Programación lineal ejecutada con el método de Gauss-Seidel

1st Mauro Alonso Gonzalez Figueroa
Universiddad Tecnologica de Bolivar
UBT
Cartagena, Colombia
maugonzalez@utb.edu.co

2nd German De Armas Castaño
Universidad Tecnologica de Bolivar
UTB
Cartagena, Colombia
gdearmas@utb.edu.co

3rd Angel Vega Rodriguez
Universidad Tecnologica de Bolivar
UTB
Cartagena, Colombia
anvega@utb.edu.co

***Abstract*—In the realm of numerical analysis, the Gauss-Seidel method stands as an iterative technique employed to resolve systems of linear equations. It represents a refined version of the Jacobi method, often exhibiting superior convergence properties. Within the scope of this paper, we delve into the application of the Gauss-Seidel method to address a system of linear equations arising from a financial planning conundrum. Our endeavor demonstrates the efficacy and efficiency of the Gauss-Seidel method in tackling this type of system.**

***Index Terms*—Gauss-Seidel method, linear equations, financial planning**

I. Introduction

En el ámbito de la gestión empresarial, la Investigación de Operaciones *(IO)* se erige como una herramienta fundamental para la optimización de procesos y la toma de decisiones estratégicas. Esta disciplina, basada en el método científico y el análisis matemático, permite a las organizaciones abordar problemas complejos de manera sistemática y eficiente, conduciéndolas hacia el logro de sus objetivos.

En esencia, la IO se caracteriza por la aplicación de un enfoque interdisciplinario que integra conocimientos de diversas áreas, como las matemáticas, la estadística, la ingeniería y la economía. Este enfoque colaborativo permite a los equipos de trabajo abordar problemas complejos desde múltiples perspectivas, generando soluciones innovadoras y efectivas.

II. Objetivos

- Explorar aplicaciones interdisciplinarias de el método Gauss-Seidel
- Implementar el método Gauss-Seidel para resolver un sistema de ecuaciones lineales derivado de un problema de planificación (orientada en areas de producción)
- Evaluar el impacto de la aplicación del método Gauss-Seidel en la optimización de procesos y la toma de decisiones estratégicas en organizaciones empresariales.

III. Gauss-Seidel

Dentro del amplio arsenal de técnicas empleadas en la IO, el método Gauss-Seidel se destaca como un algoritmo iterativo de gran utilidad para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Este método, ampliamente reconocido por su simplicidad y eficiencia, se basa en la actualización progresiva de las variables del sistema en función de las aproximaciones más recientes de las demás. A través de un proceso iterativo, las estimaciones se van refinando hasta alcanzar un punto de convergencia, donde las soluciones satisfacen los criterios establecidos.

En el contexto de la programación lineal, el método Gauss-Seidel cobra especial relevancia como herramienta complementaria al método simplex. Si bien el método simplex se considera el enfoque tradicional para resolver este tipo de problemas, el método Gauss-Seidel ofrece una alternativa viable para abordar problemas de gran escala o aquellos con características específicas que dificultan la aplicación del simplex.

IV. Marco Teorico

A. *Programación lineal*

La programación lineal es una técnica de modelización matemática desarrollada a partir de la década de 1930. Desde entonces, se ha aplicado con frecuencia en los procesos de toma de decisión de numerosos ámbitos económicos y productivos. La técnica de programación lineal proporciona soluciones las soluciones abiertas *(no son formulas estrictas ni nada por el estilo)*, que más bien se determinan mediante algoritmos.

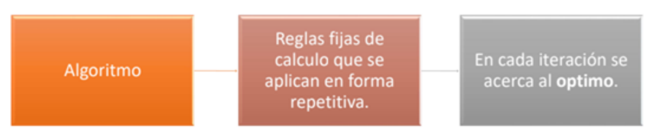

Fig. 1.

Algunos lineamientos generales para la implementación de la IO en la práctica.

1) Definición del problemas
2) Construcción del modelo
3) Solución del modelo
4) Validación del modelo
5) implementación de la solución

B. *Problema infactible*

Si no se encuentra ninguna solución que satisfaga todas las restricciones del problema, el método simplex concluye que el problema es infactible (No existe una solución que cumpla todas las restricciones impuestas).

C. *Región factible*

Es el conjunto de todas las posibles soluciones que satisfacen todas las restricciones del problema. Esta región es fundamental para entender la naturaleza de las soluciones potenciales y para aplicar el método simplex u otros algoritmos de optimización.

Características de la region factible:

1) n un problema con dos variables, la región factible puede visualizarse como un área en el plano cartesiano. Con tres variables, sería un volumen en el espacio tridimensional, y con más variables, se representa en dimensiones superiores.
2) La región factible es siempre una región convexa, lo que significa que cualquier combinación lineal de puntos dentro de la región también está dentro de la región.

D. *Método o algebra simplex*

El Método Simplex es un método analítico de solución de problemas de programación lineal capaz de resolver modelos complejos. Aunque es un procedimiento algebraico, sus conceptos fundamentales son geométricos. El Simplex es un método iterativo que permite ir mejorando la solución en cada paso. El método consiste en caminar de vértice en vértice de manera que aumente o disminuya la función objetivo (según el criterio). Si existe el poliedro factible, el número de vértices que presenta es finito.

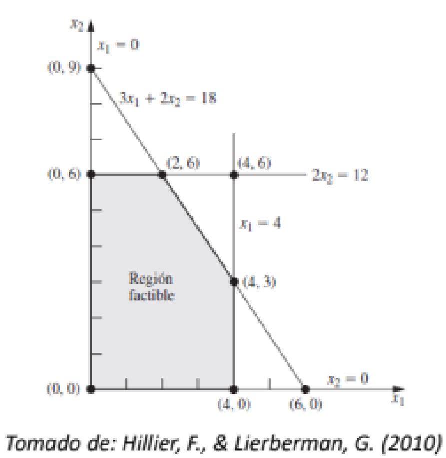

Fig. 2.

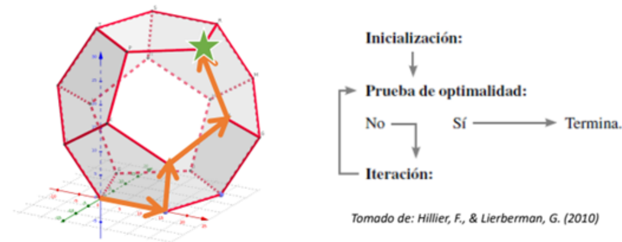

Fig. 3.

E. *Método de Gauss-Seidel*

Es un algoritmo utilizado para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Es una variante del método de relajación y es especialmente útil cuando se trabaja con matrices grandes y densas.

En términos básicos, el método de Gauss-Seidel procede iterativamente, actualizando cada variable de un sistema de ecuaciones en función de las aproximaciones más recientes de las otras variables. En cada iteración, las nuevas estimaciones se utilizan para mejorar las aproximaciones de las variables restantes. Este proceso continúa hasta que las soluciones convergen a un valor aceptable.

El método de Gauss-Seidel puede ser más eficiente computacionalmente que otros métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales, especialmente cuando se trata de sistemas que son diagonales dominantes o simétricos positivos definidos. Sin embargo, su convergencia no está garantizada para todos los sistemas, y puede ser lento o incluso divergente en algunos casos. Por lo tanto, a veces se requieren ajustes o técnicas adicionales para garantizar la convergencia adecuada.

F. *Vector gradiente*

También conocido como vector gradiente (denotado ∇f), es un campo vectorial que indica la dirección en la cual el campo f varía más rápidamente y su módulo representa el ritmo de variación de f en la dirección de dicho vector gradiente.

$$\nabla f(r) = \left(\frac{\partial f(r)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(r)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(r)}{\partial x_n} \right)$$

Fig. 4.

G. *Modelo estándar*

En el método simplex es una forma particular de formular un problema de programación lineal que facilita su resolución mediante este método. Para aplicar el método simplex, es necesario que el problema esté expresado en términos de maximización con todas las restricciones como igualdades y todas las variables no negativas.

H. Variables Artificiales

son variables adicionales introducidas en el problema para convertir restricciones complicadas en una forma que permita aplicar el método simplex. Estas variables no tienen significado en el contexto del problema original, sino que son herramientas auxiliares para encontrar una solución inicial.

¿Cuándo se utilizan las Variables Artificiales?: Cuando una restricción es de igualdad (por ejemplo, $a_1x_1 + a_2x_2 = b$), necesitamos una variable artificial para iniciar el método simplex porque no podemos simplemente añadir una variable de holgura (slack variable, esta variable representa el espacio libre) como en las restricciones $\leq$.

Restricciones de Desigualdad (del tipo $\leq$): Para una restricción del tipo ($a_1x_1 + a_2x_2 \leq b$), primero restamos una variable de exceso (surplus variable) y luego añadimos una variable artificial para convertirla en una ecuación de igualdad.

I. Precio sombra

El precio sombra puede representar una disposición a pagar por unidad adicional de recurso. Si el precio del recurso es menor al precio sombra entonces existirá un incentivo a "comprar" más debido a que esto tendrá un impacto neto positivo en la función objetivo.

V. Ejercicios propuestos

A. 2Crudos Inc.

1) Enunciado: 2Crudos Inc. es una empresa petrolera que tiene una refinería en la costa de Texas. La refinería procesa crudo proveniente de Arabia Saudita y Venezuela, produciendo gasolina, diesel, y lubricantes.

Los dos crudos se diferencian en su composición química, por lo que producen diferentes cantidades de cada producto. Un barril de crudo proveniente de Arabia Saudita produce 0.3 barriles de gasolina, 0.4 barriles de diesel, y 0.2 barriles de lubricantes. Por otro lado, un barril proveniente de Venezuela produce 0.4 barriles de gasolina, 0.2 barriles de diesel, y 0.3 barriles de lubricantes. El restante 10% del crudo se pierde en el proceso de refinación. Los crudos también difieren en precio y disponibilidad. *2Crudos Inc.* puede comprar a Arabia Saudita hasta 9000 barriles por día a un precio de \$20 por barril. Puede comprar a Venezuela hasta 6000 barriles por día a un precio de \$15 por barril.

Los contratos establecidos por *2Crudos Inc.* lo obligan a producir 2000 barriles diarios de gasolina, 1500 barriles diarios de diesel, y 500 barriles diarios de lubricantes ¿Como se pueden cumplir estos requerimientos de la forma más eficiente?.

2) Formulación matemática del problema:

Variables

- $X_a =$ Costo por barril comprado a Arabia Saudita
- $X_v =$ Costo por barril comprado en Venezuela

Función objetivo

$$\min Z = 20X_a + 15X_v$$

Restricciones

- $X_a \leq 9000$ "restricción de compra para Arabia Saudita"
- $X_v \leq 6000$ "restricción de compra para Venezuela"
- $0.3X_a + 0.4X_v \geq 2000$ "restricciones de producción"
- $0.4X_a + 0.2X_v \geq 1500$
- $0.2X_a + 0.3X_v \geq 500$
- $X_a + X_v \geq 0$ "restricción de no negatividad"

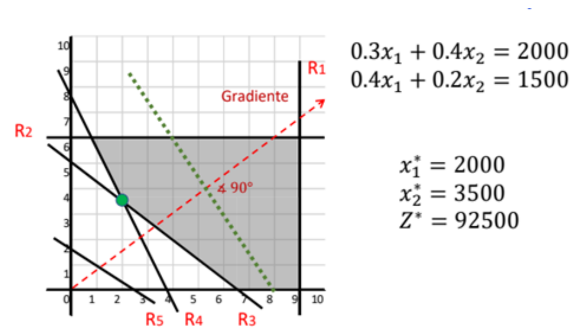

Fig. 5.

Para garantizar la producción de barriles diaria 2 crudo inc debe comprar 2000 barriles provenientes de Arabia Saudita y 3500 de Venezuela, lo cual tiene un costo de 92500 dólares.

3) Justificacion: Estudiar este tipo de problema es valioso por varias razones, tanto desde una perspectiva académica como práctica bajo un contexto realista, ya que permite analizar la eficiencia Operativa (cómo se pueden cumplir las demandas de productos refinados de la manera más eficiente en términos de costos), Aspectos Económicos (en cómo los precios de los insumos y las restricciones de oferta llegan a afectan las decisiones de producción) e incluso la toma de decisiones empresariales (gestión de recursos) y análisis de sensibilidad (evaluar cómo cambios en los precios o en las disponibilidades afectan las decisiones).

B. Gutchi Company

1) Enunciado: Gutchi Company fabrica bolsos de mano, bolsos para rasuradora y mochilas. Para elaborar los productos se necesita como materia prima piel animal. El proceso de producción requiere dos tipos de mano de obra calificada: costura y acabado. La siguiente tabla da la disponibilidad de los recursos, su consumo por los tres productos y las utilidades por unidad.

Requerimientos de recursos por unidad

Recurso	Bolsas de Mano	Bolsos para rasuradora	Mochilas	Disponibilidad diaria
Piel (ft^2)	2	26	3	24 ft^2
Costura (h)	2	1	2	40 h
Acabado (h)	1	5	20	45 h
Precio de venta (\$)	100	22	66	

$$\max Z = 100x_1 + 22x_2 + 66x_3$$

S.A:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 26x_2 + 3x_3 &\leq 24 \\ 2x_1 + x_2 + 20x_3 &\leq 40 \\ x_1 + 0.5x_2 + x_3 &\leq 45 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Forma estándar

$$\max Z = 100x_1 + 22x_2 + 66x_3$$

S.A:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 26x_2 + 3x_3 + s_1 &\leq 24 \\ 2x_1 + x_2 + 20x_3 + s_2 &\leq 40 \\ x_1 + 0.5x_2 + x_3 + s_3 &\leq 45 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

Procedimiento: La formulación del problema en primera instancia se resuelve igual que con el anterior método, pero para su solución se deben transformar las ecuaciones a su forma estándar ya que garantiza la uniformidad, simplicidad y optimalidad del método simplex, conservando la función objetivo y asegurando que todas las variables sean no negativas.

Debido a las similitudes que tiene el método simplex con el método algebraico de Gauss-Seidel (basados en iteraciones), implementamos dicho método para dar respuesta a las incógnitas planteadas en el problema.

- $x_1 = 8.75$ "cantidad de bolsos de mano a producir"
- $x_2 = 9.67$ "cantidad de bolsos para rasuradora a producir"
- $x_3 = 8.85$ "cantidad de mochilas a producir"
- $s_1 = 0.26$ "variable de holgura de los bolsos de mano"
- $s_2 = 3.00$ "variable de holgura de los bolsos para rasuradora"
- $s_3 = 21.0$ "variable de holgura para las mochilas"

Conclusiones: Dándonos como resultado que para maximizar el costo por unidad vendida y fabricada, por *Gutchi Co.* se deben producir diariamente 8.75 bolsos de mano, 9.67 bolsos para rasuradora, y 8.85 mochilas (los valores decimales se asocian a los productos que están en proceso o que directamente no están terminados), dando como resultado una ganancia de $\$1006.84$ por la venta de los tres productos.

Ademas por la naturaleza del método Gauss-Seidel, el programa nos proporciona el valor de las variables de holgura o lo que seria lo mismo, a la cantidad que se desplazaría en inventarios, lo cual, los convierte en materia prima utilizable para un nuevo ciclo.

- Materiales de inventario de bolsos de mano: 0.26
- Materiales de inventario de bolsos para rasuradora: 3.00
- Materiales de inventario para mochilas: 21.0

References

[1] M. González, "Gauss-seidel method implementation," 2024. [Online]. Available: https://github.com/MauroGonzalez51/gauss-seidel

[2] H. A. Taha, *Investigación de operaciones*, 9th ed. Pearson Educación, 2012. [Online]. Available: https://fad.unsa.edu.pe/bancayseguros/wp-content/uploads/sites/4/2019/03/investigacic3b3n-de-operaciones-9na-edicic3b3n-hamdy-a-taha-fl.pdf

[3] M. Arenales, V. Armentano, R. Morabito, and H. Yanasse, *Pesquisa Operacional*. Rio de Janeiro: Elsevier Editora Ltda., 2007. [Online]. Available: https://www.academia.edu/36203037/Pesquisa_Operacional_Arenales_et_al_2007_

[4] J. Herrera, A. Garcia, and J. Suarez, "Análisis prospectivo de la base alimentaria en una lechería tropical con programación lineal," *Pastos y Forrajes*, 2014. [Online]. Available: https://www.researchgate.net/publication/292788250_Analisis_de_eficiencia_tecnica_con_variables_de_entorno_en_unidades_lecheras

[5] F. Hillier and G. Lieberman, *Investigación de operaciones*, 9th ed. México D.F.: McGraw Hill, 2010. [Online]. Available: https://frh.cvg.utn.edu.ar/pluginfile.php/54151/mod_resource/content/1/Introducci%C3%B3n%20a%20la%20Investigaci%C3%B3n%20de%20Operaciones%20%289na%20ed%29%20-%20Hillier%20%20Lieberman.pdf