Trazadores Cúbicos

1st Mauro Alonso Gonzalez Figueroa
Universidad Tecnologica de Bolivar
UTB
Cartagena, Colombia
maugonzalez@utb.edu.co

***Abstract*—This paper focuses on Cubic Splines, a numerical method widely used for interpolating functions. Cubic splines are piecewise polynomials that are used for interpolation of data points. The method involves constructing a series of cubic polynomials that pass through specified points and have continuous first and second derivatives. This paper explores the theoretical foundation of cubic splines, including their construction, properties, and applications. Additionally, it discusses practical considerations such as the choice of boundary conditions and the use of natural, clamped, or periodic splines. The goal is to provide a comprehensive understanding of cubic splines and their utility in numerical analysis and scientific computing.**

***Index Terms*—Cubic Splines, Interpolation, Polynomials**

I. Introducción

La interpolación numérica, un pilar fundamental en disciplinas científicas y técnicas, se emplea para estimar valores intermedios entre datos discretos conocidos.

Entre los métodos de interpolación más destacados se encuentra el método de trazadores cúbicos. Estos trazadores proveen una forma eficiente y precisa de aproximar una función entre puntos discretos mediante polinomios cúbicos.

Su utilidad abarca diversas aplicaciones, desde el ajuste de curvas en el análisis de datos hasta la simulación numérica en ingeniería y ciencias naturales. Los trazadores cúbicos encuentran aplicación en una amplia gama de campos, incluyendo ingeniería, ciencias de la computación, matemáticas aplicadas y ciencias sociales, destacándose por su versatilidad y eficacia en la interpolación y el análisis de datos.

En este documento, exploraremos la teoría, el uso y las aplicaciones prácticas del método de trazadores cúbicos, desde su fundamentación matemática hasta su implementación en diversas áreas del conocimiento.

II. Teoría del método

Un trazador cúbico S es una función a trozos que interpola a f en los $n+1$ puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ (con $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$). S es definida de la siguiente manera,

A. Trazadores Lineales

Dos puntos distintos cualquiera determinan un segmento de recta, de esta manera los trazadores de primer grado para un grupo de datos ordenados pueden definirse como un grupo de funciones lineales

$$\begin{aligned}
&f(x) = f(x_0) + m_0(x - x_0) && x_0 \leq x \leq x_1 \\
&f(x) = f(x_1) + m_1(x - x_1), && x_1 \leq x \leq x_2 \\
&\vdots \\
&f(x) = f(x_{n-1}) + m_{n-1}(x - x_{n-1}) && x_{n-1} \leq x \leq x_n
\end{aligned}$$

Donde m es la pendiente de la recta,

$$m = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

Es crucial destacar que los trazadores de primer grado no presentan suavidad. Es decir, en los puntos donde convergen dos trazadores *(conocidos como nodos)*, la pendiente experimenta un cambio brusco. Formalmente, la primera derivada de la función es discontinua en estos puntos. Esta limitación se supera mediante el empleo de trazadores polinomiales de grado superior, que garantizan suavidad en los nodos al igualar las derivadas en esos puntos.

B. Trazadores Cuadráticos

Para garantizar la continuidad de las derivadas de orden m en los nodos, es necesario emplear un trazador de al menos un grado de m + 1. En el caso específico de los trazadores cuadráticos, se busca obtener un polinomio de segundo grado para cada intervalo entre los datos. De manera general, el polinomio en cada intervalo se representa como:

$$f_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i \tag{1}$$

Los trazadores cuadráticos, requieren $3n$ ecuaciones o condiciones para evaluar las incógnitas, estas son:

1) *Los valores de la función deben ser los mismos en los puntos donde se unen dos polinomios consecutivos*
   Esta condición se representa como,

$$a_{i-1}{x_{i-1}}^2 + b_{i-1}x_{i-1} + c_{i-1} = f(x_{i-1}) \tag{2}$$

$$a_i{x_{i-1}}^2 + b_i x_{i-1} + c_i = f(x_{i-1}) \tag{3}$$

   Para $i = 2$, cada una proporciona $n - 1$, en total $2n - 2$ condiciones

2) *La primera y la última función deben pasar a través de los puntos extremos.*

$$a_1{x_0}^2 + b_1x_0 + c_1 = f(x_0) \tag{4}$$

$$a_n{x_n}^2 + b_nx_n + c_n = f(x_n) \tag{5}$$

En total tenemos, $2n - 2 + 2 = 2n$ condiciones

3) *Las primeras derivadas en los nodos interiores deben ser iguales*

La derivada de la ecuación (1) es,

$$f'(x) = 2ax + b$$

Por lo tanto, la condición se representa como,

$$2a_{i-1}x_{i-1} + b_{i-1} = 2a_ix_{i-1} + b_i \tag{6}$$

Para $i = 2$, esto representa otras $n - 1$ condiciones, con un total de $2n + n - 1 = 3n - 1$

4) *Supongamos que en el primer punto la segunda derivada es cero.* Matemáticamente, esto se expresa como la condición de que la segunda derivada de la ecuación 18.28, que es 2ai, sea igual a cero en este punto. Esta condición implica que los dos primeros puntos se conectarán con una línea recta.

$$a_1 = 0 \tag{7}$$

Por ultimo, representando una ultima condición, resultando en $3n$

Ejemplo practico

Suponga los datos,

X	**Y**
$2,0$	$4,0$
$4,5$	$3,2$
$7,8$	$5,3$
$12,0$	$2,4$

TABLE I
TABLA DE DATOS

En este problema, se tienen 4 datos y $n = 3$ intervalos, por lo tanto se deben determinar $3(3) = 9$ incógnitas

Las ecuaciones (2) y (3) nos dan $2(3) - 2 = 4$ condiciones

$$\begin{aligned} 20,25a_1 + 4,5b_1 + c_1 &= 3,2 \\ 20,25a_2 + 4,5b_2 + c_2 &= 3,2 \\ 60,84a_2 + 7b_2 + c_2 &= 5,3 \\ 60,84a_3 + 7b_3 + c_3 &= 5,3 \end{aligned}$$

Evaluando a la primera y la última función con los valores inicial y final (4)

$$4a_1 + 2b_1 + c_1 = 4$$

Y la ecuación (5)

$$144a_3 + 12b_3 + c_3 = 2,4$$

La continuidad de las derivadas crea adicionalmente $3-1 = 2$ condiciones (6)

$$\begin{aligned} 9a_1 + b_1 &= 9a_2 + b_2 \\ 15,6a_2 + b_2 &= 15,6a_3 + b_3 \end{aligned}$$

Por ultimo, la condición (7) determina que $a_1 = 0$, con esto el problema se resume en la resolución de un sistema 8×8.

Resolviendo el sistema obtenemos los valores

$$\begin{array}{lll} a_1 = 0 & b_1 = -0,32 & c_1 = 4,64 \\ a_2 \approx 0,16 & b_2 \approx -1,76 & c_2 \approx 7,88 \\ a_3 \approx 0,00649 & b_3 \approx -0,661 & c_3 \approx 9,6325 \end{array}$$

Sustituyendo en las ecuaciones, obtenemos

$$\begin{array}{ll} f_1(x) = -0,32x + 4.64 & 2,0 \leq x \leq 4,5 \\ f_2(x) = 0,16x^2 - 1,76x + 7,88 & 4,5 \leq x \leq 7,8 \\ f_3(x) = 0,00649x^2 - 0,661x + 9,6325 & 7,8 \leq x \leq 12,0 \end{array}$$

C. Trazadores Cúbicos

El objetivo en los trazadores cúbicos es obtener un polinomio de tercer grado para cada intervalo entre los nodos:

$$f_i(x) = a_ix^3 + b_ix^2 + c_ix + d_i \tag{8}$$

Asi, para $n+1$ datos, existen n intervalos y en consecuencia $4n$ incógnitas a evaluar. Se requieren $4n$ condiciones para evaluar las incógnitas, estas son:

1) Los valores de la función deben coincidir en los nodos interiores (2n – 2 condiciones).
2) La primera y última función deben pasar por los puntos extremos (2 condiciones).
3) Las primeras derivadas en los nodos interiores deben ser iguales (n – 1 condiciones).
4) Las segundas derivadas en los nodos interiores deben ser iguales (n – 1 condiciones).
5) Las segundas derivadas en los nodos extremos son cero (2 condiciones).

Las cinco condiciones anteriores suministran las 4n ecuaciones necesarias para determinar los $4n$ coeficientes. Sin embargo, presentaremos un enfoque alternativo que solo requiere la resolución de $n - 1$ ecuaciones.

El primer paso implica observar cómo cada par de nodos está conectado por un trazador cúbico; específicamente, se nota que la segunda derivada dentro de cada intervalo es una función lineal. Para verificar esta observación, la ecuación (8) se puede diferenciar dos veces.

$$f_i''(x) = f_i'' \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} + f_i''(x) \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \tag{9}$$

Asi, la ecuación (9) se integra dos veces para obtener una expresión para $f_i(x)$

$$\begin{aligned} f_i(x) = {} & \frac{f_i''(x_{i-1})}{6(x_i - x_{i-1})}(x_i - x)^3 \\ & + \frac{f_i''(x)}{6(x_i - x_{i-1})}(x - x_{i-1})^3 \\ & + [\frac{f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} - \frac{f''(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})}{6}](x_i - x) \\ & + [\frac{f(x_i)}{x_i - x_{i-1}} - \frac{f''(x_i)(x_i - x_{i-1})}{6}](x - x_{i-1}) \end{aligned} \tag{10}$$

Las segundas derivadas se evalúan tomando la condición de que las primeras derivadas deben ser continuas en los nodos:

$$f_{i-1}''(x_i) = f_i'(x_i) \tag{11}$$

La ecuación (10) se deriva para ofrecer una expresión de la primera derivada. Si se hace esto tanto para el $(i-1)$-ésimo, como para i-ésimo intervalos, y los dos resultados se igualan de para llegar a la siguiente relación:

$$\begin{aligned} & (x_i - x_{i-1})f''(x_{i-1}) + 2(x_{i+1} - x_{i-1})f''(x_i) \\ & \quad + (x_{i+1} - x_i)f''(x_{i+1}) \\ & = \frac{6}{x_{i+1} - x_i}[f(x_{i+1}) - f(x_i)] \\ & \quad + \frac{6}{x_i - x_{i-1}}[f(x_{i-1}) - f(x_i)] \end{aligned} \tag{12}$$

Al escribir la ecuación (12) para todos los nodos interiores, se obtienen $n-1$ ecuaciones simultáneas con $n+1$ segundas derivadas desconocidas. Sin embargo, dado que se trata de un trazador cúbico natural, las segundas derivadas en los nodos extremos son cero, lo que reduce el problema a $n-1$ ecuaciones con $n-1$ incógnitas. Además, es importante notar que el sistema de ecuaciones resultante será tridiagonal. Por lo tanto, no solo se ha reducido el número de ecuaciones, sino que también se han organizado en una forma extremadamente fácil de resolver.

Todo esto resultando en la ecuación cubica para cada intervalo,

$$\begin{aligned} f_i = {} & \frac{f_i''(x_{i-1})}{6(x_i - x_{i-1})}(x_i - x)^3 + \frac{f_i''(x_i)}{6(x_i - x_{i-1})}(x - x_{i-1})^3 \\ & + [\frac{f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} - \frac{f''(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})}{6}](x_i - x) \\ & + [\frac{f(x_i)}{x_i - x_{i-1}} - \frac{f''(x_i)(x_i - x_{i-1})}{6}](x - x_{i-1}) \end{aligned} \tag{13}$$

Esta ecuación contiene sólo dos incógnitas *(las segundas derivadas en los extremos de cada intervalo)*. Las incógnitas se evalúan empleando la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} & (x_i - x_{i-1})f''(x_{i-1}) + 2(x_{i+1} - x_{i-1})f''(x_i) \\ & \quad + (x_{i+1} - x_i)f''(x_{i+1}) \\ & = \frac{6}{x_{i+1} - x_i}[f(x_{i+1}) - f(x_i)] + \\ & \quad \frac{6}{x_i - x_{i-1}}[f(x_{i-1}) - f(x_i)] \end{aligned} \tag{14}$$

Si se escribe esta ecuación para todos los nodos interiores, resultan $n-1$ ecuaciones simultáneas con $n-1$ incógnitas.

REFERENCES

[1] A. Guillén, “Trazadores cúbicos,” June 2014. [Online]. Available: https://arturoguillen90.wordpress.com/interpolacion/trazadores-cubicos/