S&P 500 Volatilitätsprognose: Ein Vergleich von GARCH-Modellen

Diskrete Mathematik und Stochastik - WS 25/26 - Prof. Dr. Marina Arendt

Motivation

Warum? S&P 500 ist geprägt von Phasen extremer Ruhe und plötzlicher Schocks

Wofür? Bestmögliche Volatilitätsvorhersage, für begründete Investment Empfehlungen

Wie? Vergleich der Vorhersagen der GARCH-Modelle auf Basis der historischen S&P 500 Daten

Frage: Welches GARCH-Modell ist am besten für eine Volatilitätsvorhsage des S&P 500 geeignet?

Datenanalyse S&P 500

Übersicht

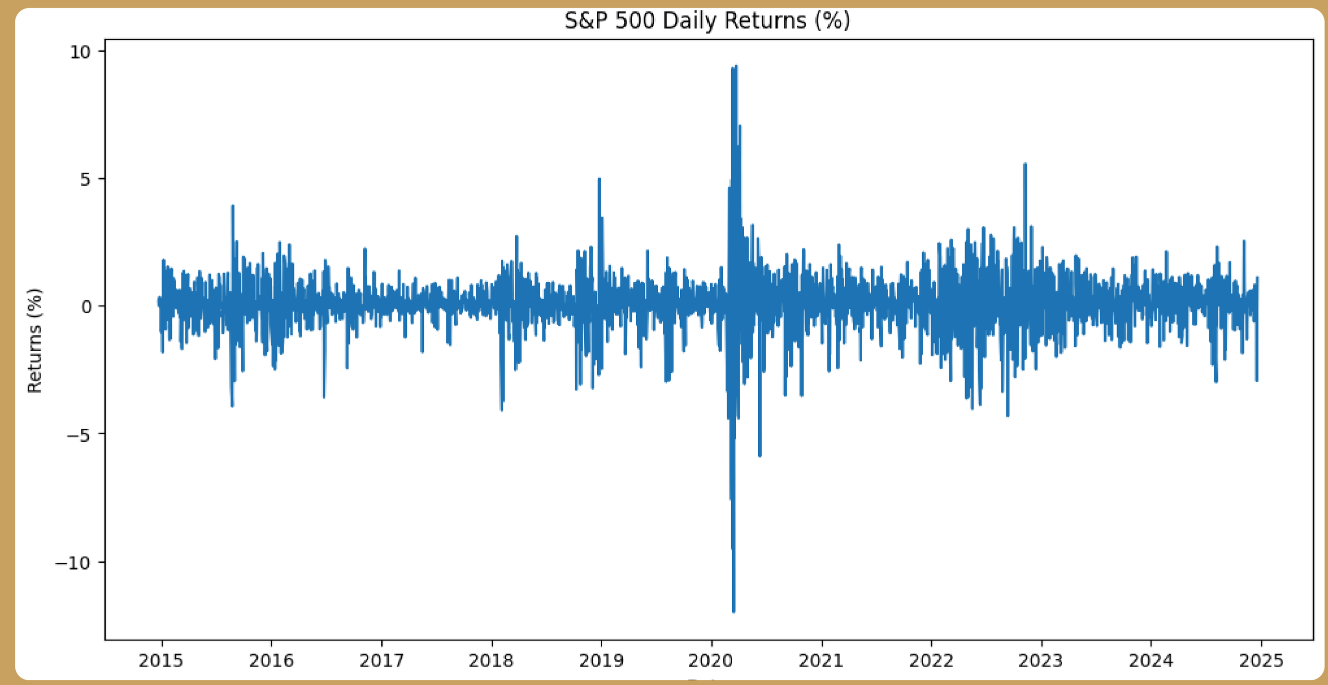
Beobachtungszeitraum	04.01.2010 – 20.12.2024
Anzahl der Handelstage (N gesamt)	617.831 (Gesamtzeilen: 1.891.536)

Datenqualität

Fehlende Werte (Gesamt)	67.34 %
Vollständige Zeitreihen (>10 Jahre)	94.2 % der Ticker (162/172)

Kurs-Metriken

Eröffnungskurs (Open)	87,46 $ [32,69; 105,00]
Schlusskurs (Close)	87,47 $ [32,70; 105,02]
Bereinigter Schlusskurs (Adj Close)	79,67 $ [26,57; 94,83]
Handelsvolumen (Volume)	9,35 Mio. [1,14; 5,66]
Tägliche Volatilität (High-Low Diff)	1,94 $ [0,58; 2,16]



Die Datenanalyse zeigt, dass der Datensatz den Index über einen langen Zeitraum hinweg ausreichend für eine Zeitreihenanalyse abbildet. Die Kursmetriken weisen auf einen liquiden Markt mit typischen Schwankungen hin, wobei Volatilität eine zentrale Rolle für die Renditedynamik spielt.

Das Diagramm der täglichen Renditen verdeutlicht ausgeprägtes Volatilitäts-Clustering: Phasen erhöhter Unsicherheit treten gebündelt auf und wechseln sich mit ruhigeren Marktphasen ab, was auf eine zeitlich variierende Varianz und die heteroskedastische Struktur der Renditen hinweist.

ARCH und GARCH in der Zeitreihenanalyse

ARCH (Engle 1982)

- Autoregressive Conditional Heteroskedasticity
- Modelliert zeitlich variable bedingte Varianzen
- Abhängig von vergangenen quadrierten Fehlertermen
- Volatilitätsclustering

GARCH (Bollerslev 1986)

- Generalized ARCH
- Erweitert ARCH mit verzögerten bedingten Varianzen
- Weniger Parameter
- Stationaritätsbedingung: $\sum \alpha_i + \sum \beta_j < 1$

Zeitreihen-analysen

- **ARIMA:**
  - Modelliert bedingte Mittelwerte
- **ARCH/GARCH:**
  - Modellieren bedingte Varianzen
- **Anwendung in der Finanzökonomie**
- **Kombination möglich**

Modelle

GARCH(1,1)

Auf Phasen hoher Volatilität folgt meist wieder hohe Volatilität. Das Modell ist symmetrisch: Ein Kurssturz von 2 % beeinflusst die Vorhersage exakt genauso wie ein Kursgewinn von 2 %.

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$$

GJR-GARCH

Erweitert GARCH um den Leverage-Effekt abzubilden. Die Volatilität steigt nach Kursverlusten meist stärker an als nach Gewinnen. Der Term γ schlägt nur bei „Bad News" zu. Das macht die Prognose in Krisenzeiten präziser.

$$\sigma_t^2 = \omega + (\alpha + \gamma I_{t-1})\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$$

EGARCH

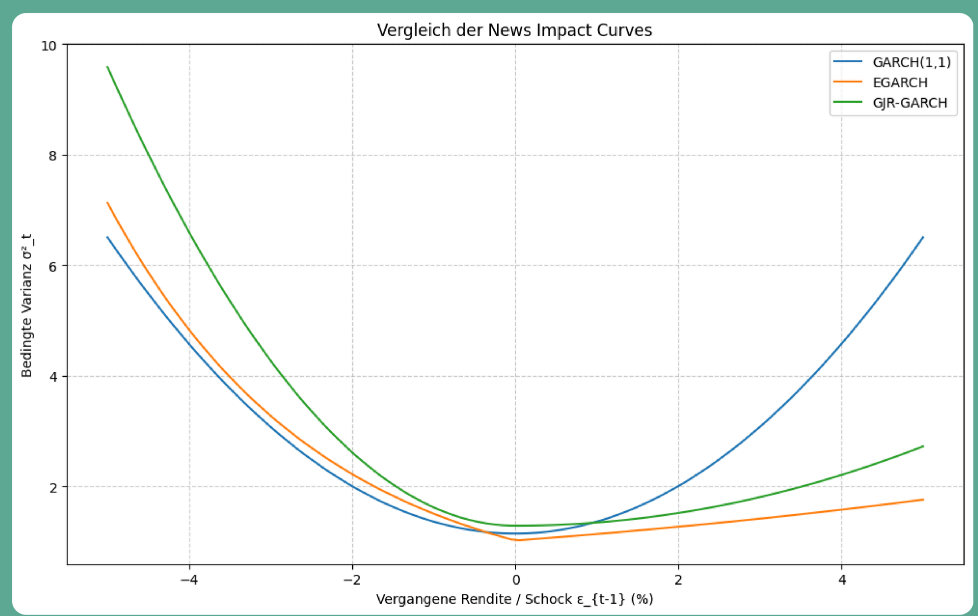
Das EGARCH-Modell modelliert den Logarithmus der Varianz:

1. Die prognostizierte Varianz wird mathematisch niemals negativ.
2. Erlaubt eine exponentielle Reaktion auf Marktschocks: liefert oft eine bessere Out-of-Sample-Performance.

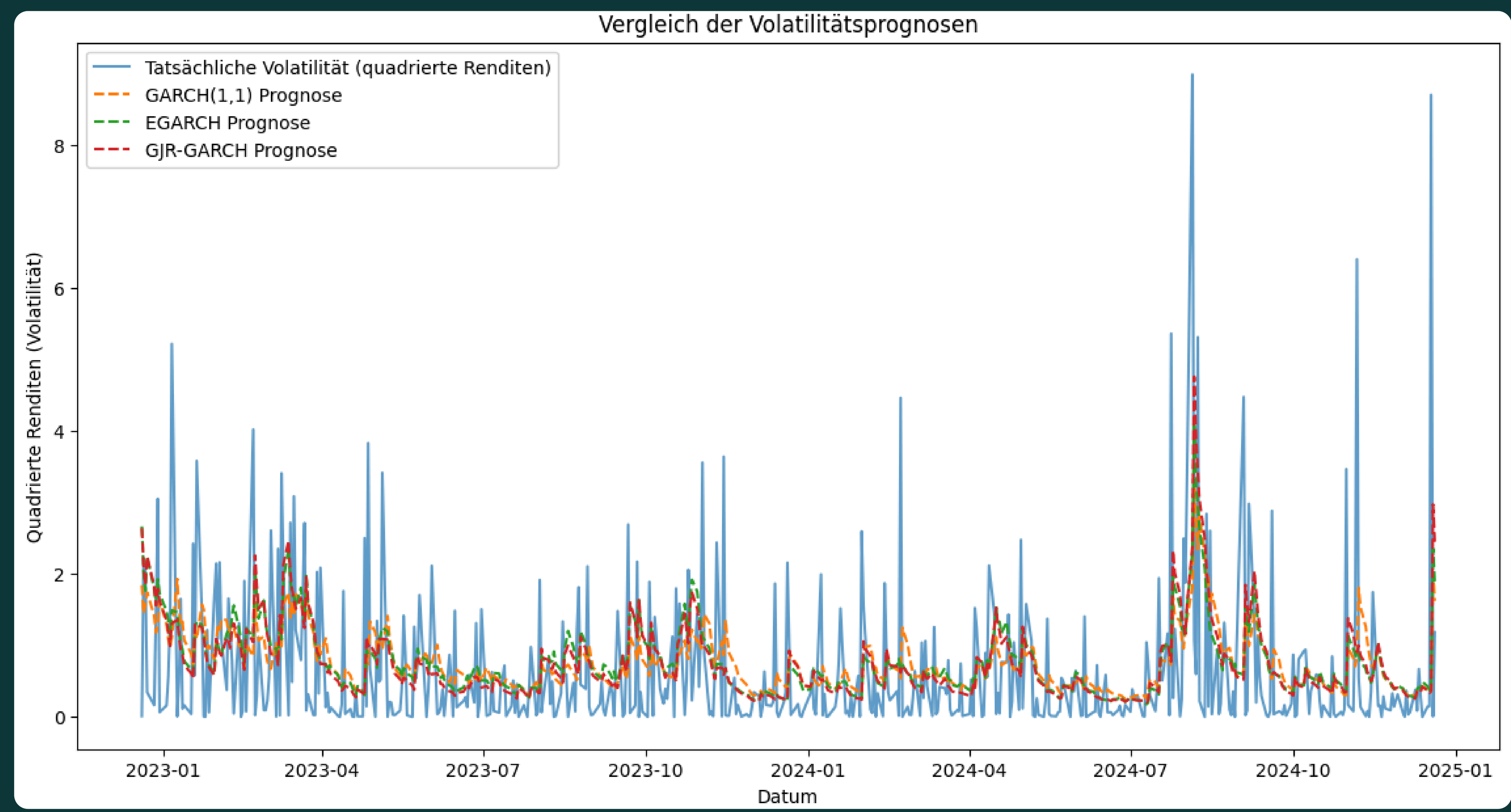
$$ln\left(\sigma_t^2\right) = \omega + \alpha\left[|z_{t-1}| - E|z_{t-1}|\right] + \gamma z_{t-1} + \beta ln\left(\sigma_{t-1}^2\right)$$

mit $z_t = \dfrac{\varepsilon_t}{\sigma_t}$

- γ: **Asymmetrie-Parameter**. Steuert die Reaktion auf negative Schocks.
- I_{t-1}: **Indikator-Funktion**. Ist 1 wenn die Rendite gestern negativ war, und 0, wenn sie positiv war.
- $|\dots|$: Betrag des standardisierten Schocks.
- σ_t^2: Prognostizierte Varianz (Volatilität) für heute (t).
- ω: Konstantes Grundrauschen des Marktes.
- ε_{t-1}^2: **ARCH-Term**: Der quadrierte Schock (Rendite) des Vortages.
- β: **GARCH-Term**: Die Persistenz (das „Gedächtnis") der gestrigen Varianz.



Das Diagramm zeigt den Leverage-Effekt: Negative Renditen („Bad News") beeinflussen die bedingte Varianz bei EGARCH und GJR-GARCH stärker als bei GARCH(1,1).



Das Diagramm vergleicht die tatsächliche Volatilität mit den Prognosen der Modelle GARCH(1,1), EGARCH und GJR-GARCH. Während GARCH(1,1) stärker ausgeprägte Volatilitätscluster eher glättet, reagieren EGARCH und GJR-GARCH sensibler auf starke, insbesondere negative Renditen und bilden Volatilitätsspitzen schneller und asymmetrischer ab.

Fehlermaß der Volatilitätsprognosen

Modell	Mean Squared Error (MSE)	Mean Absolut Error (MAE)
GARCH(1,1)	1,179	0,732
EGARCH	1,146	0,715
GJR-GARCH	1,188	0,713
Baseline (Avg.)	1,693	1,12

Die Ergebnisse bestätigen, dass modellbasierte Volatilitätsprognosen der Durchschnittsannahme klar überlegen sind. Insbesondere EGARCH und GJR-GARCH profitieren von ihrer asymmetrischen Struktur, was sich sowohl in den geringeren Fehlermaßen als auch im dargestellten Kurvenverlauf der Volatilitätsprognosen widerspiegelt.

Vergleich mit der Literatur

Quelle	Fokus	Gewinner-Modell	Grund
Dol (2021)	Mittlerer Fehler (MSE) in Krisen	Standart-GARCH (t-dist)	Robustheit, geringes Overfitting
Chen (2023)	Finanzkrise 2008	GJR-GARCH	Beste Erfassung systematischer Angst
Chen (2023)	COVID-19 Pandemie	Standart-GARCH	Stabile Prognose bei exogenem Schock
Andersson (2014)	Value-at-Risk (Risikohöhe)	EGARCH (t-dist)	Beste Erfassung von Crash-Risiken

Vergleich von Quellen zur Ananlyse des S&P 500 mithilfe von GARCH und Hybriden Modellen

Das **robuste Standard-GARCH** liefert bei **reinen Prognosen** oft die geringsten Abweichungen (MSE). Für das **Risikomanagement (VaR)** sind asymmetrische Modelle wie **EGARCH oder GJR-GARCH** zwingend erforderlich, da nur sie Crash-Risiken realistisch abbilden. **Maximale Präzision** liefern moderne **hybride Modelle.**

Fazit

Modellwahl & Nutzwert

Platz	Modell
1.	EGARCH
2.	GJR-GARCH
3.	GARCH(1,1)

Warum?

- **Leverage-Effekt: Der S&P 500 reagiert asymetrisch**
- **Schlechte Nachrichten verursachen höhere Volatiliät**

Investment-Empfehlung & Risikomanagement:

GARCH-Modelle prognostizieren die **Intensität der Marktbewegung,** nicht deren **Richtung**. Sie sind unverzichtbare Werkzeuge für die Berechnung des **Value-at-Risk**, bilden aber allein **keine vollständige Handelsstrategie** ab.

Für die **Zukunft** versprechen **hybride Modelle**, welche die statistische Rigorosität der Ökonometrie mit der Mustererkennung von Machine Learning (z.B. LSTM) kombinieren, eine noch robustere Erfassung von extremen Marktereignissen.

Quellen:

Bollerslev, T. (1986). Journal of Econometrics, 31(3), 307–327.
Mustapa, F. H., & Ismail, M. T. (2019). Journal of Physics: Conference Series, 1366, 012130.
LaBarr, A. (2014). SAS Global Forum 2014, Paper 1456.
Awartani, B. M. A., & Corradi, V. (2005). International Journal of Forecasting, 21(1), 167–183.
Glosten, L. R., Jagannathan, R., & Runkle, D. E. (1993). The Journal of Finance, 48(5), 1779–1801.
Nelson, D. B. (1991). Econometrica, 59(2), 347–370.
Andersson, O., & Haglund, E. (2014). Bachelor Thesis, Department of Statistics, Uppsala University.
Chen, X. (2023). SHS Web of Conferences, 169, 01077.
Dol, M. (2021). Bachelor Thesis, Erasmus School of Economics, Erasmus University Rotterdam.
Perekhodko, A., & Slepaczuk, R. (2025). arXiv preprint, arXiv:2512.12250.

Zum Datensatz:

Zum Code:

Veit Wetzel, Mauritz Langer