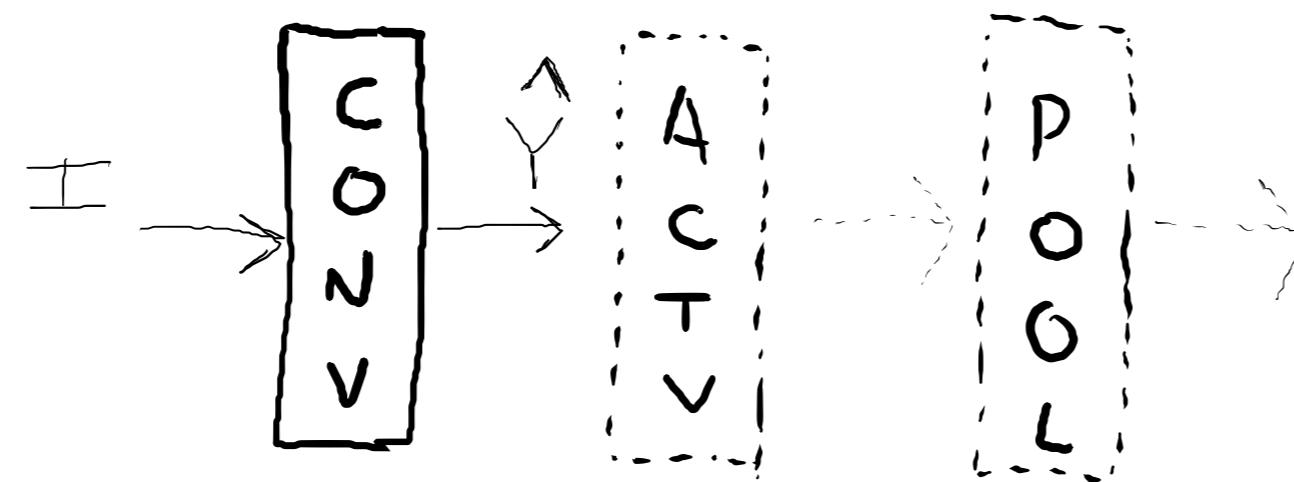


Back-propagation en una capa de convolución



Consideraciones:

- I 1 solo canal (escala de grises) $\Rightarrow I [H, W]$
- w 1 solo filtro (kernel) $\Rightarrow w [k_1, k_2]$
- padding \rightarrow valid $\Rightarrow \hat{Y} [H - k_1 + 1, W - k_2 + 1]$
- stride $\rightarrow 1$

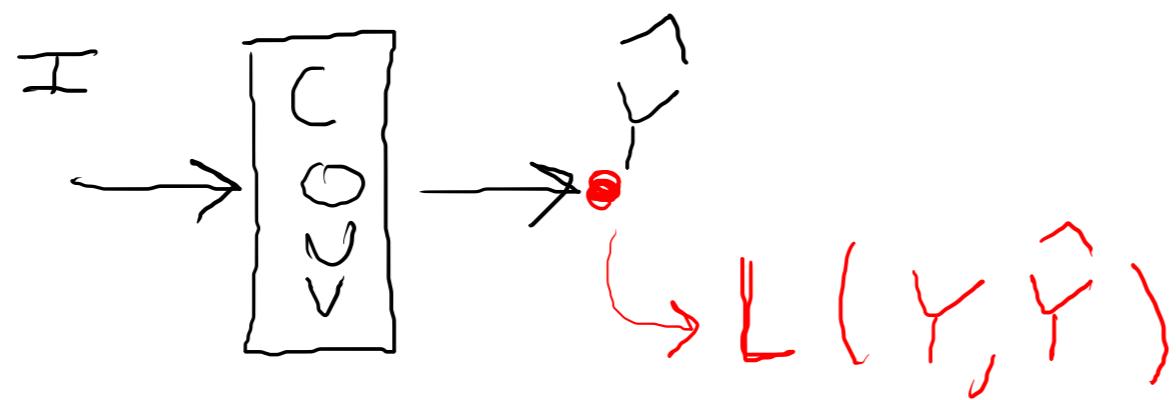
Operaciones

$$\text{convolución } (w * I)_{i,j} = \sum_{m=0}^{k_1-1} \sum_{n=0}^{k_2-1} I(i-m, j-n) w(m, n)$$

$$\text{correlación cruzada } (w \otimes I)_{i,j} = \sum_{m=0}^{k_1-1} \sum_{n=0}^{k_2-1} I(i+m, j+n) w(m, n)$$

Nuestra capa de CONV realiza la sig. operación:

$$\hat{Y}(i,j) = (w \circledast I)_{(i,j)} + b = \sum_{m=0}^{k_1-1} \sum_{n=0}^{k_2-1} I(i+m, j+n) w(m,n) + b$$



Nuestra función de costo L en la salida de dicha capa va a ser función de el valor verdadero Y y la salida de nuestra capa \hat{Y} . Queremos hallar:

1º $\frac{\partial L}{\partial w}$ → para poder optimizar los parámetros del kernel

2º $\frac{\partial L}{\partial I}$ → para poder pasar el gradiente a la capa previa

tambien será necesario hallar

$\frac{\partial L}{\partial b}$ para optimizar b ..

Comencemos con $\frac{\partial L}{\partial w}$

¿Cómo afecta a la salida \hat{Y} variar 1 peso $w(m', n')$?



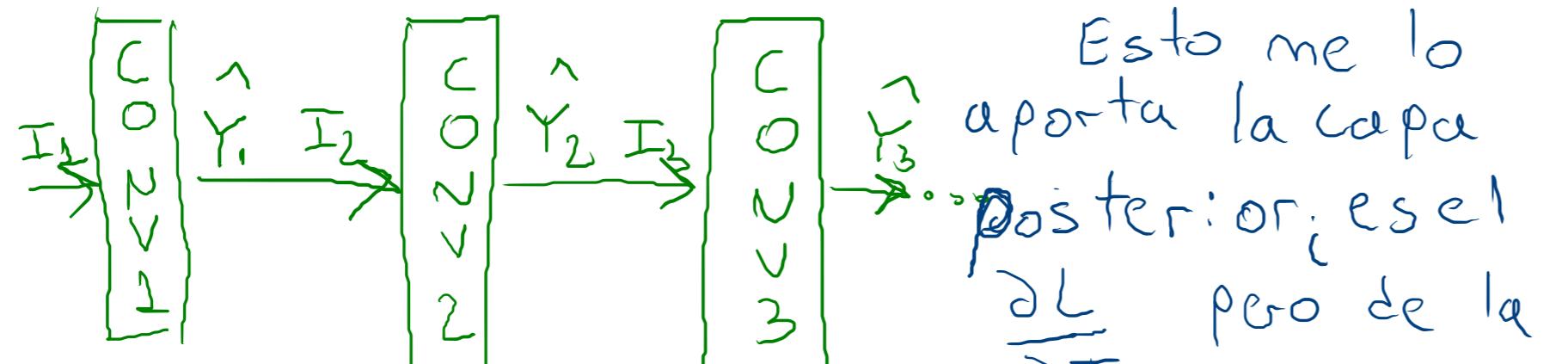
$$\frac{\partial L}{\partial w(m', n')} = \underbrace{\sum_{i=0}^{H-k_1} \sum_{j=0}^{W-k_2} \frac{\partial L}{\partial \hat{Y}(i,j)} \cdot \frac{\partial \hat{Y}(i,j)}{\partial w(m', n')}}_{\text{Sumatoria en todo } \hat{Y}}$$

$\Delta w(m', n')$
afecta a
todos los
pixeles de \hat{Y}

↓
 L se ve afectado
por cada pixel de \hat{Y}

entonces:

$$\frac{\partial L}{\partial w(m', n')} = \sum_{i=0}^{H-k_1} \sum_{j=0}^{W-k_2} \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \hat{Y}(i, j)}}_{\text{. . .}} \cdot \underbrace{\frac{\partial \hat{Y}(i, j)}{\partial w(m', n')}}_{\text{1}}$$



aquí tenemos que trabajar

$\hat{Y}(i, j)$
por definición...

$$\frac{\partial \hat{Y}(i, j)}{\partial w(m', n')} = \frac{\partial}{\partial w(m', n')} \left[\sum_{m=0}^{k_1-1} \sum_{n=0}^{k_2-1} I(i+m, j+n) \cdot w(m, n) + b \right]$$

sumo en todo el kernel w

$$\frac{\partial \hat{Y}(i,j)}{\partial w(m',n')} = \frac{\partial}{\partial w(m',n')} \left[\sum_{m=0}^{k_1-1} \sum_{n=0}^{k_2-1} I(i+m, j+n) \cdot w(m, n) + b \right]$$

Hay 2 solo términos donde
 $m = m'$
 $n = n'$

$$= \frac{\partial}{\partial w(m',n')} \left[\dots + I(i+m', j+n') \cdot w(m', n') + \dots + b \right]$$

Al derivar se eliminan todos los términos que no tienen $w(m',n')$

$$\frac{\partial \hat{Y}(i,j)}{\partial w(m',n')} = I(i+m', j+n')$$

Sust. tuimos
en **1**

$$\frac{\partial L}{\partial w(m', n')} = \sum_{i=0}^{H-k_1} \sum_{j=0}^{W-k_2} \frac{\partial L}{\partial Y(i, j)} \cdot I(i+m', j+n')$$

lo hallado

1'

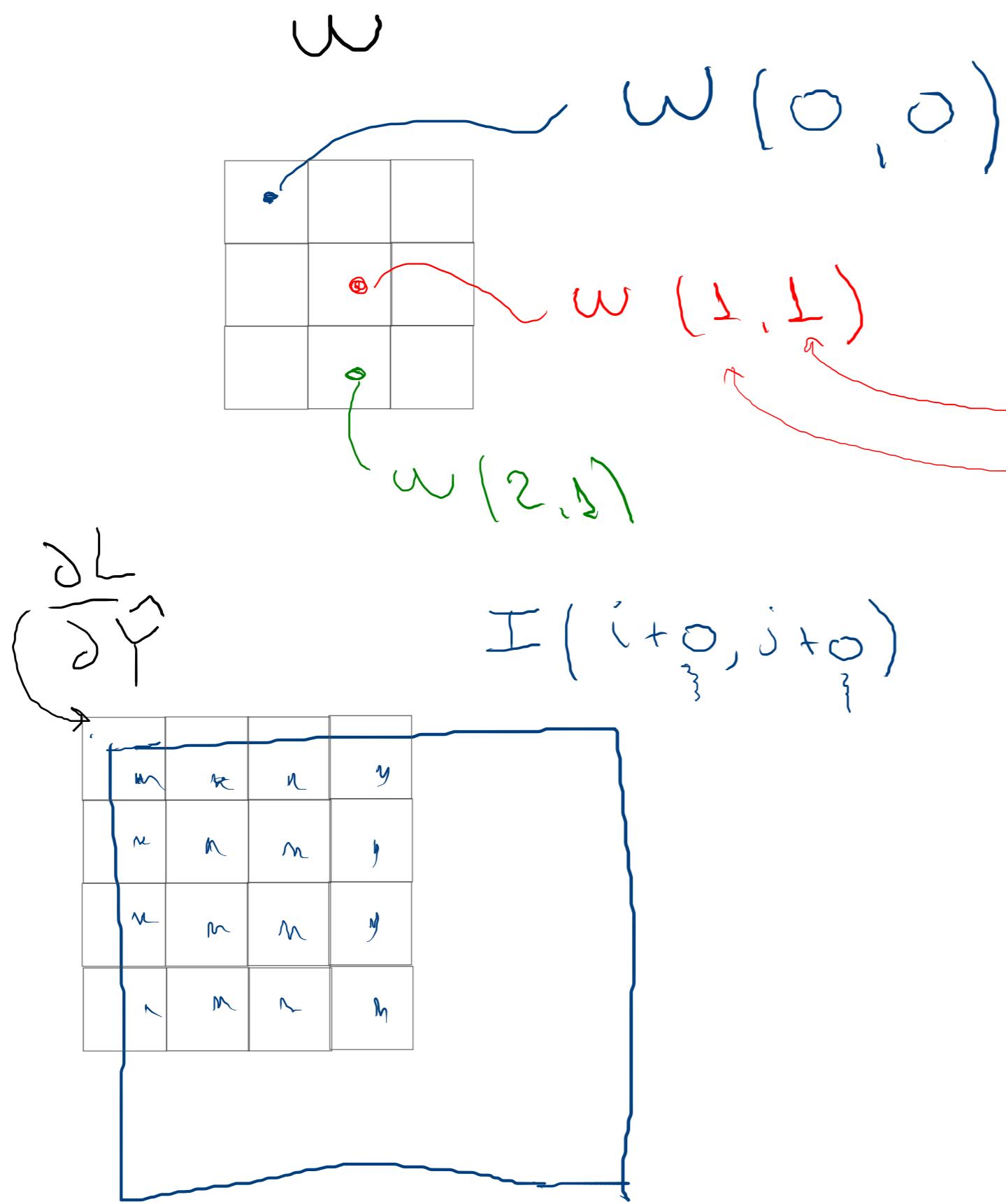
reordenamos

$$\frac{\partial L}{\partial w(m', n')} = \sum_{i=0}^{H-k_1} \sum_{j=0}^{W-k_2} I(m'+i, n'+j) \frac{\partial L}{\partial Y(i, j)} = \left(\frac{\partial L}{\partial Y} \otimes I \right) (m', n')$$

Suma en Y

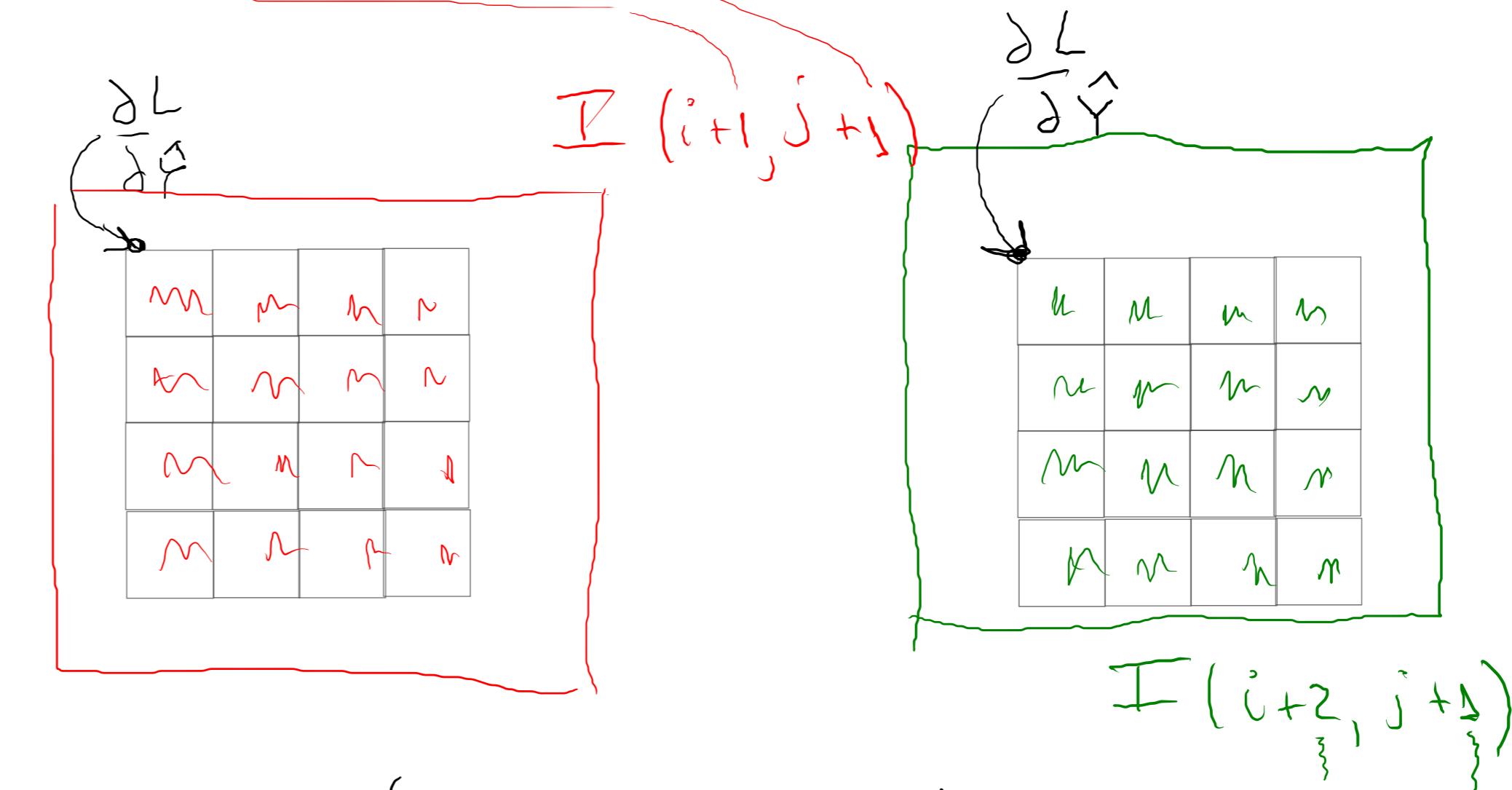
$$\frac{\partial L}{\partial w(m', n')} = \left(\frac{\partial L}{\partial Y} \otimes I \right) (m', n')$$

- Para cada elemento del kernel tendré 1 producto a resolver
- ↓
- vienen dados por la capa siguiente
- es la entrada



$$\frac{\partial L}{\partial w(m', n')} = \sum_{i=0}^{k_1} \sum_{j=0}^{k_2} I(m'+i, n'+j) \cdot \frac{\partial L}{\partial Y(i, j)}$$

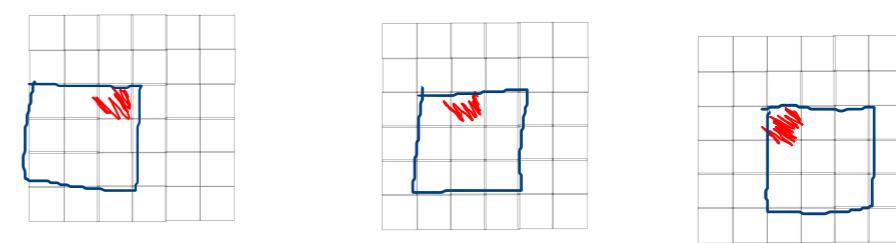
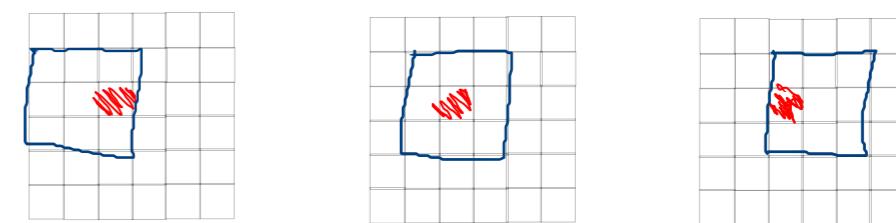
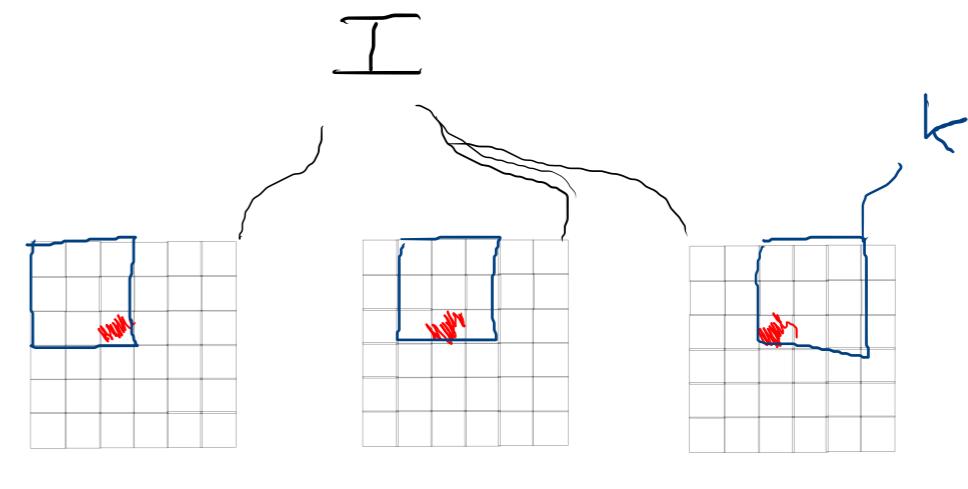
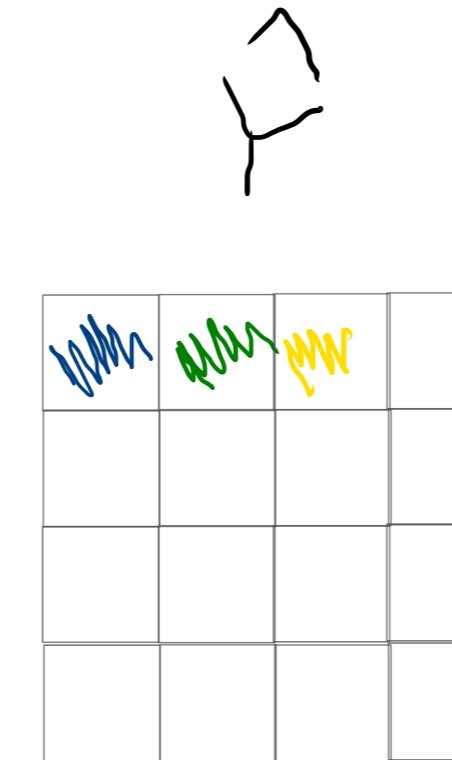
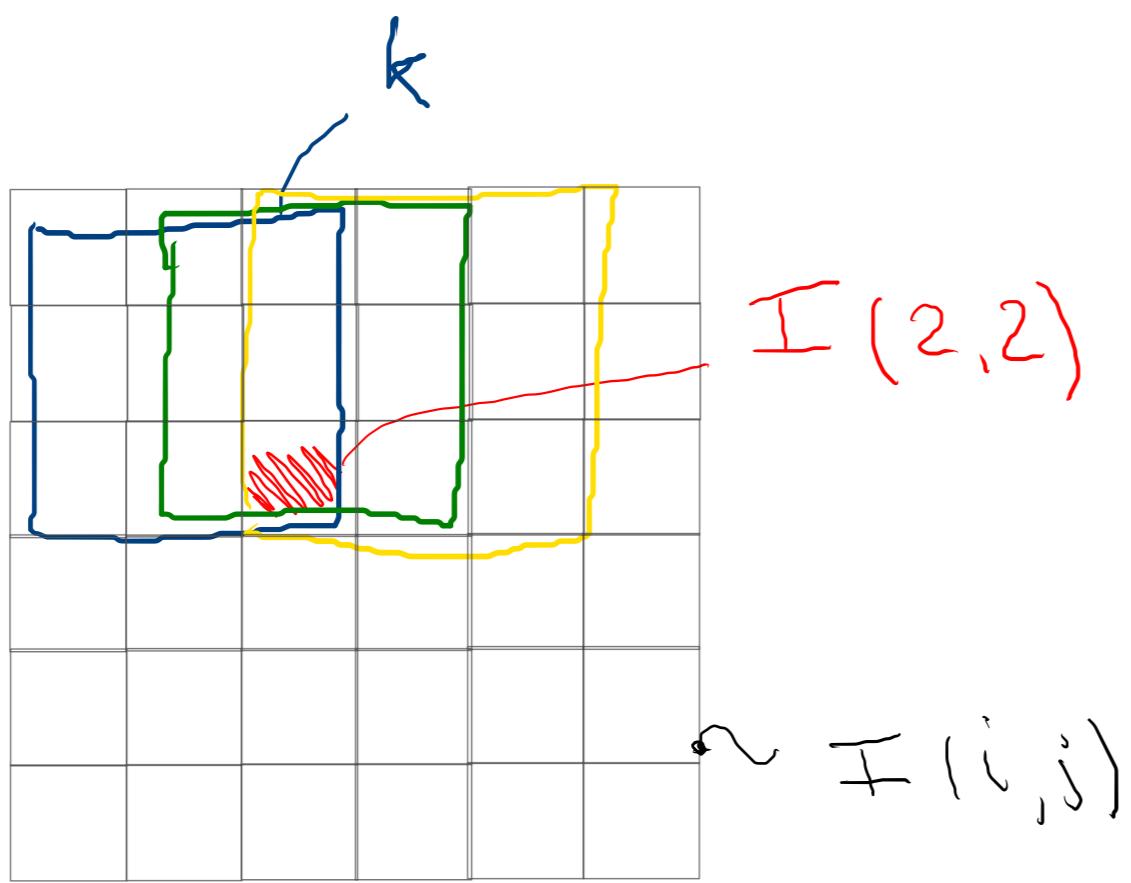
¿Como se interpreta?



... son q $(k_1 \cdot k_2)$ en total...

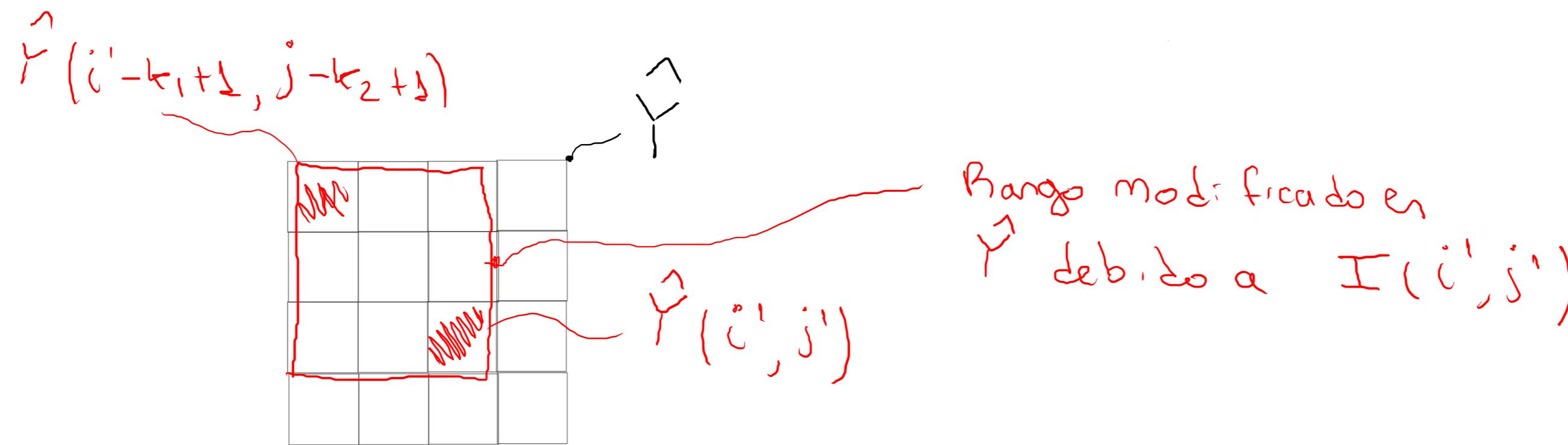
Ahora seguimos con $\frac{\partial L}{\partial I}$ (para poder pasar el grad hacia la capa previa)

¿Como varia \hat{F} cuando se varia 1 pixel de I ? \Rightarrow dependerá del tamaño del kernel



En este ejemplo hay $9 (k_1 \cdot k_2)$ posiciones afectadas en \hat{F} por el pixel $I(2,2)$

Un pixel $I(i', j')$ va a modificar un área de \hat{Y} en el rango $[i' - k_1 + 1 : i' ; j' - k_2 + 1 : j]$



Entonces:

$$\frac{\partial L}{\partial I(i', j')} = \sum_{m=0}^{k_1-1} \sum_{n=0}^{k_2-1} \frac{\partial L}{\partial \hat{F}(i'-m, j'-n)}$$

en el rango
del kernel

el pixel (i', j')

$$\frac{\partial \hat{F}(i'-m, j'-n)}{\partial I(i', j')}$$

de la capa posterior

a trabajar

$$\frac{\partial \hat{F}(i'-m, j'-n)}{\partial I(i', j')}$$

2

modifica a \hat{F} en el rango del kernel

$$\frac{\partial \hat{Y}(i'-m, j'-n)}{\partial I(i', j')} = \frac{\partial}{\partial I(i', j')} \left[\sum_{p=0}^{k_1-1} \sum_{q=0}^{k_2-1} I((i'-m)+p, (j'-n)+q) \cdot w(p, q) + b \right]$$

range del kernel

hay 1 solo término donde

$p = m$

$q = n$

$$I(i'-m+m, j'-n+n) = I(i', j')$$

entonces

$$\frac{\partial}{\partial I(i', j')} \cdot \left[\dots + I(i', j') \cdot w(m, n) + \dots + b \right]$$

$$\frac{\partial \hat{Y}(i'-m, j'-n)}{\partial I(i', j')} = w(m, n)$$

sustituimos en 2

$$\frac{\partial L}{\partial I(i', j')} = \sum_{m=0}^{k_1-1} \sum_{n=0}^{k_2-1} \frac{\partial L}{\partial F(i'-m, j'-n)} \cdot \underbrace{w(m, n)}_{\text{lo hallado}} \quad \textcircled{2'}$$

rango del kernel

$$\frac{\partial L}{\partial I(i', j')} = (w * \frac{\partial L}{\partial F})(i', j')$$

para cada elemento
de la entrada tengo
que resolver el producto

viene dado por
la capa siguiente

Para un (i^*, j^*) dado ...

$i^* - m$

$j^* - n$

con
 $m = k_1 - 1$
 $n = k_2 - 1$



$$\begin{cases} i^* = 2 \\ j^* = 2 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{con } m = 0 \\ \text{y } n = 0 \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y}$$

... hay que resolver ese producto
elemento a elemento.

$$\frac{\partial L}{\partial Y^*}$$

es

$$\frac{\partial L}{\partial Y}$$

especializado en sus
diagonales

$$\frac{\partial L}{\partial Y}(i^*, j^*) = \sum_{m=0}^{k_1-1} \sum_{n=0}^{k_2-1} \frac{\partial L}{\partial Y}(i^*-m, j^*-n) \cdot w(m, n)$$

¿ como se interpreta?

es la porción de \hat{Y}
afectada por $I(i^*, j^*)$

$$Q = \begin{array}{c|c} a & b \\ \hline c & d \end{array} \quad Q^* = \begin{array}{c|c} d & c \\ \hline b & a \end{array}$$

