

Convergencia en el método de Newton-Raphson

1st Mauro Alonso Gonzalez Figueroa

Universidad Tecnológica de Bolívar

UTB

Cartagena, Colombia

maugonzalez@utb.edu.co

Abstract—Este documento se centra en el método de Newton-Raphson, un algoritmo ampliamente utilizado para encontrar aproximaciones numéricas de las raíces de una función real. Aunque este método es conocido por su convergencia cuadrática, existen ciertas condiciones en las que esta convergencia no se mantiene. En particular, la convergencia cuadrática puede fallar cuando la derivada de la función en la raíz es cero o cuando el valor inicial está demasiado cerca de un extremo [1]. Este trabajo explora estas situaciones problemáticas y propone soluciones para garantizar la convergencia cuadrática del método de Newton-Raphson. Se discuten estrategias como la elección de un punto de partida adecuado y la modificación del algoritmo para manejar funciones con derivadas nulas en sus raíces. El objetivo es proporcionar una comprensión más profunda del comportamiento del método de Newton-Raphson y mejorar su eficacia en la práctica.

I. INTRODUCCIÓN

El método de Newton-Raphson, nombrado así por Sir Isaac Newton y Joseph Raphson, es un algoritmo para encontrar aproximaciones numéricas a las raíces (o ceros) de una función de valor real. Es un método iterativo que comienza con una suposición inicial y luego utiliza la derivada de la función para aproximar la raíz [2].

Aunque el método de Newton-Raphson es conocido por su eficiencia y convergencia cuadrática, no está exento de limitaciones. En particular, el método puede fallar en converger para ciertos tipos de funciones o suposiciones iniciales. Por ejemplo, si la derivada de la función en la raíz es cero, o si la suposición inicial está demasiado cerca de un extremo, el método puede no converger cuadráticamente.

Este trabajo tiene como objetivo explorar estos escenarios en detalle, entender por qué el método de Newton-Raphson falla en converger en estos casos, y proponer soluciones para asegurar la convergencia cuadrática del método. Al mejorar nuestra comprensión del método de Newton-Raphson, podemos mejorar su efectividad en la práctica y ampliar su aplicabilidad en diversos campos de la ciencia y la ingeniería.

II. TEORÍA DEL MÉTODO

El método de Newton-Raphson posibilita la determinación de una raíz de una ecuación no lineal, siempre y cuando se inicie con una estimación inicial adecuada. El procedimiento iterativo de Newton se deriva a partir del desarrollo de Taylor de la función en torno a la estimación inicial.

De forma generalizada, se obtiene la aproximación:

$$x_{n+1} = x_0 - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad (1)$$

A. Condiciones de convergencia

Las condiciones de convergencia para el método de Newton-Raphson se pueden resumir de la siguiente manera:

- **Existencia de la Raíz:** Se requiere que dentro de un intervalo de trabajo dado $[a, b]$, la condición $f(a) * f(b) < 0$ sea satisfecha.
- **Unicidad de la Raíz:** En el intervalo $[a, b]$, la derivada de $f(x)$ no debe ser igual a cero.
- **Concavidad:** La gráfica de la función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ debe ser cóncava, ya sea hacia arriba o hacia abajo. Esto se verifica asegurando que $f''(x) \leq 0$ o $f''(x) \geq 0$ para todo x en $[a, b]$.
- **Intersección de la Tangente a $f(x)$ dentro de $[a, b]$:** Es crucial garantizar que la tangente a la curva en el extremo del intervalo $[a, b]$, donde $f'(x)$ es mínima, intersecte el eje x dentro de $[a, b]$. Esta condición asegura que la sucesión de valores de x_i permanezca dentro de $[a, b]$.

$$\frac{|f(x)|}{|f'(x)|} \leq (b - a)$$

III. PROBLEMAS DEL MÉTODO

REFERENCES

- [1] "Convergence of newton-raphson method." [Online]. Available: <https://archive.nptel.ac.in/content/storage2/courses/122104019/numerical-analysis/Rathish-kumar/ratish-1/f3node7.html>
- [2] "Métodos numéricos 3: Raíces de ecuaciones: Métodos de newton-raphson y de la secante." [Online]. Available: <https://estadistica-dma.ulpgc.es/FCC/05-3-Raices-de-Ecuaciones-2.html>
- [3] J. E. B. BOLÍVAR, A. J. B. ARANGO, and M. B. ARBELÁEZ, "El método de newton-raphson-la alternativa del ingeniero para resolver sistemas de ecuaciones no lineales," *Scientia et Technica*, vol. 11, no. 27, pp. 221–224, 2005.
- [4] J. E. V. Cantero, "Método de newton raphson."