Convergencia en el método de Newton-Raphson

1st Mauro Alonso Gonzalez Figueroa
Universidad Tecnologica de Bolivar
UTB
Cartagena, Colombia
maugonzalez@utb.edu.co

***Abstract*—Este documento se centra en el método de Newton-Raphson, un algoritmo ampliamente utilizado para encontrar aproximaciones numéricas de las raíces de una función real. Aunque este método es conocido por su convergencia cuadrática, existen ciertas condiciones en las que esta convergencia no se mantiene. En particular, la convergencia cuadrática puede fallar cuando la derivada de la función en la raíz es cero o cuando el valor inicial está demasiado cerca de un extremo [1]. Este trabajo explora estas situaciones problemáticas y propone soluciones para garantizar la convergencia cuadrática del método de Newton-Raphson. Se discuten estrategias como la elección de un punto de partida adecuado y la modificación del algoritmo para manejar funciones con derivadas nulas en sus raíces. El objetivo es proporcionar una comprensión más profunda del comportamiento del método de Newton-Raphson y mejorar su eficacia en la práctica.**

I. Introducción

El método de Newton-Raphson, nombrado así por Sir Isaac Newton y Joseph Raphson, es un algoritmo para encontrar aproximaciones numéricas a las raíces (o ceros) de una función de valor real. Es un método iterativo que comienza con una suposición inicial y luego utiliza la derivada de la función para aproximar la raíz [2].

Aunque el método de Newton-Raphson es conocido por su eficiencia y convergencia cuadrática, no está exento de limitaciones. En particular, el método puede fallar en converger para ciertos tipos de funciones o suposiciones iniciales. Por ejemplo, si la derivada de la función en la raíz es cero, o si la suposición inicial está demasiado cerca de un extremo, el método puede no converger cuadráticamente.

Este trabajo tiene como objetivo explorar estos escenarios en detalle, entender por qué el método de Newton-Raphson falla en converger en estos casos, y proponer soluciones para asegurar la convergencia cuadrática del método. Al mejorar nuestra comprensión del método de Newton-Raphson, podemos mejorar su efectividad en la práctica y ampliar su aplicabilidad en diversos campos de la ciencia y la ingeniería.

II. Teoría del método

El método de Newton-Raphson posibilita la determinación de una raíz de una ecuación no lineal, siempre y cuando se inicie con una estimación inicial adecuada. El procedimiento iterativo de Newton se deriva a partir del desarrollo de Taylor de la función en torno a la estimación inicial.

De forma generalizada, se obtiene la aproximación:

$$x_{n+1} = x_0 - \frac{f(x)}{f'()} \tag{1}$$

A. Condiciones de convergencia

Las condiciones de convergencia para el método de Newton-Raphson se pueden resumir de la siguiente manera:

- Existencia de la Raíz: Se requiere que dentro de un intervalo de trabajo dado [a, b], la condición $f(a) * f(b) < 0$ sea satisfecha.
- Unicidad de la Raíz: En el intervalo [a, b], la derivada de $f(x)$ no debe ser igual a cero.
- Concavidad: La gráfica de la función $f(x)$ en el intervalo [a, b] debe ser cóncava, ya sea hacia arriba o hacia abajo. Esto se verifica asegurando que $f''(x) \leqslant 0$ o $f''(x) \geqslant 0$ para todo x en [a, b].
- Intersección de la Tangente a $f(x)$ dentro de [a, b]: Es crucial garantizar que la tangente a la curva en el extremo del intervalo [a, b], donde $f'(x)$ es mínima, intersecte el eje x dentro de [a, b]. Esta condición asegura que la sucesión de valores de x_i permanezca dentro de [a, b].

$$\frac{|f(x)|}{|f'(x)|} \leqslant (b - a)$$

III. Problemas del método

Como fue mencionado anteriormente, el método de Newton-Raphson, presenta algunas dificultades en ciertos casos.

- Punto de inflexión $[F''(x) = 0]$ en la vecindad de una raíz: La presencia de un punto de inflexión, donde la segunda derivada, $F''(x)$, se anula, en la cercanía de una raíz puede influir en el comportamiento del método de Newton-Raphson.
- Tendencia del método a oscilar alrededor de un mínimo o un máximo local: El método puede exhibir oscilaciones alrededor de mínimos o máximos locales, lo cual puede afectar su convergencia, especialmente si la función presenta características extremas en la vecindad de la raíz.
- Valor inicial cercano a una raíz salta a una posición varias raíces más lejos: Existe la posibilidad de que un valor inicial cercano a una raíz se desplace a una posición considerablemente distante, lo cual se atribuye a pendientes cercanas a cero, generando una tendencia a alejarse del área de interés.
- Pendiente cero $[f'(x) = 0]$ causa una división entre cero en la fórmula de Newton-Raphson: Cuando la primera derivada de la función se anula $[f'(x) = 0]$, se produce una división entre cero en la fórmula de Newton-Raphson, provocando que la solución se desplace

horizontalmente y no intersecte el eje x. Este fenómeno puede resultar en una divergencia del método.

IV. Soluciones a los problemas del método

Una vez identificados los problemas asociados al método de Newton-Raphson, es imperativo considerar posibles soluciones para mitigar estas dificultades.

- Punto de inflexión [$F''(x) = 0$] en la vecindad de una raíz:
  - Emplear técnicas de análisis gráfico para identificar la presencia de puntos de inflexión en la vecindad de las raíces antes de aplicar el método.
  - Considerar variantes del método, como el método de la secante, que pueden ser menos susceptibles a condiciones de inflexión
- Tendencia del método a oscilar alrededor de un mínimo o un máximo local:
  - Ajustar el tamaño del paso en cada iteración para evitar oscilaciones excesivas.
  - Utilizar información adicional sobre la función, como la segunda derivada, para adaptar la convergencia del método en presencia de extremos locales.
- Valor inicial cercano a una raíz salta a una posición varias raíces más lejos:
  - Refinar la estimación inicial mediante métodos de búsqueda de raíces previos para obtener una aproximación más precisa.
  - Implementar técnicas de control de convergencia, como la verificación de la distancia entre iteraciones sucesivas.
- Pendiente cero [$f'(x) = 0$] causa una división entre cero en la fórmula de Newton-Raphson:
  - Modificar la formulación del método para evitar la división por cero, por ejemplo, mediante la aplicación de técnicas de regularización.
  - Explorar métodos alternativos, como el método de la secante, que no dependen de la primera derivada.

V. Raíces multiples

La presencia de raíces múltiples es otro desafío que puede afectar la convergencia del método de Newton-Raphson. Las raíces múltiples se caracterizan por tener derivadas iguales a cero en el punto de la raíz, lo que conduce a problemas en la fórmula de Newton-Raphson que involucra la división por la primera derivada. Aquí hay algunas estrategias para abordar este problema:

- Método de la Secante: En lugar de depender de la primera derivada, el método de la secante utiliza una aproximación numérica de la derivada basada en dos puntos consecutivos. Este método es menos sensible a las raíces múltiples y puede ser una alternativa efectiva.
- Multiplicidad Conocida: Si se conoce la multiplicidad de la raíz (es decir, cuántas veces se repite una raíz), se pueden ajustar las fórmulas de Newton-Raphson para manejar directamente esta multiplicidad. La fórmula modificada se obtiene dividiendo la función y su derivada por la multiplicidad.
- Métodos Iterativos Específicos: Existen métodos iterativos específicos diseñados para tratar raíces múltiples, como el método de Bairstow para polinomios. Estos métodos pueden ser más robustos en situaciones donde las raíces múltiples son frecuentes.
- Algoritmos de Optimización: En casos más complejos, considerar algoritmos de optimización no basados en derivadas, como el algoritmo de Levenberg-Marquardt, que se utiliza comúnmente para problemas de ajuste de curvas y puede manejar raíces múltiples.
- Inicialización Cuidadosa: La elección de una estimación inicial cercana a la raíz múltiple correcta puede mejorar la convergencia. Métodos adicionales, como la búsqueda de raíces previa, pueden ayudar a obtener estimaciones iniciales más precisas.

VI. Conclusiones

En conclusión, el método de Newton-Raphson, aunque potente y eficaz para la aproximación de raíces de ecuaciones no lineales, presenta ciertas limitaciones y desafíos que deben ser abordados con precaución. La identificación de puntos de inflexión, la tendencia a oscilar alrededor de mínimos o máximos locales, la posible divergencia de valores iniciales y la presencia de raíces múltiples son aspectos críticos que pueden afectar la convergencia del método.

References

[1] "Convergence of newton-rapshon method." [Online]. Available: https://archive.nptel.ac.in/content/storage2/courses/122104019/numerical-analysis/Rathish-kumar/ratish-1/f3node7.html

[2] "Métodos numéricos 3: Raíces de ecuaciones: Métodos de newton-raphson y de la secante." [Online]. Available: https://estadistica-dma.ulpgc.es/FCC/05-3-Raices-de-Ecuaciones-2.html

[3] J. E. B. BOLÍVAR, A. J. B. ARANGO, and M. B. ARBELÁEZ, "El método de newton-raphson-la alternativa del ingeniero para resolver sistemas de ecuaciones no lineales," *Scientia et Technica*, vol. 11, no. 27, pp. 221–224, 2005.

[4] J. E. V. Cantero, "Método de newton raphson."