent pas.
Retenez bien ce contre-exemple pour éviter ce piège classique.

Exemple 5.
Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \tilde{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \tilde{N} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors on a bien $A = \tilde{D} + \tilde{N}$, $\tilde{D}$ est diagonale, $\tilde{N}$ est nilpotente ($\tilde{N}^2 = 0$). Pourtant, ce n'est pas la décomposition de Dunford car les matrices ne commutent pas : $\tilde{D}\tilde{N} \neq \tilde{N}\tilde{D}$.
La décomposition de Dunford est tout simplement $D = A$, et N est la matrice nulle. D est bien diagonalisable (son polynôme caractéristique est scindé à racines simples) mais n'est pas diagonale ; N est nilpotente et $DN = ND$.

Pratique de la décomposition

La méthode pour trouver la décomposition de Dunford d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ consiste à suivre les étapes de la preuve.

1. On calcule le polynôme caractéristique χ_A de A : il doit être scindé. On calcule ses racines, qui sont les valeurs propres de A.
2. Pour chaque valeur propre λ, de multiplicité m comme racine de χ_A, on note $N_\lambda = \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n)^m$. C'est un espace vectoriel de dimension m. On détermine m vecteurs formant une base de N_λ. L'union de toutes les bases $\mathcal{B}_\lambda$ des N_λ forme une base $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ de $\mathbb{K}^n$.
3. On définit l'endomorphisme d par $d(v_i) = \lambda v_i$ pour chaque $v_i \in N_\lambda$. (Dans la base $\mathcal{B}$, la matrice de d est diagonale.) On note $\mathcal{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. (A est la matrice de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}_0$.) Δ sera la matrice de d dans la base $\mathcal{B}_0$, c'est-à-dire que les colonnes de Δ sont les coordonnées des $d(e_i)$ exprimées dans la base $(e_1, \dots, e_n)$.
4. On pose $N = A - \Delta$. Par la démonstration du théorème 4, Δ est diagonalisable, N est nilpotente et $\Delta N = N\Delta$. La matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ vers la base canonique $\mathcal{B}_0$ transforme Δ en une matrice diagonale $D = P^{-1}\Delta P$.

On commence par un exemple où les calculs sont assez simples.

Exemple 6.
Calculons la décomposition de Dunford de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Évitons le piège d'écrire :

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\tilde{D}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\tilde{N}}$$

$\tilde{D}$ est diagonale (donc diagonalisable) et $\tilde{N}$ est nilpotente, mais on peut vérifier que les matrices *ne commutent pas* : $\tilde{D}\tilde{N} \neq \tilde{N}\tilde{D}$.

Calculons maintenant la décomposition de Dunford de A.

1. Le polynôme caractéristique χ_A est égal à
$$\chi_A(X) = \det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} 1-X & 1 & 1 \\ 0 & 1-X & 1 \\ 0 & 0 & 2-X \end{vmatrix} = -(X-1)^2(X-2).$$
Nous avons donc deux valeurs propres qui sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$. La valeur propre 1 est de multiplicité $m_1 = 2$, alors que, pour la valeur propre 2, $m_2 = 1$.

2. On note $N_1 = \operatorname{Ker}(A - I_3)^2$ et $N_2 = \operatorname{Ker}(A - 2I_3)$. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ s'écrit comme somme directe
$$\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker}(A - I_3)^2 \oplus \operatorname{Ker}(A - 2I_3).$$
Déterminons ces sous-espaces caractéristiques.
   - Calcul de $N_1 = \operatorname{Ker}(A - I_3)^2$.
   On sait que c'est un espace vectoriel de dimension $m_1 = 2$. On calcule
   $$A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Ainsi $N_1 = \operatorname{Ker}(A - I_3)^2$ est le plan vectoriel engendré par les vecteurs $v_1 = (1,0,0)$ et $v_2 = (0,1,0)$. Donc
   $$N_1 = \operatorname{Ker}(A - I_3)^2 = \mathbb{R}v_1 + \mathbb{R}v_2.$$
   Au passage, notons que la matrice A n'est pas diagonalisable : en effet, la valeur propre 1 est de multiplicité 2, mais $E_1 = \operatorname{Ker}(A - I_3) = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid Av = v\}$ est de dimension seulement 1 (en fait $E_1 = \mathbb{R}v_1$).
   - Calcul de $N_2 = \operatorname{Ker}(A - 2I_3)$.
   On sait que c'est un espace vectoriel de dimension $m_2 = 1$. Pour déterminer le noyau $\operatorname{Ker}(A - 2I_3) = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid Av = 2v\}$, si $v = (x,y,z)$, on résout :
   $$\begin{cases} x + y + z &= 2x \\ y + z &= 2y \\ 2z &= 2z \end{cases} \iff \begin{cases} -x + y + z &= 0 \\ -y + z &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= 2z \\ y &= z \end{cases}$$
   Le sous-espace $N_2 = \operatorname{Ker}(A - 2I_3)$ est donc la droite vectorielle engendrée par le vecteur $v_3 = (2,1,1)$: $N_2 = \mathbb{R}v_3$.
   - La famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$:
   $$\mathbb{R}^3 = \underbrace{\mathbb{R}v_1 \oplus \mathbb{R}v_2}_{N_1} \oplus \underbrace{\mathbb{R}v_3}_{N_2}.$$

3. On définit l'endomorphisme d par $d(v_1) = v_1$, $d(v_2) = v_2$ (car $v_1, v_2 \in N_1$) et $d(v_3) = 2v_3$ (car $v_3 \in N_2$). Dans la base $\mathcal{B}$, la matrice de d est donc la matrice diagonale $D = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Or nous voulons la matrice de d dans la base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$. (Les calculs vont être assez simples car $e_1 = v_1$ et $e_2 = v_2$.)
   - $d(e_1) = d(1,0,0) = (1,0,0) = e_1$.
   - $d(e_2) = d(0,1,0) = (0,1,0) = e_2$.
   - On a $v_3 = (2,1,1) = 2e_1 + e_2 + e_3$ et aussi $e_3 = (0,0,1) = -2v_1 - v_2 + v_3$. Donc
   $$\begin{aligned} d(e_3) &= d(-2v_1 - v_2 + v_3) = -2d(v_1) - d(v_2) + d(v_3) = -2v_1 - v_2 + 2v_3 \\ &= -2e_1 - e_2 + 2(2e_1 + e_2 + e_3) = 2e_1 + e_2 + 2e_3. \end{aligned}$$

Donc

$$\Delta = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0} d = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} d(e_1) & d(e_2) & d(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}.$$

4. On pose

$$N = A - \Delta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La décomposition de Dunford est $A = \Delta + N$. La preuve du théorème de la décomposition affirme que Δ est diagonalisable, N est nilpotente et $\Delta N = N\Delta$ (c'est un bon exercice de le vérifier à la main).

5. On note P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}_0$ vers la base $\mathscr{B}$. P contient donc, en colonnes, les vecteurs de la nouvelle base $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$ exprimés dans l'ancienne base $\mathscr{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$. Comme $v_1 = e_1$, $v_2 = e_2$ et $v_3 = 2e_1 + e_2 + e_3$, alors

$$P = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \text{et on calcule} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si besoin, on peut diagonaliser Δ :

$$D = P^{-1}\Delta P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Remarque. D et N sont uniques, mais il y a plusieurs choix possibles pour les vecteurs v_i et donc pour la matrice P.

Pratique de la décomposition (suite)

Exemple 7.

Calculons la décomposition de Dunford de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

1. On trouve $\chi_A(X) = -(X+1)(X-2)^2$. La valeur propre -1 est de multiplicité 1, et la valeur propre 2 est de multiplicité 2.

2.
   - On calcule $N_{-1} = \mathrm{Ker}(A + I_3) = \mathbb{R}v_1$ où $v_1 = (0,1,1)$ (c'est bien un espace vectoriel de dimension $m_{-1} = 1$).
   - Calcul de $N_2 = \mathrm{Ker}(A - 2I_3)^2$ qui va être de dimension $m_2 = 2$:

   $$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad (A - 2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -9 & 0 & 9 \\ -9 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

   Pour une base de N_2, on choisit d'abord $v_2 \in E_2 = \mathrm{Ker}(A - 2I_3) \subset N_2$, par exemple $v_2 = (1,1,1)$. On cherche $v_3 \in N_2$, linéairement indépendant de v_2. Par exemple, $v_3 = (1,0,1)$.

- La famille $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$:
$$\mathbb{R}^3 = \underbrace{\mathbb{R}v_1}_{N_{-1}} \oplus \underbrace{\mathbb{R}v_2 \oplus \mathbb{R}v_3}_{N_2}.$$

3. On note $\mathscr{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. La matrice de passage P de la base $\mathscr{B}_0$ vers la base $\mathscr{B}$ s'obtient en écrivant les vecteurs v_i en colonnes :
$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et donc} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. On définit l'endomorphisme d par $d(v_1) = -v_1$ (car $v_1 \in N_{-1}$), et $d(v_2) = 2v_2$, $d(v_3) = 2v_3$ (car $v_2, v_3 \in N_2$). Dans la base $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$, la matrice de d est la matrice diagonale
$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
La matrice de d dans la base $\mathscr{B}_0$ est obtenue en exprimant $d(e_i)$ dans la base (e_1, e_2, e_3) ou, ce qui revient au même, par
$$\Delta = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. On pose
$$N = A - \Delta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$
La décomposition de Dunford est $A = \Delta + N$. On a bien Δ diagonalisable car $D = P^{-1}\Delta P$. Pour vous rassurer, vérifiez que $N^2 = 0$ et que $\Delta N = N\Delta$.

Application au calcul de puissance.

La décomposition de Dunford est utile pour calculer les puissances d'une matrice. Nous verrons d'autres applications dans le chapitre « Systèmes différentiels ». Voyons les étapes pour calculer A^p, où $A \in M_n(\mathbb{K})$:

1. Écrire la décomposition de Dunford $A = \Delta + N$.
2. Diagonaliser Δ : $D = P^{-1}\Delta P$ avec D matrice diagonale. Comme D est une matrice diagonale, on calcule facilement D^k, pour tout $k \geqslant 0$.
3. On note $N' = P^{-1}NP$. La matrice N' est encore une matrice nilpotente. On calcule les puissances successives N'^2, N'^3,... sachant qu'à partir d'un certain rang tous les N'^k sont nuls.
4. Comme D et N' commutent (car Δ et N commutent), alors on applique la formule du binôme de Newton :
$$(D + N')^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} D^{p-k} N'^k.$$
On a vu qu'à partir d'un certain rang les matrices N'^k sont toutes nulles. La somme a donc peu de termes non nuls.
5. On a $A = \Delta + N = PDP^{-1} + PN'P^{-1} = P(D + N')P^{-1}$. Donc $A^p = \big(P(D + N')P^{-1}\big)^p = P(D + N')^p P^{-1}$.

Reprenons l'exemple précédent.

Exemple 8.
Calculons A^p, quel que soit $p \in \mathbb{N}$, pour

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

1. Nous avons déjà calculé la décomposition de Dunford de A :
$$\Delta = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. On a aussi calculé la matrice de passage P qui diagonalise Δ.
$$\text{Avec} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{on a} \quad D = P^{-1}\Delta P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
Et donc, pour tout $k \geqslant 0$:
$$D^k = \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}.$$

3. Pour la partie nilpotente, on pose
$$N' = P^{-1}NP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{avec } N'^2 = 0.$$

4. La formule du binôme de Newton se réduit donc à seulement deux termes :
$$(D+N')^p = D^p + \binom{p}{1} D^{p-1}N' + \binom{p}{2} D^{p-2}N'^2 + \cdots = D^p + pD^{p-1}N'$$
Donc
$$(D+N')^p = \begin{pmatrix} (-1)^p & 0 & 0 \\ 0 & 2^p & 0 \\ 0 & 0 & 2^p \end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2^{p-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^p & 0 & 0 \\ 0 & 2^p & -p2^{p-1} \\ 0 & 0 & 2^p \end{pmatrix}.$$

5. Ainsi, pour $p \geqslant 0$:
$$A^p = P(D+N')^p P^{-1} = \begin{pmatrix} 2^p & p2^{p-1} & -p2^{p-1} \\ 2^p - (-1)^p & p2^{p-1} + 2^p & -p2^{p-1} - 2^p + (-1)^p \\ 2^p - (-1)^p & p2^{p-1} & -p2^{p-1} + (-1)^p \end{pmatrix}$$

Mini-exercices.

1. Montrer que la décomposition de Dunford de la matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} -6 & -5 & -5 \\ 2 & 0 & 6 \\ -2 & 4 & -2 \end{smallmatrix}\right)$ est $A = \Delta + N$ avec $\Delta = \left(\begin{smallmatrix} -6 & -5 & -5 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 5 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ et $N = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Même exercice avec
$$A' = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \qquad \Delta' = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \qquad N' = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right).$$
2. Calculer la décomposition de Dunford de $\left(\begin{smallmatrix} -3 & 3 & 6 & -2 \\ -3 & 3 & 6 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -7 & 9 & 10 & -4 \end{smallmatrix}\right)$. Même exercice avec $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 3 & 4 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -3 & 4 \end{smallmatrix}\right)$.
3. Montrer que la décomposition de Dunford de la matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 5 \end{smallmatrix}\right)$ est $A = \Delta + N$ avec $\Delta = \left(\begin{smallmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{smallmatrix}\right)$ et $N = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Calculer A^p pour tout $p \geqslant 0$.

Même exercice avec

$$A' = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} \qquad \Delta' = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} \qquad N' = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Réduction de Jordan

Nous allons montrer que toute matrice, dont le polynôme caractéristique est scindé, est semblable à une matrice diagonale par blocs, avec des blocs « presque » diagonaux.

4.1. Blocs et matrices de Jordan

Définition 4.
Un ***bloc de Jordan*** est une matrice de la forme

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in M_p(\mathbb{K})$$

avec $\lambda \in \mathbb{K}$ et $p \geqslant 1$.

C'est donc une matrice triangulaire supérieure, avec des coefficients λ sur la diagonale, des 1 juste au-dessus de la diagonale, puis des 0 encore au-dessus.

Exercice 1.
Pour un bloc de Jordan de taille $p \times p$, calculer $(J(\lambda) - \lambda I_p)^k$ pour tout $k \geqslant 1$. En particulier, montrer que, pour $(J(\lambda) - \lambda I_p)^{p-1}$, il ne reste plus qu'un coefficient 1, tout en haut à droite, et que $(J(\lambda) - \lambda I_p)^p$ est la matrice nulle.

Exercice 2.
Pour un bloc de Jordan $J(\lambda) \in M_p(\mathbb{K})$, montrer que son polynôme caractéristique est $(-1)^p(X-\lambda)^p$ et que son polynôme minimal est $(X-\lambda)^p$.

Définition 5.
Une ***matrice de Jordan*** est une matrice diagonale par blocs de la forme

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} J_1(\lambda_1) & O & O & O \\ \hline O & J_2(\lambda_2) & O & O \\ \hline O & O & \ddots & O \\ \hline O & O & O & J_r(\lambda_r) \end{array}\right)$$

où les $J_i(\lambda_i)$ sont des blocs de Jordan.

Les blocs de Jordan peuvent être de tailles différentes, et les valeurs $\lambda_i \in \mathbb{K}$ sont quelconques (certaines d'entre elles peuvent être égales). La notation O désigne une matrice nulle (elles peuvent être de tailles différentes).

Exemple 9.
Voici une matrice de Jordan :

$$\left(\begin{array}{cc|ccc|c|ccc}
-3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5
\end{array}\right)$$

Elle est formée de :

- un bloc de Jordan 2×2 associé à la valeur propre -3,
- un bloc de Jordan 3×3 associé à cette même valeur -3,
- un bloc de Jordan 1×1 associé à la valeur 2,
- un bloc de Jordan 3×3 associé à la valeur 5.

4.2. Énoncé

Théorème 5.
Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ a son polynôme caractéristique scindé sur $\mathbb{K}$, alors A est semblable (sur $\mathbb{K}$) à une matrice de Jordan, appelée **réduite de Jordan** *de A. Il existe donc $P \in M_n(\mathbb{K})$ inversible telle que*

$$P^{-1}AP = \left(\begin{array}{c|c|c}
J_1 & O & O \\
\hline
O & \ddots & O \\
\hline
O & O & J_r
\end{array}\right)$$

où les J_i sont des blocs de Jordan.

Ce qui se reformule aussi :

Théorème 6.
Soit f un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique $\chi_f(X)$ est scindé sur $\mathbb{K}$.
Il existe une base $\mathcal{B}$ de E où la matrice de f est de Jordan, c'est-à-dire :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|c|c}
J_1 & O & O \\
\hline
O & \ddots & O \\
\hline
O & O & J_r
\end{array}\right)$$

Nous admettons ces théorèmes, mais nous verrons sur des exemples comment obtenir la matrice de Jordan.

Voici des remarques importantes :

- Les λ qui apparaissent dans les blocs de Jordan sont les valeurs propres de A (ou de f) et donc les racines du polynôme caractéristique.
- Une même valeur λ peut apparaître dans plusieurs blocs différents.
- En particulier, ce théorème s'applique à toutes les matrices complexes.

- **Unicité.** Cette décomposition est unique dans le sens où le nombre et la taille des blocs de Jordan ne dépendent que de A (ou de f). Par contre, on s'autorise à permuter les blocs de Jordan entre eux.

Voici d'autres remarques qui découlent du théorème :
- Le nombre de blocs associés à la valeur propre λ est égal à la dimension du sous-espace propre E_λ.
- La somme des tailles des blocs de Jordan associés à λ est la multiplicité de λ comme racine du polynôme caractéristique.
- La taille du plus grand bloc de Jordan associé à λ est la multiplicité de λ comme racine du polynôme minimal.

4.3. Exemples

Voici une méthode basique pour trouver la réduite de Jordan d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$, ainsi qu'une matrice de passage :
- Calculer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de A.
- Pour chaque valeur propre λ, calculer le sous-espace propre $E_\lambda = \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n)$ et trouver une base de E_λ. Le nombre de blocs de Jordan associés à λ est $\dim E_\lambda$.
- Pour chaque vecteur propre de la base de E_λ, on construit le bloc de Jordan associé :
  — Si $v_1 \in E_\lambda$ est un vecteur propre de la base de E_λ, alors on cherche $v_2 \in \mathbb{K}^n$ tel que $(A - \lambda I_n)v_2 = v_1$.
  — Puis on cherche s'il existe $v_3 \in \mathbb{K}^n$ tel que $(A - \lambda I_n)v_3 = v_2$.
  — On arrête le processus lorsqu'il n'y pas de solution.
  — On a $Av_1 = \lambda v_1$, puis $Av_2 = v_1 + \lambda v_2$, $\ldots$, $Av_p = v_{p-1} + \lambda v_p$.
  — Donc, dans le sous-espace engendré par ces $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$, la matrice associée à A, dans cette base, est exactement le bloc de Jordan :

$$J(\lambda) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_p \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} Av_1 & Av_2 & \cdots & Av_p \end{array} \\ \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \end{array}$$

  — On peut aussi savoir quand s'arrêter en utilisant le fait que le bloc de Jordan est toujours d'une taille p inférieure ou égale à la multiplicité de λ comme racine du polynôme caractéristique (et même du polynôme minimal).
- On recommence avec v_1', un autre vecteur de la base de E_λ : on construit v_2', v_3',... ce qui conduit à un autre bloc de Jordan pour la valeur λ. On procède ainsi de suite pour tous les vecteurs de la base de E_λ et ensuite bien sûr pour les autres valeurs propres.

Exemple 10.
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -3 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Calculons sa réduite de Jordan J et une matrice de passage P telle que $P^{-1}AP = J$.

1. On commence par calculer le polynôme caractéristique de A :
$$\chi_A(X) = \det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} 4-X & 3 & -2 \\ -3 & -1-X & 3 \\ 2 & 3 & -X \end{vmatrix} = -(X+1)(X-2)^2$$
Il y a donc deux valeurs propres : -1 et 2.

2. **Valeur propre -1.**
La valeur propre -1 est de multiplicité 1. Le sous-espace propre associé $E_{-1} = \mathrm{Ker}(A+I_3) = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid Av = -v\}$ sera de dimension 1. Après calculs, on trouve que $E_{-1} = \mathbb{R}v_1$ où $v_1 = (-1,1,-1)$. Comme la multiplicité de -1 comme racine de $\chi_A(X)$ est 1, alors la valeur propre -1 sera juste associée à un bloc de Jordan de taille 1×1.

3. **Valeur propre 2.**
La valeur propre 2 est de multiplicité 2. Il faut déterminer le sous-espace propre associé $E_2 = \mathrm{Ker}(A - 2I_3) = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid Av = 2v\}$. Après calculs, on trouve que $E_2 = \mathbb{R}v_2$ où $v_2 = (1,0,1)$. Comme E_2 est un espace vectoriel de dimension 1, alors que 2 est racine de multiplicité 2, la matrice A n'est pas diagonalisable et on sait alors que la valeur propre 2 sera associée à un bloc de Jordan de taille 2×2.

4. **Bloc de Jordan.**
On cherche $v_3 \in \mathbb{R}^3$ tel que $(A-2I_3)v_3 = v_2$. Si $v_3 = (x,y,z)$ alors :
$$(A-2I_3)v_3 = v_2 \iff \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2x+3y-2z & = & 1 \\ -3x-3y+3z & = & 0 \\ 2x+3y-2z & = & 1 \end{array} \right.$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2x+3y-2z & = & 1 \\ x+y-z & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2x+3y & = & 1+2z \\ x+y & = & z \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -1+z \\ y & = & 1 \end{array} \right.$$
En prenant par exemple $z = 0$ (n'importe quelle valeur conviendrait), on choisit $v_3 = (-1,1,0)$.

5. **Matrice de Jordan.**
Dans la base (v_1, v_2, v_3), on a $Av_1 = -v_1, Av_2 = 2v_2$, et comme $(A-2I_3)v_3 = v_2$ alors $Av_3 = v_2 + 2v_3$. La matrice associée à A dans la base (v_1,v_2,v_3) est donc :
$$J = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Av_1 & Av_2 & Av_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$
Autrement dit, $J = P^{-1}AP$ où P est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs v_1, v_2, v_3 exprimés dans la base canonique :
$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et on a} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On recommence avec un exemple plus compliqué !

Exemple 11.
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{R}).$$

Calculons sa réduite de Jordan J.

1. Le polynôme caractéristique de A vaut
$$\chi_A(X) = \det(A - XI_5) = \cdots = -(X-3)^5.$$
Il y a donc une seule valeur propre : $\lambda = 3$.
2. **Valeur propre** 3.
La valeur propre 3 est de multiplicité 5. Il faut ensuite calculer le sous-espace propre associé : $E_3 = \operatorname{Ker}(A - 3I_5) = \{v \in \mathbb{R}^5 \mid Av = 3v\}$. On calcule $A - 3I_5$, et on trouve une base (v_1, v_3) de E_3 :
$$v_1 = (0,1,0,0,0) \qquad \text{et} \qquad v_3 = (1,0,0,1,0).$$
Ainsi $\dim E_3 = 2$ alors que la multiplicité de λ est 5. La matrice A n'est pas diagonalisable. Il y aura donc deux blocs de Jordan associés à la valeur propre 3. (Cela peut être un de taille 1×1 avec un de taille 4×4, ou bien 2×2 avec 3×3.)
3. **Matrice de Jordan.**
   - On cherche si on peut trouver $v_2 \in \mathbb{R}^5$ tel que $(A - 3I_5)v_2 = v_1$. Une solution possible est $v_2 = (-2,0,1,0,0)$. Le processus s'arrête là, car il n'y a aucune solution v au système $(A - 3I_5)v = v_2$. (En effet, la troisième ligne de $A - 3I_5$ est nulle, alors que la troisième coordonnée de v_2 ne l'est pas.) On obtient donc un bloc de Jordan 2×2.
   - On fait le même travail pour l'autre bloc de Jordan, en partant du vecteur $v_3 = (1,0,0,1,0) \in E_3$. On cherche maintenant $v_4 \in \mathbb{R}^5$ tel que $(A - 3I_5)v_4 = v_3$. Après calculs, on trouve $v_4 = (2,0,0,0,1)$. On cherche v_5 tel que $(A - 3I_5)v_5 = v_4$. On trouve $v_5 = (-3,0,2,0,0)$. Le processus s'arrête là, ce qui correspond à un bloc de Jordan de taille 3×3.

   On a $Av_1 = 3v_1$, $Av_2 = v_1 + 3v_2$, $Av_3 = 3v_3$, $Av_4 = v_3 + 3v_4$, $Av_5 = v_4 + 3v_5$.
   Dans la base $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$, la matrice associée à A est :
$$J = \left(\begin{array}{cc|ccc} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$
   Ainsi $J = P^{-1}AP$, où la matrice P est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $v_1, \ldots, v_5$ exprimés dans la base canonique.

4.4. Applications

Exemple 12.
Si $A \in M_n(\mathbb{C})$, alors A est semblable à sa transposée A^T.
En effet, il suffit de le vérifier lorsque A est un bloc de Jordan.

Exemple 13.
Si $N \in M_4(\mathbb{K})$ est nilpotente (c'est-à-dire $N^4 = 0$), alors N est semblable à une et une seule des 5 matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Il y a une infinité de matrices nilpotentes 4×4, mais il n'y en a que 5 à similitude près.

Exemple 14.
Si $A \in M_3(\mathbb{K})$ a pour polynôme caractéristique $\chi_A(X) = -(X-1)(X-2)^2$, alors A est semblable à l'une des deux matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$$

Mini-exercices.

1. Montrer que $J(\lambda) - \mu I_p$ est inversible si $\mu \neq \lambda$.
2. Montrer qu'une matrice de Jordan est diagonalisable si et seulement si ses blocs sont tous de taille 1.
3. Montrer qu'un bloc de Jordan J est semblable à sa transposée J^T.
4. Calculer la réduction de Jordan de la matrice $A = \begin{pmatrix}2&2&-8\\8&-4&-17\\-1&1&0\end{pmatrix}$, c'est-à-dire trouver P telle que $J = P^{-1}AP$ soit une matrice de Jordan. Même exercice avec :
$$\begin{pmatrix}3&-1&-1\\-1&5&1\\2&0&4\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}-2&2&-4&9\\-2&2&-3&6\\1&-1&2&-3\\0&0&0&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}2&-3&3&-2&0\\2&-1&0&1&-2\\-3&0&5&-6&3\\-4&0&5&-6&4\\-2&-3&7&-6&4\end{pmatrix}$$

Auteurs du chapitre
D'après un cours de Sandra Delaunay et un cours d'Alexis Tchoudjem.
Revu et augmenté par Arnaud Bodin.
Relu par Stéphanie Bodin et Vianney Combet.