

Universidad Nacional de Rosario.
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura.
Escuela de Ingeniería Electrónica.



Probabilidad y Procesos Aleatorios.

Trabajo Práctico N° 1

Autocorrelación y densidad espectral de potencia.

Integrantes:

IMSAND, Juan Facundo (I-0553/3).
FOLMER, Fernando (F-3288/3).
CICETTI, Joaquín (C-6035/6).

Problema 1:

Para el análisis de este problema seguimos el procedimiento indicado en la guía de TP1, el cual consistía en ejecutar el script "tp1_p01.m" para distintas señales (sin ruido, ruido blanco y otra con la suma de las anteriores), variando además los valores de N , P y M . Como resultado, se obtuvieron las gráficas de la señal seleccionada $y(t)$ y de su correlación.

A continuación, se muestran las gráficas cuando $y(t)=x(t)$ es una señal sin ruido, $y(t)=w_n(t)$ es una señal de ruido blanco, y finalmente cuando $y(t)=x(t)+w_n(t)$.

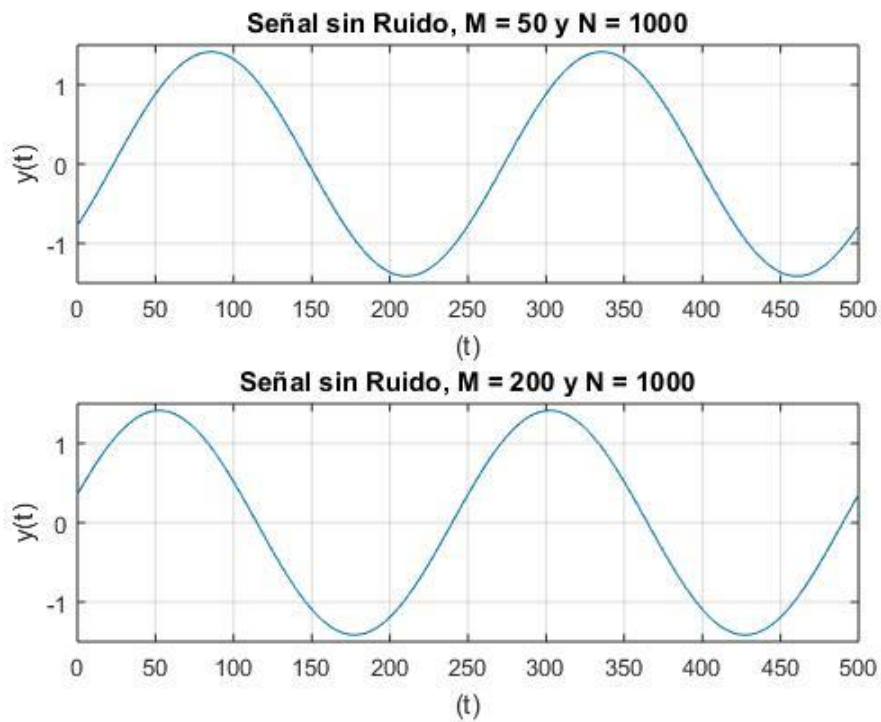


Figura 1. Señal sin ruido para $N=1000$, $P=4$, $M=[50,200]$.

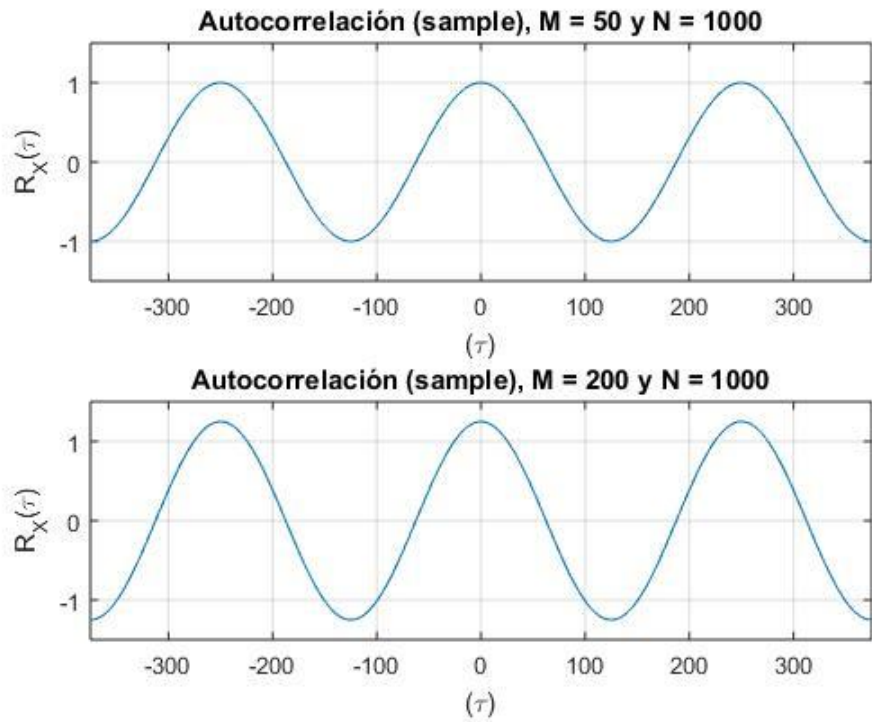


Figura 2. Autocorrelación de señal sin ruido para $N=1000$, $P=4$, $M=[50,200]$.

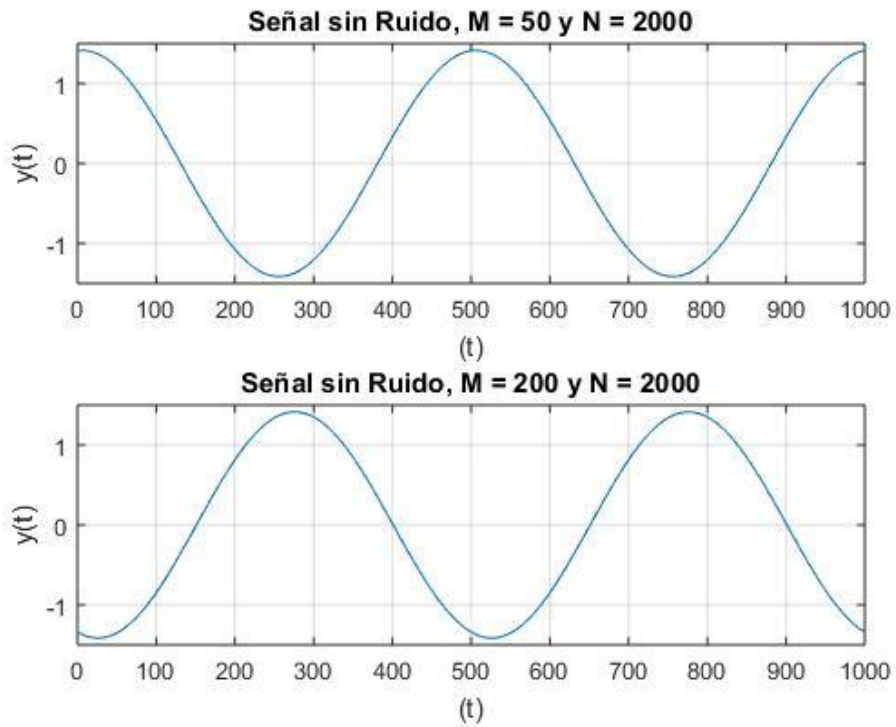


Figura 3. Señal sin ruido para $N=2000$, $P=4$, $M=[50,200]$.

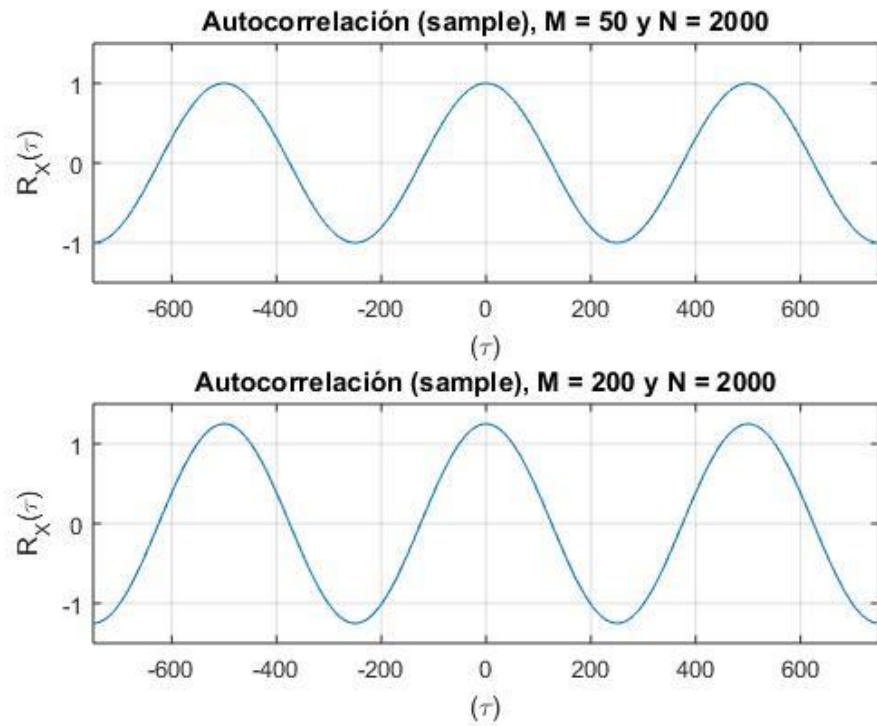


Figura 4. Autocorrelación de señal sin ruido para $N=2000$, $P=4$, $M=[50,200]$.

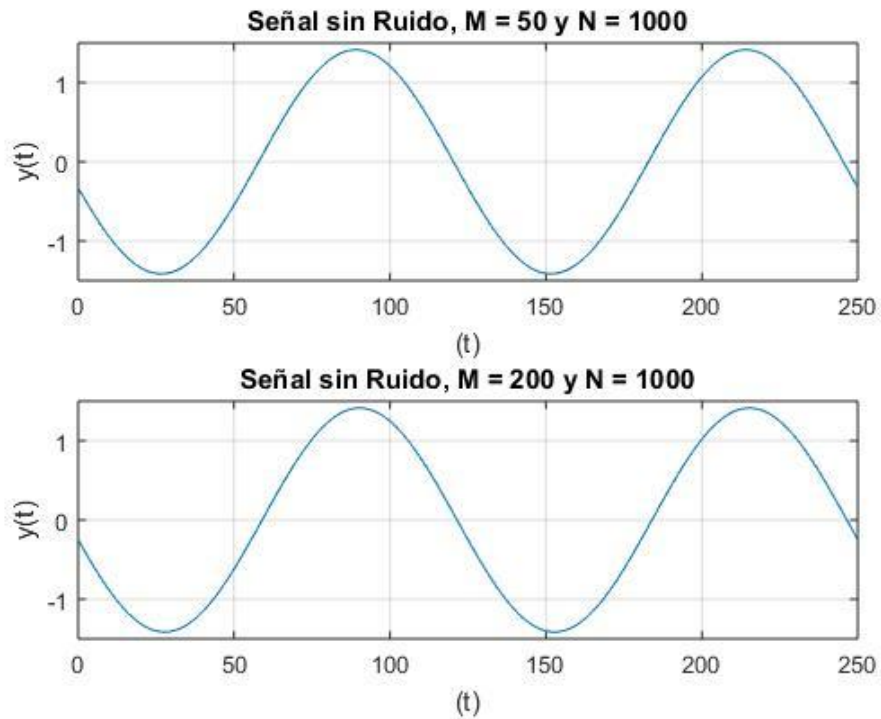


Figura 5. Señal sin ruido para $N=1000$, $P=8$, $M=[50,200]$.

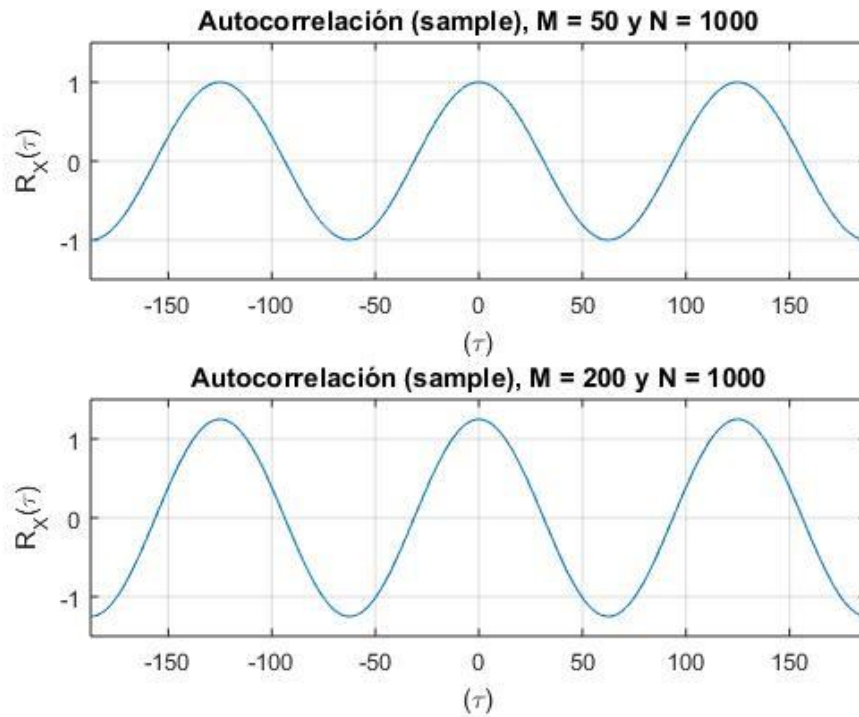


Figura 6. Autocorrelación de señal sin ruido para $N=1000$, $P=8$, $M=[50,200]$.

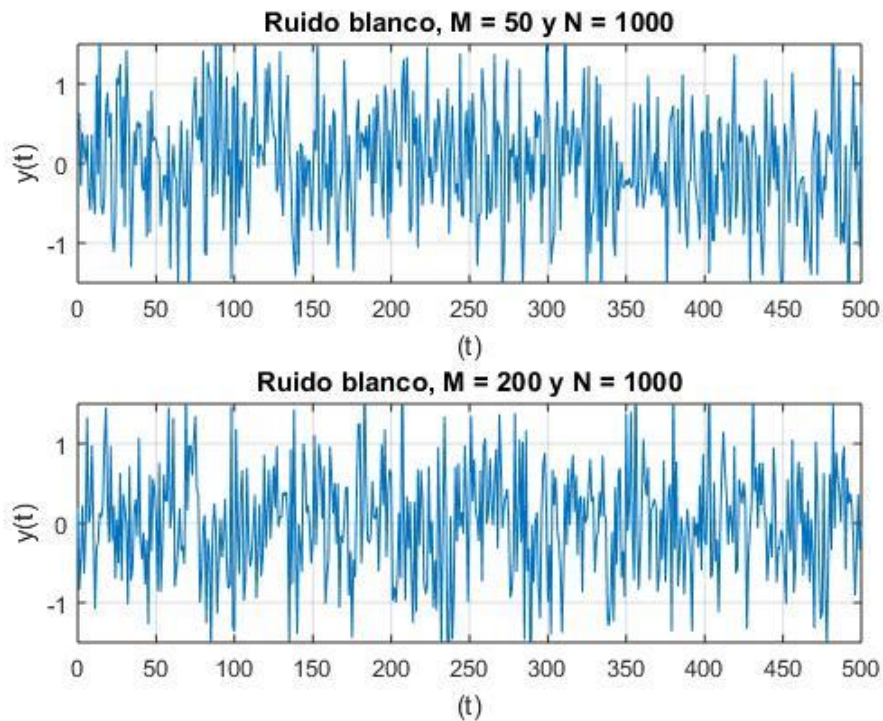


Figura 7. Señal ruido blanco para $N=1000$, $P=4$, $M=[50,200]$.

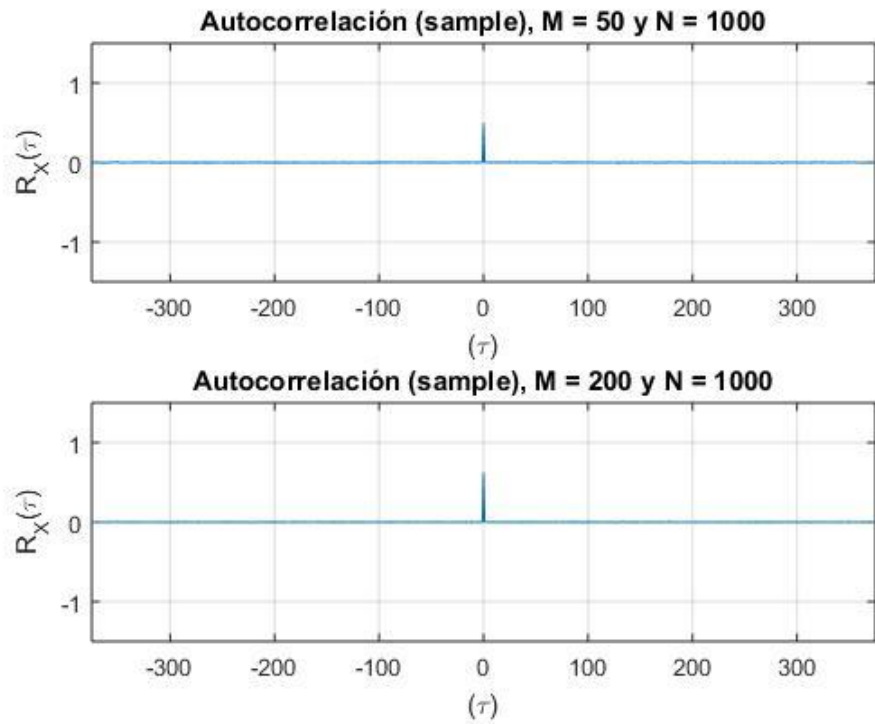


Figura 8. Autocorrelación de señal de ruido blanco para $N=1000$, $P=4$, $M=[50,200]$.

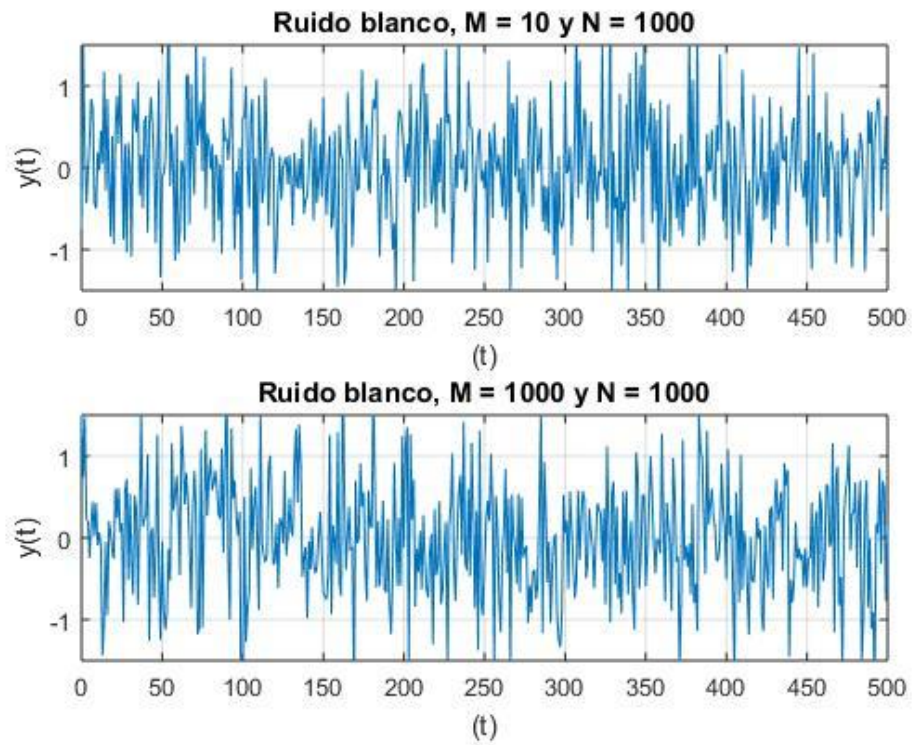


Figura 9. Señal de ruido blanco para $N=1000$, $P=4$, $M=[10,1000]$.

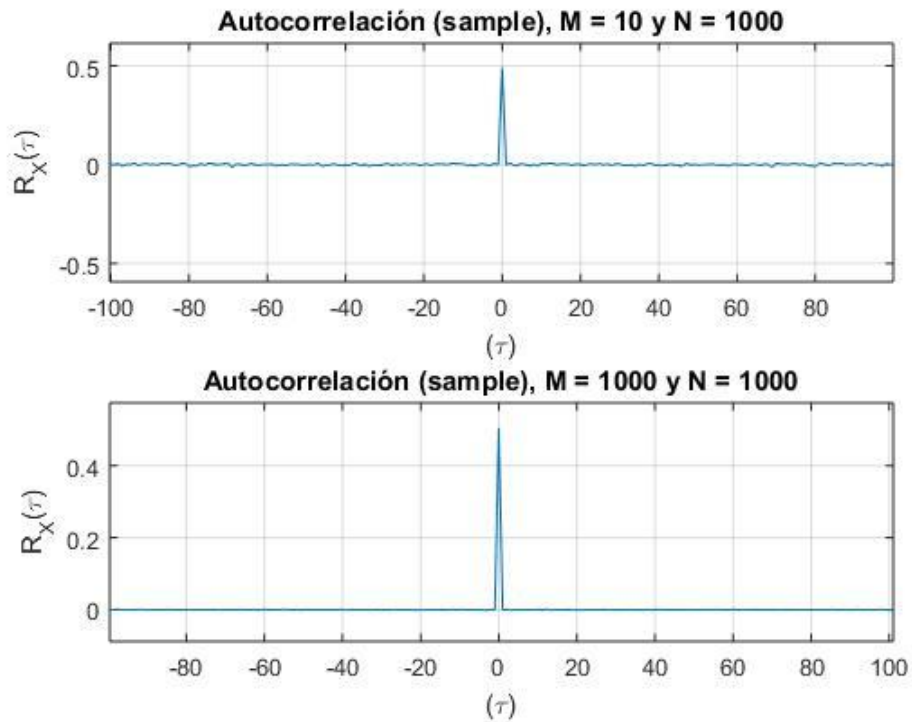


Figura 10. Autocorrelación de señal de ruido blanco para $N=1000$, $P=4$, $M=[10,1000]$.

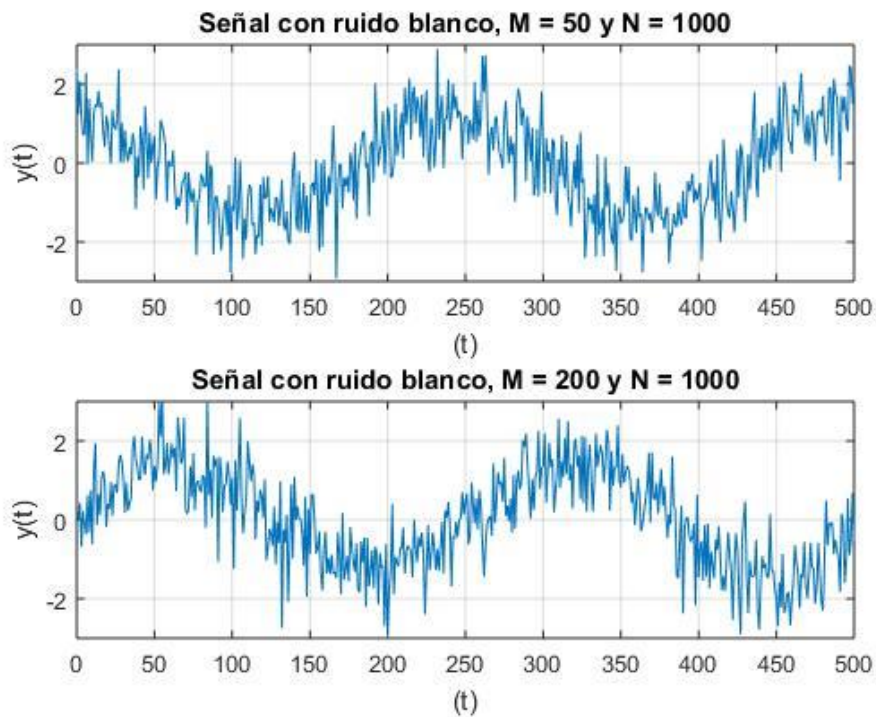


Figura 11. Suma de señales sin y con ruido blanco para $N=1000$, $P=4$, $M=[50,200]$.

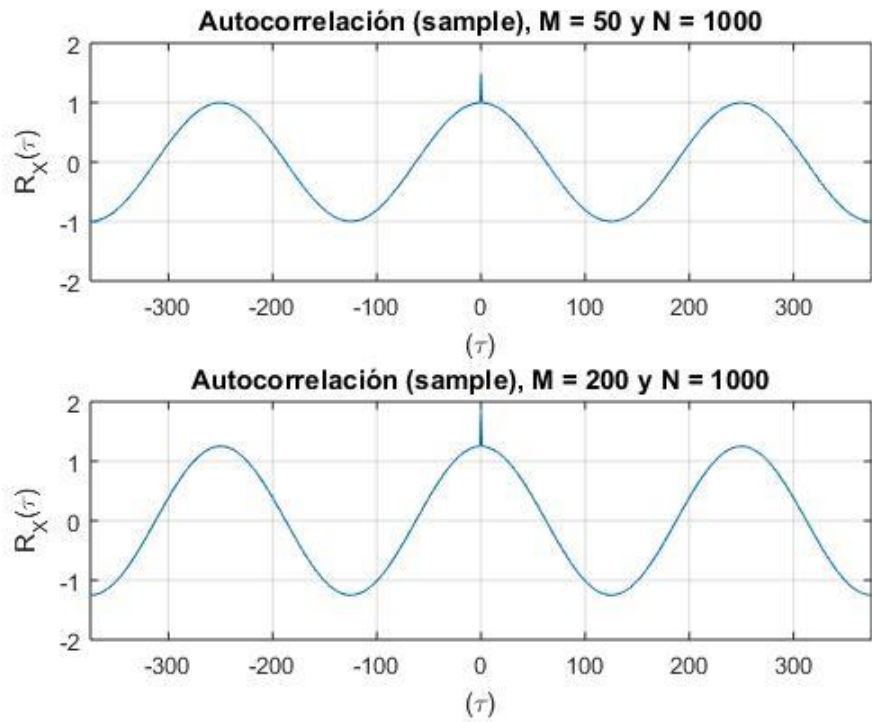


Figura 12. Autocorrelación de señal con y sin ruido blanco para $N=1000$, $P=4$, $M=[50,200]$.

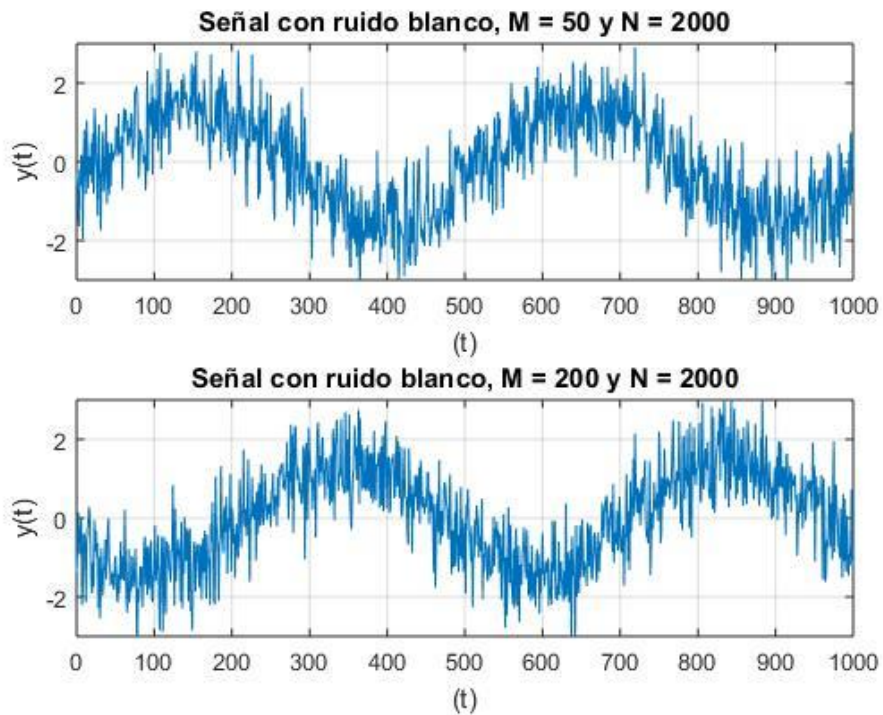


Figura 13. Suma de señales con y sin ruido blanco para $N=2000$, $P=4$, $M=[50,200]$.

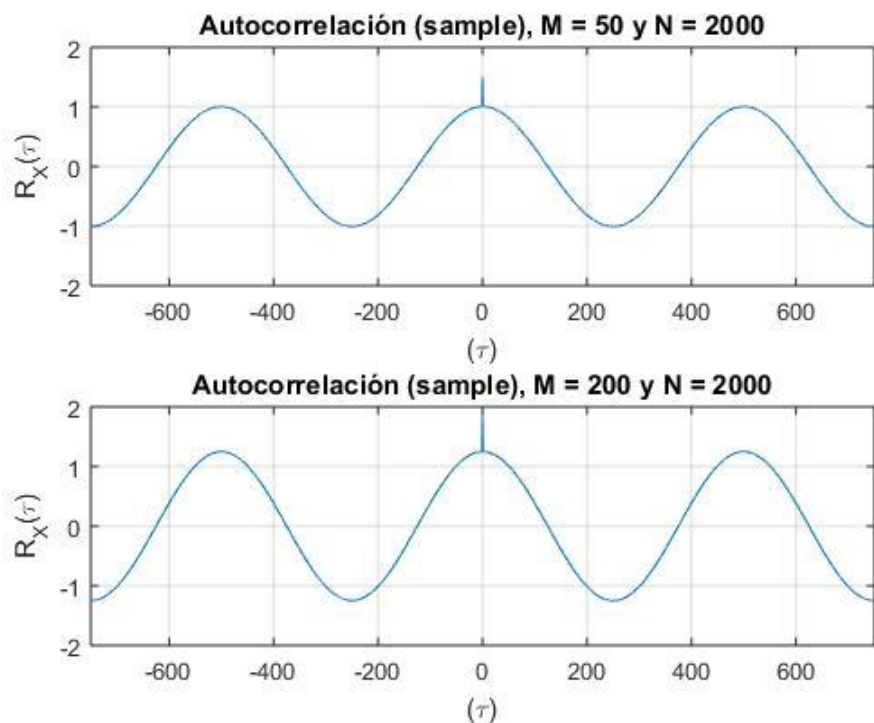


Figura 14. Autocorrelación de señal con y sin ruido blanco para $N=2000$, $P=4$, $M=[50,200]$.

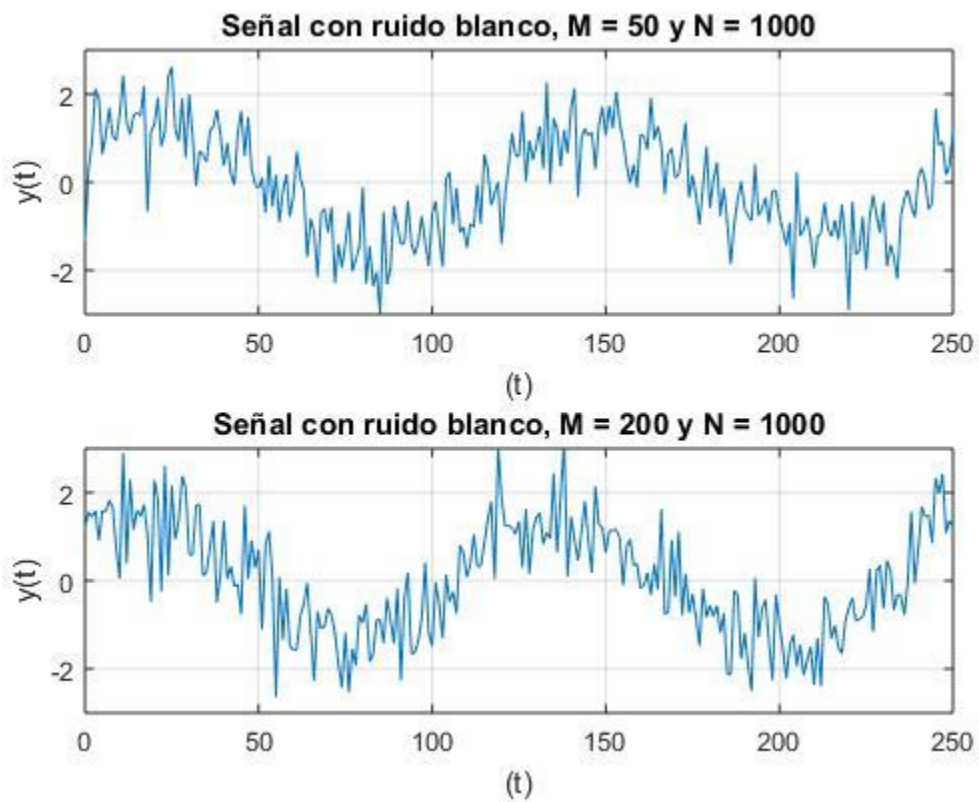


Figura 15. Suma de señales con y sin ruido blanco para $N=1000$, $P=8$, $M=[50,200]$.

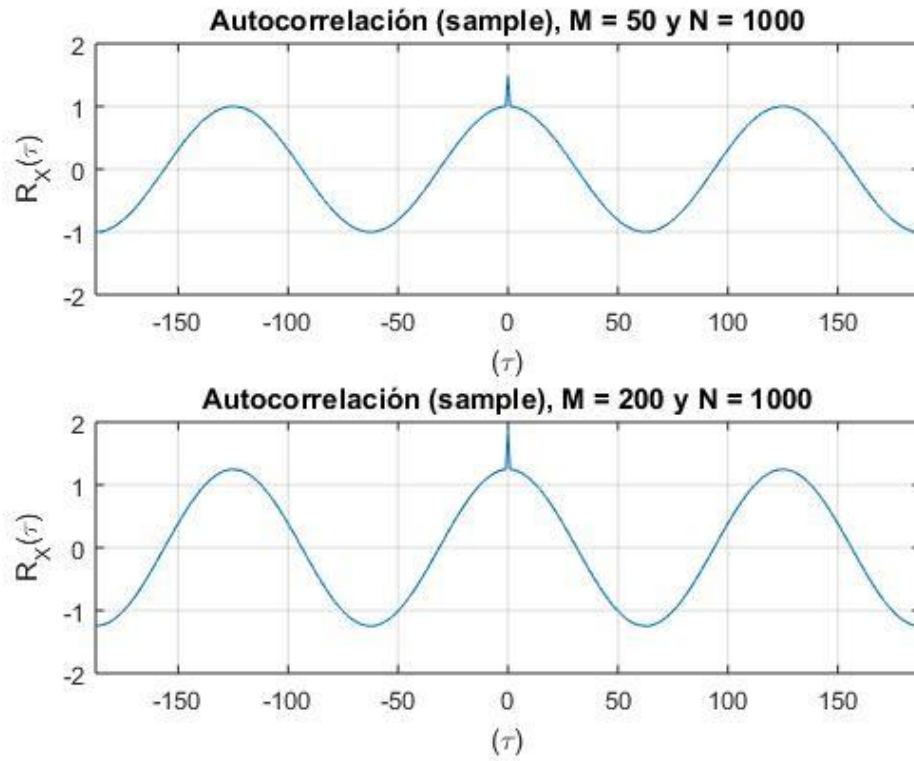


Figura 16. Autocorrelación de señal con y sin ruido blanco para $N=1000$, $P=8$, $M=[50,200]$.

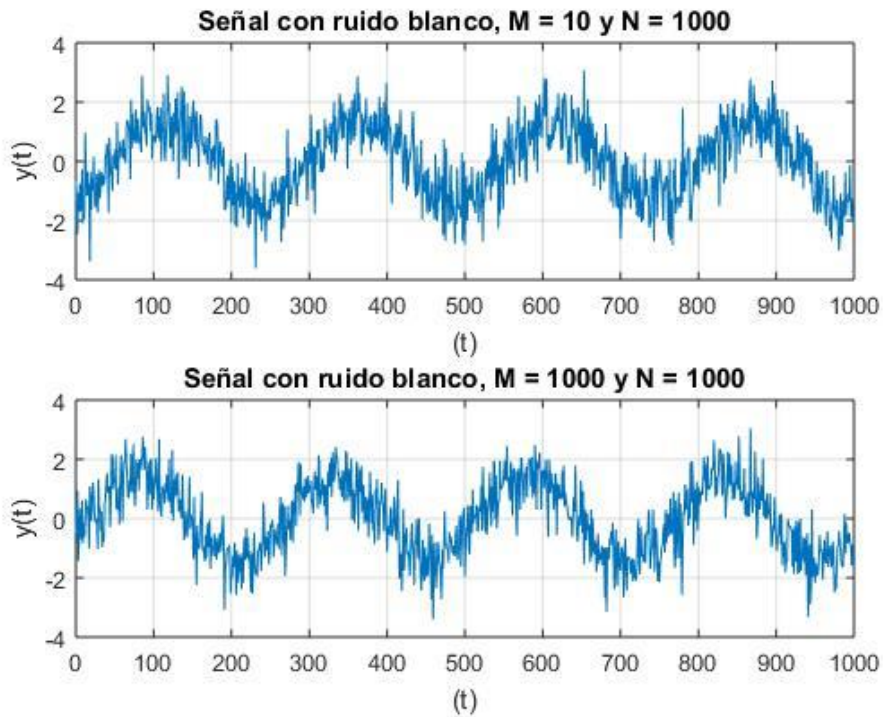


Figura 17. Suma de señales con y sin ruido blanco para $N=1000$, $P=4$, $M=[50,200]$.

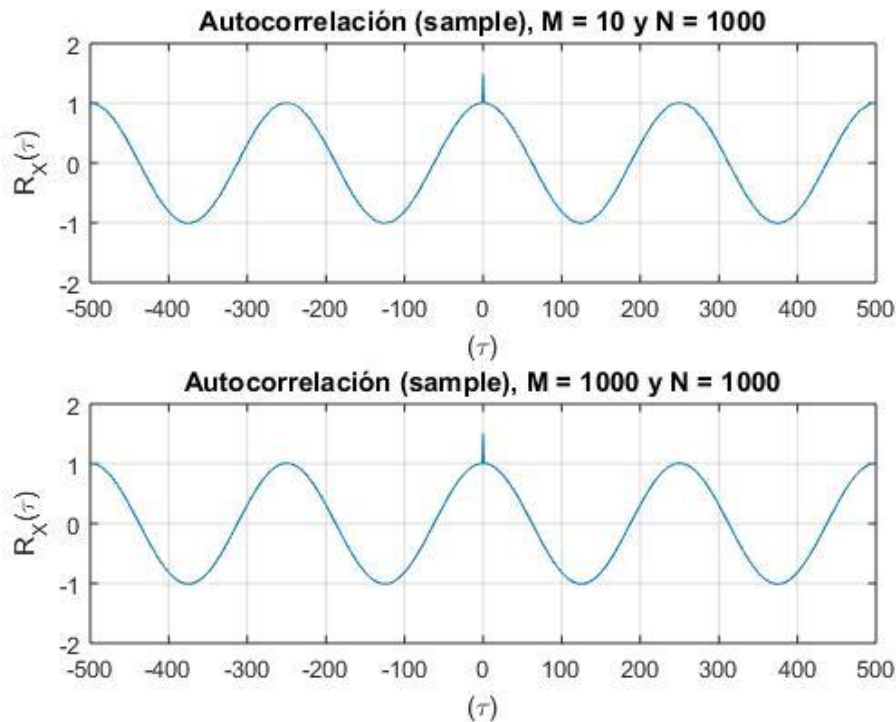


Figura 18. Autocorrelación de señal con y sin ruido blanco para $N=1000$, $P=4$, $M=[10,1000]$.

Podemos ver a partir de las gráficas 10 y 18, en las que variamos M notoriamente, que la señal con un M de menor valor, tiene montado un ruido más importante que la señal que tiene un valor de M mayor.

En las figuras 2, 4 y 6 vemos que, para la señal sin ruido se puede observar fácilmente el periodo de esta a través de sus respectivas autocorrelaciones, las cuales son del mismo periodo que la señal. Para el caso en que solo varia M , tomando valores, $M = 50$ y $M = 200$, el periodo es el mismo, el cual vale 250, a causa de la independencia de M . Luego, aumentamos N en un 100% y vemos que el periodo es el doble, o sea, 500. Seguido, variamos P a la mitad de su valor, y el periodo resulta ser la mitad, 150.

Todos estos periodos los podemos verificar en las figuras 12, 14 y 16, donde se grafica la autocorrelación de la suma de la señal con y sin ruido blanco; por lo tanto la autocorrelación de la señal completa será la suma de ambas autocorrelaciones. Además sabemos que si una señal es periódica, su autocorrelación también lo es, y esta tendrá el mismo periodo.

Respuestas al cuestionario Problema 1:

1) Si, es posible determinar el periodo de la señal con ruido blanco a través de su autocorrelación, dado que, si la señal es periódica, también lo será su función de autocorrelación; más aún, el valor de dicho periodo coincidirá con el periodo de la señal.

2) El pico en la gráfica de correlación en $\tau=0$ representa la energía que transporta la señal. En las gráficas precedentes, podemos observar que la energía de la señal con ruido se obtiene sumando gráficamente ambas funciones de correlación, por lo que en el origen se tiene la energía del ruido blanco (la cual idealmente es un impulso)

Problema 2:

A diferencia del Problema 1, en este caso, se realiza el cálculo de autocorrelación como promedio temporal a través del script "tp1_p02.m". Se procede de la misma manera, tomando distintas señales (sin ruido, de ruido blanco, suma de ambas), y haciendo variar los parámetros N y P , para luego, realizar una comparación entre los distintos métodos de cálculo de la autocorrelación.

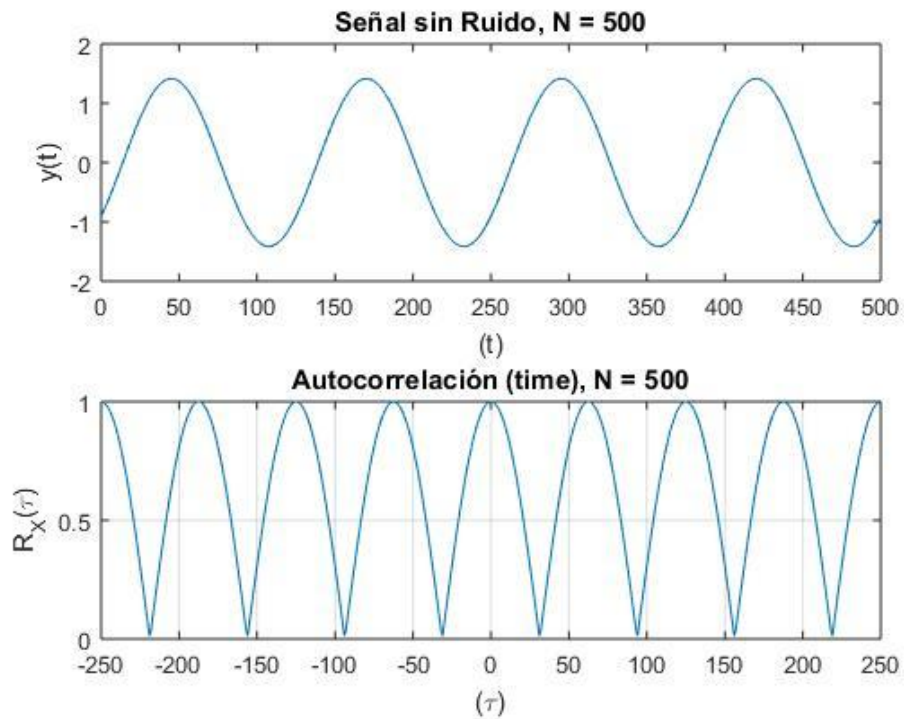


Figura 19. Señal sin ruido y su respectiva autocorrelación para $N=500$ y $P=4$.

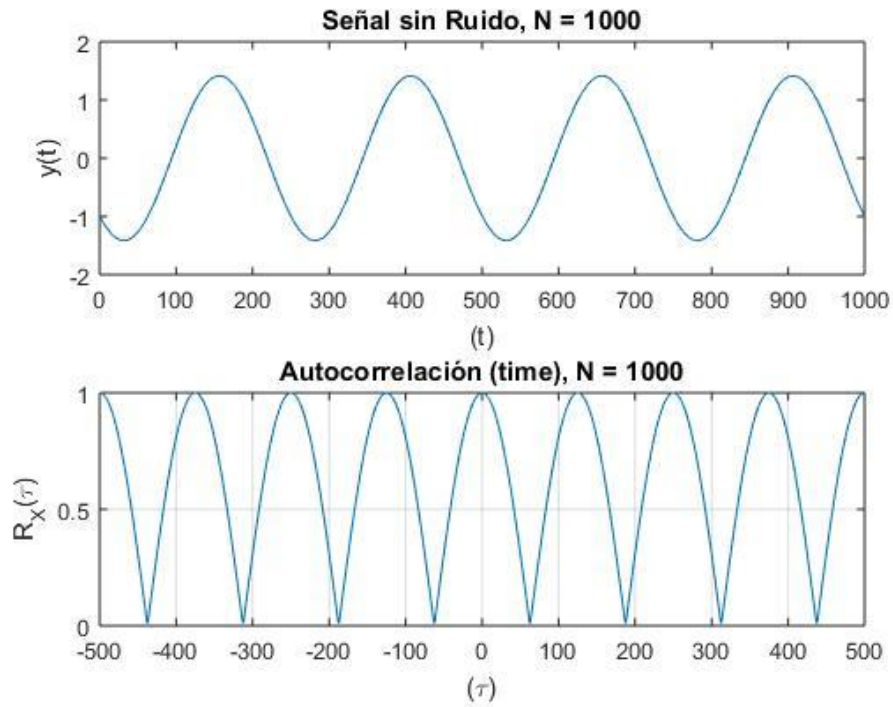


Figura 20. Señal sin ruido y su respectiva autocorrelación para $N=1000$ y $P=4$.

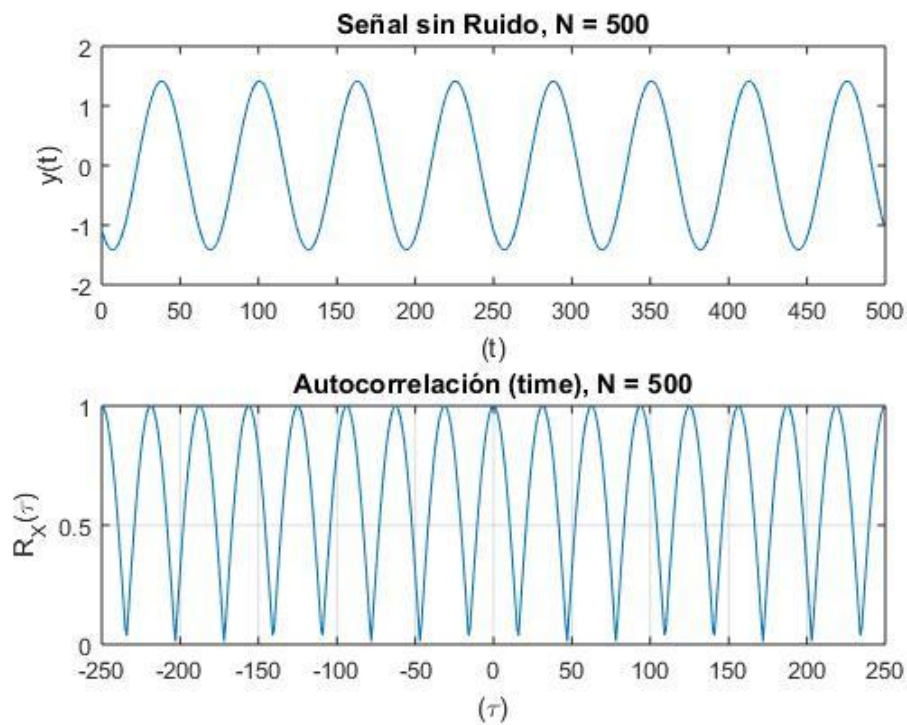


Figura 21. Señal sin ruido y su respectiva autocorrelación para $N=500$ y $P=8$.

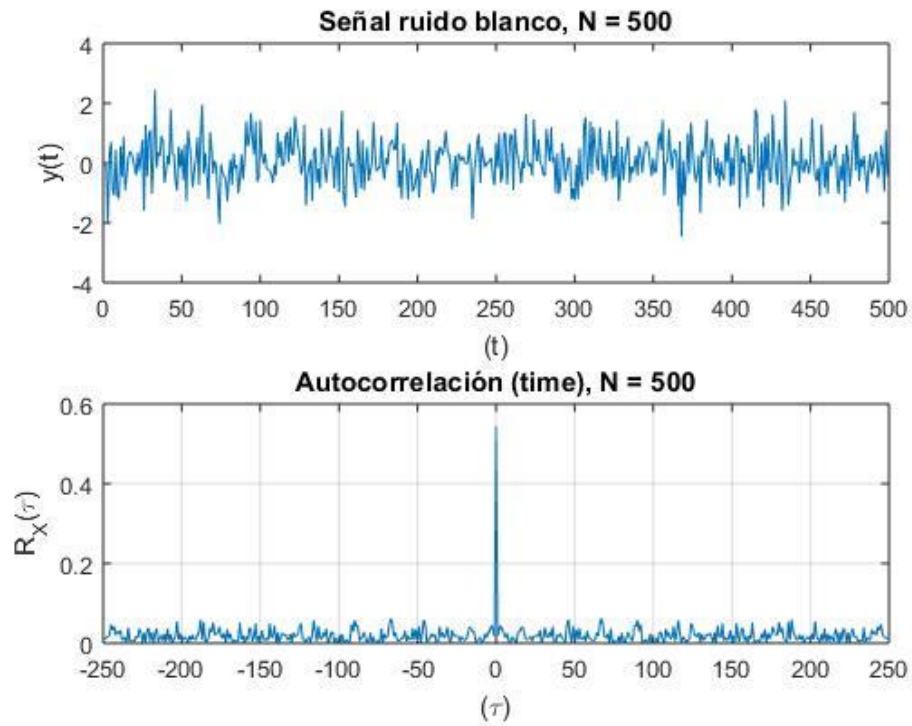


Figura 22. Señal de ruido blanco y su respectiva autocorrelación para $N=500$ y $P=4$.

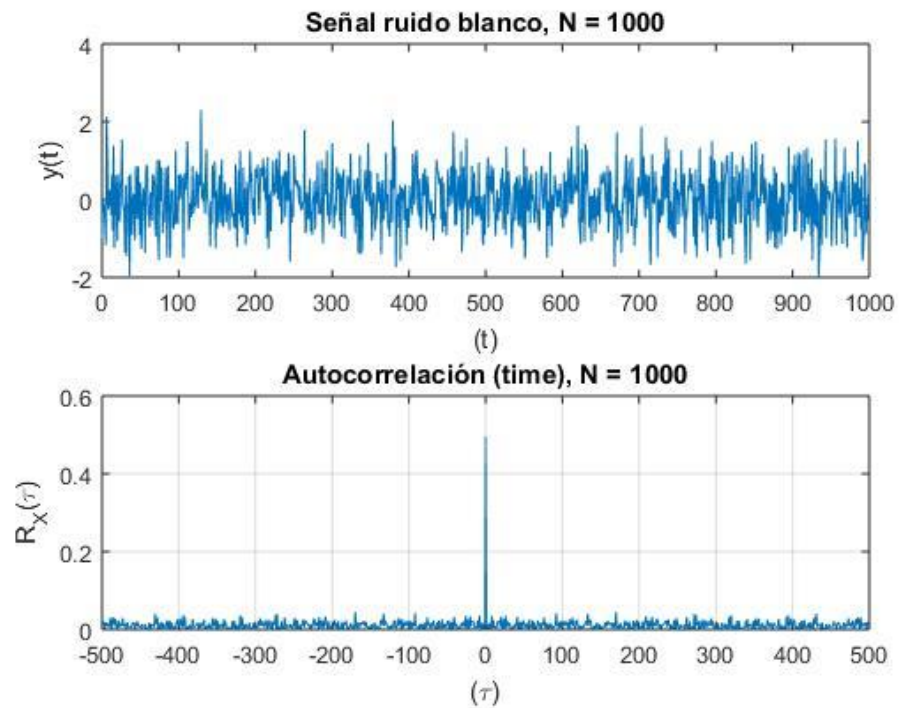


Figura 23. Señal de ruido blanco y su respectiva autocorrelación para $N=1000$ y $P=4$.

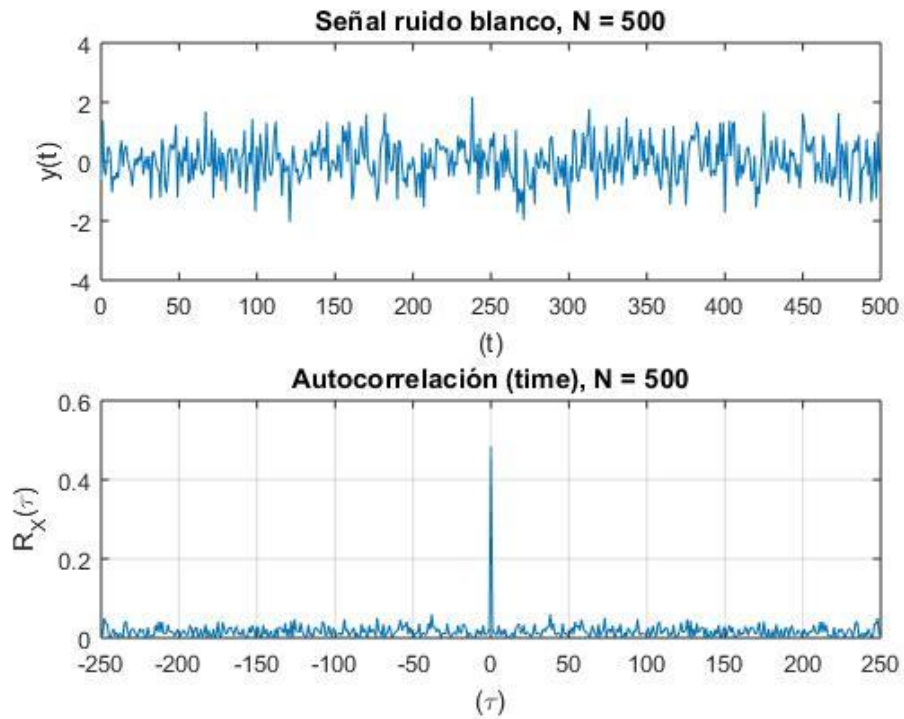


Figura 24. Señal de ruido blanco y su respectiva autocorrelación para $N=500$ y $P=8$.

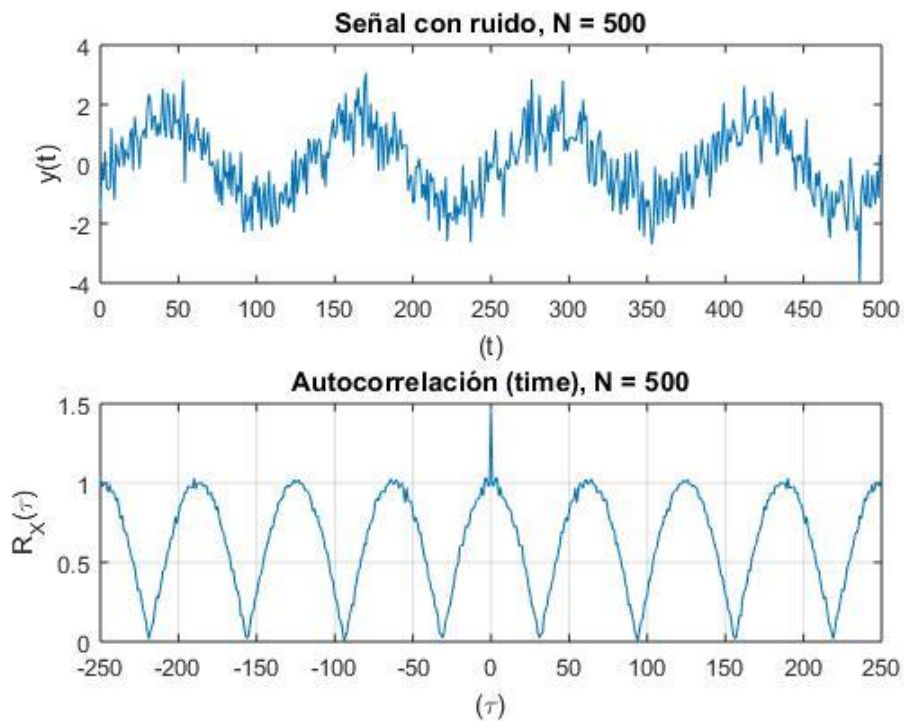


Figura 25. Señal con ruido blanco y su respectiva autocorrelación para $N=500$ y $P=4$.

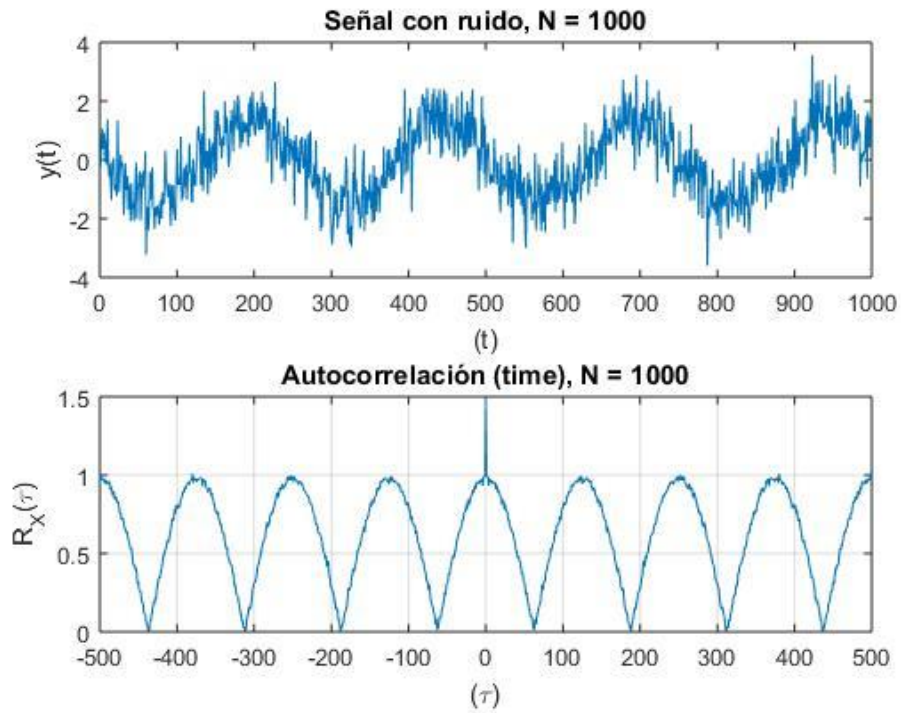


Figura 26. Señal con ruido blanco y su respectiva autocorrelación para $N=1000$ y $P=4$.

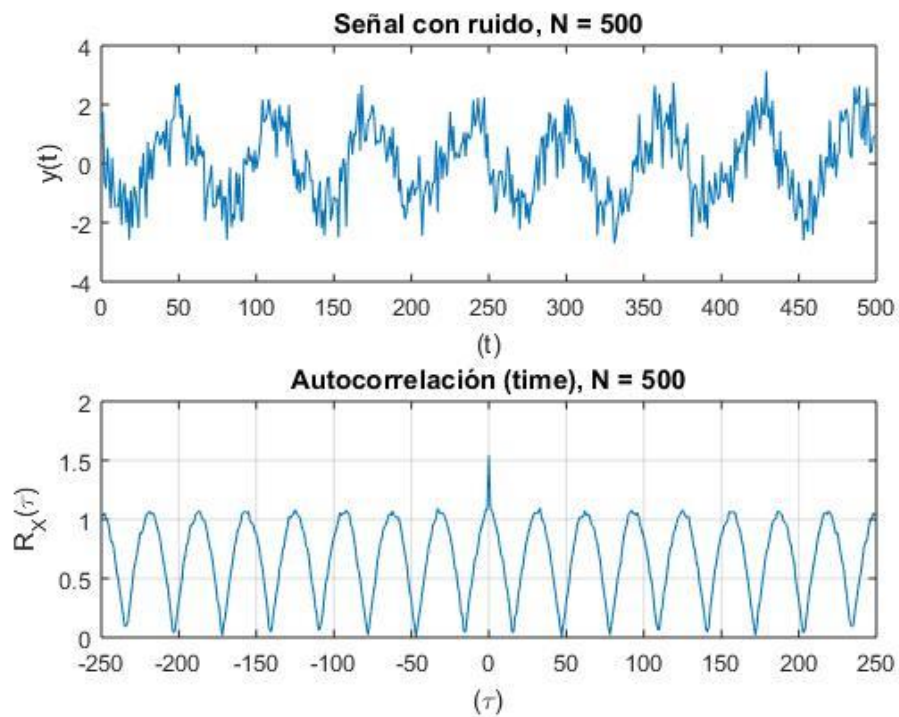


Figura 27. Señal con ruido blanco y su respectiva autocorrelación para $N=500$ y $P=8$.

Respuestas al cuestionario Problema 2:

Podemos realizar una comparación del Problema 1 con el Problema 2, a partir de las gráficas 12 y 26 o 2 y 20, en las que apreciamos que: En el Problema 1, obtenemos una autocorrelación que varía entre -1 y 1 excepto para $\tau=0$, y de periodo 250; mientras que en el Problema 2, vemos que la autocorrelación es variante entre 0 y 1 excepto para $\tau=0$, y de periodo 125. Así, a simple vista, podemos pensar que la función de autocorrelación del Problema 2 es el valor absoluto de la función de autocorrelación del Problema 1. Esto último, es correcto, pues se ve en la salida de la función "time_corr.m", que la autocorrelación se realiza sobre el valor absoluto; aunque difieren en el periodo, ya que la del Problema 1 es el doble que la del Problema 2.

Otra cosa que podemos observar, es que el ruido se hace presente con mayor relevancia en el promedio temporal (Problema 2) que en el promedio muestral (Problema 1). Esto lo podemos disminuir al aumentar el largo de la muestra N , cosa que se observa en la figura 28 donde $N=5000$.

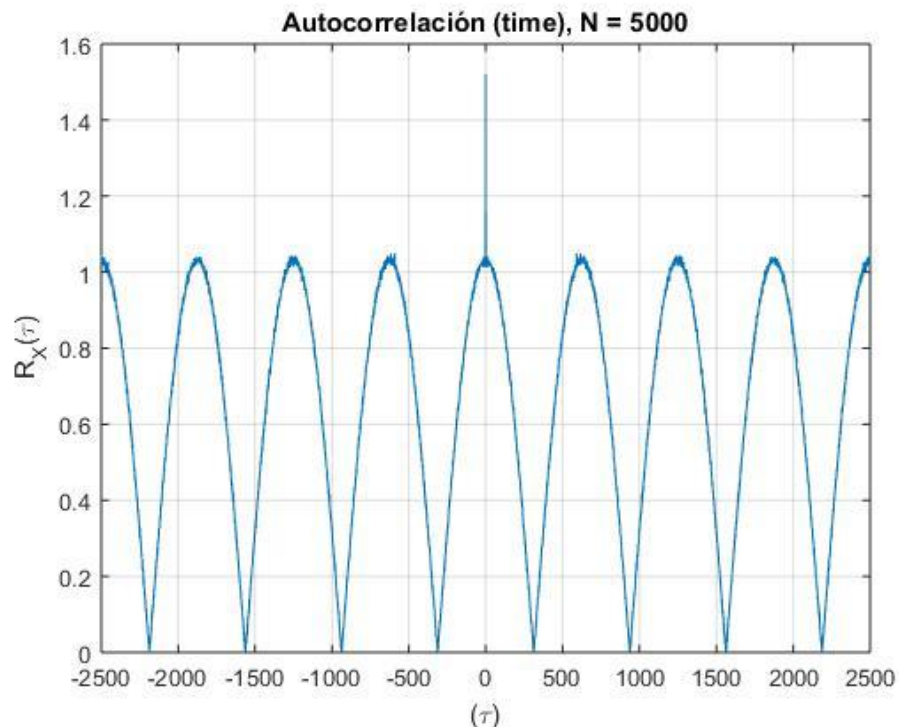


Figura 28. Autocorrelación de señal con ruido blanco para $N=5000$ y $P=4$.

Problema 3:

Evaluando las gráficas de las sucesivas corridas del script correspondiente, podemos observar cómo se comporta la correlación debido a la modificación de los parámetros en juego.

Al variar el ancho del pulso T_s (figuras 29, 30 y 31), veremos cómo varía el ancho del lóbulo de la función de autocorrelación, tendiendo a la gráfica teórica, para la que, al hacerse $\tau > T_s$, la función vale cero. La diferencia observada en nuestras gráficas se debe a la duración finita de la señal, que produce que exista correlación entre puntos entre los que no debería existir.

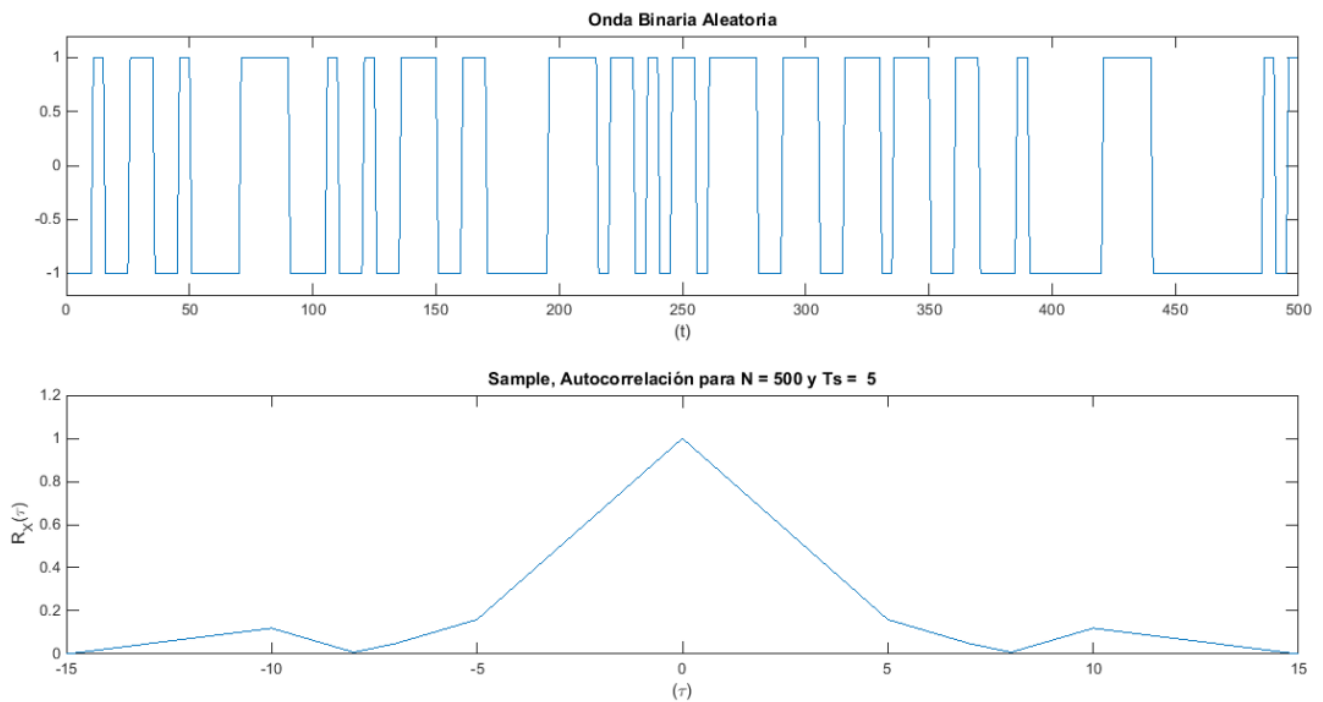


Figura 29: Onda Binaria Aleatoria y su autocorrelación ($N_s=100 - T_s=5$)

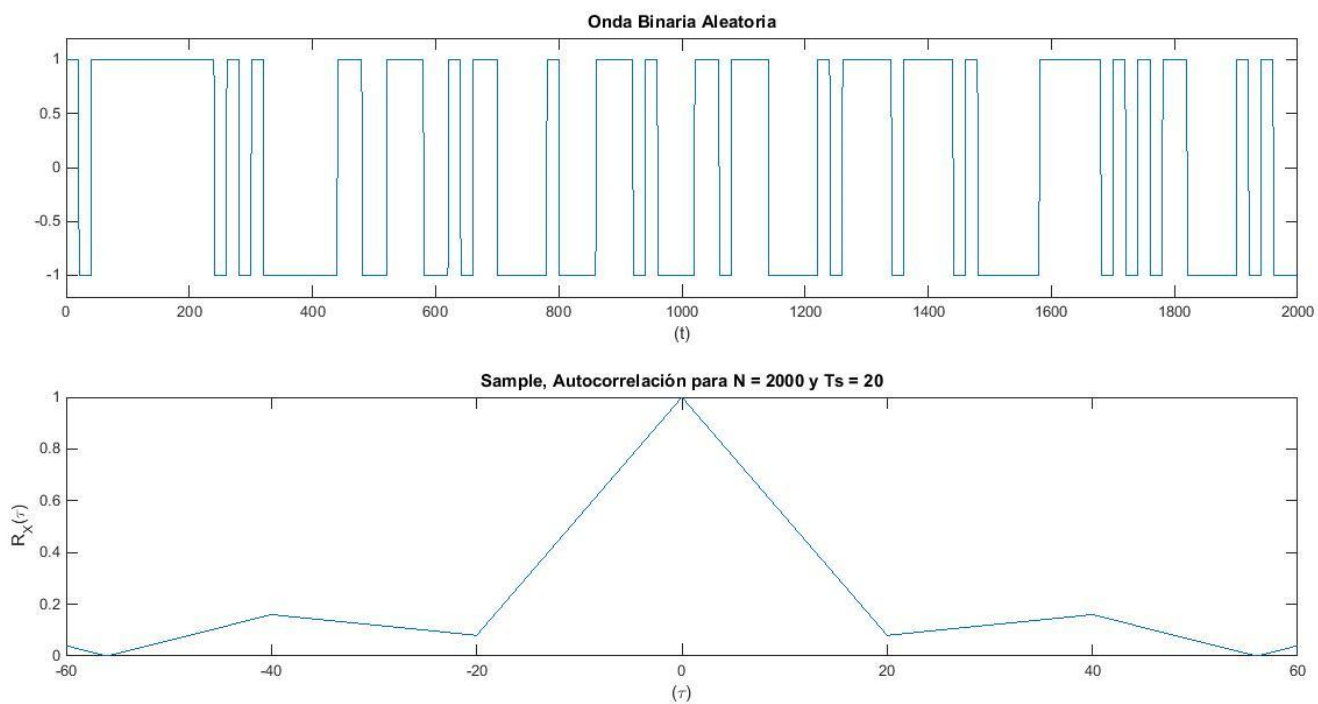


Figura 30: Onda Binaria Aleatoria y su autocorrelación ($N_s=100 - T_s=20$)

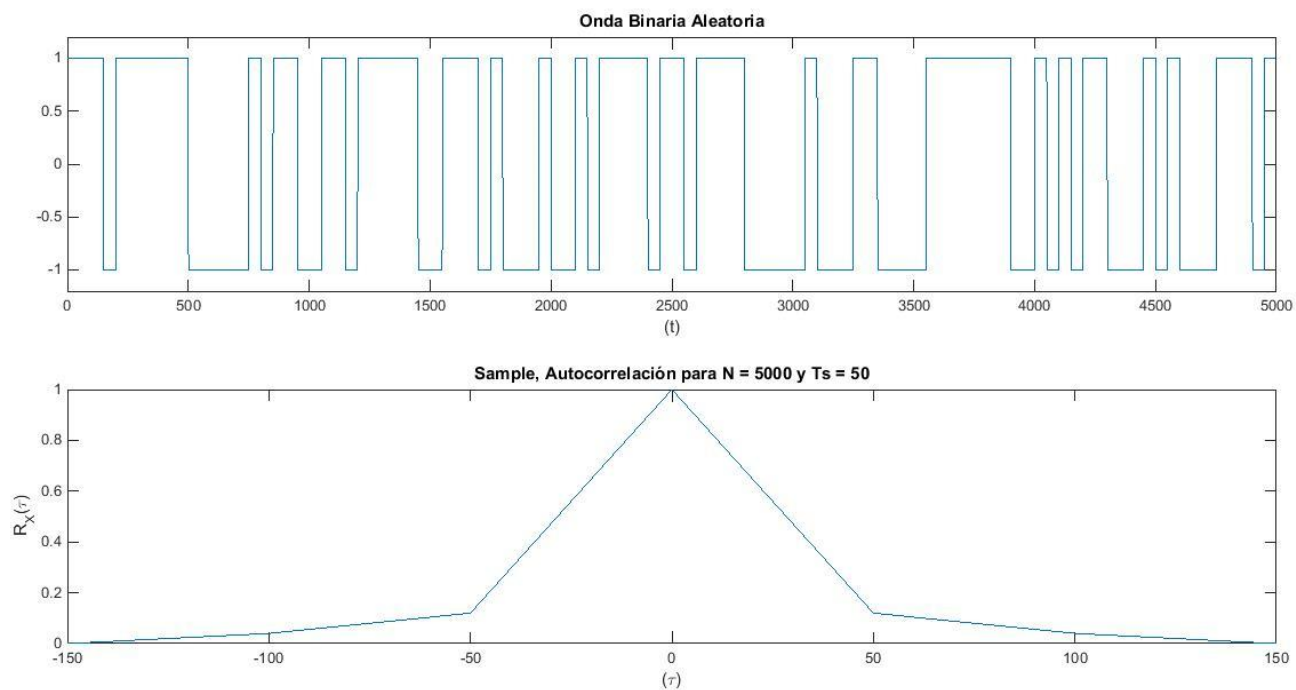


Figura 31: Onda Binaria Aleatoria y su autocorrelación ($N_s=100 - T_s=50$)

Variando el parámetro N_s (figuras 32 y 33), vemos como se aproxima la gráfica de correlación a la teórica (figura 34). Sumado a esta no idealidad, se encuentra además que el pulso no es ideal, habiendo un tiempo finito entre cada cambio de pulso (figura 35).

Figura 32: Onda Binaria Aleatoria y su autocorrelación ($N_s=50 - T_s=20$)

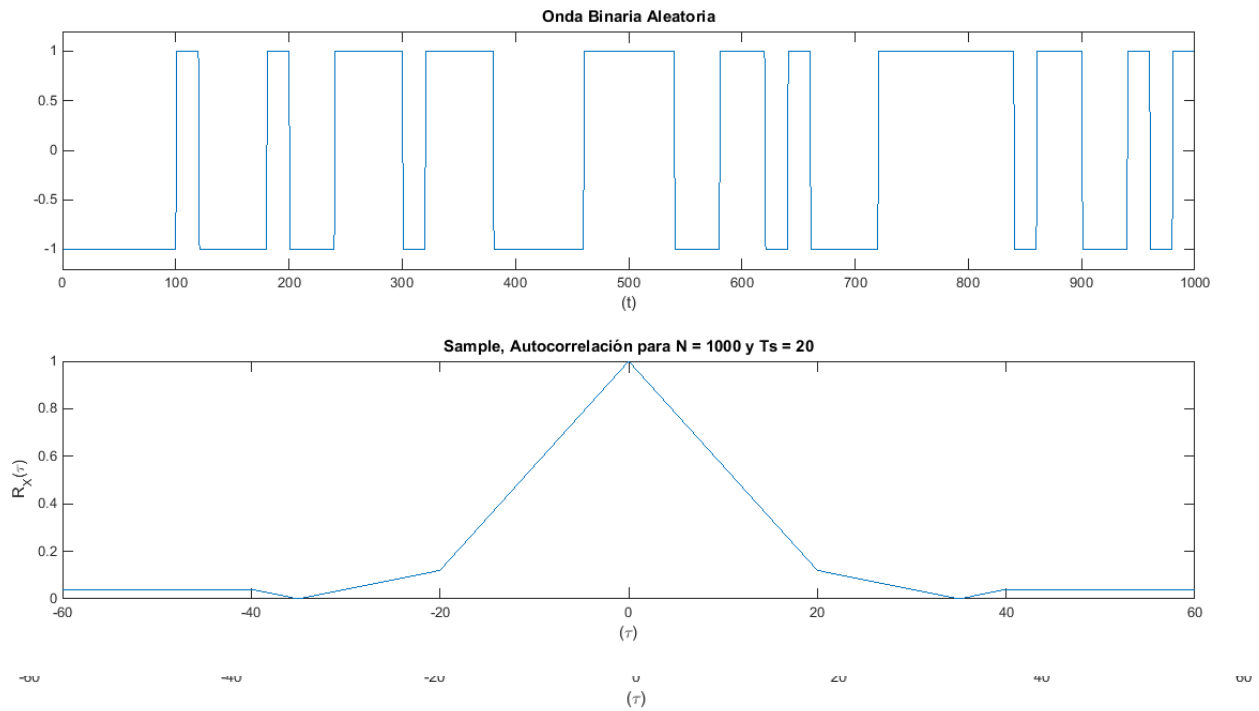


Figura 33: Onda Binaria Aleatoria y su autocorrelación ($N_s=1000 - T_s=20$)

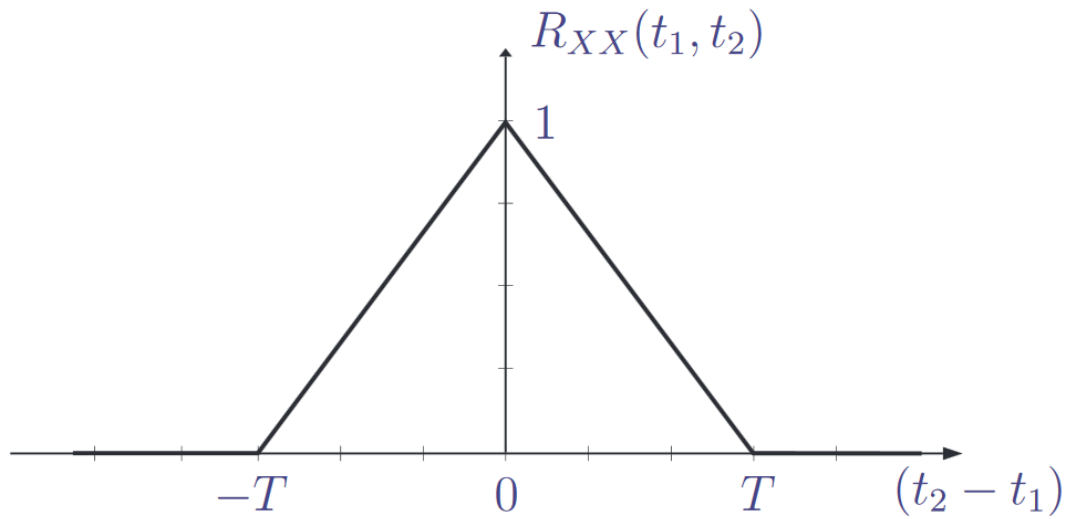


Figura 34: Grafica de autocorrelación Onda Binaria Aleatoria de duración infinita

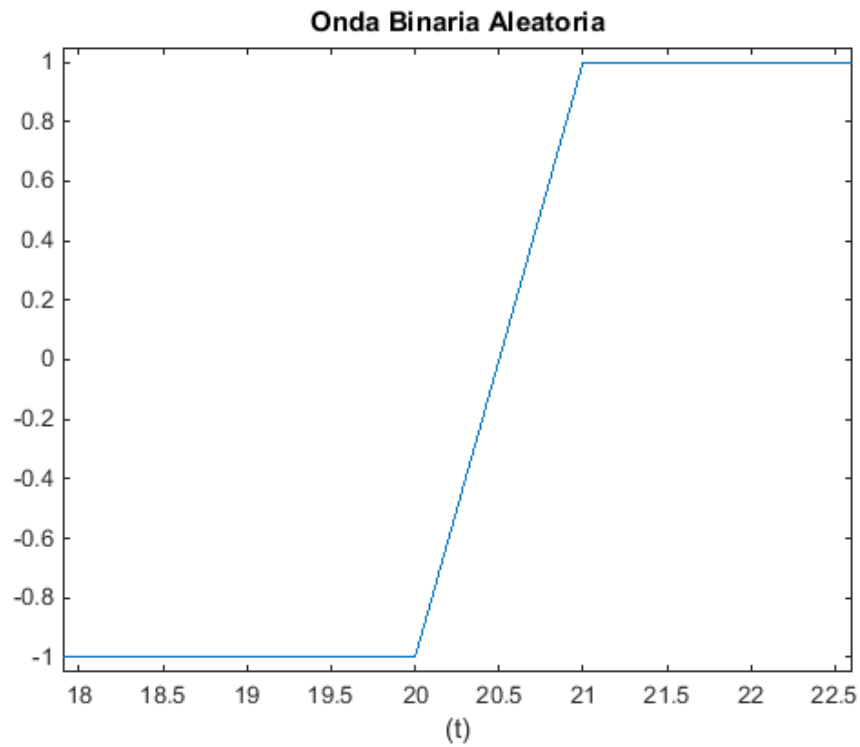


Figura 35: Muestra de la no-idealidad de la conmutación (tiempo $\neq 0$)

Luego, estamos en condiciones de afirmar que no es posible inferir la forma de la señal temporal a partir de la gráfica de autocorrelación. Esto es debido a que la misma puede ser generada a partir de infinitas señales temporales distintas entre ellas. Sabiendo que la correlación proviene de una onda binaria aleatoria, se puede sin embargo, determinar alguno de sus parámetros a través de su gráfica.

Procedemos entonces a describir el script que genera la Onda Binaria Aleatoria. Para dicho objetivo, enumeramos las líneas de código para facilitar su descripción.

```
1- al=round(rand(1,Ns));  
2- ZL=[al;zeros(Ts-1,Ns)];  
3- z1=ZL(:)';  
4- b=ones(1,Ts);  
5- a=1;  
6- signal=filter(b,a,z1);  
7- x = (signal * 2) - 1;
```

- 1- En esta línea se crea un vector (fila, de longitud Ns), que se obtiene a través del redondeo a la unidad, de números aleatorios en el conjunto abierto (0; 1). Por lo tanto, el vector está formado por ceros y unos.
- 2- Generación de la matriz "ZL" (Ts x Ns), cuya primer fila es la creada en la línea anterior.
- 3- Se transpone la matriz de la línea 2, definiéndola como "z1".
- 4- Se define el vector (fila, de longitud Ts), compuesto únicamente por unos.
- 5- Define e inicializa la variable a con valor '1'.
- 6- Se genera la matriz "signal", como resultado de filtrar "z1", utilizando la función filter() a partir del vector 'b' y la variable 'a'. el resultado es una onda aleatoria que toma valores '0' o '1'.
- 7- Se desplaza la onda creada en la línea anterior, asignándole '-1' donde "signal" valía '0', y manteniendo el valor para '1'.

Problema 4:

Analizar la densidad espectral de potencia de una onda aleatoria binaria $x(t)$ modulada por una señal periódica $m(t)$.

Ejecutando sucesivamente el script para cada señal por separado, variando los valores de los parámetros T_s y B , la duración del pulso y el multiplicador de frecuencias respectivamente, pudimos observar el comportamiento general del mismo.

Caso 1: $T_s=20$, $B=100$, $f_c=5$

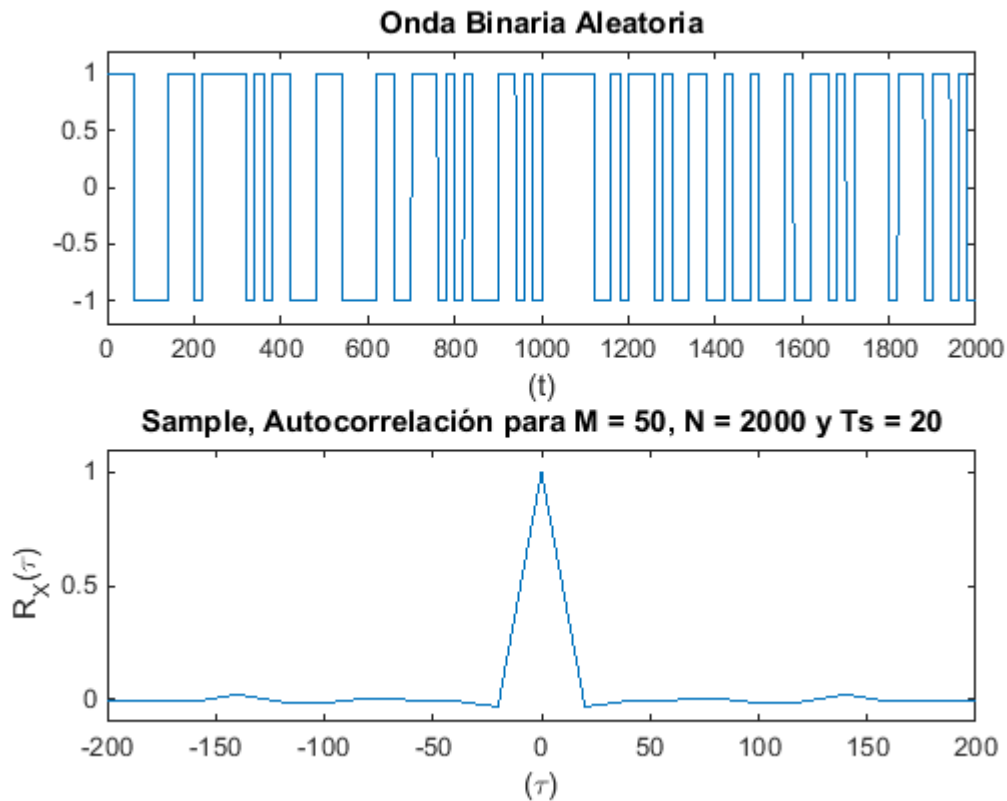


Figura 36: Onda binaria aleatoria y su autocorrelación ($T_s=20$)

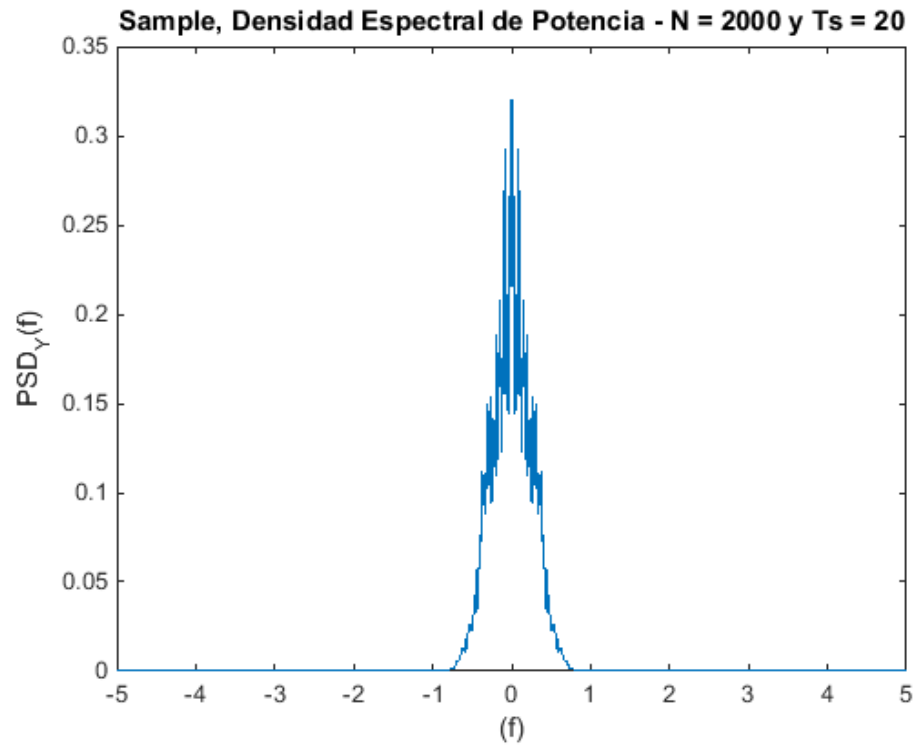


Figura 37: DSP de la OBA (Caso 1)

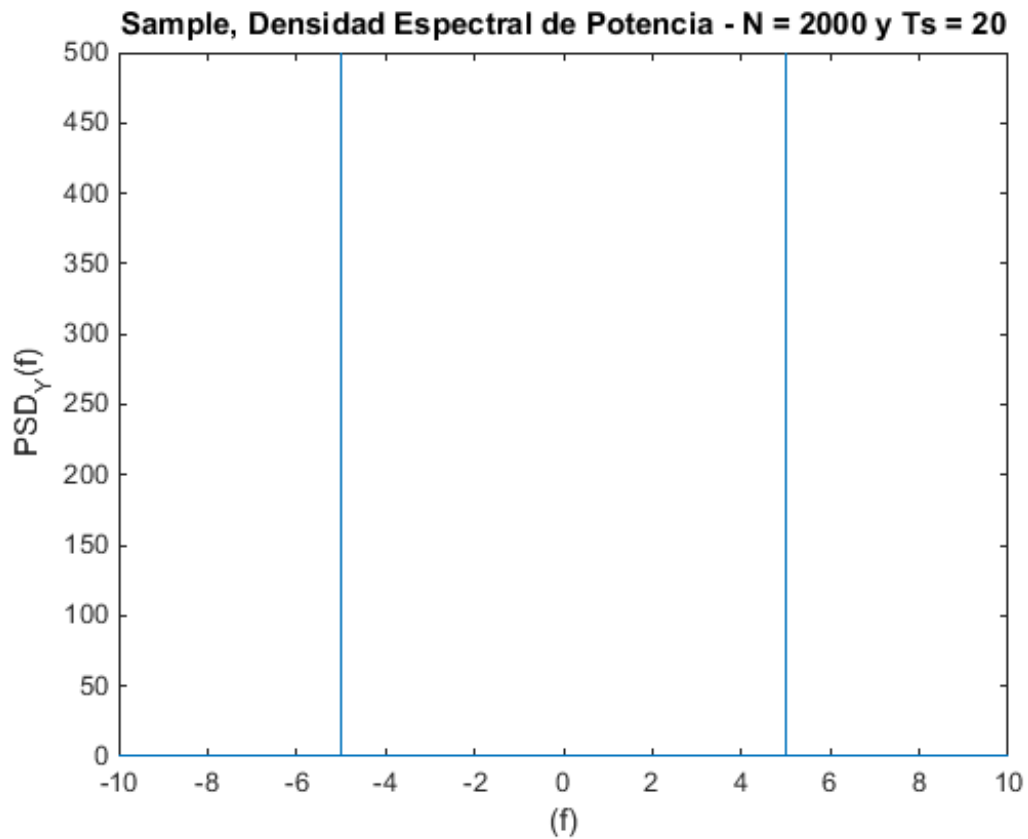


Figura 38: DSP de la portadora $m(t)$ (Caso 1)

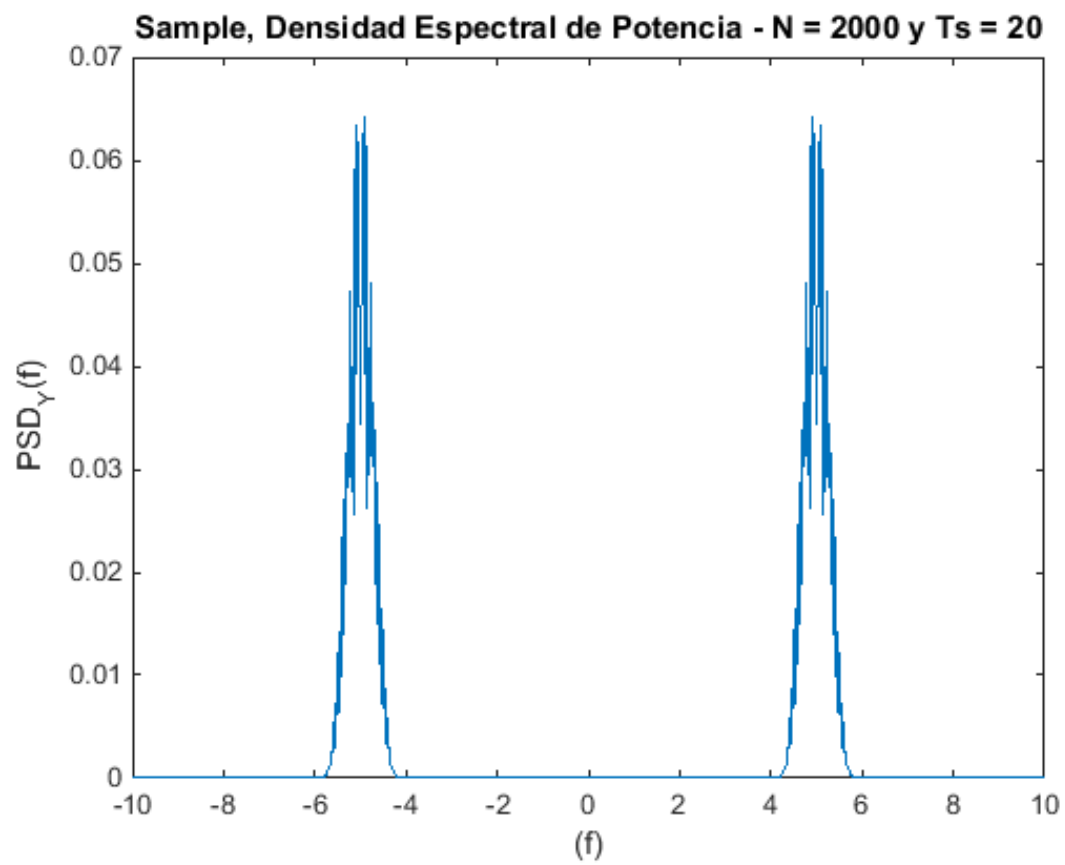


Figura 39: DSP de la señal modulada (Caso 1)

Caso 2: $T_s=50$, $B=100$, $f_c=2$

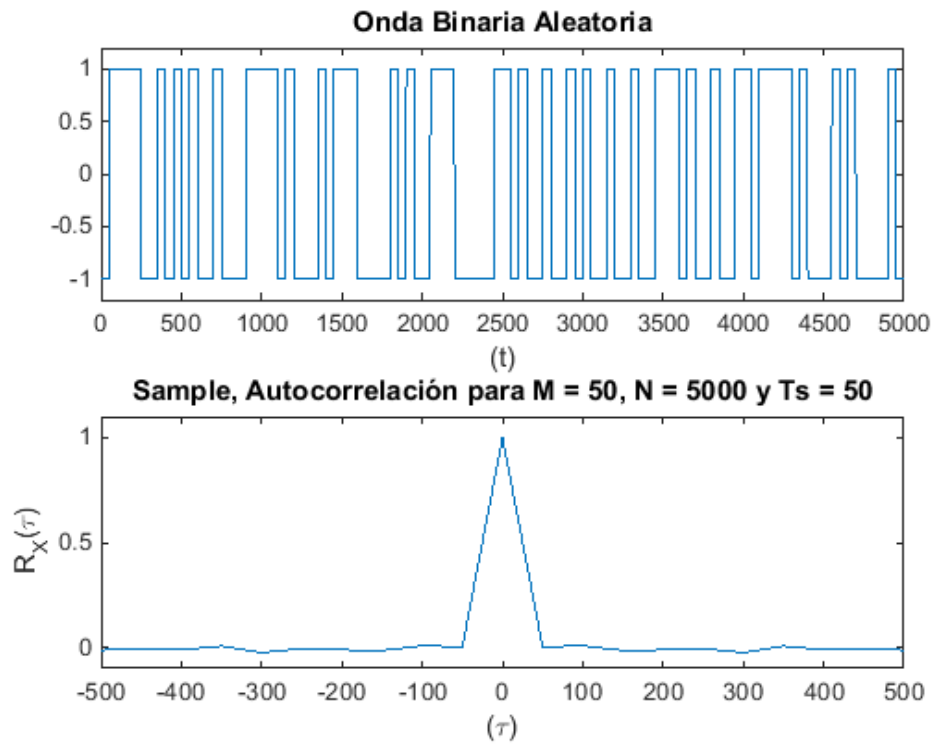


Figura 40: Onda binaria aleatoria y su autocorrelación ($T_s=50$)

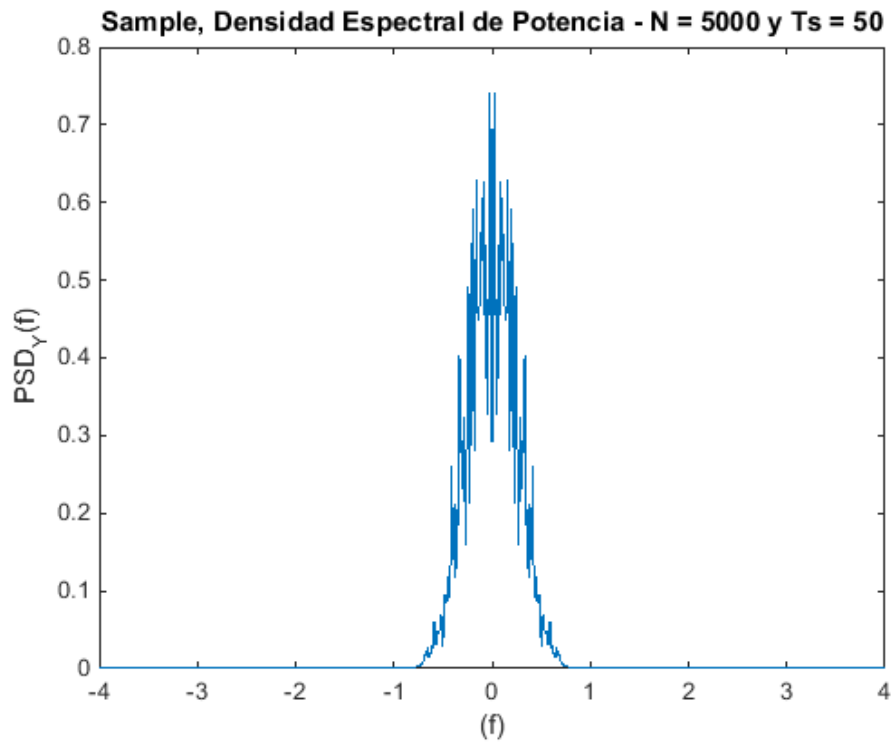


Figura 41: DSP de la OBA (Caso 2)

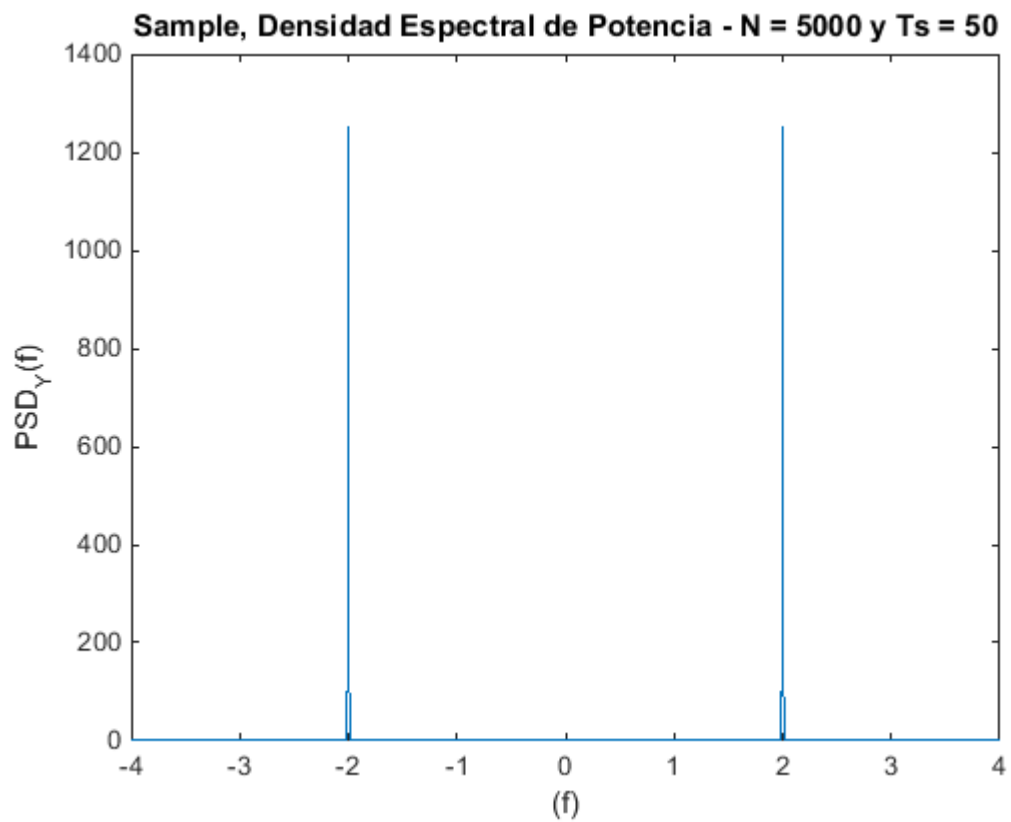


Figura 42: DSP de la portadora $m(t)$ (Caso 2)

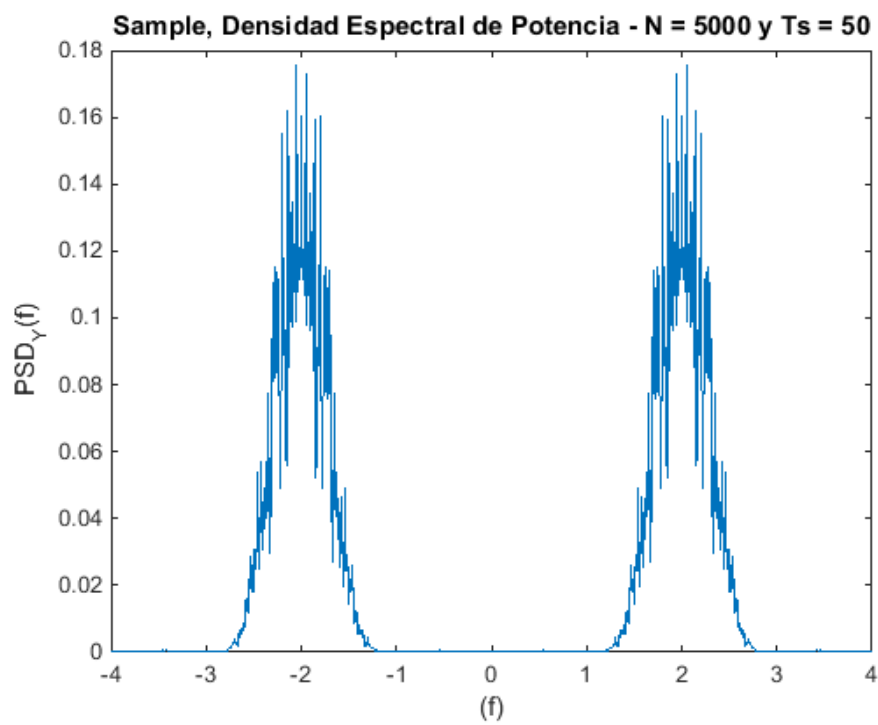


Figura 43: DSP de la señal modulada (Caso 2)

Caso 3: $T_s=30$, $B=300$, $f_c=10$

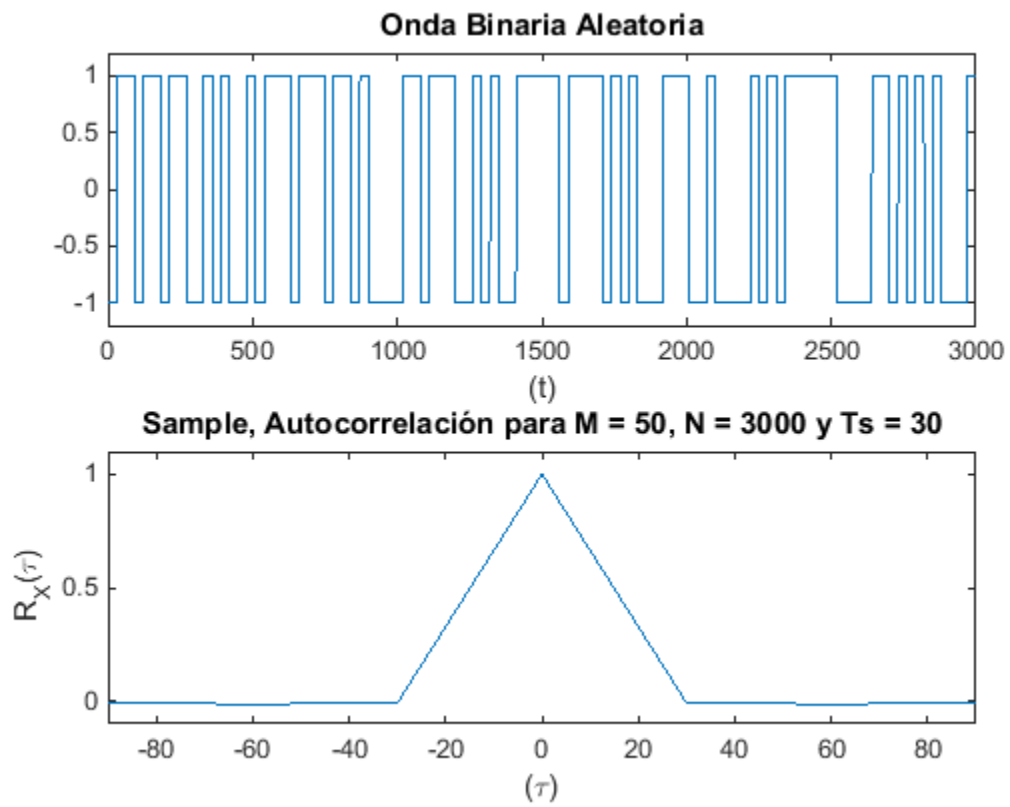


Figura 44: Onda binaria aleatoria y su autocorrelación ($T_s=30$)

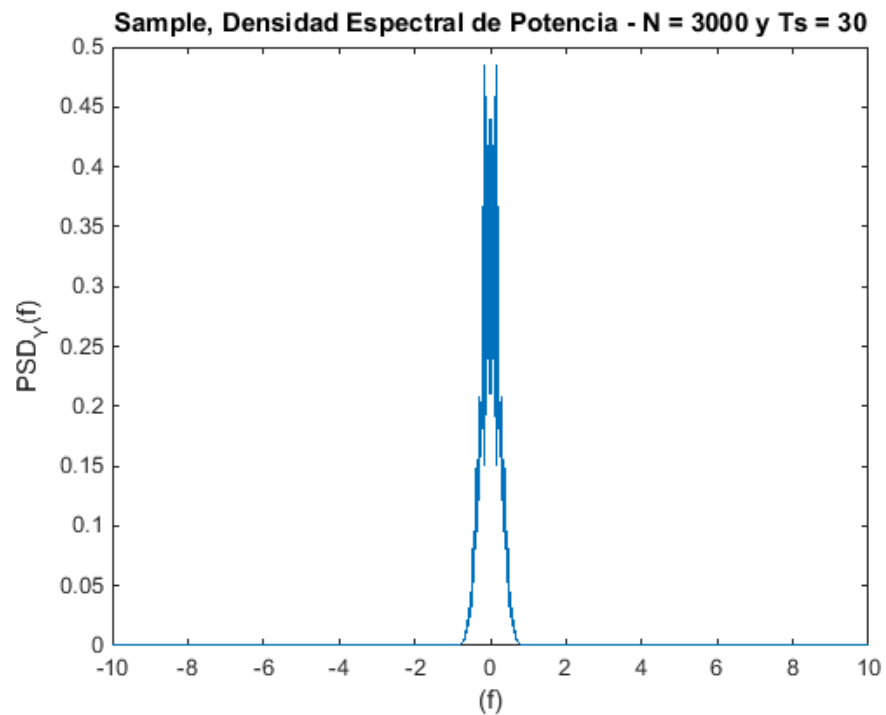


Figura 45: DSP de la OBA (Caso 3)

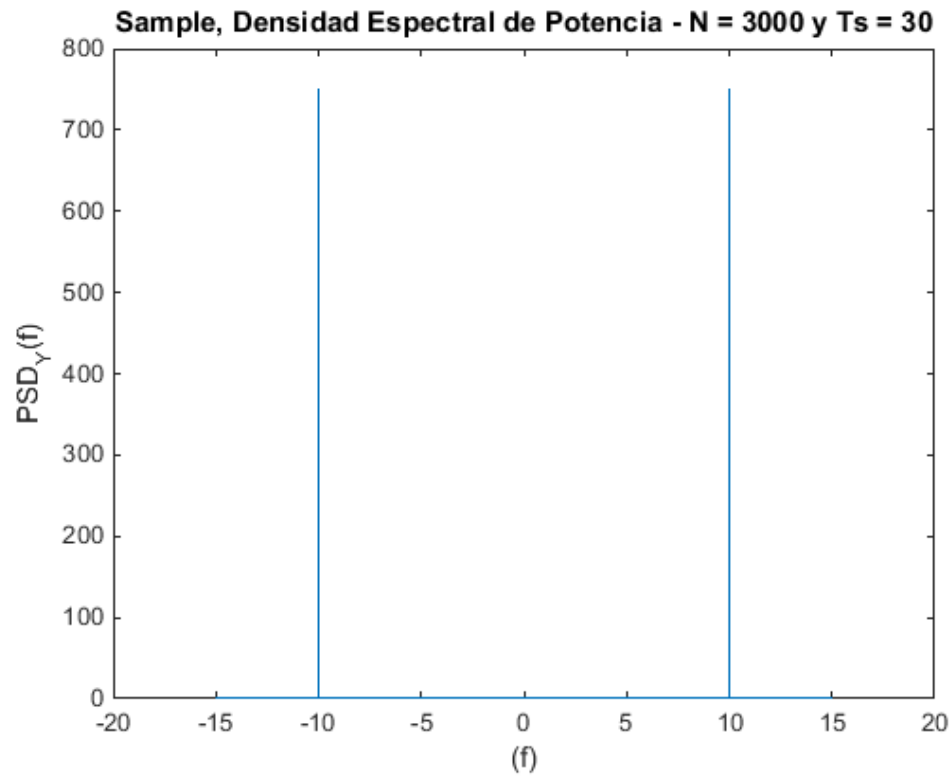


Figura 46: DSP de la portadora $m(t)$ (Caso 3)

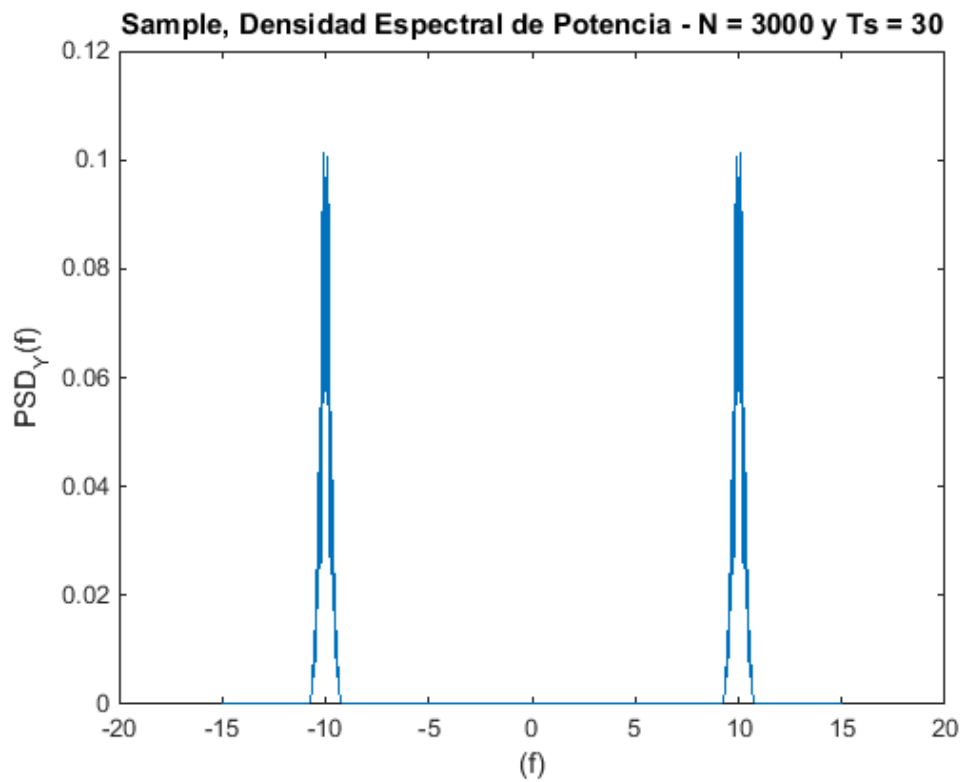


Figura 47: DSP de la señal modulada (Caso 3)

Ambos parámetros se encuentran relacionados por $f_c = B/T_s$, donde f_c es la frecuencia central a la que se dan los impulsos, tanto de la señal modulada como de la portadora (senoidal), en la gráfica de Densidad Espectral de Potencia (DSP).

Al variar cualquiera de ellos, es evidente que se modifica dicha grafica para ambas señales.

El espectro de potencia de la onda binaria aleatoria está centrado en cero y varía con cada ejecución del script, ya que la misma se genera aleatoriamente (figura 37, 41 y 45). En cambio, el proveniente de la portadora está centrado en $\pm f_c$ y está compuesto por dos impulsos (figura 38, 42 y 46). Debido a la forma en la que se genera la señal modulada ($y(t) = x(t) * m(t)$), el espectro de potencia de dicha señal será el espectro de potencia de la onda binaria, centrado en $\pm f_c$, y atenuado en un factor de $1/2$, debido al teorema de modulación. Esto último se puede observar en las figuras 39, 43 y 47.

ANEXO

A continuación, mostramos los scripts y funciones sobre las que se realizó el trabajo práctico.

tp1_p01.m

```
% Materia: Probabilidad y Procesos Aleatorios
% Escuela Ing Electronica - FCEIA - UNR
% Año: 2011 - ver 1.0
% Autor: Ing Jose Coronel
% Email: coronel@cifasis-conicet.gov.ar

clc
clear all

% VARIABLES DEL PROBLEMA
N=5000; % largo de la muestra
MM=[2,200]; % realizaciones de la X(t)
P=4; % factor de multiplicacion
fc=P/N; % frec central -> periodo = N/P
A=sqrt(2); % amplitud de X(t) = constante
% --- fin de VARIABLES

t=0:1:N-1; % vector de tiempo

SNRdb=0; % relacion señal a ruido
snr=10^(SNRdb/10);

e_corr_f=zeros(1,N);

for i=1:2
M=MM(i);

% REALIZACIONES DE X y MUESTREO (vertical)
for trial=1:M

% señal a detectar
theta=2*pi*rand(1); % argumento variable
x=A*cos(2*pi*fc*t+theta); % realizacion de una señal senoidal de
periodo 1/fc

% ruido AWGN (una relizacion)
wn=(randn(1,length(x)))/sqrt(snr)/sqrt(2);

% SELECCION DE LA SEÑAL DE ENSAYO
%y=x;
y=wn;
%y=x+wn;

% autocorrelación por muestreo (vertical)
[e_corr_f, max_corr]=sample_corr_f(y,y,N);
```

```

        % sumatoria de resultados parciales
        e_corr_f=e_corr_f+e_corr_f;
end

Ryy = e_corr_f/M; % autocorrelación como media del muestreo

% Graficos de Señal con Ruido
figure(1)
subplot(2,1,i)
plot(t,y);
grid on
str = sprintf('Señal con ruido blanco, M = %2.0f y N = %2.0f', M, N);
title(str)
xlabel('(t)')
ylabel('y(t)')
%axis([0 2/fc -3 3])

% Graficos de Correlacion
figure(2)
subplot(2,1,i)
plot(-(N/2):(N/2)-1, Ryy);
grid on
str = sprintf('Autocorrelación (sample), M = %2.0f y N = %2.0f', M, N);
title(str)
xlabel('(\tau)')
ylabel('R_X(\tau)')
%axis([-1.5/fc 1.5/fc -2 2])

end

```

tp1_p02.m

```

% Materia: Probabilidad y Procesos Aleatorios
% Escuela Ing Electronica - FCEIA - UNR
% Año: 2011 - ver 1.0
% Autor: Ing Jose Coronel
% Email: coronel@cifasis-conicet.gov.ar

clc
clear all

% VARIABLES DEL PROBLEMA
N=5000;           % largo de la muestra
P=4;              % factor de multiplicacion
fc=P/N;           % frec central -> periodo = N/P
A=sqrt(2);        % amplitud de X(t) = constante
SNRdb=0;          % relacion señal a ruido dB

t=0:1:N-1;        % vector de tiempo
snr=10^(SNRdb/10);

% señal senoidal
theta=2*pi*rand(1); %random arg
x = A*cos(2*pi*fc*t+theta);

```



```

% ruido AWGN
snr=10^(SNRdb/10);
wn=(randn(1,length(x)))/sqrt(snr)/sqrt(2);

% SELECCION DE LA SEÑAL DE ENSAYO
%y=x;
%y=wn;
y=x+wn;

% autocorrelación popr media temporal
[Ryy] = time_corrcoef(y,N);

% Graficos de Señal con Ruido
figure()
subplot(211)
plot(t,y);
str = sprintf('Señal con ruido, N = %2.0f', N);
title(str)
xlabel('(t)')
ylabel('y(t)')
%axis([0 2/fc -2 2])

% Graficos de Correlacion
subplot(212)
plot(-(N/2):(N/2)-1, Ryy);
grid on
str = sprintf('Autocorrelación (time), N = %2.0f', N);
title(str)
xlabel('(\tau)')
ylabel('R_X(\tau)')
%axis([-1.5/fc 1.5/fc 0 2])

```

tp1_p03.m

```

% Materia: Probabilidad y Procesos Aleatorios
% Escuela Ing Electronica - FCEIA - UNR
% Año: 2011 - ver 1.0
% Autor: Ing Jose Coronel
% Email: coronel@cifasis-conicet.gov.ar

clc
clear all

% VARIABLES DEL PROBLEMA
%-----
Ns=100;           % Cantidad de Pulsos
Ts=20;           % Duración del pulso (seg)
N=Ns*Ts;         % Largo de la Muestra
dT=1;            % Modifica la duracion en dT de los pulsos..
t=Tsy...
A=sqrt(2);       % Amplitud de la O.Moduladora
B=100;           % Multiplicafor de frec -> cos: fc=B*f
%-----

```

```

fc=(B/Ts);           % Frec central de la moduladora
t=dT*(0:Ns*Ts-1)/Ts; % Vector de tiempo

%----- realizaciones de la BRW
                        % Bitgeneration
%rand('seed',0)        % reset de la semilla
al=round(rand(1,Ns));

ZL=[al;zeros(Ts-1,Ns)]; % Oversampling
zl=ZL(:)';

b=ones(1,Ts);         % Pulsforming
a=1;
signal=filter(b,a,zl); % onda aleatoria entre 0y1

x = (signal * 2) - 1;  % Onda Binaria Aleatoria
%-----

% % Onda Moduladora
% theta=2*pi*rand(1); %random arg
% m = A * cos(2*pi*fc*t + theta);

% Realización
y = x;

% autocorrelación por media temporal
[Ryy]=time_corrcoef(y,N);

% Grafica de Autocorrelación
figure()
% subplot(211)
plot(y)
% title('Onda Binaria Aleatoria')
xlabel('(t)')
% xlim([0 (3*Ts)])
ylim([-1.2 1.2])

figure()
% subplot(212)
plot(-(N/2):(N/2)-1,Ryy);
str = sprintf('Sample, Autocorrelación para N = %2.0f y Ts = %2.0f', N,
Ts);
title(str)
xlabel('(\tau)')
ylabel('R_X(\tau)')
xlim([- (3*Ts) (3*Ts)])

```

tp1_p04.m

```

% Materia: Probabilidad y Procesos Aleatorios
% Escuela Ing Electronica - FCEIA - UNR
% Año: 2011 - ver 1.0
% Autor: Ing Jose Coronel
% Email: coronel@cifasis-conicet.gov.ar

```

```

clc
clear all

% VARIABLES DEL PROBLEMA
%-----
Ns=100;           % Cantidad de Pulsos
Ts=20;           % Duración del pulso (seg)
N=Ns*Ts;         % Largo de la Muestra
dT=1;            % Modifica la duracion en dT de los pulsos..
t=Tsy...
A=sqrt(2);       % Amplitud de la O.Moduladora
B=100;           % Multiplicador de frec -> cos: fc=B*f
M=50;           % Cantidad de Realizaciones (samples)
%-----

fc=(B/Ts);       % Frec central de la moduladora
                % cos(2.pi.fc.tc) tiene periodo 2.pi si tc=1/fc
                % vector de tiempo tc = unidades/Ts
e_corr_f=zeros(1,N); % Inicializacion de Vector Resultado

for trial=1:M
    % Vector de tiempo
    t=dT*(0:Ns*Ts-1)/Ts;
    %-----
    % realizaciones de la BRW
    % Bitgeneration
    % reset de la semilla
    %rand('seed',0)
    al=round(rand(1,Ns));
    % Oversampling
    ZL=[al;zeros(Ts-1,Ns)];
    zl=ZL(:)';
    % Pulsforming
    b=ones(1,Ts);
    a=1;
    signal=filter(b,a,zl);
    x = (signal * 2) - 1;
    %-----
    % Onda Moduladora
    % random arg
    theta=2*pi*rand(1);
    m = A * cos(2*pi*fc*t + theta);

    % Realización del proceso aleatorio
    % SELECCION DE LA FUNCION DE ANALISIS
    y = x.*m;      % y = BRW * cos
    %y = x;        % y = BRW
    %y = m;        % y = onda senoidal

    % autocorrelación
    [e_corr_f, max_corr]=sample_corr(y,y,(N));

    % autocorrelación por muestreo
    e_corr_f=e_corr_f+e_corr_f;
end

```

```

Ryy=e_corr_f/M;

% % Grafica de Autocorrelación
figure()
subplot(211)
plot(y)
title('Onda Binaria Aleatoria')
xlabel('(t)')
xlim([0 (3*Ts)])
ylim([-1.2 1.2])
%
subplot(212)
plot(-(N/2):(N/2)-1,Ryy);
str = sprintf('Sample, Autocorrelación para M = %2.0f, N = %2.0f y Ts = %2.0f', M, N, Ts);
title(str)
xlabel('(\tau)')
ylabel('R_X(\tau)')
xlim([- (3*Ts) (3*Ts)])

% CALCULO AUXILIAR DSP de una señal FINITA !!!!
%-----
% Calculo - Grafica de la DSP
S=fft(Ryy);
Syy=fftshift((abs(S).^2)/(N));

ff=-(N/2):(N/2)-1;      % calc. aux. - creo eje de frec
frec=ff./Ns;            % frec = 1 / Ns

figure()
plot(frec,Syy);
str = sprintf('Sample, Densidad Espectral de Potencia - N = %2.0f y Ts = %2.0f', N, Ts);
title(str)
xlabel('(f)')
ylabel('PSD_Y(f)')
% xlim([- (2*fc) (2*fc)])

```

sample_corr.m

```

% Materia: Probabilidad y Procesos Aleatorios
% Escuela Ing Electronica - FCEIA - UNR
% Año: 2011 - ver 1.0
% Autor: Ing Jose Coronel
% Email: coronel@cifasis-conicet.gov.ar

% Función: autocorrelation/cross-correlation - sample avr

function[corr_f, max_cross_corr]=sample_corr_f(u,v,N)

max_cross_corr=0;
tt=length(u);
for m=0:tt

```

