Trabajo Practico N°3: Sistemas de Ecuaciones Lineales

Materia: Análisis Numérico
Comisión: s32
Profesores: Diego Amiconi
Alumno: Godoy Juan Cruz

Problema Nº 1: Dado el sistema

$$\begin{aligned} 3x + \quad y + \quad z &= 4 \\ 2x + \quad 5y + \quad z &= -1 \\ -x + \quad y + \quad 3z &= 4 \end{aligned}$$

Verificar la convergencia y realizar 3 iteraciones:

a) Por el método de Jacobi con

$$\vec{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Por el método de Gauss – Seidel con

$$\vec{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 4/3 \\ -1/5 \\ 4/3 \end{bmatrix}$$

a. Como el sistema es diagonalmente dominante, es una condición suficiente para poder garantizar la convergencia.

$$|3| \geq |1| + |1| = 2$$
$$|5| \geq |2| + |1| = 3$$
$$|3| \geq |-1| + |1| = 2$$

b. Matriz:

Matriz				**Diagonalmente dominante**
3	1	1	4	TRUE
2	5	1	-1	TRUE
-1	1	3	4	TRUE
				Es diagonalmente dominante

Iteraciones

k	x1	x2	x3
0	0	0	0
1	1,33333333	-0,2	1,33333333
2	0,95555556	-1	1,84444444
3	1,05185185	-0,95111111	1,98518519

c. Matriz:

Matriz				Diagonalmente dominante
3	1	1	4	TRUE
2	5	1	-1	TRUE
-1	1	3	4	TRUE
				Es diagonalmente dominante

Iteraciones:

k	x1	x2	x3
0	1,33333333	-0,2	1,33333333
1	0,95555556	-0,84888889	1,93481481
2	0,97135802	-0,97550617	1,98228807
3	0,99773937	-0,99555336	1,99776424

Problema Nº 2: Dada la matriz A y el vector $\vec{b}$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a) Verificar la convergencia

b) Realizar 4 iteraciones para resolver el sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ por el método de Jacobi partiendo del vector inicial:

$$\vec{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

c) Realizar 3 iteraciones para resolver el sistema $A\vec{x}=\vec{b}$ por el método de Gauss – Seidel partiendo del vector inicial:

$$\vec{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1/4 \end{bmatrix}$$

d) Calcular la cota del error absoluto producido en cada variable al aplicar los métodos de Jacobi y Gauss – Seidel si sabemos que la solución exacta del sistema es:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.75 \\ 0.25 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

a. Como el sistema es diagonalmente dominante, es una condición suficiente para poder garantizar la convergencia.

$$|4| \geq |-1| + |-1| + |0| = 2$$
$$|4| \geq |-1| + |0| + |-1| = 2$$
$$|4| \geq |-1| + |0| + |-1| = 2$$
$$|4| \geq |0| + |-1| + |-1| = 2$$

b. **Matriz**

					Diagonalmente dominante
4	-1	-1	0	1	TRUE
-1	4	0	-1	2	TRUE
-1	0	4	-1	0	TRUE
0	-1	-1	4	1	TRUE
					Es diagonalmente dominante

Resultados

k	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**
0	0	0	0	0
1	0,25	0,5	0	0,25
2	0,375	0,625	0,125	0,375
3	0,4375	0,6875	0,1875	0,4375
4	0,46875	0,71875	0,21875	0,46875

Cota error absoluto

0,03125	0,03125	0,03125	0,03125

c. **Matriz**

					Diagonalmente dominante
4	-1	-1	0	1	TRUE
-1	4	0	-1	2	TRUE
-1	0	4	-1	0	TRUE
0	-1	-1	4	1	TRUE
					Es diagonalmente dominante

Resultados

k	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**
0	0,25	0,5	0	0,25
1	0,375	0,65625	0,15625	0,453125
2	0,453125	0,7265625	0,2265625	0,48828125
3	0,48828125	0,74414063	0,24414063	0,49707031

Cota error absoluto

0,01171875	0,00585938	0,00585938	0,00292969

Problema Nº 3: Estudiar la convergencia de los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel para los siguientes sistemas:

Caso a)

$$\begin{aligned} 3x + 12y - z &= -2 \\ 11x - 4y + 3z &= -3 \\ -3x - 2y - 12z &= -2 \end{aligned}$$

¿Existe alguna forma de garantizar que sea convergente?

Caso b)

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + x_3 &= -1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 9x_3 &= 6 \\ 2x_1 + 8x_2 - 3x_3 &= -3 \end{aligned}$$

Caso c)

$$\begin{aligned} 4x_1 - \quad 2x_2 + \quad 3x_3 &= 4 \\ -2x_1 - \quad 8x_2 + \quad 1x_3 &= 6 \\ 3x_1 + \quad 10x_2 + \quad 2x_3 &= -3 \end{aligned}$$

a. En este caso, así como está el sistema, no se puede garantizar la convergencia debido a que no es diagonalmente dominante. Pero si reordenando las ecuaciones podemos hacer que lo sea:

$$\begin{cases} 11x - 4y + 3z = -3 \\ 3x + 12y - z = -2 \\ -3x - 2y - 12z = -2 \end{cases}$$

$$|11| \geq |-4| + |3| = 7$$
$$|12| \geq |3| + |-1| = 4$$
$$|12| \geq |-3| + |-2| = 5$$

b. En este caso, pasa lo mismo que el anterior:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 + 8x_2 - 3x_3 = -3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 9x_3 = 6 \end{cases}$$

$$|4| \geq |1| + |1| = 2$$
$$|8| \geq |2| + |-3| = 5$$
$$|9| \geq |3| + |-2| = 5$$

c. En el último caso, no es posible garantizar la convergencia porque la matriz no es diagonalmente dominante y ni con un reordenamiento de sus ecuaciones puede serlo.

***Problema Nº 4:** Dado el sistema*

$$\begin{aligned} 2x + \quad 12y + \quad z - 4w &= 13 \\ 2x + \quad y - \quad 3z + 9w &= 31 \\ 13x + \quad 5y - \quad 3z + w &= 18 \\ 3x - \quad 4y + \quad 10z \quad + w &= 20 \end{aligned} \qquad \text{con } \vec{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aplicar Gauss – Seidel para hallar la solución en 4 iteraciones

Primero, deberemos reordenar las ecuaciones debido a que en el orden en el que están, no se garantiza la convergencia:

$$\begin{cases} 13x + 5y - 3z + w = 18 \\ 2x + 12y + z - 4w = 13 \\ 3x - 4y + 10z + w = 20 \\ 2x + y - 3z + 9w = 31 \end{cases}$$

					Diagonalmente dominante
13	5	-3	1	18	TRUE
2	12	1	-4	13	TRUE
3	-4	10	1	20	TRUE
2	1	-3	9	31	TRUE
					Es diagonalmente dominante

k	x	y	z	w
0	0	0	0	0
1	1,38461538	0,8525641	1,92564103	3,68390313
2	1,21770765	1,94787968	2,04544927	3,63922809
3	0,82751702	1,98803575	2,18303639	3,76733771
4	0,83396867	2,01819809	2,18035487	3,7616588

Problema Nº 5: *Dado el sistema*

$$\begin{aligned} 3x + \quad y + \quad z &= 4 \\ 2x + \quad 5y + \quad z &= -1 \\ -x + \quad y + \quad 3z &= 4 \end{aligned} \qquad \text{con } \vec{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aplicar relajación para hallar la solución en 6 iteraciones

Primero dividiremos las ecuaciones por el coeficiente negativo de la diagonal principal, para que esta última quede en un valor de " - 1". Garantizando así la convergencia:

$$\begin{cases} -x - \frac{y}{3} - \frac{z}{3} = -\frac{4}{3} \\ -\frac{2}{5}x - y - \frac{z}{5} = \frac{1}{5} \\ \frac{x}{3} - \frac{y}{3} - z = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

Luego igualamos las ecuaciones a 0:

$$\begin{cases} -x - \frac{y}{3} - \frac{z}{3} + \frac{4}{3} = 0 \\ -\frac{2}{5}x - y - \frac{z}{5} - \frac{1}{5} = 0 \\ \frac{x}{3} - \frac{y}{3} - z + \frac{4}{3} = 0 \end{cases}$$

Le asignamos un nombre de residuo "Ri" a cada ecuación donde "Ri" está asociado a su respectiva variable:

$$-x - 0,33y - 0,33z + 1,33 = 0 \rightarrow (R_1 \rightarrow x)$$
$$-0,4x - y - 0,2z - 0,2 = 0 \rightarrow (R_2 \rightarrow y)$$
$$0,33x - 0,33y - z + 1,33 = 0 \rightarrow (R_3 \rightarrow z)$$

Ya podemos empezar con las iteraciones

k	x	R1	y	R2	z	R3	Cambia
0	0	1,33	0	-0,2	0	1,33	z = 0 + 1,33 = 1,33
1		0,8911	0	-0,066	1,33	0	x = 0 + 0,8911 = 0,8911
2	0,8911		0	-0,82244	1,33	0,294063	y = 0 - 0,82244 = -0,82244
3	0,8911	0,2714	-0,82244	0	1,33	0,565	z = 1,33 + 0,565 = 1,895
4	0,8911	0,085	-0,82244	0,113	1,895	0	y = -0,82244 - 0,113 = -0,93544
5	0,8911	0,122	-0,93544	0	1,895	0,0377582	x = 0,8911 + 0,122 = 1,0131
6	1,0131	...	-0,93544	...	1,895	....	

Problema Nº 6: *Dado el sistema*

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \qquad \text{con } \vec{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.35 \\ -0.15 \\ 0.25 \\ -0.05 \\ 0.25 \end{bmatrix}$$

Aplicar relajación para hallar la solución en 5 iteraciones

Primero, nos encargaremos de que se garantice la convergencia:

$$-x_1 + 0 + 0,25x_3 + 0 + 0,25x_5 + 0,25 = 0 \rightarrow (R1 \rightarrow x_1)$$
$$0,25x_1 - x_2 + 0 + 0,25x_4 + 0 - 0,25 = 0 \rightarrow (R2 \rightarrow x_2)$$
$$0 + 0,25x_2 - x_3 + 0 + 0,25x_5 + 0,25 = 0 \rightarrow (R3 \rightarrow x_3)$$
$$0,25x_1 + 0 + 0,25x_3 - x_4 + 0 - 0,25 = 0 \rightarrow (R4 \rightarrow x_4)$$
$$0,25x_1 + 0,25x_2 + 0 + 0,25x_4 - x_5 + 0,25 = 0 \rightarrow (R5 \rightarrow x_5)$$

k	x1	R1	x2	R2	x3	R3	x4	R4	x5	R5	Cambia
0	0,35	0,025	-0,15	-0,025	0,25	0,025	-0,05	-0,05	0,25	0,0375	x4= -0,05 - 0,05 = -0,1
1	0,35	0,025	-0,15	-0,0375	0,25	0,025	-0,1	0	0,25	0,025	x2= -0,15 - 0,0375= -0,1875
2	0,35	0,025	-0,1875	0	0,25	-0,134375	-0,1	0	0,25	0,015625	x3= 0,25 - 0,134375 = 0,1156
3	0,35	0,0086	-0,1875	0	0,1156	0	-0,1	-0,0336	0,25	0,015625	x4= -0,1 - 0,0336 = -0,1336
4	0,35	0,0086	-0,1875	-0,0084	0,1156	0	-0,1336	0	0,25	0,007225	x1= 0,35 + 0,0086 = 0,3586
5	0,3586	...	-0,1875	...	0,1156	...	-0,1336	...	0,25	...	

Problema Nº 7: Dado el sistema $A\vec{x}=\vec{b}$ con:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \\ 1 & 16 & 81 & 256 \end{pmatrix} \qquad \vec{b}=\begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ 44 \\ 190 \end{bmatrix}$$

a) Factorizar la matriz A en $L*U_1$; y calcular el determinante de A.
b) Resolver el sistema.

a. Factorizamos A=L * U_1

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \\ 1 & 16 & 81 & 256 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & 1 & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & 1 & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tomamos fila 1,2,3 y 4 de "l" por la columna 1 de "u":

$$\text{Fila 1: } l_{11} * 1 = 1 \rightarrow l_{11} = 1$$
$$\text{Fila 2: } l_{21} * 1 + l_{22} * 0 = 1 \rightarrow l_{21} = 1$$
$$\text{Fila 3: } l_{31} * 1 + l_{32} * 0 + l_{33} * 0 = 1 \rightarrow l_{31} = 1$$
$$\text{Fila 4: } l_{41} * 1 + l_{42} * 0 + l_{43} * 0 + l_{44} * 0 = 1 \rightarrow l_{41} = 1$$

Tomamos fila 1,2,3 y 4 de "l" por la columna 2 de "u":

$$\text{Fila 1: } l_{11} * u_{12} = 2 \rightarrow u_{12} = 2$$
$$\text{Fila 2: } l_{21} * u_{12} + l_{22} * 1 = 4 \rightarrow l_{22} = 2$$
$$\text{Fila 3: } l_{31} * u_{12} + l_{32} * 1 = 8 \rightarrow l_{32} = 4$$
$$\text{Fila 4: } l_{41} * u_{12} + l_{42} * 1 = 16 \rightarrow l_{42} = 8$$

Tomamos fila 1,2,3 y 4 de "l" por la columna 3 de "u":

$$\text{Fila 1: } l_{11} * u_{13} = 3 \rightarrow u_{13} = 3$$
$$\text{Fila 2: } l_{21} * u_{13} + l_{22} * u_{23} = 9 \rightarrow u_{23} = 3$$
$$\text{Fila 3: } l_{31} * u_{13} + l_{32} * u_{23} + l_{33} * 1 = 27 \rightarrow l_{33} = 14$$
$$\text{Fila 4: } l_{41} * u_{13} + l_{42} * u_{23} + l_{43} * 1 = 81 \rightarrow l_{43} = 54$$

Tomamos fila 1,2,3 y 4 de "l" por la columna 4 de "u":

$$\text{Fila 1: } l_{11} * u_{14} = 4 \rightarrow u_{14} = 4$$
$$\text{Fila 2: } l_{21} * u_{14} + l_{22} * u_{24} = 16 \rightarrow u_{24} = 6$$
$$\text{Fila 3: } l_{31} * u_{14} + l_{32} * u_{24} + l_{33} * u_{34} = 64 \rightarrow u_{34} = 2,5714$$
$$\text{Fila 4: } l_{41} * u_{14} + l_{42} * u_{24} + l_{43} * u_{34} + l_{44} * 1 = 256 \rightarrow l_{44} = 65,14$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \\ 1 & 16 & 81 & 256 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 14 & 0 \\ 1 & 8 & 54 & 65,14 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2,5714 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculamos el determinante de A:

$$DET(A) = DET(L) * DET(U_1)$$
$$DET(A) = (1 * 2 * 14 * 65,14) * (1 * 1 * 1 * 1) = 1.823,92$$

b. Hacemos L * ȳ = b̄

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 14 & 0 \\ 1 & 8 & 54 & 65,14 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ 44 \\ 190 \end{bmatrix} \quad \text{Descendente}$$

$$\begin{cases} y_1 + 0y_2 + 0y_3 + 0y_4 = 2 \rightarrow y_1 = 2 \\ y_1 + 2y_2 + 0y_3 + 0y_4 = 10 \rightarrow y_2 = 4 \\ y_1 + 4y_2 + 14y_3 + 0y_4 = 44 \rightarrow y_3 = 1,857 \\ y_1 + 8y_2 + 54y_3 + 65,14y_4 = 190 \rightarrow y_4 = 0,8554 \end{cases}$$

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1,857 \\ 0,8554 \end{bmatrix}$$

Hacemos U * x̄ = ȳ:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2,5714 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1,857 \\ 0,8554 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2 \rightarrow x_1 = 1,8392 \\ 0x_1 + x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 4 \rightarrow x_2 = -2,1284 \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 + 2,5714x_4 = 1,857 \rightarrow x_3 = 0,332 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + x_4 = 0,8554 \rightarrow x_4 = 0,8554 \end{cases}$$

Resolvimos el sistema.

Problema Nº 8: Dado el sistema del Problema Nº 1

$$\begin{aligned} 3x + \quad y + \quad z &= 4 \\ 2x + \quad 5y + \quad z &= -1 \\ -x + \quad y + \quad 3z &= 4 \end{aligned}$$

Realizar la factorización de A= $L * U_1$, y resolver el sistema.

a. Realizar la factorización de A = L*U_1, y resolver el sistema.

Factorizamos A = L* U_1

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} ; \vec{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tomamos fila 1, 2 y 3 de "l" por la columna 1 de "u":

$$\text{Fila 1: } l_{11} * 1 = 3 \rightarrow l_{11} = 3$$
$$\text{Fila 2: } l_{21} * 1 = 2 \rightarrow l_{21} = 2$$
$$\text{Fila 3: } l_{31} * 1 = -1 \rightarrow l_{31} = -1$$

Tomamos fila 1, 2 y 3 de "l" por la columna 2 de "u":

$$\text{Fila 1: } l_{11} * u_{12} = 1 \rightarrow u_{12} = \frac{1}{3}$$
$$\text{Fila 2: } l_{21} * u_{12} + l_{22} * 1 = 5 \rightarrow l_{22} = \frac{2}{3}$$
$$\text{Fila 3: } l_{31} * u_{12} + l_{32} * 1 = 1 \rightarrow l_{32} = -3$$

Tomamos fila 1, 2 y 3 de "l" por la columna 3 de "u":

$$\text{Fila 1: } l_{11} * u_{13} = 1 \rightarrow u_{13} = \frac{1}{3}$$
$$\text{Fila 2: } l_{21} * u_{13} + l_{22} * u_{23} = 1 \rightarrow u_{23} = \frac{1}{2}$$
$$\text{Fila 3: } l_{31} * u_{13} + l_{32} * u_{23} + l_{33} * 1 = 3 \rightarrow l_{33} = \frac{7}{6}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & \frac{2}{3} & 0 \\ -1 & -3 & \frac{7}{6} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hacemos L * ȳ = b̄

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & \frac{2}{3} & 0 \\ -1 & -3 & \frac{7}{6} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3y_1 + 0y_2 + 0y_3 = 4 \rightarrow y_1 = \frac{4}{3} \\ 2y_1 + \frac{2}{3}y_2 + 0y_3 = -1 \rightarrow y_2 = -\frac{11}{2} \quad \text{Descendente} \\ -y_1 - 3y_2 + \frac{7}{6}y_3 = 4 \rightarrow y_3 = -\frac{83}{7} \end{cases}$$

Hacemos U * x̄ = ȳ

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{11}{2} \\ -\frac{83}{7} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = \frac{4}{3} \rightarrow x_1 = \frac{188}{21} \\ 0x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 = -\frac{11}{2} \rightarrow x_2 = -11 \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 = -\frac{83}{7} \rightarrow x_3 = -\frac{83}{7} \end{cases}$$

Resolvimos el sistema.

Problema Nº 9: Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcular sus autovalores.
b) Calcular el vector asociado a $\lambda 1 = 1$
c) Analizar la Convergencia (Radio Espectral).

a.

$$Det(A - \lambda \cdot I) = 0$$

$$A - \lambda \cdot I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$Det(A - \lambda \cdot I) = (1-\lambda) * [(1-\lambda)^2 + 1] + 2 * (1-\lambda) = 0$$
$$Det(A - \lambda \cdot I) = (1-\lambda) * [(1-\lambda)^2 + 3] = 0$$
$$Det(A - \lambda \cdot I) = (1-\lambda) * [1 - 2\lambda + \lambda^2 + 3] = 0$$
$$Det(A - \lambda \cdot I) = (1-\lambda) * [2\lambda^2 + 4] = 0$$

Los autovalores son:

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 * 1 * 4}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}i$$

b.

$$(A - \lambda \cdot I) \cdot \vec{x} = 0$$

$$(A - \lambda \cdot I) \cdot \vec{x} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Si: \lambda_1 = 1$$

$$(A-\lambda\cdot I)\cdot\vec{x} = \begin{bmatrix} 1-1 & 0 & 2 \\ 0 & 1-1 & -1 \\ -1 & 1 & 1-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(A-\lambda\cdot I)\cdot\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$x_3 = 0$$
$$x_1 = x_2$$

Si tomo x_1 = 1, entonces el autovector será:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c.

$$\rho(A) = \text{Máx}|\lambda_i|$$

Calculamos el valor absoluto de los autovalores:

$$|\lambda_1| = |1| = 1$$
$$|\lambda_2| = |1+\sqrt{3}i| = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$
$$|\lambda_3| = |1-\sqrt{3}i| = \sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\rho(A) = \text{Máx}|\lambda_i| = 2$$

En este caso el radio espectral de la matriz no converge por que:

$$\rho(A) = \text{Máx}|\lambda_i| = 2 \geq 1$$