Leçons de choses

Vidéo ■ partie 1. L'alphabet grec
Vidéo ■ partie 2. LaTeX en cinq minutes
Vidéo ■ partie 3. Formules de trigonométrie : sinus, cosinus, tangente
Vidéo ■ partie 4. Formulaire: trigonométrie circulaire et hyperbolique
Vidéo ■ partie 5. Développements limités
Vidéo ■ partie 6. Primitives

1. Alphabet grec

α		alpha
β		beta
γ	Γ	gamma
δ	Δ	delta
ε		epsilon
ζ		zeta
η		eta
θ	Θ	theta
ι		iota
κ		kappa
λ	Λ	lambda
μ		mu

ν		nu
ξ		xi
o		omicron
π	Π	pi
ρ, ϱ		rho
σ	Σ	sigma
τ		tau
υ		upsilon
ϕ, φ	Φ	phi
χ		chi
ψ	Ψ	psi
ω	Ω	omega

On rencontre aussi “nabla” ∇, l'opérateur de dérivée partielle ∂ (dites “d rond”), et aussi la première lettre de l'alphabet hébreu “aleph” $\aleph$.

2. Écrire des mathématiques : LATEX en cinq minutes

2.1. Les bases

Pour écrire des mathématiques, il existe un langage pratique et universel, le langage LATEX (prononcé [latek]). Il est utile pour rédiger des textes contenant des formules, mais aussi accepté sur certains blogs et vous permet d'écrire des maths dans un courriel ou un texto.

Une formule s'écrit entre deux dollars `$\pi^2$` qui donne π^2 ou entre double dollars si l'on veut la centrer sur une nouvelle ligne ; `$$\lim u_n = +\infty$$` affichera :

$$\lim u_n = +\infty$$

Dans la suite on omettra les balises dollars.

2.2. Premières commandes

Les exposants s'obtiennent avec la commande `^` et les indices avec `_` : a^2 s'écrit `a^2` ; u_n s'écrit `u_n` ; α_i^2 s'écrit `\alpha_i^2`. Les accolades `{ }` permettent de grouper du texte : `2^{10}` pour 2^{10} ; `a_{i,j}` pour $a_{i,j}$.
Il y a ensuite toute une liste de commandes (qui commencent par `\`) dont voici les plus utiles :

`\sqrt`	racine	$\sqrt{a}$	`\sqrt{a}`
		$\sqrt{1+\sqrt{2}}$	`\sqrt{1+\sqrt{2}}`
		$\sqrt[3]{x}$	`\sqrt[3]{x}`
`\frac`	fraction	$\frac{a}{b}$	`\frac{a}{b}`
		$\frac{\pi^3}{12}$	`\frac{\pi^3}{12}`
		$\frac{1}{2+\frac{3}{4}}$	`\frac{1}{2 + \frac{3}{4}}`
		$\gamma^{\frac{1}{n}}$	`\gamma^{\frac{1}{n}}`
`\lim`	limite	$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$	`\lim_{n \to +\infty} u_n = 0`
		$\lim_{x\to 0^+} f(x) < \epsilon$	`\lim_{x \to 0^+} f(x) < \epsilon`
`\sum`	somme	$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$	`\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}`
		$\sum_{i\geqslant 0} a_i$	`\sum_{i \ge 0} a_i`
`\int`	intégrale	$\int_a^b \phi(t)dt$	`\int_a^b \phi(t) dt`

2.3. D'autres commandes

Voici d'autres commandes, assez naturelles pour les anglophones.

$f : E \to F$	`f : E \to F`
$+\infty$	`+\infty`
$a \leqslant 0$	`a \le 0`
$a > 0$	`a > 0`
$a \geqslant 1$	`a \ge 1`
δ	`\delta`
Δ	`\Delta`

$a \in E$	`a \in E`
$A \subset E$	`A \subset E`
$P \implies Q$	`P \implies Q`
$P \iff Q$	`P \iff Q`
$\forall$	`\forall`
$\exists$	`\exists`
$\cup$	`\cup`
$\cap$	`\cap`

2.4. Pour allez plus loin

Il est possible de créer ses propres commandes avec `\newcommand`. Par exemple avec l'instruction

```
\newcommand{\Rr}{\mathbb{R}}
```

vous définissez une nouvelle commande `\Rr` qui exécutera l'instruction `\mathbb{R}` et affichera donc $\mathbb{R}$.
Autre exemple, après avoir défini

```
\newcommand{\monintegrale}{\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt}
```

la commande `\monintegrale` affichera $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

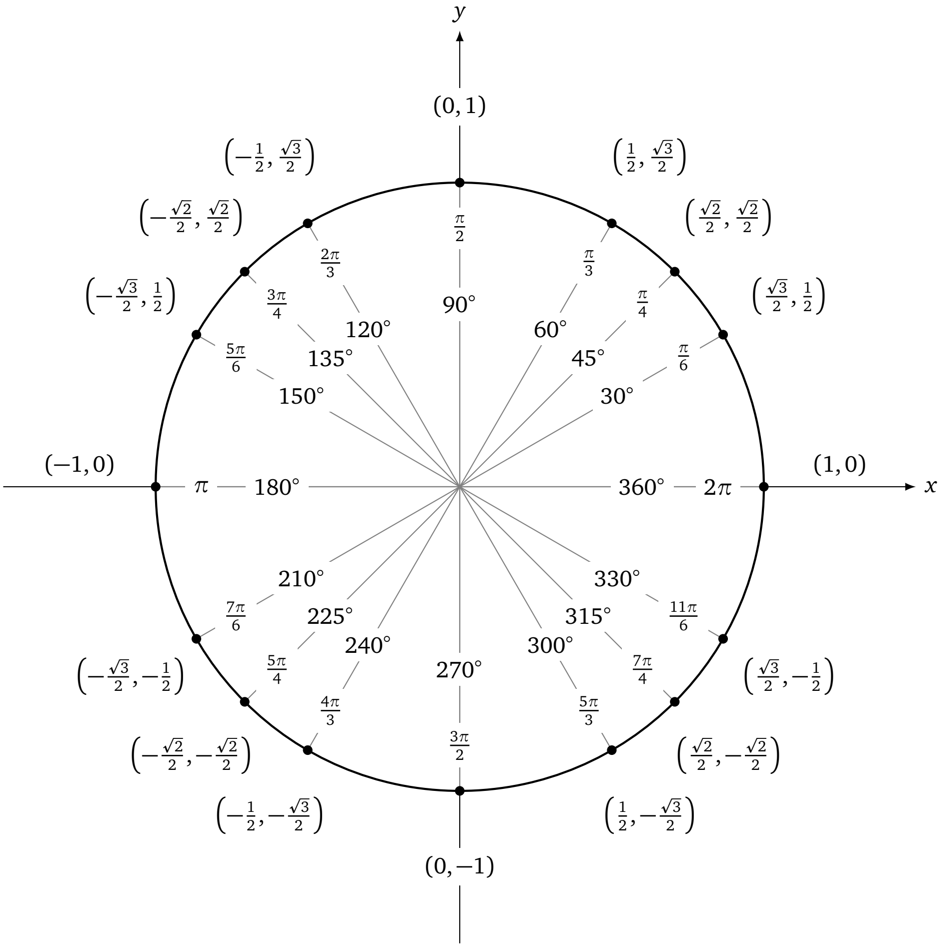
Pour (beaucoup) plus de détails, consultez le manuel *Une courte (?) introduction à LATEX*.

Mini-exercices.
Écrire en LATEX toutes ces formules (qui par ailleurs sont vraies !).

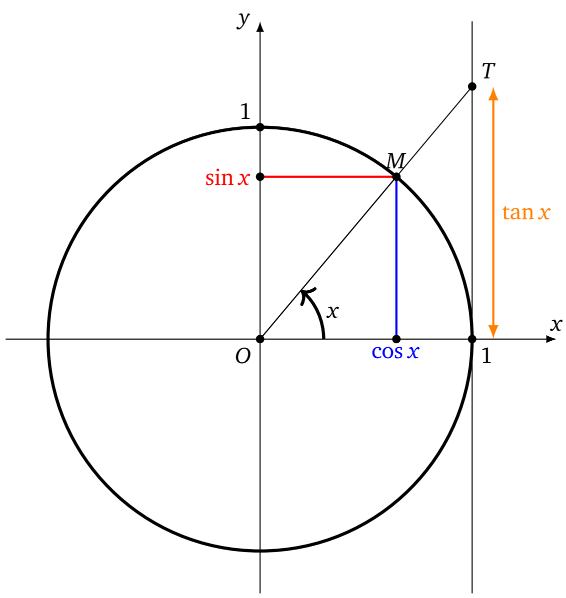
1. $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$
3. $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{+R} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$
4. $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta \geqslant 0 \quad (|x-x_0| < \delta \implies |\ln(x) - \ln(x_0)| < \epsilon)$
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{16^k} \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6} \right) = \pi$

3. Formules de trigonométrie : sinus, cosinus, tangente

3.1. Le cercle trigonométrique



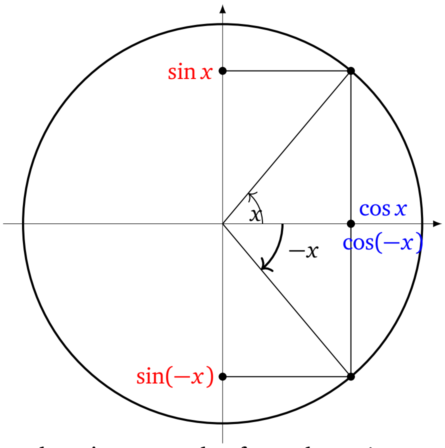
Voici le cercle trigonométrique (de rayon 1), le sens de lecture est l'inverse du sens des aiguilles d'une montre. Les angles remarquables sont marqués de 0 à 2π (en radian) et de 0° à 360°. Les coordonnées des points correspondant à ces angles sont aussi indiquées.



Le point M a pour coordonnées $(\cos x, \sin x)$. La droite (OM) coupe la droite d'équation $(x = 1)$ en T, l'ordonnée du point T est $\tan x$.

Les formules de base :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$
$$\cos(x + 2\pi) = \cos x$$
$$\sin(x + 2\pi) = \sin x$$



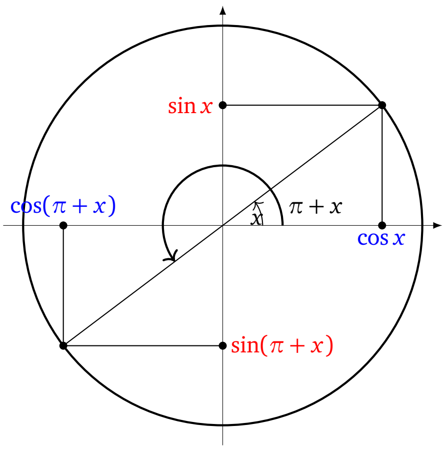
Nous avons les formules suivantes :

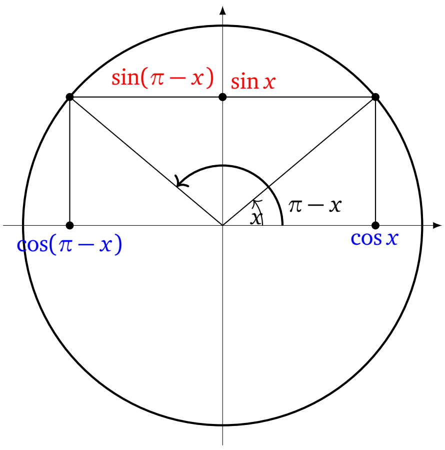
$$\cos(-x) = \cos x$$
$$\sin(-x) = -\sin x$$

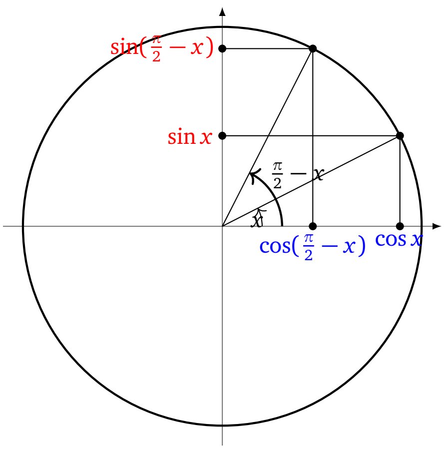
On retrouve graphiquement ces formules à l'aide du dessin des angles x et $-x$.

Il en est de même pour les formules suivantes :

$$\cos(\pi + x) = -\cos x \qquad \cos(\pi - x) = -\cos x \qquad \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$$
$$\sin(\pi + x) = -\sin x \qquad \sin(\pi - x) = \sin x \qquad \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$$

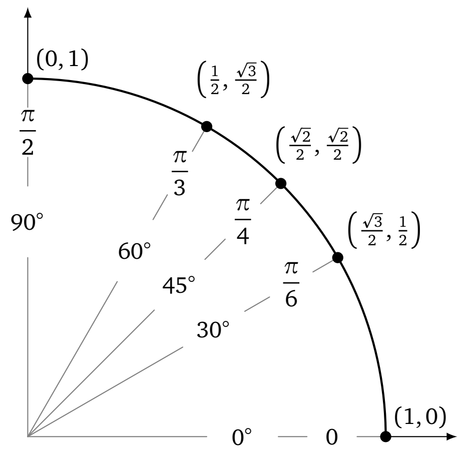






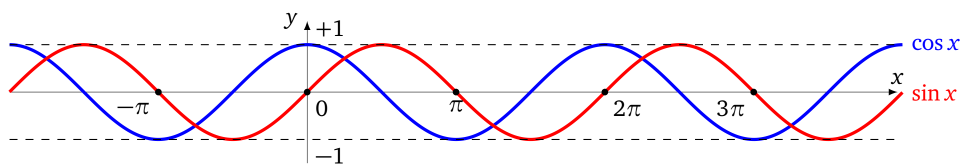
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	

Valeurs que l'on retrouve bien sur le cercle trigonométrique.

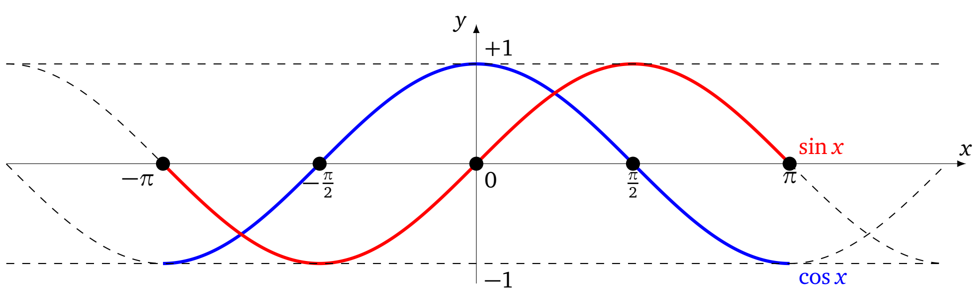


3.2. Les fonctions sinus, cosinus, tangente

La fonction cosinus est périodique de période 2π et elle paire (donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées). La fonction sinus est aussi périodique de période de 2π mais elle impaire (donc symétrique par rapport à l'origine).



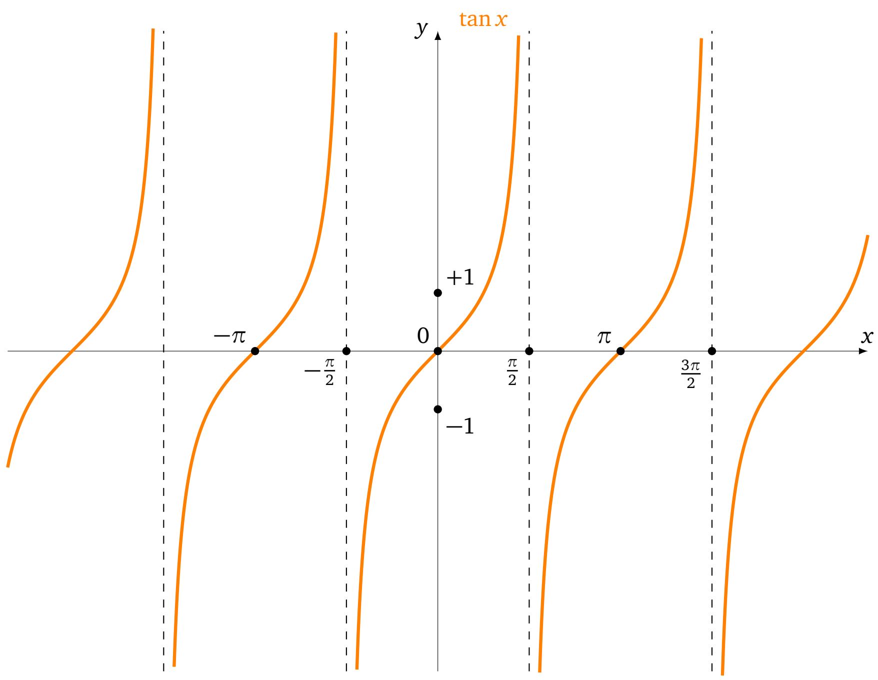
Voici un zoom sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.



Pour tout x n'appartenant pas à $\{\ldots, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots\}$ la tangente est définie par

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

La fonction $x \mapsto \tan x$ est périodique de période π ; c'est une fonction impaire.



Voici les dérivées :

$$\cos' x = -\sin x$$
$$\sin' x = \cos x$$
$$\tan' x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

3.3. Les formules d'additions

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$$
$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$$

On en déduit immédiatement :

$$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a$$
$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$$

Il est bon de connaître par cœur les formules suivantes (faire $a = b$ dans les formules d'additions) :

$$\begin{aligned}\cos 2a &= 2\cos^2 a - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2 a \\ &= \cos^2 a - \sin^2 a \\ \sin 2a &= 2\sin a \cdot \cos a \\ \tan 2a &= \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}\end{aligned}$$

3.4. Les autres formules

Voici d'autres formules qui se déduisent des formules d'additions. Il n'est pas nécessaire de les connaître mais il faut savoir les retrouver en cas de besoin.

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2}\big[\cos(a+b) + \cos(a-b)\big]$$
$$\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2}\big[\cos(a-b) - \cos(a+b)\big]$$
$$\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2}\big[\sin(a+b) + \sin(a-b)\big]$$

Les formules précédentes se reformulent aussi en :

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2} \cdot \cos\frac{p-q}{2}$$
$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2} \cdot \sin\frac{p-q}{2}$$
$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2} \cdot \cos\frac{p-q}{2}$$
$$\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2} \cdot \cos\frac{p+q}{2}$$

Enfin les formules de la « tangente de l'arc moitié » permettent d'exprimer sinus, cosinus et tangente en fonction de $\tan\frac{x}{2}$.

$$\text{Avec} \quad t = \tan\frac{x}{2} \quad \text{on a} \quad \begin{cases} \cos x & = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \sin x & = \frac{2t}{1+t^2} \\ \tan x & = \frac{2t}{1-t^2} \end{cases}$$

Ces formules sont utiles pour le calcul de certaines intégrales par changement de variable, en utilisant en plus la relation $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$.

Mini-exercices.

1. Montrer que $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.
2. Montrer la formule d'addition de $\tan(a+b)$.
3. Prouver la formule pour $\cos a \cdot \cos b$.
4. Prouver la formule pour $\cos p + \cos q$.
5. Prouver la formule : $\sin x = \dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1+(\tan\frac{x}{2})^2}$.
6. Montrer que $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+2}$. Calculer $\cos\frac{\pi}{16}$, $\cos\frac{\pi}{32}, \ldots$
7. Exprimer $\cos(3x)$ en fonction $\cos x$; $\sin(3x)$ en fonction $\sin x$; $\tan(3x)$ en fonction $\tan x$.

4. Formulaire : trigonométrie circulaire et hyperbolique

***Propriétés trigonométriques** : remplacer* cos *par* ch *et* sin *par* i · sh.

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b\\ \sin(a+b) &= \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a\\ \tan(a+b) &= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}(a+b) &= \operatorname{ch} a \cdot \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \cdot \operatorname{sh} b\\ \operatorname{sh}(a+b) &= \operatorname{sh} a \cdot \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} b \cdot \operatorname{ch} a\\ \operatorname{th}(a+b) &= \frac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{1 + \operatorname{th} a \cdot \operatorname{th} b}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(a-b) &= \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b\\ \sin(a-b) &= \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a\\ \tan(a-b) &= \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}(a-b) &= \operatorname{ch} a \cdot \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a \cdot \operatorname{sh} b\\ \operatorname{sh}(a-b) &= \operatorname{sh} a \cdot \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} b \cdot \operatorname{ch} a\\ \operatorname{th}(a-b) &= \frac{\operatorname{th} a - \operatorname{th} b}{1 - \operatorname{th} a \cdot \operatorname{th} b}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 2a &= 2\cos^2 a - 1\\ &= 1 - 2\sin^2 a\\ &= \cos^2 a - \sin^2 a\end{aligned}$$

$$\sin 2a = 2\sin a \cdot \cos a$$

$$\tan 2a = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{ch} 2a &= 2\operatorname{ch}^2 a - 1\\ &= 1 + 2\operatorname{sh}^2 a\\ &= \operatorname{ch}^2 a + \operatorname{sh}^2 a\end{aligned}$$

$$\operatorname{sh} 2a = 2\operatorname{sh} a \cdot \operatorname{ch} a$$

$$\operatorname{th} 2a = \frac{2\operatorname{th} a}{1 + \operatorname{th}^2 a}$$

$$\begin{aligned}\cos a \cdot \cos b &= \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]\\ \sin a \cdot \sin b &= \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]\\ \sin a \cdot \cos b &= \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{ch} a \cdot \operatorname{ch} b &= \frac{1}{2}\left[\operatorname{ch}(a+b) + \operatorname{ch}(a-b)\right]\\ \operatorname{sh} a \cdot \operatorname{sh} b &= \frac{1}{2}\left[\operatorname{ch}(a+b) - \operatorname{ch}(a-b)\right]\\ \operatorname{sh} a \cdot \operatorname{ch} b &= \frac{1}{2}\left[\operatorname{sh}(a+b) + \operatorname{sh}(a-b)\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos p + \cos q &= 2\cos\frac{p+q}{2} \cdot \cos\frac{p-q}{2}\\ \cos p - \cos q &= -2\sin\frac{p+q}{2} \cdot \sin\frac{p-q}{2}\\ \sin p + \sin q &= 2\sin\frac{p+q}{2} \cdot \cos\frac{p-q}{2}\\ \sin p - \sin q &= 2\sin\frac{p-q}{2} \cdot \cos\frac{p+q}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{ch} p + \operatorname{ch} q &= 2\operatorname{ch}\frac{p+q}{2} \cdot \operatorname{ch}\frac{p-q}{2}\\ \operatorname{ch} p - \operatorname{ch} q &= 2\operatorname{sh}\frac{p+q}{2} \cdot \operatorname{sh}\frac{p-q}{2}\\ \operatorname{sh} p + \operatorname{sh} q &= 2\operatorname{sh}\frac{p+q}{2} \cdot \operatorname{ch}\frac{p-q}{2}\\ \operatorname{sh} p - \operatorname{sh} q &= 2\operatorname{sh}\frac{p-q}{2} \cdot \operatorname{ch}\frac{p+q}{2}\end{aligned}$$

Avec $t = \tan\frac{x}{2}$ on a

$$\begin{cases}\cos x &= \frac{1-t^2}{1+t^2}\\ \sin x &= \frac{2t}{1+t^2}\\ \tan x &= \frac{2t}{1-t^2}\end{cases}$$

Avec $t = \operatorname{th}\frac{x}{2}$ on a

$$\begin{cases}\operatorname{ch} x &= \frac{1+t^2}{1-t^2}\\ \operatorname{sh} x &= \frac{2t}{1-t^2}\\ \operatorname{th} x &= \frac{2t}{1+t^2}\end{cases}$$

Dérivées *: la multiplication par* i *n'est plus valable*

$$\cos' x = -\sin x$$
$$\sin' x = \cos x$$
$$\tan' x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\mathrm{ch}' x = \mathrm{sh}\, x$$
$$\mathrm{sh}' x = \mathrm{ch}\, x$$
$$\mathrm{th}' x = 1 - \mathrm{th}^2 x = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$$

$$\arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1)$$
$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1)$$
$$\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\mathrm{Argch}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (x > 1)$$
$$\mathrm{Argsh}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$\mathrm{Argth}' x = \frac{1}{1-x^2} \quad (|x| < 1)$$

5. Formules de développements limités

Développements limités usuels (au voisinage de 0)

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!} \quad + \quad o(x^n)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} \quad + \quad o(x^n)\\
\cos x &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad + \quad o(x^{2n+1})=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad + \quad o(x^{2n+1})\\
\sin x &= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad + \quad o(x^{2n+2})=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad + \quad o(x^{2n+2})\\
\tan x &= x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7 \quad + \quad o(x^8)\\
\operatorname{ch} x &= 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad + \quad o(x^{2n+1})=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad + \quad o(x^{2n+1})\\
\operatorname{sh} x &= x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad + \quad o(x^{2n+2})=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad + \quad o(x^{2n+2})\\
\operatorname{th} x &= x-\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5-\frac{17}{315}x^7 \quad + \quad o(x^8)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\ln(1+x) &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n} \quad + \quad o(x^n)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} \quad + \quad o(x^n)\\
(1+x)^\alpha &= 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n \quad + \quad o(x^n)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}x^k \quad + \quad o(x^n)\\
\frac{1}{1+x} &= 1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n \quad + \quad o(x^n)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k \quad + \quad o(x^n)\\
\frac{1}{1-x} &= 1+x+x^2+\cdots+x^n \quad + \quad o(x^n)=\sum_{k=0}^{n}x^k \quad + \quad o(x^n)\\
\sqrt{1+x} &= 1+\frac{x}{2}-\frac{1}{8}x^2-\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1\cdot1\cdot3\cdot5\cdots(2n-3)}{2^n n!}x^n \quad + \quad o(x^n)\\
\frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1-\frac{x}{2}+\frac{3}{8}x^2-\cdots+(-1)^n\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2^n n!}x^n \quad + \quad o(x^n)\\
\arccos x &= \frac{\pi}{2}-x-\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}-\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{x^5}{5}-\cdots-\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad + \quad o(x^{2n+2})\\
\arcsin x &= x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad + \quad o(x^{2n+2})\\
\arctan x &= x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad + \quad o(x^{2n+2})
\end{aligned}
$$

6. Formulaire : primitives

C désigne une constante arbitraire. Les intervalles sont à préciser.

$$\int e^{\alpha t}\,dt = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha} + C \quad (\alpha \in \mathbb{C}^*)$$

$$\int t^\alpha\,dt = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$$

$$\int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{Arctan} t + C$$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \operatorname{Arcsin} t + C$$

$$\int \cos t\,dt = \sin t + C$$

$$\int \sin t\,dt = -\cos t + C$$

$$\int \frac{dt}{\cos^2 t} = \tan t + C$$

$$\int \frac{dt}{\sin^2 t} = -\operatorname{cotan} t + C$$

$$\int \frac{dt}{\cos t} = \ln\left|\tan\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$$

$$\int \frac{dt}{\sin t} = \ln\left|\tan\frac{t}{2}\right| + C$$

$$\int \tan t\,dt = -\ln|\cos t| + C$$

$$\int \operatorname{cotan} t\,dt = \ln|\sin t| + C$$

$$\int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C$$

$$\int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C$$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+\alpha}} = \ln\left|t + \sqrt{t^2+\alpha}\right| + C$$

$$\int \operatorname{ch} t\,dt = \operatorname{sh} t + C$$

$$\int \operatorname{sh} t\,dt = \operatorname{ch} t + C$$

$$\int \frac{dt}{\operatorname{ch}^2 t} = \operatorname{th} t + C$$

$$\int \frac{dt}{\operatorname{sh}^2 t} = -\operatorname{coth} t + C$$

$$\int \frac{dt}{\operatorname{ch} t} = 2\operatorname{Arctan} e^t + C$$

$$\int \frac{dt}{\operatorname{sh} t} = \ln\left|\operatorname{th}\frac{t}{2}\right| + C$$

$$\int \operatorname{th} t\,dt = \ln(\operatorname{ch} t) + C$$

$$\int \operatorname{coth} t\,dt = \ln|\operatorname{sh} t| + C$$