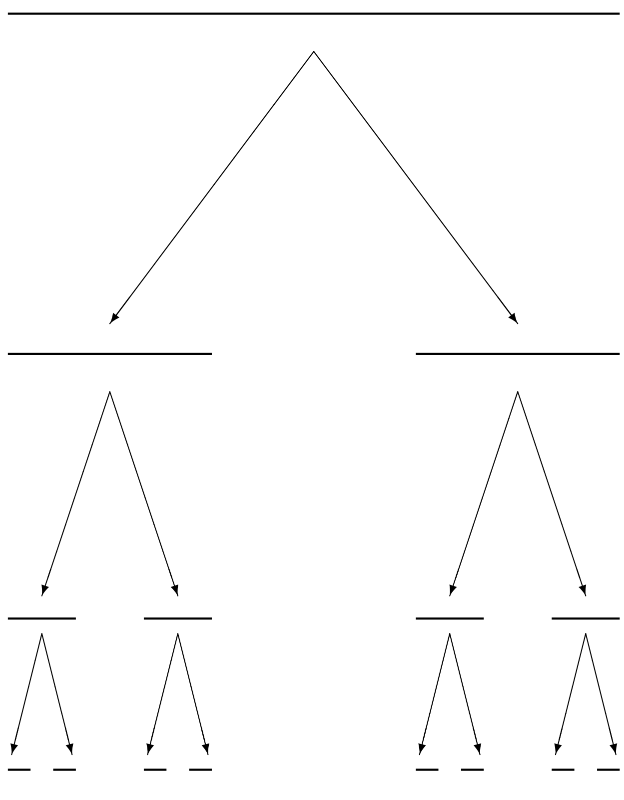
WSTĘP DO TOPOLOGII (A)

Skrypt dla studentów

Paweł Krupski



Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego

Spis treści

PRZEDMOWA

Skrypt oparty jest na semestralnych wykładach z topologii prowadzonych przeze mnie w Instytucie Matematycznym Uniwersytetu Wrocławskiego i przeznaczonych dla studentów sekcji ogólnej i zastosowań matematyki oraz studiów zaocznych. Obecnie wykład ten jest zakodowany pod nazwą *Wstęp do topologii A*. Obejmuje on omówienie i przegląd podstawowych pojęć i twierdzeń topologicznych, występujących na co dzień w różnych działach matematyki i ogranicza się w zasadzie do przestrzeni metrycznych. Ogólne przestrzenie topologiczne są tu jedynie wzmiankowane.

W stosunku do realiów żywego wykładu skrypt proponuje nieco rozszerzoną wersję materiału, którą można zaproponować ambitniejszej grupie studenckiej. Według mojego doświadczenia minimum programowe, które jest do zrealizowania w ciągu semestru może pominąć takie zagadnienia, jak iloczyny kartezjańskie nieskończenie wielu przestrzeni metrycznych, dowody niektórych trudniejszych twierdzeń i zadania o charakterze teoretycznym.

Wykład *Wstęp do topologii (A)* i skrypt mają charakter "służebny" w stosunku do innych działów matematyki. W związku z tym pominięte są prawdziwe problemy, którymi zajmuje się dziedzina matematyki zwana topologią. Studenci zainteresowani tą dziedziną powinni sięgnąć po podręczniki wprowadzające, z których w języku polskim szczególnie godne polecenia, moim zdaniem, są: [**ES**], [**E**],[**Ku**], [**D**].

Niniejszy skrypt w żadnym wypadku nie rości sobie pretensji do oryginalności zawartego materiału. Podobieństwa do innych tekstów są w nim częste i naturalne.

Będę niezmiernie wdzięczny czytelnikom za wszelkie uwagi krytyczne, które mogą się przyczynić do ulepszenia kolejnych wersji skryptu.

Paweł Krupski
Grudzień 2000

ROZDZIAŁ 1

Pojęcie przestrzeni metrycznej

DEFINICJA 1.1. Dowolny niepusty zbiór X z funkcją $\rho : X \times X \to [0, \infty)$, spełniającą następujące trzy warunki

M1: $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
M2: $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,
M3: $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$,

dla dowolnych $x, y, z \in X$, nazywamy *przestrzenią metryczną* i oznaczamy symbolem (X, ρ). Funkcję ρ nazywamy *metryką* w X, elementy zbioru X—punktami, a wartość $\rho(x, y)$—*odległością między punktami* x, y w przestrzeni metrycznej (X, ρ). Warunek **M3** zwie się *nierówno-ścią trójkąta.*

Jeśli rozważamy przestrzeń metryczną z ustaloną jedną metryką ρ, to zamiast pisać (X, ρ), będziemy po prostu pisać X.

Średnicą niepustego podzbioru A przestrzeni metrycznej (X, ρ) jest liczba $\operatorname{diam} A = \sup\{\rho(x, y) : x, y \in X\}$, jeśli rozważany kres górny istnieje; mówimy wtedy, że zbiór A jest *ograniczony.* W przeciwnym wypadku piszemy $\operatorname{diam} A = \infty$.

PRZYKŁAD 1.1. PRZESTRZEŃ DYSKRETNA. W dowolnym zbiorze niepustym X można określić metrykę ρ_{01} przyjmującą wartość 0 na każdej parze punktów równych oraz 1 na pozostałych parach punktów. Przestrzeń metryczną (X, ρ_{01}) nazywamy przestrzenią *dyskretną.*

PRZYKŁAD 1.2. PRZESTRZEŃ UNORMOWANA.

Przestrzeń unormowana jest to przestrzeń liniowa X (dla prostoty—nad $\mathbb{R}$), w której określona jest *norma* $\| \cdot \|$ wektorów, tj. funkcja $\| \cdot \| : X \to [0, \infty)$ mająca następujące własności:

(1) $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$
(2) $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\|\mathbf{x}\|$
(3) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$

dla dowolnych wektorów $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ i skalara $\alpha \in \mathbb{R}$.

Przestrzeń taką oznaczamy symbolem $(X, \| \cdot \|)$. Przy pomocy normy określamy łatwo metrykę ρ w X wzorem $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$.

Przykładami najczęściej spotykanych w matematyce przestrzeni unormowanych są przestrzenie euklidesowe, przestrzeń Hilberta l_2 lub różnego rodzaju przestrzenie funkcyjne. Niektóre z nich omówione są poniżej.

Przykład 1.3. Przestrzeń euklidesowa.

Jest to n-wymiarowa przestrzeń unormowana $\mathbb{R}^n$ z normą *euklidesową* daną wzorem

$$\|\mathbf{x}\|_e = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2},$$

gdzie $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Wobec tego metryka euklidesowa w $\mathbb{R}^n$ dana jest wzorem

$$\rho_e(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_e = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}.$$

Zauważmy, że odległość euklidesowa dwóch punktów oznacza geometrycznie długość odcinka prostoliniowego między nimi.

Przykład 1.4. W przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^n$ rozważa się często dwie inne normy:

(1) $\|\mathbf{x}\|_s = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$,
(2) $\|\mathbf{x}\|_m = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$,

gdzie $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$, prowadzące odpowiednio do metryk

(1) $\rho_s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_s$,
(2) $\rho_m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_m$.

Obie metryki są równoważne metryce euklidesowej, o czym będzie mowa w dalszej częsci. Ich interpretacja geometryczna jest jasna.

Przykład 1.5. metryka centrum. W $\mathbb{R}^n$ określamy odległość punktów wzorem

$$\rho_c(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} \rho_e(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \text{gdy } \mathbf{0}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \text{ są współliniowe,} \\ \|\mathbf{x}\|_e + \|\mathbf{y}\|_e & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

Można podawać wiele interpretacji fizycznych, w których punkty materialne mogą się poruszać wyłącznie po promieniach wychodzących z "centrum" $\mathbf{0}$ i wtedy metryka ρ_c w sposób naturalny mierzy odległość punktów. Przemawia do wyobraźni przykład miasta (lub kopalni), w którym wszystkie ulice (chodniki) schodzą się promieniście do rynku (centralnego szybu). Metrykę ρ_c nazywa się czasem metryką "centrum" lub metryką "jeża" z kolcami, będącymi promieniami wychodzącymi z $\mathbf{0}$.

PRZYKŁAD 1.6. METRYKA RZEKA. Na płaszczyźnie określamy odległość punktów $\mathbf{x} = (x_1, x_2), \mathbf{y} = (y_1, y_2)$:

$$\rho_r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} \rho_e(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \text{gdy } x_1 = y_1, \\ |x_2| + |x_1 - y_1| + |y_2| & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

Taka odległość staje się naturalna w dżungli amazońskiej, gdzie jedynymi dostępnymi szlakami są proste ścieżki wydeptane przez zwierzęta do rzeki (prosta $x_2 = 0$) i sama rzeka.

Dwie ostatnie metryki okażą się nierównoważne metryce euklidesowej.

PRZYKŁAD 1.7. Na sferze $S^2 = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\|_e = 1 \}$ określamy odległość geodezyjną $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ jako długość niedłuższego łuku koła wielkiego od $\mathbf{x}$ do $\mathbf{y}$.

PRZYKŁAD 1.8. PRZESTRZEŃ HILBERTA

$$l_2 = \{ (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^\infty : \sum_{i=1}^{\infty} (x_i)^2 < \infty \}.$$

Jest to przestrzeń unormowana z normą

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (x_i)^2},$$

gdzie $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots) \in l_2$. Można ją uważać za nieskończenie wymiarowy odpowiednik przestrzeni euklidesowych.

PRZYKŁAD 1.9. KOSTKA HILBERTA Q. Jest to podzbiór przestrzeni l_2 postaci

$$Q = \{ (x_1, x_2, \dots) : |x_i| \leq \frac{1}{i} \},$$

z metryką określoną takim samym wzorem, jak w l_2.

PRZYKŁAD 1.10. PRZESTRZEŃ $B(X, Y)$.

Jeśli X jest dowolnym zbiorem niepustym, a (Y, ρ)—przestrzenią metryczną, to w zbiorze $B(X, Y)$ wszystkich funkcji $f : X \to Y$ ograniczonych, to znaczy takich, że $\operatorname{diam} f(X) < \infty$, wprowadzamy metrykę

$$\rho_{sup}(f, g) = \sup\{\rho(f(x), g(x)) : x \in X\}$$

(metryka ta zwana jest metryką *zbieżności jednostajnej*). W przypadku, gdy Y jest przestrzenią unormowaną, z normą $\| \cdot \|$, również $B(X, Y)$ staje się w naturalny sposób przestrzenią unormowaną, można bowiem dodawać funkcje i mnożyc je przez skalary rzeczywiste, a normę funkcji f określa wzór $\|f\|_{sup} = \sup\{\|f(x)\| : x \in X\}$. Odległość funkcji w tej metryce szacuje różnicę między ich wartościami.

Przykład 1.11. Przestrzeń C_1.

Określamy $C_1 = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \quad \text{jest ciągła} \}$. Jest to przestrzeń unormowana z normą $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$. Odległość dwóch funkcji w metryce otrzymanej z tej normy jest polem obszaru pomiędzy ich wykresami.

Przykład 1.12. Przestrzeń zmiennych losowych

W rachunku prawdobodobieństwa rozważa się zbiór X zmiennych losowych określonych na przestrzeni zdarzeń elementarnych E, w której dane jest prawdopodobieństwo P. W X mamy naturalną relację równoważności:

$$f \sim g \Leftrightarrow P(\{ x \in E : f(x) \neq g(x) \}) = 0.$$

Relacja ta utożsamia zmienne losowe równe prawie wszędzie, tzn. równe z prawdopodobieństwem 1. W zbiorze $\widetilde{X}$ klas abstrakcji relacji $\sim$ wprowadzamy metrykę wzorem:

$$\rho([f],[g]) = \sup_{\epsilon>0} P(\{ x \in E : |f(x) - g(x)| \geq \epsilon \}).$$

Odległość ta szacuje prawdopodobieństwo zdarzeń, że zmienne losowe f, g różnią się o pewną wielkość dodatnią.

Ćwiczenia

(1) Sprawdzić, że normy i metryki opisane przykładach w rozdziale 1, rzeczywiście spełniają warunki definicji normy i **M1**–**M3** definicji metryki.

(2) Sprawdzić, czy następujące funkcje są metrykami w podanych zbiorach:

(a) $\rho'(p,q) = \min(1, \rho(p,q))$, gdzie $p, q \in (X, \rho)$.

(b) $\hat{\rho}(p,q) = \frac{\rho(p,q)}{1+\rho(p,q)}$, gdzie $p, q \in (X, \rho)$.

(c) $\rho(m,n) = |\frac{1}{m} - \frac{1}{n}|$, $m, n \in \mathbb{N}$.

ROZDZIAŁ 2

Kule i granice ciągów

Kule i granice ciągów są podstawowymi pojęciami dla przestrzeni metrycznych.

Definicja 2.1. *Kulą o środku (wokół) p i (o) promieniu $r > 0$* w przestrzeni metrycznej (X, ρ) nazywamy zbiór

$$K(p; r) = \{\, x \in X : \rho(p, x) < r \,\}.$$

Kulą uogólnioną wokół podzbioru $A \subset X$ o promieniu r nazywamy zbiór $K(A; r) = \{\, x \in X : (\exists a \in A)\rho(x, a) < r \,\}$.

Kula $K(p; r)$ zawiera więc punkty w przestrzeni X leżące bliżej niż r od punktu p w sensie metryki ρ. Zauważmy, że środek kuli zawsze do niej należy i że jeśli dwie kule mają ten sam środek, to kula o mniejszym promieniu zawiera się w kuli o promieniu większym.

Kula uogólniona $K(A; r)$ jest zaś sumą wszystkich kul o środkach należących do zbioru A i promieniach r.

W przestrzeni dyskretnej (Przykład 1.1) kulami są zbiory jednopunktowe (dla promieni ≤ 1) bądź cała przestrzeń (gdy promień jest > 1).

Na płaszczyźnie euklidesowej kulami są otwarte koła, w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^3$ są nimi geometryczne otwarte kule, itd.

W przestrzeni $B(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (Przykład 1.10) kulą wokół funkcji f o promieniu r jest zbiór wszystkich funkcji, których wykresy leżą w pasie szerokości $2r$ wokół wykresu f.

Warto samodzielnie znaleźć postacie kul w innych przykładach z rozdziału 1 (zob. Ćwiczenia).

Następujące stwierdzenie wyraża istotną własność kul w dowolnej przestrzeni metrycznej $(X\rho)$.

Stwierdzenie 2.1. *Jeśli $y \in K(x; r)$, to istnieje liczba $r' > 0$ taka, że $K(y; r') \subset K(x; r)$.*

Dowód. Przyjmijmy $r' = r - \rho(x, y)$. Wtedy $r' > 0$ oraz jeśli $z \in K(y; r')$, to $\rho(z, x) \leq \rho(z, y) + \rho(y, x) < r' + r - r' = r$, więc $z \in K(x; r)$. □

Dobrym ćwiczeniem wykorzystującym nierówność trójkąta dla metryki jest dowód następującego faktu.

STWIERDZENIE 2.2. *Podzbiór przestrzeni metrycznej jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy jest zawarty w pewnej kuli w tej przestrzeni.*

Terminologia dotycząca ciągów w przestrzeniach metrycznych jest taka sama, jak w analizie matematycznej. *Ciągiem* punktów w przestrzeni metrycznej (X, ρ) nazywamy, jak zwykle w matematyce, dowolną funkcję $n \mapsto x_n$ określoną na zbiorze $\mathbb{N}$ o wartościach w X; stosujemy standardowe oznaczenia ciągów: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lub $(x_1, x_2, \dots)$.

Podciąg $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest to ciąg punktów ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ taki, że $(n_1, n_2, \dots)$ jest podciągiem rosnącym ciągu $(1, 2, \dots)$.

Mówimy, że *prawie wszystkie punkty* ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mają pewną własność, gdy istnieje liczba naturalna n_0 taka, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq n_0$ punkt x_n ma tę własność. Na przykład mówimy, że ciąg jest *prawie stały*, gdy $x_{n_0} = x_{n_0+1} = \dots$ dla pewnego wskaźnika n_0.

DEFINICJA 2.2. Punkt $x \in X$ jest *granicą ciągu* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ w przestrzeni metrycznej (X, ρ), gdy $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$.

Piszemy wtedy $\lim x_n = x$ lub $x_n \to x$, a o ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mówimy, że jest *zbieżny* (do x) w przestrzeni metrycznej (X, ρ).

STWIERDZENIE 2.3.

(1) *Ciąg zbieżny w dowolnej przestrzeni metrycznej ma dokładnie jedną granicę.*
(2) *Każdy podciąg ciągu zbieżnego jest zbieżny do tej samej granicy, co cały ciąg.*

DOWÓD. Załóżmy, że $\lim x_n = x$ oraz $\lim x_n = x'$ w przestrzeni (X, ρ). Wtedy $\rho(x, x') \leq \rho(x, x_n) + \rho(x_n, x')$, a ponieważ $\lim \rho(x, x_n) = \lim \rho(x', x_n) = 0$, więc $\rho(x, x') = 0$, czyli $x = x'$.

Własność (2) wynika wprost z definicji granicy.

$\square$

W przestrzeni dyskretnej jedynymi ciągami zbieżnymi są ciągi prawie stałe. W przestrzeni funkcyjnej $B(X, Y)$ zbieżność ciągu funkcji oznacza ich zbieżność jednostajną.

Pojęciem zbliżonym do granicy ciągu jest pojęcie punktu skupienia zbioru.

DEFINICJA 2.3. Punkt $x \in X$ jest *punktem skupienia* zbioru $A \subset X$ w przestrzeni X, gdy x jest granicą ciągu punktów z A różnych od x.

Ćwiczenia

(1) Narysuj kule o środku p i promieniu r w metrykach $\rho_r, \rho_c, \rho_m, \rho_s$ na płaszczyźnie, określonych w poprzednim rozdziale, gdzie
   (a) $p = (0,0), r = 1$,
   (b) $p = (1,1), r = 1, r = 2$.

(2) Udowodnij stwierdzenie 2.2.

(3) Udowodnij, że suma skończenie wielu kul przestrzeni metrycznej jest w niej podzbiorem ograniczonym.

(4) Niech $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ będzie sferą w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^3$, a $(p_n) \subset S^2$ ciągiem zbieżnym do $p \in \mathbb{R}^3$. Czy $p \in S^2$? Do każdego punktu $q \in S^2$ dobierz ciąg $(q_n) \subset \mathbb{R}^3 \setminus S^2$ zbieżny do q.

(5) Znajdź wszystkie punkty skupienia zbioru
$$\left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{k} : m, n, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

ROZDZIAŁ 3

Różne typy zbiorów. Podprzestrzenie

Definicja 3.1. Podzbiór $A \subset (X, \rho)$ nazywa się zbiorem *otwartym* w przestrzeni X, gdy A jest sumą pewnej ilości kul w X. Dopełnienie zbioru otwartego w X nazywa się zbiorem *domkniętym* w X. Jeśli zbiór $U \subset X$ jest otwarty w X i $x \in U$, to U nazywa się *otoczeniem* punktu x w przestrzeni X.

Zauważmy, że zbiorami otwartymi są, między innymi, pojedyncze kule, cała przestrzeń X (suma wszystkich kul) i zbiór pusty (suma pustej rodziny kul). Zatem przestrzeń X i zbiór pusty są jednocześnie przykładami zbiorów domkniętych.

Zwróćmy też uwagę, że w przestrzeni, która nie jest dyskretna, istnieją podzbiory, które nie są ani otwarte, ani domknięte—inaczej mówiąc, zbiór, który nie jest otwarty, nie musi być domknięty (często popełniany błąd logiczny!).

Rodzinę wszystkich podzbiorów otwartych przestrzeni X nazywamy *topologią* przestrzeni X generowaną przez metrykę ρ.

Podstawowe własności mnogościowe zbiorów otwartych (domkniętych) wyrażają się w następującym stwierdzeniu.

Stwierdzenie 3.1.

(1) *Suma (przekrój) dowolnej ilości podzbiorów otwartych (domkniętych) jest podzbiorem otwartym (domkniętym) przestrzeni.*

(2) *Przekrój (suma) skończenie wielu podzbiorów otwartych (domkniętych) jest podzbiorem otwartym (domkniętym) przestrzeni.*

Dowód. Pierwsza wlasność zbiorów otwartych wynika natychmiast z ich definicji, jako sumy kul. Dowód drugiej opiera się na Stwierdzeniu 2.1. Wynika z niego, że przekrój dwóch kul jest zbiorem otwartym (nie musi być kulą!), gdyż jeśli $z \in K(x; r) \cap K(y; r')$, to istnieją kula $K(z; s) \subset K(x; r)$ oraz kula $K(z; s') \subset K(y; r')$; wtedy, jeśli $t = \min(s, s')$, to $K(z; t) \subset K(x; r) \cap K(y; r')$—widzimy więc, że przekrój $K(x; r) \cap K(y; r')$ jest sumą takich kul $K(z; t)$, gdzie $z \in K(x; r) \cap K(y; r')$.

Jeśli teraz U_1 i U_2 są podzbiorami otwartymi, to ich przekrój jest sumą przekrojów $K(x; r) \cap K(y; r')$, gdzie $K(x; r) \subset U_1, K(y; r') \subset U_2$, które są zbiorami otwartymi, a więc jest on zbiorem otwartym. Przez prostą indukcję wnioskujemy, że przekrój skończonej ilości zbiorów otwartych jest otwarty.

Odpowiednie własności zbiorów domkniętych wynikają z własności zbiorów otwartych poprzez prawa de Morgana. Na przykład, jeśli $\{F_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ jest dowolną rodziną podzbiorów domkniętych przestrzeni X, to przekrój

$$\bigcap\{F_\gamma : \gamma \in \Gamma\} = \bigcap\{X \setminus (X \setminus F_\gamma) : \gamma \in \Gamma\} = X \setminus \bigcup\{X \setminus F_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$$

jest domknięty, bo jest dopełnieniem zbioru otwartego

$$\bigcup\{X \setminus F_\gamma : \gamma \in \Gamma\}.$$

□

Podstawowymi operacjami topologicznymi wykonywanymi na dowolnych podzbiorach przestrzeni metrycznych są operacje wnętrza i domknięcia.

Definicja 3.2. *Wnętrzem* $\operatorname{int} A$ podzbioru $A \subset X$ w przestrzeni X jest maksymalny zbiór otwarty w X zawarty w A. Inaczej mówiąc, $\operatorname{int} A$ jest sumą wszystkich zbiorów otwartych w X zawartych w A.

Skrót int pochodzi od łacińskiego słowa *interior*.

Zauważmy, że zbiór A jest otwarty w X wtedy i tylko wtedy, gdy jest równy swojemu wnętrzu.

Zbiór A może mieć wnętrze puste—nazywamy go wtedy zbiorem *brzegowym* w X. Przykładami takich zbiorów są zbiór liczb wymiernych oraz zbiór liczb niewymiernych na prostej euklidesowej.

Definicja 3.3. *Domknięciem* $\operatorname{cl}_X A$ podzbioru $A \subset X$ w przestrzeni X jest minimalny zbiór domknięty w X, zawierający A. Innymi słowy, $\operatorname{cl}_X A$ jest przekrojem wszystkich zbiorów domkniętych w X, zawierających A.

Jeśli wiadomo, że rozpatrujemy domknięcie w ustalonej przestrzeni metrycznej X, to zamiast cl_X piszemy po prostu cl.

Oznaczenie cl jest skrótem angielskiego słowa *closure*.

Widać, że zbiór A jest domknięty w X wtedy i tylko wtedy, gdy $A = \operatorname{cl} A$.

Stwierdzenie 3.2. *Każdy podzbiór A przestrzeni X spełnia następujące warunki:*

(1) $\operatorname{cl}\emptyset = \emptyset$.
(2) $A \subset \operatorname{cl} A$.
(3) $\operatorname{cl}(\operatorname{cl} A) = \operatorname{cl} A$.

(4) $\operatorname{cl}(A \cup B) = \operatorname{cl} A \cup \operatorname{cl} B$.

Dowód. Pierwszy warunek wynika z domkniętości zbioru pustego, a drugi wprost z definicji domknięcia. Warunek (3) jest konsekwencją definicji domknięcia i obserwacji, że $\operatorname{cl} A$ jest zbiorem domkniętym zawierającym A.

Ponieważ $\operatorname{cl} A$ i $\operatorname{cl} B$ są domknięte, więc ich suma też, przy czym $A \cup B \subset \operatorname{cl} A \cup \operatorname{cl} B$, skąd $\operatorname{cl}(A \cup B) \subset \operatorname{cl} A \cup \operatorname{cl} B$. Na odwrót, zarówno $A \subset \operatorname{cl}(A \cup B)$, jak i $B \subset \operatorname{cl}(A \cup B)$, więc $\operatorname{cl} A \subset \operatorname{cl}(A \cup B)$ oraz $\operatorname{cl} B \subset \operatorname{cl}(A \cup B)$, bo $\operatorname{cl}(A \cup B)$ jest domknięty. □

Jeśli $\operatorname{cl} A = X$, to A nazywa się zbiorem *gęstym* w X. Zarówno liczby wymierne, jak i niewymierne stanowią przykłady zbiorów gęstych na prostej euklidesowej.

Stwierdzenie 3.3. *Niech A będzie podzbiorem przestrzeni (X, ρ).*

(1) $x \in \operatorname{cl} A$ *wtedy i tylko wtedy, gdy każde otoczenie punktu x w X przecina zbiór A.*
(2) $x \in \operatorname{cl} A$ *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ taki, że $x_n \in A$, dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, oraz $\lim x_n = x$.*
(3) $\operatorname{int} A = X \setminus \operatorname{cl}(X \setminus A)$
(4) *Zbiór A jest brzegowy w przestrzeni X wtedy i tylko wtedy, gdy jego dopełnienie $X \setminus A$ jest zbiorem gęstym w X.*

Dowód.

(1) Istnienie otoczenia U punktu x, które nie przecina zbioru A jest równoważne temu, że x nie należy do zbioru domkniętego $X \setminus U$, zawierającego A, więc x nie należy do $\operatorname{cl} A$. Na odwrót, jeśli $x \notin \operatorname{cl} A$, to $U = X \setminus \operatorname{cl} A$ jest otoczeniem punktu x rozłącznym z A.
(2) Załóżmy, że $x \in \operatorname{cl} A$. Wtedy, na podstawie własności (1), każda kula $K(x; \frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}$, zawiera pewien punkt z A—oznaczmy go przez x_n. Ciąg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny do x, bo $\rho(x, x_n) < \frac{1}{n}$, więc $\lim_{n\to\infty} \rho(x, x_n) = 0$. Na odwrót, jeśli $\lim \rho(x, x_n) = 0, x_n \in A$ i U jest otoczeniem x, to istnieje kula $K(x; r) \subset U$, a w niej znajdują się prawie wszystkie punkty x_n. Znowu z własności (1) wynika, że $x \in \operatorname{cl} A$.
(3) Zbiór $X \setminus \operatorname{int} A$ jest domknięty i zawiera $X \setminus A$, więc

$$\operatorname{cl}(X \setminus A) \subset X \setminus \operatorname{int} A,$$

skąd

$$\operatorname{int} A \subset X \setminus \operatorname{cl}(X \setminus A).$$

Z drugiej strony

$$X \setminus A \subset \operatorname{cl}(X \setminus A),$$

czyli zbiór $X \setminus \operatorname{cl}(X \setminus A)$ jest otwarty i zawarty w A, zatem zawiera się w $\operatorname{int} A$.

(4) Tę równoważność otrzymujemy od razu ze wzoru (3).

□

Z powyższego stwierdzenia wynika praktyczna uwaga:

UWAGA 3.1. Zbiór $A \subset X$ jest domknięty w przestrzeni X wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ciągu punktów z A zbieżnego w X jego granica należy do A.

DEFINICJA 3.4. Podzbiór Y przestrzeni metrycznej X jest typu G_δ w X, gdy Y jest przekrojem przeliczalnej ilości podzbiorów otwartych przestrzeni X.

Dopełnienia podzbiorów typu G_δ w X nazywają się F_σ w X.

STWIERDZENIE 3.4. *Każdy zbiór domknięty w przestrzeni metrycznej (X, ρ) jest typu G_δ, a każdy zbiór otwarty w X jest typu F_σ.*

DOWÓD. Niech F będzie domknięty w X. Pokażemy, że

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} K(F; \frac{1}{n}),$$

gdzie $K(F; \frac{1}{n})$ oznacza kulę uogólnioną wokół F o promieniu $\frac{1}{n}$ (taka kula jest oczywiście zbiorem otwartym).

Niech $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K(F; \frac{1}{n})$. Dla każdego n istnieje więc punkt $x_n \in F$ taki, że

$$\rho(x, x_n) < \frac{1}{n}.$$

Stąd

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

i, z domkniętości F, $x \in F$. Inkluzja odwrotna

$$F \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} K(F; \frac{1}{n})$$

jest oczywista.

Drugą część stwierdzenia uzyskujemy z pierwszej stosując prawa de Morgana rachunku zbiorów. □

DEFINICJA 3.5. Zbiór $A \subset X$ jest *nigdziegęsty* w przestrzeni X, gdy jego domknięcie jest zbiorem brzegowym w X.

Łatwo zauważyć, że podzbiór zbioru brzegowego w przestrzeni X jest brzegowy w X i że—wobec tego— zbiór nigdziegęsty jest brzegowy. Oczywiście zbiór brzegowy nie musi być nigdziegęsty, jeśli nie jest domknięty (np. zbiór liczb wymiernych na prostej euklidesowej).

Definicja 3.6. *Brzegiem* zbioru $A \subset X$ w przestrzeni X nazywamy zbiór $\operatorname{bd} A = \operatorname{cl} A \setminus \operatorname{int} A$.

Skrót bd pochodzi od angielskiego *boundary*.

Przykład 3.1. Brzegiem kuli $K(\mathbf{c}; r)$ w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$ jest *sfera* $(n-1)$*-wymiarowa* o środku $\mathbf{c}$ i promieniu r, czyli zbiór punktów odległych o r od środka $\mathbf{c}$. W innych przestrzeniach metrycznych tak być nie musi.

Nie należy mylić pojęć "zbioru brzegowego" i "brzegu zbioru". Brzeg zbioru nie musi być zbiorem brzegowym (np. brzegiem zbioru liczb wymiernych na prostej euklidesowej jest cała prosta), ani zbiór brzegowy nie musi być brzegiem żadnego zbioru (ten sam przykład!).

Zauważmy jeszcze, że zbiór $A \subset X$ jest otwarto-domknięty w przestrzeni X wtedy i tylko wtedy, gdy $\operatorname{bd} A = \emptyset$.

Definicja 3.7. Zbiór punktów skupienia zbioru $A \subset X$ w przestrzeni X nazywamy *pochodną* zbioru A w X i oznaczamy symbolem A^d.

Uwaga 3.2. Z definicji pochodnej i stwierdzenia 3.3 łatwo wynika wzór

$$\operatorname{cl} A = A \cup A^d$$

dla każdego podzbioru A przestrzeni metrycznej X.

Definicja 3.8. Jeśli $A \subset A^d$, to A nazywamy zbiorem *w sobie gęstym.*

Przykładem zbioru w sobie gęstego jest zbiór liczb wymiernych na prostej euklidesowej; zbiór liczb całkowitych nie jest w sobie gęsty.

Definicja 3.9. Niech (X, ρ) będzie przestrzenią metryczną i $Y \subset X$. Przestrzeń metryczną $(Y, \rho \restriction Y \times Y)$ nazywamy *podprzestrzenią* przestrzeni X. Metrykę $\rho \restriction Y \times Y$ oznaczamy zwykle tym samym symbolem ρ, co metrykę w całej przestrzeni X.

Aby odróżnić pojęcia dotyczące podprzestrzeni Y od analogicznych pojęć dla całej przestrzeni X wygodnie jest zaznaczać przy nich symbole oznaczające te przestrzenie, np. $K_Y(y; r), \operatorname{cl}_Y, \operatorname{int}_Y, \operatorname{bd}_Y$ oznaczać będą odpowiednio: kulę o środku y i promieniu r, domknięcie, wnętrze, brzeg w podprzestrzeni Y.

Z powyższej definicji wynikają od razu wzory:

$$K_Y(y;r) = Y \cap K_X(y;r); \tag{3.1}$$

$$\mathrm{cl_Y}(A) = Y \cap \mathrm{cl_X}(A) \text{ dla } A \subset Y; \tag{3.2}$$

(3.3) $U \subset Y$ jest otwarty (domknięty) w Y wtedy i tylko wtedy, gdy
U jest postaci $U = Y \cap U'$
dla pewnego zbioru otwartego (domkniętego) U' w X.

Ćwiczenia

(1) Uzasadnić drugie zdania w definicjach 3.2 i 3.3.

(2) Podać przykłady przestrzeni metrycznych z kulami $K(x;r)$, których brzegiem nie jest zbiór punktów odległych o r od środka x.

(3) Kiedy zbiór brzegowy jest równy swojemu brzegowi?

(4) Wyprowadzić wzory (3.1)–(3.3).

(5) Znajdź podzbiór przeliczalny i gęsty w zbiorze liczb niewymiernych P z metryką euklidesową.

(6) Udowodnij, że jeśli zbiór G jest otwarty w X, to dla dowolnego zbioru $A \subset X$ zachodzi
  (a) $G \cap \operatorname{cl} A \subset \operatorname{cl}(G \cap A)$
  (b) $\operatorname{cl}(G \cap \operatorname{cl} A) = \operatorname{cl}(G \cap A)$
  Podaj przykład na istotność inkluzji (a).

(7) Udowodnij, że suma zbioru brzegowego i zbioru nigdziegęstego w przestrzeni X jest zbiorem brzegowym w X oraz przekrój dwóch podzbiorów gęstych i otwartych w X jest gęsty i otwarty w X.

(8) Znajdź wnętrze, domknięcie i brzeg następujących podzbiorów:
  $\mathbb{R}\times\mathbb{N}$, $\mathbb{R}\times[0,\infty)$, $[0,1)\times\{0\}$, $\{(x,y) : x^2+y^2 = 5\}$, $\mathbb{Q}\times(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$, $\mathbb{R} \times \{0\}$
  (a) płaszczyzny euklidesowej,
  (b) płaszczyzny z metryką “centrum”.
  (c) płaszczyzny z metryką “rzeka”.

(9) Rozpatrujemy przestrzeń (X,ρ), gdzie $X = [0,1] \times (0,1) \subset (\mathbb{R}^2,\rho)$ dla $\rho = \rho_e, \rho_c, \rho_r$. Podaj wnętrze, domknięcie, brzeg i zbadaj, czy następujące podzbiory są otwarte, domknięte, brzegowe, gęste w X: $\{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots\} \times (0,1)$, $(0,1) \times \{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots\}$, $(\frac{1}{2},1) \times (0,1)$, $(\frac{1}{2},1] \times (0,1)$, $\{(x,x) : 0 < x < 1\}$, $(\mathbb{Q} \cap (0,1)) \times (\mathbb{Q} \cap (0,1))$.

(10) Niech $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ będzie sferą w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^3$. Czy S^2 jest domknięty i brzegowy w $\mathbb{R}^3$? Rozważ to samo zadanie zastępując sferę kulą $B^3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

(11) Czy zbiór $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^9 + y^7 - \sin(xy) = 1\}$ jest domknięty na płaszczyźnie euklidesowej? A zbiór $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x - [x]\}$? Czy średnica koła bez brzegu jest zbiorem domkniętym (otwartym) w tym kole? na płaszczyźnie euklidesowej?

(12) Udowodnij następujące wzory:
  (a) $\operatorname{cl} A = A \cup A^d$,
  (b) $\operatorname{cl} A^d = A^d$,
  (c) $(A \cup B)^d = A^d \cup B^d$,
  (d) $\bigcup_t A_t^d \subset (\bigcup_t A_t)^d$,
  (e) $A^{dd} \subset A^d$.

Podaj przykłady na istotność dwu ostatnich inkluzji.

(13) Znajdź domknięcie zbioru $S = \left\{(x, y) \in R^2 : y = \sin \frac{1}{x}\right\}$ na płaszczyźnie euklidesowej. Czy S jest otwarty, gęsty, brzegowy w $\mathrm{cl}\, S$? A w $\mathbb{R}^2$? Znajdź punkty skupienia S w $\mathbb{R}^2$.

(14) Czy prosta w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^m$, $m > 1$, jest zbiorem: domkniętym, otwartym, brzegowym, gęstym? To samo pytanie dla płaszczyzny w $\mathbb{R}^m$, $m > 2$. A gdyby w pytaniu pierwszym rozpatrywać $(\mathbb{R}^2, \rho_c)$?

(15) Udowodnij wzory dla podzbiorów przestrzeni metrycznej X i podaj przykłady na istotność inkluzji:
(a) $\mathrm{cl}\, A = \mathrm{int}\, A \cup \mathrm{bd}\, A$
(b) $\mathrm{bd}(\mathrm{int}\, A) \subset \mathrm{bd}\, A$
(c) $\mathrm{cl}(A \cap B) \subset \mathrm{cl}\, A \cap \mathrm{cl}\, B$
(d) $X \setminus \mathrm{cl}\, A = \mathrm{int}(X \setminus A)$
(e) $X \setminus \mathrm{int}\, A = \mathrm{cl}(X \setminus A)$

(16) Podaj przykłady wskazujące na to, że przekrój przeliczalnej ilości zbiorów otwartych nie musi być otwarty, a suma przeliczalnej ilości zbiorów domkniętych nie musi być zbiorem domkniętym.

(17) Sprawdź wzory dla podzbiorów ustalonej przestrzeni metrycznej X:
(a) $A \subset B \Rightarrow \mathrm{cl}\, A \subset \mathrm{cl}\, B$
(b) $\mathrm{cl}\, A \setminus \mathrm{cl}\, B \subset \mathrm{cl}(A \setminus B)$
(c) $\mathrm{int}(A \cap B) = \mathrm{int}\, A \cap \mathrm{int}\, B$
(d) $\bigcup_t (\mathrm{int}\, A_t) \subset \mathrm{int} \bigcup_t A_t$
(e) $\mathrm{bd}(A \cup B) \subset \mathrm{bd}\, A \cup \mathrm{bd}\, B$; jeśli $A \cap \mathrm{cl}\, B = \emptyset = B \cap \mathrm{cl}\, A$, to zachodzi równość.
(f) $\mathrm{bd}(A \cap B) \subset \mathrm{bd}\, A \cup \mathrm{bd}\, B$
(g) $\mathrm{bd}\, A = \mathrm{bd}(X \setminus A)$
(h) $\mathrm{bd}(\mathrm{cl}\, A) \subset \mathrm{bd}\, A$
(i) $\mathrm{bd}\, A = \emptyset \Leftrightarrow A$ jest otwarto-domknięty.
(j) $\mathrm{diam}(\mathrm{cl}\, A) = \mathrm{diam}\, A$

Podaj przykłady na istotność inkluzji w odpowiednich wzorach.

(18) Niech zbiór $A \subset Y$ będzie gęsty w podprzestrzeni $Y \subset X$, która jest gęsta w X. Czy A jest gęsty w X?

Niech D będzie gęsty w X, a $Y \subset X$ będzie otwarty w X. Czy $D \cap Y$ jest gęsty w podprzestrzeni Y?

(19) Zbadaj zbieżność ciągu punktów płaszczyzny

$$p_n = \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right), \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right)\right)$$

w metrykach $\rho_e, \rho_c, \rho_r, \rho_{01}$. Co jest domknięciem zbioru $\{p_1, p_2, \dots\}$ na płaszczyźnie w tych metrykach?

(20) Udowodnij, że zbiór $A \subset (X, \rho)$ jest gęsty w X, wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego zbioru otwartego niepustego $U \subset X$ jest $A \cap U \neq \emptyset$.
(21) Znajdź wszystkie podzbiory gęste w $(\mathbb{N}, \rho_e)$.

ROZDZIAŁ 4

Przekształcenia ciągłe

DEFINICJA 4.1. Niech $(X, \rho_X), (Y \rho_Y)$, będą przestrzeniami metrycznymi. Funkcja $f : X \to Y$ nazywa się *przekształceniem ciągłym w punkcie* $x \in X$, gdy dla każdego ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zbieżnego do x w (X, ρ_X) ciąg $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny do $f(x)$ w (Y, ρ_Y).

Jeśli $f : X \to Y$ jest ciągłe w każdym punkcie przestrzeni X, to f nazywamy *przekształceniem ciągłym.*

Tak, jak w analizie matematycznej dowodzi się równoważności definicji 4.1, zwanej Heinego, ciągłości f w punkcie x z tzw. definicją Cauchy'ego ciągłości w punkcie x:

(C): $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 (\rho_X(x, x') < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(x')) < \epsilon)$.

Warunek (C) często wygodnie jest wysławiać, używając kul:

(C): dla każdej kuli $K(f(x); \epsilon)$ w Y istnieje kula $K(x; \delta)$ w X taka, że $f(K(x; \delta)) \subset K(f(x); \epsilon)$.

W przestrzeniach metrycznych można sformułować pojęcie ciągłości przekształcenia w języku zbiorów otwartych, domkniętych lub przy użyciu operacji cl.

STWIERDZENIE 4.1. *$f : X \to Y$ jest ciągłe w punkcie x wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego otoczenia $V \subset Y$ punktu $f(x)$ istnieje otoczenie $U \subset X$ punktu x takie, że $f(U) \subset V$.*

Następujące warunki są równoważne.

(1) *$f : X \to Y$ jest ciągłe;*
(2) *przeciwobraz $f^{-1}(V)$ jest otwarty w X dla każdego zbioru otwartego V w Y;*
(3) *przeciwobraz $f^{-1}(D)$ jest domknięty w X dla każdego zbioru domkniętego D w Y;*
(4) *$f(\mathrm{cl}\, A) \subset \mathrm{cl}\, f(A)$ dla dowolnego podzbioru $A \subset X$.*

DOWÓD. Pierwszą część uzyskujemy łatwo z warunku Cauchy'ego (C) ciągłości w punkcie: jeśli f jest ciągłe w x i V jest otoczeniem punktu $f(x)$, to istnieje kula $K(f(x); \epsilon) \subset V$, a dla niej istnieje kula $K(x; \delta) = U \subset X$, taka że $f(U) \subset K(f(x); \epsilon) \subset V$. Na odwrót, jeśli dla każdego otoczenia V punktu $f(x)$ istnieje otoczenie U punktu x

spełniające $f(U) \subset V$, to przyjmując $V = K(f(x);\epsilon)$ znajdziemy kulę $K(x;\delta) \subset U$, której obraz przez f będzie się oczywiście zawierał w kuli $K(f(x);\epsilon)$.

Przechodząc do dowodu drugiej części, załóżmy, że warunek (1) jest spełniony i V jest podzbiorem otwartym przestrzeni Y. Niech x będzie dowolnym punktem zbioru $f^{-1}(V)$. Z pokazanej przed chwilą pierwszej części stwierdzenia wynika istnienie otoczenia U punktu x takiego, że $f(U) \subset V$, co oznacza $U \subset f^{-1}(V)$. Wobec tego zbiór $f^{-1}(V)$ jest otwarty, czyli zachodzi (2).

Warunek (3) wynika z (2) (jest do niego dualny) wręcz z definicji zbioru domkniętego (i oczywistych własności przeciwobrazów): jeśli D jest domknięty w Y, to $Y \setminus D$ jest otwarty w Y oraz $f^{-1}(D) = f^{-1}(Y \setminus (Y \setminus D)) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus D)$ jest domknięty w X.

W celu pokazania implikacji (3) $\Rightarrow$ (4), zauważmy, że zbiór $\operatorname{cl} f(A)$ jest domknięty w Y, więc jego przeciwobraz $f^{-1}(\operatorname{cl} f(A))$ jest domknięty w X, a przy tym $A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(\operatorname{cl} f(A))$. Z definicji domknięcia zbioru otrzymujemy zawieranie $\operatorname{cl} A \subset f^{-1}(\operatorname{cl} f(A))$, z którego dostajemy (4).

Aby udowodnić ostatnią implikację (4) $\Rightarrow$ (1), przypuśćmy, że f nie jest ciągłe w pewnym punkcie x, to znaczy istnieje ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zbieżny do x w przestrzeni X taki, że ciąg $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ nie jest zbieżny do $f(x)$ w przestrzeni Y. Zatem istnieje kula $K(f(x);\epsilon) \subset Y$, poza którą znajduje się nieskończenie wiele punktów ciągu $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Spośrod tych punktów wybierzmy podciąg $(f(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ i przyjmijmy w (4) $A = \{x_{n_1}, x_{n_2}, \dots\}$. Ponieważ $x \in \operatorname{cl} A$, więc $f(x) \in \operatorname{cl} f(A)$, skąd wnosimy, że kula $K(f(x);\epsilon)$ zawiera punkt zbioru $f(A) = \{f(x_{n_1}), f(x_{n_2}), \dots\}$ —sprzeczność.

□

Stwierdzenie 4.2. *Jeśli A jest podprzestrzenią przestrzeni metrycznej X i $f : X \to Y$ jest przekształceniem ciągłym, to przekształcenie $f \restriction A : A \to Y$ jest też ciągłe.*

Dowód. Uzasadnienie polega na sprawdzeniu definicji przekształcenia ciągłego, pamiętając, że ciąg zbieżny w podprzestrzeni jest jednocześnie zbieżny w całej przestrzeni. □

Jednym z ważnych zagadnień w topologii i w analizie matematycznej jest zagadnienie odwrotne do Stwierdzenia 4.2, a dokładniej—badanie, kiedy przekształcenie ciągłe $f : A \to Y$ da się przedłużyć do przekształcenia ciągłego $f^* : X \to Y$, tj. spełniającego $f^* \restriction A = f$ (takie przekształcenie f^* nazywa się *przedłużeniem ciągłym* przekształcenia f na X). Znane przykłady z analizy wskazują, że nie każde przekształcenie ciągłe określone na podprzestrzeni prostej euklidesowej ma przedłużenie ciągłe na całą prostą. Ważnym i nietrywialnym wynikiem pozytywnym jest twierdzenie Tietzego, którego dowód można znaleźć w podręcznikach, np. [**ES**], [**Ku**].

TWIERDZENIE 4.1. (TIETZEGO) *Niech Y będzie jedną z następujących przestrzeni z metryką euklidesową: $\mathbb{R}^n, [a;b]^n, (a;b]^n$, gdzie $n \in \mathbb{N}$ lub kostką Hilberta. Jeśli A jest podzbiorem domkniętym przestrzeni metrycznej X, to każde przekształcenie ciągłe $f : A \to Y$ ma przedłużenie ciągłe na X.*

Składanie przekształceń ciągłych prowadzi do przekształceń ciągłych.

STWIERDZENIE 4.3. *Jeśli $f : X \to Y$ jest ciągłe w punkcie x, a $g : Y \to Z$ jest ciągłe w punkcie $f(x)$, to złożenie $gf : X \to Z$ jest ciągłe w x. Zatem jeśli f i g są ciągle, to gf jest też ciągłe.*

DOWÓD. Niech $W \subset Z$ będzie otoczeniem punktu $g(f(x))$. Z ciągłości g wynika istnienie otoczenia $V \subset Y$ punktu $f(x)$ takiego, że $g(V) \subset W$, a z ciągłości f —istnienie otoczenia $U \subset X$ punktu x takiego, że $f(U) \subset V$. Stąd $g(f(U)) \subset g(V) \subset W$, więc gf jest ciągłe w punkcie x. □

Często określamy przekształcenie na całej przestrzeni X, określając je na podzbiorach, które dają w sumie X. Następujące stwierdzenie podaje w dwóch wersjach—dla podzbiorów domkniętych i otwartych, kiedy taka procedura jest poprawna i gwarantuje ciągłość przekształcenia na X.

STWIERDZENIE 4.4. *Niech A i B będą podzbiorami domkniętymi (otwartymi) przestrzeni X i $A \cup B = X$. Jeśli $f' : A \to Y$ i $f'' : B \to Y$ są ciągłe oraz $f'(x) = f''(x)$ dla wszystkich $x \in A \cap B$, to przekształenie $f : X \to Y$ określone wzorem*

$$f(x) = \begin{cases} f'(x) & \text{dla } x \in A, \\ f''(x) & \text{dla } x \in B \end{cases}$$

jest ciągłe.

DOWÓD. Sprawdzamy ciągłość f badając przeciwobrazy zbiorów domkniętych (otwartych): jeśli $F \subset Y$ jest domknięty (otwarty) w Y, to $f^{-1}(F) = (f^{-1}(F) \cap A) \cup (f^{-1}(F) \cap B) = (f')^{-1}(F) \cup (f'')^{-1}(F)$ jest domknięty (otwarty) w X, bo przeciwobrazy $(f')^{-1}(F)$ i $(f'')^{-1}(F)$ są domknięte (otwarte) odpowiednio w A i B, a więc również w X, gdyż A i B są domknięte (otwarte) w X. □

STWIERDZENIE 4.5. *Jeśli* (X, ρ_X) *i* (Y, ρ_Y) *są przestrzeniami metrycznymi, to zbiór* $C(X, Y)$ *wszystkich przekształceń ciągłych ograniczonych jest domknięty w przestrzeni* $B(X, Y)$ *z metryką zbieżności jednostajnej* ρ_{sup}.

DOWÓD. Trzeba sprawdzić, że granica $f \in B(X, Y)$ ciągu zbieżnego przekształceń $f_n \in C(X, Y)$ też należy do $C(X, Y)$. Sprowadza się to do powtórzenia znanego z analizy matematycznej rozumowania pokazującego, że granica jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą. □

1. Podstawowe rodzaje przekształceń ciągłych

1.1. Przekształcenia jednostajnie ciągłe.

DEFINICJA 4.2. Przekształcenie $f : (X, \rho_X) \to (Y, \rho_Y)$ jest *jednostajnie ciągłe*, gdy dla każdej liczby $\epsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że jeśli $\rho_X(x, x') < \delta$, to $\rho_Y(f(x), f(x')) < \epsilon$.

Nietrudno zauważyć, że przekształcenia jednostajnie ciągłe są ciągłe (porównaj definicję z warunkiem Cauchy'ego (C)) i że złożenie przekształceń jednostajnie ciągłych jest jednostajnie ciągłe. Wszystkie funkcje jednostajnie ciągłe $f : X \to Y$, gdzie $X, Y \subset \mathbb{R}$, znane z analizy matematycznej są przekształceniami jednostajnie ciągłymi w sensie powyższej definicji. Wiadomo zatem, że przekształcenie ciągłe nie musi być jednostajnie ciągłe.

1.2. Przekształcenia Lipschitza.

DEFINICJA 4.3. Przekształcenie $f : (X, \rho_X) \to (Y, \rho_Y)$ nazywa się *Lipschitza o stałej* $c > 0$, gdy dla dowolnych dwóch punktów $x, x' \in X$ spełniona jest nierówność

$$\rho_Y(f(x), f(x')) \leq c\rho_X(x, x').$$

Gdy $c \leq 1$, to f nazywamy przekształceniem *zwężającym*, a gdy $c < 1$— przekształceniem *ściśle zwężającym*.

Pojęcie przekształcenia Lipschitza uogólnia znane z analizy matematycznej pojęcie funkcji Lipschitza na przekształcenia między przestrzeniami metrycznymi. Dla przypomnienia, jeśli np. funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ma pochodną w każdym punkcie ograniczoną przez stałą dodatnią c, to z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika, że jest ona funkcją Lipschitza o stałej c.

PRZYKŁAD 4.1. Odległość punktów od ustalonego podzbioru $A \subset (X, \rho)$, czyli funkcja

$$d_A : X \to \mathbb{R}, \quad d_A(x) = \inf\{\rho(x, a) : a \in A\}$$

jest przekształceniem Lipschitza.

Istotnie, z nierówności trójkąta $\rho(x,a) \leq \rho(x,y) + \rho(y,a)$, po przejściu do kresów dolnych, otrzymujemy nierówność $d_A(x) \leq \rho(x,y) + d_A(y)$, czyli $d_A(x) - d_A(y) \leq \rho(x,y)$. Podobnie, $d_A(y) - d_A(x) \leq \rho(x,y)$. Zatem $|d_A(x) - d_A(y)| \leq \rho(x,y)$.

Warto zanotować następującą równoważność:

$$d_A(x) = 0 \iff x \in \operatorname{cl} A \tag{4.1}$$

Złożenie przekształcenia Lipschitza o stałej c_1 z przekształceniem Lipschitza o stałej c_2 jest przekształceniem Lipschitza o stałej $c_1 c_2$.

Łatwym wnioskiem z definicji 4.2 i 4.3, że przekształcenie Lipschitza musi być jednostajnie ciągłe (jeśli c jest stałą Lipschitza, to przyjmujemy $\delta = \frac{\epsilon}{c}$ w definicji jednostajnej ciągłości), ale nie na odwrót!

1.3. Podobieństwa.

Definicja 4.4. Przekształcenie $f : (X, \rho_X) \to (Y, \rho_Y)$ jest *podobieństwem o skali* $c > 0$, gdy $f(X) = Y$ oraz dla dowolnych dwóch punktów $x, x' \in X$ spełniona jest równość

$$\rho_Y(f(x), f(x')) = c\rho_X(x, x').$$

Przestrzenie X i Y są *podobne*, gdy istnieje między nimi podobieństwo.

Przykład 4.2.

(1) Naturalnymi przykładami podobieństw są znane z geometrii elementarnej podobieństwa płaszczyzny euklidesowej.
(2) Każde dwie kule (sfery) w przestrzeni euklidesowej są podobne.
(3) Każdy *odcinek* o końcach $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ w przestrzeni unormowanej X, to znaczy zbiór $\{(1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b} \in X : t \in [0,1]\}$ jest podobny do przedziału $[0,1]$ prostej euklidesowej.

Zauważmy, że

- każde podobieństwo jest różnowartościowe,
- każde podobieństwo o skali c jest przekształceniem Lipschitza o stałej c,
- złożenie dwóch podobieństw o skalach c_1 i c_2 jest podobieństwem o skali $c_1 c_2$,
- przekształenie odwrotne do podobieństwa o skali c jest podobieństwem o skali $\frac{1}{c}$.

1.4. Izometrie.

Definicja 4.5. *Izometrią* nazywamy podobieństwo o skali 1. Przestrzenie X i Y nazywamy *izometrycznymi*, gdy istnieje izometria między nimi.

Wszystkie znane z geometrii izometrie są przykładami izometrii w powyższym sensie.

Dowolna hiperpłaszczyzna $H_i = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i = 0\}$ w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$ jest izometryczna z przestrzenią euklidesową $\mathbb{R}^{n-1}$; izometrią jest tu naturalne przekształcenie $f : H \to \mathbb{R}^{n-1}$, $f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$.

Z wyróżnionych poprzednio własności podobieństw wynikają odpowiednie ogólne własności izometrii: izometria jest wzajemnie jednoznacznym przekształceniem Lipschitza o stałej 1, przekształcenie odwrotne do izometrii jest też izometrią, złożenie izometrii jest izometrią.

1.5. Homeomorfizmy.

Definicja 4.6. Przekształcenie ciągłe $f : X \to Y$ nazywamy *homeomorfizmem*, gdy f jest wzajemnie jednoznaczne oraz przekształcenie odwrotne $f^{-1} : Y \to X$ jest ciągłe. Przestrzenie metryczne X i Y są *homeomorficzne*, gdy istnieje homeomorfizm $f : X \to Y$. Piszemy wtedy $X \overset{\text{top}}{=} Y$.

Znanymi ze szkoły przykładami homeomorfizmów są: funkcje liniowe (jako przekształcenia $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$), funkcja $\tan : (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, podobieństwa płaszczyzny euklidesowej.

Wszystkie podobieństwa są homeomorfizmami.

Przykład 4.3. Rzut stereograficzny.

Niech

$$S = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n : (x_1)^2 + \cdots + (x_{n-1})^2 + (x_n - 1)^2 = 1\}$$

będzie sferą w $(\mathbb{R}^n, \rho_e)$ o środku w punkcie $(0, \ldots, 0, 1)$ i promieniu 1 i niech $\mathbf{p} = (0, \ldots 0, 2)$. *Rzutem stereograficznym* sfery S na hiperpłaszczyznę $H = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$ nazywamy przekształcenie s określone geometrycznie w następujący sposób: dla każdego $\mathbf{x} \in S$ punkt $s(\mathbf{x})$ jest punktem przecięcia półprostej w $\mathbb{R}^n$ o początku $\mathbf{p}$, przechodzącej przez $\mathbf{x}$ z hiperpłaszczyzną H. Można łatwo znaleźć wzory analityczne określające $s(\mathbf{x})$. Mianowicie

$$s(\mathbf{x}) = \left(\frac{2x_1}{2 - x_n}, \ldots, \frac{2x_{n-1}}{2 - x_n}, 0 \right).$$

Nietrudno podać też wzory na przekształcenie odwrotne $s^{-1} : H \to S$:

$$s^{-1}(\mathbf{y}) = \left(\frac{4y_1}{4 + \|\mathbf{y}\|^2}, \ldots, \frac{4y_{n-1}}{4 + \|\mathbf{y}\|^2}, \frac{2\|\mathbf{y}\|^2}{4 + \|\mathbf{y}\|^2} \right)$$

(wyprowadzenie tych wzorów polecam czytelnikom jako dobre ćwiczenie z geometrii analitycznej).

Z powyższych wzorów stwierdzamy, że s jest homeomorfizmem, a ponieważ hiperpłaszczyzna H jest izometryczna z przestrzenią euklidesową $\mathbb{R}^{n-1}$, zaś sfera S bez punktu $\mathbf{p}$ jest podobna do dowolnej innej sfery $(n-1)$-wymiarowej pozbawionej dowolnego punktu, więc stwierdzamy ważny fakt topologiczny:

STWIERDZENIE 4.6. *Sfera $(n-1)$-wymiarowa bez jednego punktu jest homeomorficzna z przestrzenią euklidesową $\mathbb{R}^{n-1}$.*

UWAGA 4.1. Intuicje stojące za pojęciem przekształcenia ciągłego i homeomorfizmu są następujące. Przekształcenie ciągłe zmienia przestrzeń metryczną, czy też tworzy nową, bez jej rozrywania—dopuszczalne jest sklejanie punktów. Homeomorfizm czyni to bez rozrywania i bez sklejania punktów.

Pojęcie homeomorfizmu jest podstawowe dla topologii. Własności przestrzeni, które są niezmiennikami homeomorfizmów nazywamy *własnościami topologicznymi*. Oto parę prostych przykładów takich własności.

PRZYKŁAD 4.4.

(1) Jeśli $f : X \to Y$ jest homeomorfizmem i $U \subset X$ jest otwarty (domknięty) w X, to ponieważ $f(U) = (f^{-1})^{-1}(U)$ i $f^{-1} : Y \to X$ jest ciągłe, więc $f(U)$ jest otwarty (domknięty) w Y na podstawie 4.1.
(2) Przestrzeń homeomorficzna z przestrzenią w sobie gęstą jest w sobie gęsta.
(3) Jeśli przestrzeń zawiera podzbiór gęsty przeliczalny (taka przestrzeń nazywa się *ośrodkowa*), to przestrzeń z nią homeomorficzna też ma taki podzbiór, czyli jest ośrodkowa.
(4) Następująca własność przedziału domkniętego $X = [\alpha, \beta]$ prostej euklidesowej jest topologiczna: *każdy ciąg punktów w X zawiera podciąg zbieżny w X* (przestrzenie metryczne posiadające tę własność nazywają się *zwarte*).

Niektóre ważne własności nie są topologiczne. Na przykład przestrzeń ograniczona może być homeomorficzna z nieograniczoną, kula w przestrzeni X może być homeomorficzna z podzbiorem (otwartym!), który nie jest kulą w przestrzeni $Y \overset{\text{top}}{=} X$, przestrzeń unormowana może być homeomorficzna z przestrzenią nieunormowaną (zob. 4.3).

1.6. Przekształcenia otwarte i domknięte.

DEFINICJA 4.7. Przekształcenie ciągłe $f : X \to Y$ jest *otwarte (domknięte)*, gdy dla każdego podzbioru otwartego (domkniętego) A w X obraz $f(A)$ jest otwarty (domknięty) w Y.

Oczywiście przekształcenia ciągłe nie muszą być otwarte ani domknięte. Stanowią one ważną klasę przekształceń, różniącą się od homeomorfizmów tylko brakiem wzajemnej jednoznaczności.

STWIERDZENIE 4.7. *Przekształcenie $f : X \to Y$ jest homeomorfizmem wtedy i tylko wtedy gdy f jest wzajemnie jednoznaczne i otwarte (domknięte).*

DOWÓD. Wiemy już (4.4), że każdy homeomorfizm jest przekształceniem zarówno otwartym, jak i domkniętym. Na odwrót, jeśli f jest wzajemnie jednoznaczne, to jego otwartość lub domkniętość oznacza po prostu ciągłość przekształcenia odwrotnego $f^{-1} : Y \to X$, na podstawie 4.1. $\square$

Ćwiczenia

(1) Uzasadnij równoważność warunku Cauchy'ego (C) z definicją ciągłości 4.1

(2) Sprawdź, że przekształcenia jednostajnie są ciągłe i ich zlożenie też jest jednostajnie ciągłe.

(3) Udowodnij stwierdzenie 4.5.

(4) Udowodnij równoważność (4.1).

(5) Sprawdź, że zlożenie przekształceń Lipschitza o stałych c_1 i c_2 jest przekształceniem Lipschitza o stałej $c_1 c_2$.

(6) Podaj przykład przekształcenia jednostajnie ciągłego, które nie jest Lipschitza.

(7) Udowodnij, że każde dwie kule (sfery) w przestrzeni euklidesowej są do siebie podobne i że każdy odcinek w przestrzeni unormowanej jest podobny do przedziału euklidesowego $[0, 1]$ (zob. przykład 4.2).

(8) Udowodnij, że dowolne dwie hiperpłaszczyzny k-wymiarowe w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n, k \leq n$, są izometryczne.

(9) Udowodnij własności wymienione w przykładzie 4.4.

(10) Sprawdź, czy następujące własności są niezmiennikami homeomorfizmów:

być: podzbiorem brzegowym, w sobie gęstym.

(11) Sprawdź wzory:

$$h(\operatorname{cl} A) = \operatorname{cl} h(A), h(\operatorname{int} A) = \operatorname{int} h(A), h(\operatorname{bd} A) = \operatorname{bd} h(A),$$

gdzie $h : X \to Y$ jest homeomorfizmem i $A \subset X$.

(12) Sprawdzić, czy następujące przekształcenia są homeomorfizmami (w metrykach euklidesowych):

(a) każda niestała funkcja liniowa $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$;

(c) $f : \mathbb{R} \to f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^2$ dana wzorem $f(x) = (x, \sin x)$;

(d) $f : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x) = \tan(\frac{x}{2})$;

(e) $f : [0, 1) \times [0, 1) \to S^1 \times S^1 \subset \mathbb{R}^4$ dane wzorem

$$f(x, y) = ((\cos 2\pi x, \sin 2\pi x), (\cos 2\pi y, \sin 2\pi y));$$

(f) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dane wzorem $f(x, y) = (x + y, x - y)$;

(g) $f : C \to D$ określone wzorem $f(x, y, z) = (x, y)$, gdzie

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 \leq 2\},$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\};$$

jaką figurą jest C?

(h) $f : P \to K$ dane wzorem $f(x, y) = (2(r - 1), \phi)$, gdzie $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = r \cos \phi, y = r \sin \phi, 1 < r < 2, \phi \in [0, 2\pi)\}$, $K = f(P)$; jakimi figurami są P i K?

(i) inwersja względem sfery $S^n(r) = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| = r\}$:

$$i : \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$$

takie, że $i(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{y}$ leży na półprostej $\mathbf{0x}$ oraz $\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| = r^2$.

(13) Pokaż, że każdy przedział otwarty na prostej euklidesowej $\mathbb{R}$ jest homeomorficzny z $\mathbb{R}$; czy jest podobny do $\mathbb{R}$? Czy istnieje funkcja jednostajnie ciągła przekształcająca go na $\mathbb{R}$?

(14) Podaj przykład funkcji ciągłej $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (w metryce euklidesowej), która jest "na" oraz zbioru
(a) otwartego
(b) domkniętego
$A \subset \mathbb{R}$ takiego, że $f(A)$ nie jest
(a) otwarty
(b) domknięty.

(15) Udowodnij, że $\operatorname{cl} A = d_A^{-1}(0)$.

(16) Sprawdź, że jeśli zbiory $A, B \subset (X, \rho)$ są domknięte, rozłączne i niepuste, to wzór $f(x) = \frac{d_A(x)}{d_A(x)+d_B(x)}$ określa przekształcenie ciągłe $f : X \to [0, 1]$ takie, że $f(A) = \{0\}$, $f(B) = \{1\}$.

(17) W poprzednim ćwiczeniu podany jest jawny wzór na przekształcenie ciągłe przestrzeni metrycznej X w $[0, 1]$. Uzasadnić istnienie takiego przekształcenia w inny sposób—korzystając z twierdzenia Tietzego.

(18) Pokaż, że dowolny okrąg i elipsa w $(\mathbb{R}^2, \rho_e)$ oraz dowolna sfera i elipsoida w $(\mathbb{R}^3, \rho_e)$ są homeomorficzne.

(19) Pokaż, że powierzchnia walca $S^1 \times [0, 1]$, gdzie S^1 jest okręgiem jednostkowym o środku $(0, 0)$ jest homeomorficzna z pierścieniem $\operatorname{cl} K((0, 0); 2) \setminus K((0, 0); 1)$ na płaszczyźnie euklidesowej.

(20) Pokaż, że powierzchnia stożka w $(\mathbb{R}^3, \rho_e)$ jest homeomorficzna z kołem domkniętym na płaszczyźnie euklidesowej.

(21) Udowodnij, że sfera

$$S^2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\| = 1\}$$

z wyciętym dyskiem bez brzegu, tzn. zbiór

$$S^2 \setminus K(\mathbf{p}; r),$$

gdzie $K(\mathbf{p}; r)$ jest kulą w $\mathbb{R}^3$ o środku $\mathbf{p} \in S^2$ i promieniu $r < 1$, jest homeomorficzna z kołem domkniętym na płaszczyźnie.

ROZDZIAŁ 5

Metryki równoważne

DEFINICJA 5.1. Dwie metryki ρ i ρ' w zbiorze X nazywamy *równoważnymi* i piszemy $\rho \sim \rho'$, gdy spełniony jest warunek

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \rho'(x_n, x) = 0.$$

Innymi słowy, metryki ρ i ρ' są równoważne, gdy przestrzenie metryczne $X_1 = (X, \rho)$ i $X_2 = (X, \rho')$ mają te same ciągi zbieżne.

Wobec tego, nietrudno zauważyć, że zbiory, które dadzą się zdefiniować przy użyciu granic ciągów pokrywają się w przestrzeniach (X, ρ) i (X, ρ'). Na przykład, ze stwierdzenia 3.3 wynika, że

- $\mathrm{cl}_{X_1} A = \mathrm{cl}_{X_2} A$,

a to z kolei implikuje, że obie przestrzenie mają takie same zbiory domknięte, a więc również takie same są w nich zbiory otwarte (choć kule w X_1 i X_2 nie muszą być takie same!). Okazuje się, że ta ostatnia własność charakteryzuje równoważność metryk.

STWIERDZENIE 5.1. *Metryki ρ i ρ' w X są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy topologie przestrzeni metrycznych $X_1 = (X, \rho)$ i $X_2 = (X, \rho')$ są równe.*

DOWÓD. Wobec uwagi poprzedzającej stwierdzenie, pozostaje uzasadnić równoważność metryk przy założeniu równości topologii w X_1 i X_2. Niech więc ciąg punktów x_n będzie zbieżny do punktu x w przestrzeni X_1 i niech $K_2(x; r)$ będzie dowolną kulą w przestrzeni X_2. Ponieważ $K_2(x; r)$ jest zbiorem otwartym w X_1, więc istnieje kula $K_1(x; r')$ w przestrzeni X_1 zawarta w $K_2(x; r)$. Prawie wszystkie wyrazy ciągu x_n należą do $K_1(x; r')$, zatem i do $K_2(x; r)$, co oznacza zbieżność ciągu x_n do x w przestrzeni X_2. $\square$

PRZYKŁAD 5.1. Metryki ρ_s i ρ_m w $\mathbb{R}^n$ z rozdziału 1 są równoważne metryce euklidesowej ρ_e, a metryki ρ_c i ρ_r w $\mathbb{R}^2$ nie są równoważne metryce ρ_e.

STWIERDZENIE 5.2. *Jeśli $f : (X, \rho_X) \to (Y, \rho)$ jest homeomorfizmem, to istnieje metryka ρ' w Y równoważna metryce ρ taka, że $f : (X, \rho_X) \to (Y, \rho')$ jest izometrią.*

Dowód. Metrykę ρ' określamy w naturalny sposób wzorem

$$\rho'(y_1, y_2) = \rho_X(f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2)).$$

$\square$

Ćwiczenia

(1) Sprawdzić równoważność metryk z przykładu 5.1.
Czy metryka "centrum" jest równoważna metryce "rzeka"?

(2) Sprawdzić, że metryki w X określone wzorami

$$\rho'(p,q) = \min(1, \rho(p,q)),$$

oraz

$$\hat{\rho}(p,q) = \frac{\rho(p,q)}{1+\rho(p,q)},$$

gdzie $p, q \in (X, \rho)$. są równoważne metryce ρ.

(3) Czy metryka $\rho(m,n) = |\frac{1}{m} - \frac{1}{n}|$, $m, n \in \mathbb{N}$, jest równoważna w zbiorze $\mathbb{N}$ metryce euklidesowej? dyskretnej?

(4) Udowodnić stwierdzenie 5.2.

ROZDZIAŁ 6

Iloczyny kartezjańskie

Tak, jak w innych działach matematyki, pojęcie iloczynu kartezjańskiego jest jednym z podstawowych również w topologii— przecież przestrzenie i kostki euklidesowe są iloczynami kartezjańskimi.

Jeśli dane są przestrzenie metryczne $(X_1, \rho_1), (X_2, \rho_2), \ldots$, to w iloczynie kartezjańskim $X_1 \times X_2 \times \ldots X_n$, naśladując metrykę euklidesową, możemy wprowadzić metrykę, związaną z metrykami $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$, wzorem

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \rho_i(x_i, y_i)^2}, \tag{6.1}$$

gdzie $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

W iloczynie kartezjańskim przeliczalnej ilości przestrzeni $X_1 \times X_2 \ldots$ wprowadzenie metryki związanej w naturalny sposób z metrykami ρ_1, ρ_2, ... może być wzorowane na metryce w przestrzeni Hilberta l_2 (zob. 1.8). Jest jednak pewna komplikacja techniczna, związana z koniecznością zbieżności pierwiastkowanego szeregu. Aby to zapewnić, zakłada się dododatkowo, że, na przykład, $\operatorname{diam} X_i < \frac{1}{i}$, dla każdego i. Wtedy określamy

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \rho_i(x_i, y_i)^2}, \tag{6.2}$$

dla $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots), \mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots)$.

Innym sposobem załatwiającym problem zbieżności szeregu i stosowanym w sytuacji, gdy średnice wszystkich przestrzeni X_n są wspólnie ograniczone, jest określenie następującej metryki:

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \rho_i(x_i, y_i), \tag{6.3}$$

dla $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots), \mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots)$.

Wreszcie w ogólnym przypadku— gdy przestrzenie X_i są dowolne— można w nich rozważyć metryki ρ_i' równoważne ρ_i i wspólnie ograniczone (np. biorąc $\rho_i' = \min(\rho_i, 1)$), a następnie postąpić tak, jak poprzednio, kładąc

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \rho_i'(x_i, y_i), \tag{6.4}$$

dla $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots), \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots)$.

Definicja 6.1. *Iloczynem kartezjańskim przestrzeni metrycznych* $(X_1, \rho_1), (X_2, \rho_2), \dots, (X_n, \rho_n)$, nazywamy przestrzeń metryczną (X, ρ), gdzie $X = X_1 \times X_2 \times \dots X_n$, z metryką ρ określoną wzorem (6.1).

Iloczynem kartezjańskim nieskończenie wielu przestrzeni metrycznych $(X_1, \rho_1), (X_2, \rho_2), \dots,$ nazywamy przestrzeń metryczną (X, ρ), gdzie $X = X_1 \times X_2 \times \dots$, z metryką ρ określoną wzorami (6.2), (6.3) lub (6.4), w sytuacjach opisanych wyżej.

Powyższe metryki będziemy nazywać *metrykami standardowymi* iloczynu X.

Poszczególne przestrzenie X_i nazywamy *osiami* iloczynu, a funkcje $p_i : X \to X_i, p_i(\mathbf{x}) = x_i$, gdzie $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ lub $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)$—*rzutowaniami* na odpowiednie osie.

Powstaje pytanie, dlaczego akurat tak określone metryki w iloczynach kartezjańskich są dobre. Jaką mają "przewagę" nad, na przykład, metryką dyskretną?

Twierdzenie 6.1. *(*O zbieżności po współrzędnych*)*
Niech $(X_1, \rho_1), (X_2, \rho_2), \dots, (X_n, \rho_n)$ *będą przestrzeniami metrycznymi,* $X = (X_1 \times X_2 \times \dots X_n, \rho)$ *z metryką* ρ *określoną wzorem* (6.1), $\mathbf{x}_k = (x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn}) \in X, k = 1, 2, \dots,$ *oraz* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. *Wówczas*

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x} \quad \textit{w przestrzeni } (X, \rho)$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{k\to\infty} x_{ki} = x_i \quad \textit{w przestrzeni } (X_i, \rho_i) \textit{ dla każdego } i = 1, 2, \dots, n.$$

Podobnie*, jeśli metryka w iloczynie* $X = X_1 \times X_2 \times \dots$ *jest określona wzorami* (6.2), (6.3) *lub* (6.4) *(adekwatnie do odpowiadających im założeń o przestrzeniach* $X_1, X_2, \dots$*),* $\mathbf{x}_k = (x_{k1}, x_{k2}, \dots) \in X, k = 1, 2, \dots,$ *oraz* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)$*, to*

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x} \quad \textit{w przestrzeni } (X, \rho)$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{k\to\infty} x_{ki} = x_i \quad \textit{w przestrzeni } (X_i, \rho_i) \textit{ dla każdego } i = 1, 2, \dots.$$

Innymi słowy, *zbieżność ciągu punktów w iloczynie kartezjańskim przestrzeni metrycznych oznacza zbieżność ich współrzędnych do odpowiednich współrzędnych punktu granicznego.*

DOWÓD. Zanotujmy oczywiste nierówności:

$$\rho_i(x_{ki}, x_i) \leq \rho(\mathbf{x}_k, \mathbf{x})$$

w przypadku skończenie wielu osi lub metryki (6.2), a w pozostałych przypadkach mamy

$$\rho_i(x_{ki}, x_i) \leq 2^i \rho(\mathbf{x}_k, \mathbf{x})$$

lub

$$\min(1, \rho_i(x_{ki}, x_i)) \leq 2^i \rho(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}).$$

Widać stąd, że jeśli ciąg punktów $\mathbf{x}_k$ jest zbieżny do $\mathbf{x}$ w iloczynie X, to i-te współrzędne punktów $\mathbf{x}_k$ są zbieżne do i-tej współrzędnej punktu $\mathbf{x}$.

Na odwrót, załóżmy, że

$$\lim_{k\to\infty} \rho_i(x_{ki}, x_i) = 0 \quad \text{dla każdego } i. \tag{6.5}$$

W przypadku skończenie wielu osi widać łatwo, że

$$\lim_{k\to\infty} \rho(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}) = 0.$$

Jeśli osi jest nieskończenie wiele, możemy zastosować typowe dla szeregów szacowanie, które przeprowadzimy tutaj np. dla przypadku metryki (6.3), gdy przestrzenie X_i są wspólnie ograniczone przez pewną stałą M. Niech mianowicie ϵ będzie dowolną liczbą dodatnią. Wybieramy wskaźnik m taki, że m-ta reszta szeregu $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{M}{2^i}$ jest mniejsza od $\frac{\epsilon}{2}$. Wtedy

$$\sum_{i=m}^{\infty} \frac{\rho_i(x_{ki}, x_i)}{2^i} < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{dla każdego } k \in \mathbb{N}.$$

Następnie, na podstawie (6.5) wybieramy wskaźnik r tak duży, by dla $k \geq r$ zachodziła nierówność

$$\sum_{i=1}^{m-1} \frac{\rho_i(x_{ki}, x_i)}{2^i} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Dodając obie nierówności stronami otrzymamy

$$\rho(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}) < \epsilon \quad \text{dla } k \geq r,$$

co oznacza zbieżność ciągu $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ do $\mathbf{x}$ w X. $\square$

Dzięki twierdzeniu 6.1 można łatwo sprawdzić, czy inna metryka ρ' w iloczynie kartezjańskim X zbiorów X_i jest równoważna metryce standardowej ρ. Otóż jest tak, gdy zbieżność w (X, ρ') oznacza zbieżność po współrzędnych. Warto prześledzić to zjawisko na przykładach metryk w $\mathbb{R}^2$ z rozdziału 1.

Twierdzenie 6.1 wyjaśnia, że metryka standardowa w iloczynie kartezjańskim, a także każda metryka jej równoważna, dobrze wiąże się z metrykami na osiach. Takiej zalety nie ma oczywiście metryka dyskretna w iloczynie przestrzeni niedyskretnych.

WNIOSEK 6.1.

(1) *Rzutowania $p_i : X \to X_i$ iloczynu kartezjańskiego X przestrzeni metrycznych X_i na osie są przekształceniami ciągłymi.*
(2) *Przekształcenie $f : Y \to X$ dowolnej przestrzeni metrycznej Y w iloczyn kartezjański X przestrzeni metrycznych X_i jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy złożenia $p_i f$, zwane* współrzędnymi przekształcenia *f, są ciągłe dla wszystkich i.*

Powyższy wniosek ma bardzo częste zastosowanie w analizie matematycznej przy badaniu ciągłości funkcji wielu zmiennych, sprowadzającej się do sprawdzenia ciągłości współrzędnych funkcji. Dla ilustracji— rozpatrzmy funkcję z przykładu 4.3 $s^{-1} : H \to S$:

$$s^{-1}(\mathbf{y}) = \left(\frac{4y_1}{4 + \|\mathbf{y}\|^2}, \dots, \frac{4y_{n-1}}{4 + \|\mathbf{y}\|^2}, \frac{2\|\mathbf{y}\|^2}{4 + \|\mathbf{y}\|^2} \right)$$

Jej współrzędnymi są przekształcenia ciągłe

$$\begin{gathered} \mathbf{y} \mapsto \frac{4y_1}{4 + \|\mathbf{y}\|^2}, \\ \vdots \\ \mathbf{y} \mapsto \frac{4y_{n-1}}{4 + \|\mathbf{y}\|^2}, \\ \mathbf{y} \mapsto \frac{2\|\mathbf{y}\|^2}{4 + \|\mathbf{y}\|^2}, \end{gathered}$$

więc s^{-1} jest ciągłe.

Inny, prostszy przykład: rozpatrzmy przedstawienie parametryczne powierzchni śrubowej dane przez funkcję

$$f : [0,1] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, f(u,v) = (u \cos v, u \sin v, v + 3u)$$

(rozpatrujemy metryki euklidesowe). Współrzędnymi f są funkcje ciągłe $f_1(u,v) = u \cos v$, $f_2(u,v) = u \sin v$ oraz $f_3(u,v) = v + 3u$, więc f jest ciągłe.

STWIERDZENIE 6.1. *Wykres przekształcenia ciągłego* $f : X \to Y$, *to znaczy zbiór* $W = \{ (x, y) \in X \times Y : y = f(x), x \in X \}$, *jest homeomorficzny z dziedziną* X. *Homeomorfizmem jest tu rzutowanie* $p : W \to X$, *czyli przekształcenie określone wzorem* $p(x, y) = x$.

To proste stwierdzenie jest bardzo często wykorzystywane przy uzasadnianiu własności topologicznych wielu takich podzbiorów przestrzeni euklidesowych, które można przedstawić jako wykresy przekształceń ciągłych (na przykład krzywe i powierzchnie).

Następujący fakt ma ważne znaczenie w teorii przestrzeni metrycznych.

STWIERDZENIE 6.2. *Metryka* $\rho_X : X \times X \to \mathbb{R}$ *jest przekształceniem ciągłym (Lipschitza) iloczynu kartezjańskiego przestrzeni metrycznej* (X, ρ_X) *przez siebie.*

DOWÓD. Niech $(x, y), (x', y') \in X \times X$. Metryka standardowa w $X \times X$ dana jest wzorem

$$\rho((x, y), (x', y')) = \sqrt{\rho_X(x, x')^2 + \rho_X(y, y')^2}.$$

Zatem z nierówności trójkąta wynikają nierówności

$$\begin{aligned} \rho_X(x, y) - \rho_X(x', y') &\leq \rho_X(x, x') + \rho_X(y, y'), \\ \rho_X(x', y') - \rho_X(x, y) &\leq \rho_X(x, x') + \rho_X(y, y'), \end{aligned}$$

czyli

$$\begin{aligned} |\rho_X(x, y) - \rho_X(x', y')| \leq \rho_X(x, x') + \rho_X(y, y') \leq \\ \sqrt{2}\sqrt{\rho_X(x, x')^2 + \rho_X(y, y')^2} = \sqrt{2}\rho((x, y), (x', y')). \end{aligned}$$

□

Dużą rolę w topologii odgrywa pojęcie *homotopii.*

DEFINICJA 6.2. Niech $f, g : X \to Y$ będą dwoma przekształceniami ciągłymi, a $I = [0, 1]$ przedziałem euklidesowym. Mówimy, że f i g są *homotopijne*, gdy istnieje przekształcenie ciągłe $H : X \times I \to Y$ takie, że $H(x, 0) = f(x)$ i $H(x, 1) = g(x)$ dla każdego $x \in X$. Przekształcenie H nazywa się *homotopią* między f i g (albo: łączącą f i g).

UWAGA 6.1. Przedział I występujący w definicji homotopii traktuje się często intuicyjnie jako przedział czasowy: w chwili $t = 0$ homotopia jest przekształceniem f, następnie zmienia się ciągle wraz z rosnącym czasem, aby w chwili $t = 1$ stać się przekształceniem g.

DEFINICJA 6.3. Przestrzeń X nazywa się *ściągalna* do punktu $p \in X$, gdy przekształcenie tożsamościowe

$$f : X \to X, \quad f(x) = x$$

dla każdego x, jest homotopijne z przekształceniem stałym

$$g : X \to X, \quad g(x) = p,$$

dla wszystkich x.

PRZYKŁAD 6.1. Przykładami przestrzeni ściągalnych są przestrzenie euklidesowe i kostki.

Podstawowymi przykładami przestrzeni nieściągalnych są okrąg euklidesowy i ogólniej—sfery n-wymiarowe. Dowód nieściągalności okręgu nie jest jednak banalny (zob. [**ES**]).

Ściągalność jest ważną własnością topologiczną pozwalającą odróżnić np. takie przestrzenie jak kwadrat i sfera dwuwymiarowa.

Ćwiczenia

(1) Sprawdzić, że wzory (6.1), (6.2), (6.3), (6.4) określają metryki w odpowiednich iloczynach kartezjańskich.

(2) Sprawdzić zbieżność po współrzędnych w metrykach z przykładu 1.4, w metrykach "centrum", "rzeka" oraz określonych wzorami (6.2), (6.4).

(3) Sprawdzić, czy w przestrzeni Hilberta l_2 i w kostce Hilberta Q zachodzi zbieżność po współrzędnych.

(4) Uzasadnić wniosek 6.1.

(5) Znaleźć homeomorfizmy między następującymi iloczynami kartezjańskimi:

(a) $\mathbb{R}^n$ i $(a,b)^n$, gdzie (a,b) jest euklidesowym przedziałem otwartym o końcach a,b.

(b) Q i $[-1,1]^\infty$.

(c) $\mathbb{R}^\infty$ z metryką daną wzorem (6.4) i $(a,b)^\infty$ z metryką daną wzorem (6.3).

(6) Niech $(X_i,\rho_i), i = 1,2,\dots,m$, będą przestrzeniami metrycznymi. Sprawdzić, że przekształcenie

$$f : (X_1 \times X_2 \times \dots X_k) \times (X_{k+1} \times X_{k+2} \times \dots X_m) \to X_1 \times X_2 \times \dots X_m$$

iloczynów kartezjańskich przestrzeni X_i określone wzorem

$$f\left((x_1,x_2,\dots,x_k),(x_{k+1},x_{k+2},\dots,x_m)\right) = (x_1,x_2,\dots,x_m)$$

jest izometrią.

(7) Sprawdzić, że działanie mnożenia punktów przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$ przez liczby rzeczywiste jest przekształceniem ciągłym $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, ale nie jednostajnie ciągłym.

Sprawdzić to samo dla mnożenia skalarnego punktów w $\mathbb{R}^n$ traktowanego jako przekształcenie $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

(8) Skonstruować homeomorfizm między kulą domkniętą $K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| \le 1\}$ a kostką $[-1,1]^n$.

(9) Dla $f,g \in C(I,\mathbb{R})$ i dowolnego parametru $t \in I$ określamy homotopię $H : I \times I \to \mathbb{R}$ wzorem

$$H(x,t) = f(x)(1-t) + tg(x).$$

Czy funkcja $h_t : I \to \mathbb{R}$, określona równością $h_t(x) = H(x,t)$ należy do $C(I,\mathbb{R})$? Naszkicować wykresy h_t dla funkcji $f(x) = x$ i $g(x) = x^2$ i dla kilku t, np. dla $t = 0, \frac{1}{10}, \frac{1}{2}, \frac{9}{10}, 1$.

Niech teraz $f,g \in C(I,\mathbb{R})$ będą dowolne i różne od siebie. Określamy przekształcenie $H' : I \to H'(I) \subset C(I,\mathbb{R})$ wzorem $H'(t) = h_t$. Sprawdzić, czy

(a) $f,g \in H'(I)$;

(b) H jest podobieństwem;
Czym jest zbiór $H'(I)$?

(10) Znajdź homotopię między dowolnymi przekształceniami ciągłymi $f, g : X \to Y$, gdzie
(a) X jest dowolną przestrzenią metryczną, a $Y = \mathbb{R}^2, I^2$;
(b) $X = \mathbb{R}^2, I^2$, a Y jest dowolna.

(11) Sprawdzić, które z podanych przestrzeni są ściągalne: $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, I, I^2, $S^1 \times I$, $X=$ suma odcinków łączących punkt $(\frac{1}{2}, 1)$ z punktami $\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, na osi x na płaszczyźnie euklidesowej.

(12) Pokazać, że
(a) przestrzeń homeomorficzna z przestrzenią ściągalną jest ściągalna;
(b) iloczyn kartezjański przestrzeni ściągalnych jest ściągalny.

(13) Udowodnić wzory dla $A \subset X$ i $B \subset Y$:
(a) $\operatorname{cl}(A \times B) = \operatorname{cl} A \times \operatorname{cl} B$
(b) $\operatorname{int}(A \times B) = \operatorname{int} A \times \operatorname{int} B$
(c) $\operatorname{bd}(A \times B) = (\operatorname{bd} A \times \operatorname{cl} B) \cup (\operatorname{cl} A \times \operatorname{bd} B)$

Wywnioskować stąd, że iloczyn kartezjański dwóch zbiorów domkniętych (otwartych) $A \subset X$ i $B \subset Y$ jest domknięty (otwarty) w $X \times Y$.

(14) Wykazać, że jeśli $f, g : X \to Y$ są ciągłe, to zbiór $\{ x \in X : f(x) = g(x) \}$ jest domknięty w X.

(15) Udowodnić, że jeśli X jest przestrznią metryczną, to *przekątna* kwadratu kartezjańskiego $X \times X$, czyli zbiór

$$\Delta = \{ (x, x) : x \in X \},$$

jest domknięta w $X \times X$. Sprawdzić, że Δ jest otwarta w $X \times X$ wtedy i tylko wtedy, gdy X jest przestrzenią dyskretną.

ROZDZIAŁ 7

Przestrzenie topologiczne. Metryzowalność

Pojęciem ogólniejszym od przestrzeni metrycznej jest przestrzeń topologiczna. Punktem wyjścia do jej definicji są własności zbiorów otwartych wyrażone w Stwierdzeniu 3.1.

DEFINICJA 7.1. Zbiór X z wyróżnioną rodziną $\mathcal{T}$ jego podzbiorów nazywamy *przestrzenią topologiczną*, gdy

(1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$,
(2) suma dowolnej ilości zbiorów z rodziny $\mathcal{T}$ jest też zbiorem tej rodziny,
(3) przekrój skończonej ilości zbiorów z rodziny $\mathcal{T}$ jest zbiorem należącym do $\mathcal{T}$.

Rodzinę $\mathcal{T}$ nazywamy *topologią* lub rodziną wszystkich *zbiorów otwartych* w zbiorze X. *Otoczeniem* punktu $x \in X$ nazywamy dowolny zbiór otwarty w X, zawierający x.

Tak samo, jak w przypadku przestrzeni metrycznych, definiujemy zbiory domknięte, domknięcie, wnętrze, zbiory brzegowe, gęste, nigdziegęste; w związku z tym ich podstawowe własności mnogościowe są takie same, jak w przestrzeniach metrycznych.

Przez *podprzestrzeń* przestrzeni topologicznej X rozumiemy jej dowolny podzbiór Y, w którym topologią jest rodzina wszystkich zbiorów postaci $U \cap Y$, gdzie U jest zbiorem otwartym w X (zgadza się to, jak widać, z własnością podprzestrzeni metrycznych wyrażoną wzorem (3.3)).

Przekształcenia ciągłe między przestrzeniami topologicznymi, to funkcje, dla których przeciwobrazy zbiorów otwartych są otwarte (por. stwierdzenie 4.1). Homeomorfizmy—to przekształcenia wzajemnie jednoznaczne ciągłe, których przekształcenia odwrotne też są ciągłe, a przestrzenie topologiczne są homeomorficzne, gdy istnieje między nimi homeomorfizm.

Ale trzeba tu zaznaczyć, że nie wszystkie własności przestrzeni metrycznych, które dadzą się sformułować w terminach zbiorów otwartych, bądź wymienionych przed chwilą pojęć, muszą zachodzić w przestrzeniach topologicznych. Przykładami tego rodzaju własności są, tak zwane, *aksjomaty oddzielania*. Jednym z nich jest następujący aksjomat Hausdorffa oznaczany czasem symbolem T_2.

Definicja 7.2. Przestrzeń topologiczna X z topologią $\mathcal{T}$ spełnia *aksjomat Hausdorffa*, gdy każde dwa różne punkty przestrzeni X mają rozłączne otoczenia. Taką przestrzeń nazywamy krócej *przestrzenią Hausdorffa* .

Każda przestrzeń metryczna (X, ρ) jest przestrzenią Hausdorffa, bo jeśli $x, y \in X$ są różne i $r = \frac{1}{2}\rho(x, y)$, to kule $K(x; r), K(y; r)$ są rozłącznymi otoczeniami punktów x, y.

Przykład 7.1. Niech X będzie dowolnym zbiorem zawierającym przynajmniej dwa punkty, a $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$, będzie jego topologią. Łatwo zauważyć, że przestrzeń X nie jest Hausdorffa. Jest ona więc najprostszym przykładem przestrzeni topologicznej, w której nie istnieje metryka generująca rodzinę zbiorów otwartych równą topologii $\mathcal{T}$.

Definicja 7.3. Przestrzeń topologiczna X z topologią $\mathcal{T}$ jest *metryzowalna*, gdy istnieje metryka ρ w X, która generuje topologię równą topologii $\mathcal{T}$; innymi słowy, każda kula w przestrzeni metrycznej (X, ρ) należy do topologii $\mathcal{T}$ oraz każdy zbiór z $\mathcal{T}$ jest sumą takich kul.

Jeśli przestrzeń topologiczna z topologią $\mathcal{T}$ jest metryzowalna, to oczywiście metryka, generująca $\mathcal{T}$ nie jest jedyna, ale ze Stwierdzenia 5.1 wynika, że każde dwie takie metryki muszą być równoważne.

Aksjomat Hausdorffa (również inne aksjomaty oddzielania, nie omawiane tutaj) jest warunkiem koniecznym metryzowalności, a przestrzeń topologiczna opisana w powyższym przykładzie nie jest metryzowalna.

Warto zauważyć, że przestrzeń topologiczna homeomorficzna z przestrzenią metryzowalną też jest metryzowalna—jej metrykę można bezpośrednio i w naturalny sposób określić przy pomocy homeomorfizmu i to w taki sposób, by dany homeomorfizm stał się izometrią (zob. 5.2).

Jednym z głównych zadań dziedziny matematyki zwanej *topologią ogólną* jest formułowanie warunków koniecznych lub dostatecznych metryzowalności przestrzeni topologicznych.

Ćwiczenia

(1) Sprawdzić, że w podprzestrzeni $Y \subset X$ przestrzeni topologicznej X domknięcie zbioru $A \subset Y$ jest postaci $\mathrm{cl}_Y A = (\mathrm{cl}_X A) \cap Y$ oraz, że gdy X jest metryzowalna przez metrykę ρ, to Y jest metryzowalna przez metrykę $\rho \upharpoonright Y \times Y$.

(2) Udowodnić, że jeśli przestrzeń topologiczna X jest metryzowalna, to dla każdego punktu $x \in X$ istnieje ciąg jego otoczeń U_n, $n \in \mathbb{N}$, takich, że dla dowolnego otoczenia U punktu x znajdzie się n takie, że $U_n \subset U$ (ta własność przestrzeni metryzowalnych nazywa się *pierwszym aksjomatem przeliczalności* lub posiadaniem *bazy przeliczalnej w każdym punkcie x*.

(3) Niech X będzie zbiorem wszystkich liczb porządkowych mniejszych lub równych pierwszej nieprzeliczalnej liczbie ω_1. Zbiór ten jest dobrze uporządkowany przez relację porządku liniowego $\prec$. W X wprowadzamy tak zwaną *topologię porządkową* przyjmując za zbiory otwarte w X wszystkie przedziały postaci

$$(\alpha, \beta) = \{\gamma : \alpha \prec \gamma \prec \beta\},$$

$$[0, \alpha) = \{\gamma : \gamma \prec \alpha\}$$

i

$$(\alpha, \omega_1] = \{\gamma : \alpha \prec \gamma \preceq \omega_1\}$$

oraz dowolne ich sumy.

Sprawdzić, że tak określona rodzina zbiorów otwartych jest topologią Hausdorffa w X oraz, że otrzymana przestrzeń topologiczna nie ma bazy przeliczalnej w punkcie ω_1; na podstawie poprzedniego zadania, oznacza to niemetryzowalność przestrzeni X.

(4) Sprawdzić, że aksjomat Hausdorffa, posiadanie bazy przeliczalnej w każdym punkcie oraz metryzowalność przestrzeni topologicznych są niezmiennikami homeomorfizmów.

(5) Wykazać, że jeśli X, Y są przestrzeniami topologicznymi, $f, g : X \to Y$ są ciągłe i $Y \in T_2$, to zbiór

$$\{\, x \in X : f(x) = g(x) \,\}$$

jest domknięty w X.

(6) Udowodnić, że jeśli $f : D \to Y$ jest ciągę, $D \subset Y$ jest gęsty w X, a przestrzeń Y spełnia aksjomat T_2, to f można przedłużyć na X co najwyżej na jeden sposób.

(7) Udowodnić, że przestrzeń X jest Hausdorffa wtedy i tylko wtedy, gdy przekątna $\Delta = \{\, (x, x) : x \in X \,\}$ jest domknięta w $X \times X$.

ROZDZIAŁ 8

Przestrzenie spójne. Składowe. Rozspajanie

Intuicja pojęcia spójności przestrzeni polega na niemożności rozdzielenia przestrzeni na dwa "kawałki", nie leżące blisko siebie.

Definicja 8.1. Przestrzeń topologiczna jest *spójna*, gdy nie jest sumą dwóch swoich niepustych i rozłącznych podzbiorów otwartych.

Zauważmy, że jeśli przestrzeń X jest sumą rozłącznych podzbiorów otwartych A i B, to A i B są jednocześnie domknięte w X ($A = X \setminus B, B = X \setminus A$). Można więc powiedzieć równoważnie, że przestrzeń jest spójna, gdy nie jest sumą dwóch swoich niepustych i rozłącznych podzbiorów domkniętych, albo— jeszcze inaczej—przestrzeń jest spójna, gdy nie zawiera podzbiorów otwarto-domkniętych poza zbiorem pustym i całą przestrzenią.
Oczywiście przestrzeń pusta jest spójna.
Zwykle najłatwiej jest dostrzec niespójność przestrzeni.

Przykład 8.1.

(1) Każda skończona, niejednopunktowa przestrzeń metryczna jest niespójna.
(2) Przestrzeń opisana w przykładzie 7.1 jest spójna.
(3) Podprzestrzeń prostej euklidesowej, będąca sumą dwóch lub większej ilości wzajemnie rozłącznych przedziałow nie jest spójna.
(4) Podprzestrzeń prostej euklidesowej złożona z liczb wymiernych (niewymiernych) nie jest spójna.

Najważniejszym nietrywialnym przykładem przestrzeni spójnej jest przedział prostej euklidesowej.

Twierdzenie 8.1. *Przedział* $[0, 1]$ *z metryką euklidesową jest spójny.*

Dowód. Dowód opiera się na podstawowej własności zbioru liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$: dla każdego niepustego i ograniczonego podzbioru $Z \subset \mathbb{R}$ istnieją jego kresy górny $\sup Z$ i dolny $\inf Z$.

Przypuśćmy, że przedział $[0, 1]$ jest niespójny, to znaczy

$$[0, 1] = A \cup B, \tag{8.1}$$

gdzie A i B są niepuste, rozłączne i domknięte w $[0, 1]$. Ponieważ A i B są postaci $A = A' \cap [0, 1]$, $B = B' \cap [0, 1]$ dla pewnych zbiorów $A', B' \subset \mathbb{R}$ domkniętych w $\mathbb{R}$ (na podstawie wzoru (3.3)), a przedział $[0, 1]$ jest również podzbiorem domkniętym prostej euklidesowej $\mathbb{R}$, to i zbiory A, B są domknięte w $\mathbb{R}$ (stwierdzenie 3.1).

Ustalmy, że $0 \in A$ i niech $b = \inf B$. Zbiór $A^* = \{\, x \in A : x < b \,\}$ jest niepusty i ograniczony. Oznaczmy jego kres górny przez a. Zauważmy, że $a \in \operatorname{cl} A^* \subset \operatorname{cl} A = A$ oraz $b \in \operatorname{cl} B = B$, bo w każdym otoczeniu punktu a (b) na prostej $\mathbb{R}$ są punkty z A^* (odpowiednio z B), a zbiory A, B są domknięte w $\mathbb{R}$. Ponadto $a \leq b$, przy czym równość $a = b$ jest wykluczona wobec rozłączności zbiorów A, B. W przedziale $(a, b) \subset [0, 1]$ nie ma więc elementów ani z A, ani z B, co jest sprzeczne z równością (8.1). □

Podamy teraz kilka ogólnych i dosyć prostych twierdzeń pozwalających sprawdzać spójność bardziej skomplikowanych przestrzeni.

Twierdzenie 8.2. (O sumie) *Jeśli przestrzeń topologiczna X jest sumą swoich spójnych podprzestrzeni, mających punkt wspólny, to X jest spójna.*

Dowód. Niech $X = \bigcup\{X_s : s \in S\}$, gdzie S oznacza pewien zbiór indeksujący podprzestrzenie spójne X_s i niech $p \in X_s$ dla każdego $s \in S$.

Przypuśćmy, że X nie jest spójna, czyli $X = A \cup B$ dla pewnych niepustych, rozłącznych podzbiorów $A, B \subset X$ otwartych w X. Załóżmy, że $p \in A$ i wybierzmy jakiś punkt b ze zbioru B. Istnieje indeks s_0, dla którego $b \in X_{s_0}$. Wówczas widzimy, że zbiory $A \cap X_{s_0}$ i $B \cap X_{s_0}$ są niepuste, rozłączne i otwarte w podprzestrzeni X_{s_0}, która jest ich sumą. Jest to oczywiście sprzeczne ze spójnością X_{s_0}. □

Często mówimy obrazowo, że dwa punkty przestrzeni topologicznej X są połączone podzbiorem spójnym, gdy należą do tego podzbioru i jest on podprzestrzenią spójną przestrzeni X.

Wniosek 8.1. *Jeśli każde dwa punkty przestrzeni topologicznej X można połączyć podzbiorem spójnym, to przestrzeń X jest spójna.*

Dowód. Wybierzmy jakiś punkt $p \in X$. Dla każdego punktu $x \in X$ istnieje spójna podprzestrzeń $X(x) \subset X$ łacząca p i x. Wtedy $X = \bigcup\{X(x) : x \in X\}$ i z twierdzenia 8.2 wynika spójność X. □

Twierdzenie 8.3. (O spójnym obrazie) *Obraz przestrzeni spójnej przez przekształcenie ciągłe jest przestrzenią spójną.*

Dowód. Niech X będzie przestrzenią spójną, a $f : X \to f(X)$ bedzie przekształceniem ciągłym. Gdyby przestrzeń $f(X)$ była niespójna, to istniałyby niepuste i rozłączne zbiory $A, B \subset f(X)$, otwarte w $f(X)$ takie, że $f(X) = A \cup B$. Wtedy ich przeciwobrazy $f^{-1}(A), f^{-1}(B)$ byłyby również niepuste, rozłączne, otwarte w X (stwierdzenie 4.1) i dające w sumie X, co przeczy spójności X. □

Przykład 8.2.

(1) Każdy odcinek w przestrzeni unormowanej jest spójny (zob. przykład 4.2).
(2) Każdy *zbiór wypukły*, to znaczy podprzestrzeń przestrzeni unormowanej zawierająca, wraz z każdą parą swoich różnych punktów, odcinek je łączący, jest spójny. W szczególności, spójne są przestrzenie euklidesowe, a w nich dowolne przedziały (z końcami lub bez), kostki, kule, kostka Hilberta.
(3) Okręgi w przestrzeniach euklidesowych są spójne, bo są one podobne do okręgu jednostkowego S^1, który jest obrazem ciągłym przedziału $[0, 1]$.
(4) Wykresy przekształceń ciągłych określonych na przestrzeniach spójnych (zob. stwierdzenie 6.1) są spójne.

Twierdzenie 8.4. (O domknięciu) *Jeśli podprzestrzeń A przestrzeni topologicznej X jest spójna oraz $A \subset B \subset \operatorname{cl} A$, to również podprzestrzeń B jest spójna.*

Innymi słowy, *jeśli do podzbioru spójnego dodamy dowolną ilość punktów leżących na jego brzegu, to otrzymamy zbiór spójny.*

Dowód. Można założyć, że $A \neq \emptyset$.

Pokażemy najpierw, że podprzestrzeń postaci $A \cup \{b\}$ jest spójna dla każdego $b \in B$. Gdyby bowiem tak nie było, to dla pewnego $b \in B$ istniałyby rozłączne zbiory niepuste C, D, domknięte w przestrzeni $Y = A \cup \{b\}$, takie że $A \cup \{b\} = C \cup D$. Przyjmując, że $b \in C$, zbiór D zawierałby się wtedy w A i $D \subset \operatorname{cl}_A D = A \cap \operatorname{cl}_Y D = A \cap D = D$, więc D byłby domknięty w A. Zbiór $C' = C \setminus \{b\} \subset A$ też by był domknięty w A, bo $\operatorname{cl}_A C' = A \cap \operatorname{cl}_Y C' \subset A \cap \operatorname{cl}_Y C = A \cap C = C'$; ponadto $C' \neq \emptyset$, bo w przeciwnym razie $C = \{b\}, D = A$, więc $b \in Y \cap \operatorname{cl} A = \operatorname{cl}_Y A = \operatorname{cl}_Y D = D$ i otrzymujemy sprzeczność z rozłącznością zbiorów C, D. W konsekwencji $A = C' \cup D$, gdzie C' i D są niepuste, rozłączne i domknięte w A, a to oznacza niespójność A, wbrew założeniu.

Przestrzeń
$$B = \bigcup \{A \cup \{b\} : b \in B\},$$

jest spójna na podstawie twierdzenia 8.2 □

Twierdzenie o domknięciu wydaje się, być może, najmniej oczywiste.

PRZYKŁAD 8.3. Niech

$$X_+ = \{(x, \sin \frac{1}{x}) : x > 0\}, X_- = \{(x, \sin \frac{1}{x}) : x < 0\}, X = X_+ \cup X_-$$

będą podprzestrzeniami płaszczyzny euklidesowej. Są to wykresy funkcji $y = \sin \frac{1}{x}$ określonej na odpowiednich przedziałach (zagęszczone sinusoidy), więc ze stwierdzenia 6.1 są one homeomorficzne odpowiednio z przedziałami $(0, \infty)$, $(-\infty, 0)$ oraz z $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wobec tego przestrzenie X_+ i X_- są spójne, a X spójna nie jest.

Rozważmy następnie domknięcia tych przestrzeni na płaszczyźnie euklidesowej (to już nie będą wykresy!):

$$\begin{aligned} Y_+ &= \operatorname{cl} X_+ = X_+ \cup (\{0\} \times [-1, 1]) \\ Y_- &= \operatorname{cl} X_- = X_- \cup (\{0\} \times [-1, 1]) \\ Y &= \operatorname{cl} X = X \cup (\{0\} \times [-1, 1]) \end{aligned}$$

Z twierdzenia o domknięciu 8.4 wynika, ze przestrzenie Y_+ i Y_- są spójne, a z twierdzenia o sumie 8.2, że przestrzeń Y jest spójna.

Na pierwszy rzut oka mniej oczywista jest spójność przestrzeni $X_+ \cup \{(0, 1)\}$, $X_- \cup \{(0, 1)\}$ oraz $X_+ \cup X_- \cup \{(0, 1)\}$, której dowodzi się jak wyżej.

DEFINICJA 8.2. *Składową* przestrzeni topologicznej nazywamy jej każdą maksymalną spójną podprzestrzeń.

PRZYKŁAD 8.4.

(1) Jedyną składową przestrzeni spójnej jest cała przestrzeń.
(2) W przestrzeni dyskretnej składowymi są wszystkie podzbiory jednopunktowe.
(3) W przestrzeni liczb wymiernych $(\mathbb{Q}, \rho_e)$ (podobnie—niewymiernych) składowymi są również zbiory jednopunktowe.

    Rzeczywiście, gdyby składowa $S \subset \mathbb{Q}$ zawierała dwie różne liczby wymierne a, b, gdzie $a < b$, to biorąc liczbę niewymierną t taką, że $a < t < b$ otrzymalibyśmy dwa zbiory $(-\infty, t) \cap S$, $(t, \infty) \cap S$ niepuste, rozłączne, otwarte w podprzestrzeni S i dające w sumie S. Oznaczałoby to niespójnośc podprzestrzeni S.
(4) W przestrzeni $X = [0, 1] \cup (2, 3)$ z metryką euklidesową składowymi są przedziały $[0, 1]$ oraz $(2, 3)$.

Gdyby np. przedział $[0,1]$ nie był składową w X, to zawierałby się w istotnie większej podprzestrzeni spójnej $S \subset X$. Zbiór S musiałby zawierać liczbę z przedziału $(2,3)$, więc zbiory $(-\infty, \frac{3}{2}] \cap S, (\frac{3}{2}, \infty) \cap S$ byłyby niepuste, rozłączne, otwarte w S i dające w sumie S—sprzeczność ze spójnością S.

Zauważmy następujące bardzo proste fakty.

STWIERDZENIE 8.1.

(1) *Każda przestrzeń topologiczna jest sumą swoich składowych.*
(2) *Dwie różne składowe przestrzeni są rozłączne.*
(3) *Każda składowa przestrzeni jest jej podzbiorem domkniętym.*

DOWÓD. Pierwsze stwierdzenie wynika z tego, że zbiór jednopunktowy jest spójny i albo jest on już składową, albo da się powiększyć do składowej.

Stwierdzenie drugie wynika bezpośrednio z twierdzenia o sumie 8.2, a trzecie z twierdzenia o domknięciu 8.4. □

UWAGA 8.1. Pierwsze dwa punkty stwierdzenia 8.1 można wyrazić krócej, mówiąc, ze każda przestrzeń topologiczna ma rozkład na składowe.

Nie należy mylić tego rozkładu z rozkładem przestrzeni niespójnej na dwa podzbiory niepuste, rozłączne i domknięte, występującym w definicji 8.1. Różnicę ilustruje przykład zbioru liczb wymiernych z metryką euklidesową.

Spójność jest własnością topologiczną, więc przestrzenie homeomorficzne powinny mieć taką samą ilość homeomorficznych składowych:

TWIERDZENIE 8.5. *Niech $\mathbf{S}_X$ i $\mathbf{S}_Y$ oznaczają rodziny wszystkich składowych przestrzeni topologicznych X i Y, odpowiednio. Jeśli $h : X \to Y$ jest homeomorfizmem, to rodziny $\mathbf{S}_X$ i $\mathbf{S}_Y$ są równoliczne, przy czym $\mathbf{S}_Y = \{h(S) : S \in \mathbf{S}_X\}$ i funkcja $S \mapsto h(S)$ ustala równoliczność tych rodzin.*

DOWÓD. Pokażemy najpierw inkluzję

$$\mathbf{S}_Y \supset \{h(S) : S \in \mathbf{S}_X\}$$

czyli, że $h(S)$ jest składową przestrzeni Y dla $S \in \mathbf{S}_X$. Gdyby tak nie było, to zbiór spójny $h(S)$ zawierałby się w większej od niego składowej W przestrzeni Y. Wtedy

$$S = h^{-1}(h(S)) \subsetneq h^{-1}(W) \subset X$$

oraz zbiór $h^{-1}(W)$ jest spójny (gdyż przekształcenie h^{-1} jest ciągłe, a W—spójny), co jest niemożliwe, bo składowa S jest maksymalnym zbiorem spójnym w X.

Dla uzasadnienia inkluzji odwrotnej niech S' będzie składową przestrzeni Y. Stosując poprzednią inkluzję do homeomorfizmu h^{-1}, stwierdzamy, że $h^{-1}(S')$ jest składową przestrzeni X, tzn. $h^{-1}(S') = S \in \mathbf{S}_X$. Zatem $S' = h(S)$, co daje

$$\mathbf{S}_Y \subset \{h(S) : S \in \mathbf{S}_X\}$$

.

Do pokazania równoliczności rodzin $\mathbf{S}_X$ i $\mathbf{S}_Y$ wystarczy teraz sprawdzić różnowartościowość funkcji $S \mapsto h(S)$, gdzie $S \in \mathbf{S}_X$: dla różnych $S_1, S_2 \in \mathbf{S}_X$ mamy $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ (stwierdzenie 8.1) i z różnowartościowości h wynika, że $h(S_1) \cap h(S_2) = \emptyset$, w szczególności $h(S_1) \neq h(S_2)$. □

Uwaga 8.2. Twierdzenie 8.5 podaje jedynie warunek konieczny, by dwie przestrzenie topologiczne były homeomorficzne. Nie jest on wystarczający—dwie niehomeomorficzne przestrzenie mogą mieć tyle samo homeomorficznych składowych, np. przestrzeń $(\mathbb{Z}, \rho_e)$ liczb całkowitych i $(\mathbb{Q}, \rho_e)$ (nie są homeomorficzne, bo pierwsza jest w sobie gęsta, a druga nie).

Przykład 8.5. Podprzestrzenie $X = \mathbb{Q} \times [0,1]$ i $Y = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \times [0,1]$ płaszczyzny euklidesowej nie są homeomorficzne, bo składowymi obu są odcinki postaci $\{x\} \times [0,1]$ i X ma ich przeliczalnie wiele, a Y nieprzeliczalnie wiele.

Aby uzasadnić, ze składowe przestrzeni X (podobnie dla Y) są postaci $\{x\} \times [0,1]$, przypuśćmy, że pewien odcinek $\{x\} \times [0,1]$ zawiera się w większej podprzestrzeni spójnej $S \subset X$, tzn. w podzbiorze zawierającym punkt postaci (x', t) dla $x' \neq x$. Ponieważ rzutowanie $p : X \to \mathbb{Q}, \quad p(x,y) = x$ jest ciągłe, więc obraz $p(S)$ jest spójną podprzestrzenią w $\mathbb{Q}$ zawierającą dwa różne punkty x, x', co, jak już wiemy, jest niemożliwe.

Definicja 8.3. Podzbiór A przestrzeni topologicznej X *rozspaja* przestrzeń X (na $\mathbf{n}$ składowych), gdy podprzestrzeń $X \setminus A$ jest niespójna (ma $\mathbf{n}$ składowych, tzn. rodzina składowych podprzestrzeni $X \setminus A$ ma moc $\mathbf{n}$ dla pewnej liczby kardynalnej $\mathbf{n}$).

W przypadku, gdy zbiór A zawiera tylko jeden punkt a, mówimy, że punkt a rozspaja X.

Twierdzenie 8.6. *Jeśli $h : X \to Y$ jest homeomorfizmem i zbiór $A \subset X$ rozspaja X (na $\mathbf{n}$ składowych), to zbiór $h(A)$ rozspaja Y (na $\mathbf{n}$ składowych).*

Dowód. Ponieważ obcięcie $h \restriction X \setminus A : X \setminus A \to Y \setminus h(A)$ jest homeomorfizmem, to twierdzenie wynika natychmiast z twierdzenia 8.5. $\square$

Twierdzenia 8.5 i 8.6 dostarczają narzędzi do uzasadniania niehomeomorficzności dwóch przestrzeni. Natępujące przykłady ilustrują tę metodę.

Przykład 8.6.

(1) Przedziały euklidesowe $[0, 1)$ i $[0, 1]$ nie są homeomorficzne, bo w pierwszym jest tylko jeden punkt nierozspajający (liczba 0), a w drugim są dokładnie dwa punkty nierozspajające (liczby 0 i 1).
(2) Okrąg nie jest homeomorficzny z przedziałem $[0, 1]$ (metryki euklidesowe), gdyż żaden punkt nie rozspaja okręgu, podczas, gdy są punkty rozspajające przedział.
(3) Okrąg nie jest homeomorficzny z kwadratem na płaszczyźnie euklidesowej, bo dowolny podzbiór dwupunktowy rozspaja okrąg, a żaden podzbiór dwupunktowy nie rozspaja kwadratu (dowolne dwa punkty kwadratu, nie należące do tego podzbioru, można połączyć łamaną w kwadracie omijającą ten podzbiór).
(4) Pęk prostych $P_1 = \{re^{i\phi} : \phi \in \mathbb{Q} \cap [0, 2\pi], r \in \mathbb{R}\}$ (o wymiernych współczynnikach kierunkowych) nie jest homeomorficzny z pękiem prostych $P_2 = \{re^{i\phi} : \phi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap [0, 2\pi], r \in \mathbb{R}\}$ (o niewymiernych współczynnikach kierunkowych), gdyż w drugim pęku punkt 0 rozspaja go na nieprzeliczalnie wiele składowych (półproste o początku 0), a pierwszy takiego punktu nie ma.

    Aby uzasadnić, że składowe podprzestrzeni $P_2 \setminus \{0\}$ są półprostymi o początku 0, przypuśćmy, że pewna półprosta $\{re^{i\phi_0} : r > 0\}$, gdzie $\phi_0 \in (R \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 2\pi]$ zawiera się w większym zbiorze spójnym $S \subset P_2 \setminus \{0\}$. Załóżmy, że S zawiera punkt $z = re^{i\psi}$ spoza półprostej. Wybieramy liczbę wymierną θ pomiędzy ϕ_0 i ψ i rozważamy półpłaszczyzny otwarte W oraz V, na które dzieli płaszczyznę prosta $\{re^{i\theta} : r \in \mathbb{R}\}$. Zbiory W i V są podzbiorami otwartymi płaszczyzny euklidesowej, więc zbiory $W \cap S$ i $V \cap S$ są otwarte w S, niepuste, rozłączne i w sumie dają S, co jest sprzeczne ze spójnością S.

Ćwiczenia

(1) Uzasadnić stwierdzenia z przykładu 8.1.

(2) Korzystając z faktu, że obraz ciągły przestrzeni spójnej jest spójny udowodnić twierdzenie Darboux, mówiące, że funkcja ciągła $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ przyjmuje wszystkie wartości pośrednie między dowolnymi swoimi dwiema wartościami.

(3) Kiedy wykres funkcji ciągłej jest spójny?

Czy jeśli funkcja $f : X \to Y$ ma wykres spójny, to musi być ciągła?

(4) Sprawdzić, że podzbiory spójne prostej euklidesowej muszą być wypukłe, czyli są wszelkiego rodzaju przedziałami (z końcami lub bez, ograniczonymi lub nie).

(5) Korzystając z faktu istnienia przekształcenia ciągłego przestrzeni metrycznej w przedział euklidesowy $[0, 1]$ (zob. ćwiczenia 16 i 17) oraz z poprzedniego ćwiczenia, udowodnić,że każda niejednopunktowa przestrzeń metryczna spójna jest nieprzeliczalna.

Takie twierdzenie jest nieprawdziwe dla niemetryzowalnych przestrzeni topologicznych Hausdorffa spójnych—są przykłady takich przestrzeni, które są przeliczalne! (zob. [**ES**], str. 376).

(6) Czy wnętrze oraz brzeg podzbioru spójnego przestrzeni X muszą być spójne?

Czy jeśli brzeg podzbioru $A \subset X$ jest spójny, to A jest spójny?

(7) Badając zbiory rozspajające odpowiednie przestrzenie z metrykami euklidesowymi uzasadnić, że prosta nie jest homeomorficzna z płaszczyzną ani z $\mathbb{R}^3$, a sfera S^2 z okręgiem.

Zbadać, które litery alfabetu są homeomorficzne.

(8) Udowodnić, że każda funkcja ciągła $f : [0, 1] \to [0, 1]$ ma punkt stały, tzn. taki punkt x, że $f(x) = x$.

Wskazówka: Rozpatrzyć funkcję pomocniczą

$$g : [0, 1] \to \mathbb{R}, g(x) = f(x) - x$$

i skorzystać ze spójności przedziału euklidesowego $[0, 1]$.

(9) Uzasadnić, że każde przekształcenie ciągłe $f : A \to A$, gdzie A jest dowolnym łukiem ma punkt stały (zob. poprzednie ćwiczenie).

ROZDZIAŁ 9

Przestrzenie łukowo spójne

DEFINICJA 9.1. *Łukiem* nazywamy przestrzeń topologiczną homeomorficzną z przedziałem domkniętym prostej euklidesowej.

Jeśli A jest łukiem i $h : [\alpha, \beta] \to A$ jest homeomorfizmem, to punkty $a = h(\alpha), b = h(\beta)$ nazywamy *końcami* łuku A i mówimy, że A jest łukiem od a do b, oznaczając go często symbolem ab.

Homeomorfizm h nazywamy zaś *parametryzacją* łuku ab od a do b.

Parametryzacja h od a do b wyznacza porządek liniowy $\prec$ od a do b na łuku ab wzorem:

$$p \prec q \Leftrightarrow h^{-1}(p) < h^{-1}(q).$$

UWAGA 9.1.

(1) Łuk jest zawsze przestrzenią metryzowalną (zob. rozdział 7).
(2) Jeśli p jest punktem łuku ab różnym od końców a, b, a $h : [\alpha, \beta] \to ab$ parametryzacją łuku ab od a do b, to homeomorfizm $h' = h|[\alpha, h^{-1}(p)]$ jest parametryzacją podłuku $ap \subset ab$, a $h'' = h|[h^{-1}(p), 1]$—parametryzacją podłuku $pb \subset ab$ od p do b.
(3) Obraz homeomorficzny łuku jest łukiem.

LEMAT 9.1. *Jeśli ciąg punktów a_n łuku ab jest zbieżny w ab do punktu p, a punkty $a'_n \in ab$ spełniają $a_{n+1} \prec a'_n \prec a_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, to ciąg $\{a'_n\}$ jest też zbieżny do p.*

DOWÓD. Taką własność ma oczywiście każdy przedział euklidesowy $[\alpha, \beta]$. Parametryzacja $h : [\alpha, \beta] \to ab$ od a do b przenosi ją na łuk ab. □

PRZYKŁAD 9.1. Wykres przekształcenia ciągłego $f : [\alpha, \beta] \to X$, gdzie $[\alpha, \beta]$ jest domkniętym przedziałem euklidesowym, jest łukiem od punktu $(\alpha, h(\alpha))$ do $(\beta, h(\beta))$ (zob. stwierdzenie 6.1).

DEFINICJA 9.2. Przestrzeń topologiczna jest *łukowo spójna*, gdy każde jej dwa różne punkty dadzą się połączyć podprzestrzenią, która jest łukiem.

Łukowa spójność jest pojęciem silniejszym od spójności przestrzeni i występuje często w analizie matematycznej i geometrii.

Przykład 9.2. Przestrzeń Y_+ z przykładu 8.3 (podobnie Y_- i Y) nie jest łukowo spójna. Nie istnieje mianowicie łuk łaczący punkt $a = (0, 0)$ z punktem $b = (t, t') \in X_+$.

Istotnie, przypuśćmy, że jest taki łuk $ab \subset Y_+$. Wtedy rzut łuku ab na oś odciętych, jako spójna podprzestrzeń prostej euklidesowej $\mathbb{R}$, musi być przedziałem zawierającym 0 i $t > 0$. Dlatego przedział $[0, t]$ zawiera się w rzucie łuku ab. Oznacza to, że

$$X_+ \cap \{(x, y) : x \leq t\} \subset ab$$

(łuk ab zawiera część wykresu zagęszczonej sinusoidy X_+ znajdującą się nad lub pod przedziałem $(0, t]$). Punkty $a_n = (\frac{1}{2n\pi}, 0)$ i $a'_n = (\frac{2}{(4n+1)\pi}, 1)$ należą więc do ab dla dostatecznie dużych $n \in \mathbb{N}$—przyjmijmy, że dla wszystkich n. Ponadto, w porządku liniowym $\prec$ od a do b mamy $a_{n+1} \prec a'_n \prec a_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Na mocy lematu 9.1 ciąg punktów a'_n jest zbieżny do a, co oczywiście jest nieprawdą, bo granicą tego ciągu jest punkt $(0, 1)$.

Przestrzenie z przykładu 8.3 zawierają łuki. Trudniej jest wyobrazić sobie przestrzeń spójną bez łuków. Można oczywiście podać łatwy, ale sztuczny przykład takiej przestrzeni topologicznej—jest nią np. przestrzeń dwupunktowa X z przykładu 7.1. Jeden z pierwszych przykładów podprzestrzeni płaszczyzny euklidesowej spójnych i nie zawierających łuków był skonstruowany przez Zygmunta Janiszewskiego w 1912 r. Punktem wyjścia takiej konstrukcji może być np. powyższa przestrzeń Y. Wycinamy z niej łuk i wstawiamy w jego miejsce mniejszą kopię Y. Mówiąc mało precyzyjnie, takich operacji wycięć i wstawień wykonujemy nieskończenie wiele, przy czym średnice "wycięć" i "wstawek" dążą do 0. Następuje tzw. zagęszczenie osobliwości, którymi są wstawiane kopie Y. W rezultacie otrzymamy spójną podprzestrzeń płaszczyzny euklidesowej, bez łuków.

Łukowa spójność jest własnością topologiczną:

Stwierdzenie 9.1. *Jeśli przestrzeń topologiczna X jest łukowo spójna i Y jest przestrzenią homeomorficzną z X, to Y jest łukowo spójna.*

Dowód. Niech $h : X \to Y$ będzie homeomorfizmem i y_1, y_2 dwoma róznymi punktami przestrzeni Y. Wybierzmy punkty $x_1 \in h^{-1}(y_1)$, $x_2 \in h^{-1}(y_2)$. Istnieje łuk $x_1x_2 \subset X$. Jego obraz homeomorficzny $h(x_1x_2)$ jest łukiem o końcach y_1 i y_2 w Y. $\square$

Lemat 9.2. *Przestrzeń, która jest sumą dwóch łuków ab i bc, takich że $a \neq c$, zawiera łuk od a do c.*

Dowód. Jeśli $c \in ab$, to bierzemy podłuk ac łuku ab. Załóżmy więc dalej, że $c \notin ab$. Wtedy łuk bc może wielokrotnie przecinać ab i należy znaleźć "ostatni" (w porządku $\prec$ od b do c) jego punkt p, który należy do ab, a następnie wziąć sumę łuków $ap \subset ab$ i $pc \subset bc$.

Aby to opisać precyzyjnie, niech $h : [\alpha, \beta] \to ab$ i $g : [\beta, \gamma] \to bc$ będą parametryzacjami łuków ab i bc od a do b i od b do c, odpowiednio.

Pokażemy, że istnieje taki punkt $p \in bc$, że podłuk $pc \subset bc$ nie zawiera punktów łuku ab różnych od p. Gdyby bowiem dla każdego $p \in bc$ istniał punkt $p' \in ab \cap pc$ różny od p, to tworzymy ciąg par takich punktów, spełniających:

$$p_1 \prec p_1' \prec p_2 \prec p_2' \cdots \prec c, \quad \text{gdzie } p_n' \in ab \cap bc,$$

zbieżny do c. Można to zrobić np. w następujący sposób:

$p_1 = g(\frac{\beta+\gamma}{2}) \prec p_1' \prec p_2 = g(\frac{g^{-1}(p_1')+\gamma}{2}) \prec p_2' \prec \ldots$, itd. Widzimy tu, że ciąg liczb

$$\frac{\beta + \gamma}{2} < g^{-1}(p_1') < \frac{g^{-1}(p_1') + \gamma}{2} < g^{-1}(p_2') < \ldots$$

jest zbieżny do γ, więc ciąg obrazów $p_1', p_2', \ldots$, musi być zbieżny do obrazu $g(\gamma) = c$. Ponadto, wiedząc, że $p_n' \in ab$ i ciąg (p_n') zawiera podciąg zbieżny w ab (zob. 4 w przykładzie 4.4), stwierdzamy, że granica tego podciągu, czyli punkt c należy do łuku ab, co jest sprzeczne z założeniem.

Na koniec zauważmy, że suma podłuków $ap \subset ab$ i $pc \subset bc$ jest łukiem o końcach a i c. Można bowiem określić homeomorfizm:

$$\begin{aligned} f :&[1,2] \to ap \cap pc \\ f(t) &= h((h^{-1}(p) - \alpha)t + \alpha) \quad \text{dla } t \in [0,1], \\ f(t) &= g((\gamma - g^{-1}(p))(t-1) + g^{-1}(p)) \quad \text{dla } t \in [1,2]. \end{aligned}$$

□

Łukowa spójność jest istotną cechą *obszarów*, czyli spójnych i otwartych podzbiorów przestrzeni euklidesowych. Fakt ten ma miejsce nawet w ogólniejszej sytuacji w przestrzeniach unormowanych.

Podobnie jak w przestrzeniach euklidesowych, kule w przestrzeniach unormowanych są wypukłe.

Twierdzenie 9.1. *Podzbiór spójny i otwarty przestrzeni unormowanej jest łukowo spójny.*

Dowód. Niech U będzie podzbiorem spójnym i otwartym przestrzeni unormowanej X. Możemy założyć, że jest on niepusty (dlaczego?). Ustalmy punkt $u \in U$. Pokażemy, że zbiór

$$A = \{x \in U : \text{istnieje łuk } ux \subset U\}$$

jest zarówno otwarty, jak i domknięty w U.

Otwartość: Niech $x \in A$ i niech $ux \subset U$ będzie łukiem o końcach x, u. Ponieważ U jest otwarty w X, to istnieje kula $K(x; r) \subset U$. Możemy założyć, że promień r jest tak mały, by $u \notin K(x; r)$. Wtedy każdy punkt y tej kuli daje się połączyć z x odcinkiem (a więc łukiem) xy w niej zawartym. W sumie $ux \cup xy$ istnieje łuk uy (lemat 9.2), skąd $y \in A$, co daje $K(x; r) \subset A$.

Domkniętość: Podobnie, jak wyżej, pokażemy, że zbiór $U \setminus A$ jest otwarty w U. Niech $x \in U \setminus A$ i $K(x; r) \subset U$. Wówczas każdy punkt y tej kuli łączy się z środkiem x odcinkiem $yx \subset K(x; r)$, więc $y \notin A$, bo w przeciwnym razie istniałby łuk $uy \subset U$ i, z lematu 9.2, suma $uy \cup yx$ zawierałaby łuk ux. Jest to niemożliwe, bo przecież $x \notin A$.

Skoro A jest podzbiorem otwarto-domkniętym przestrzeni spójnej U, to albo $A = \emptyset$, albo $A = U$. Pierwszy przypadek jest niemożliwy, bo U zawiera kule (które są zbiorami wypukłymi) o środku u. Zatem $A = U$. Jeśli więc $x, y \in U$ są różne od siebie i od u, to istnieją łuki $xu, uy \subset U$ i, korzystając ponownie z lematu 9.2, stwierdzamy istnienie łuku $xy \subset U$. □

Pojęciem analogicznym do składowej jest składowa łukowa.

Definicja 9.3. *Składową łukową* przestrzeni topologicznej X jest każda maksymalna podprzestrzeń łukowo spójna przestrzeni X.

Zauważmy, że składowe łukowe przestrzeni mogą być jednopunktowe. Będzie tak, na przykład, gdy przestrzeń nie zawiera łuków.

Każda składowa łukowa, jako zbiór spójny, zawiera się w składowej przestrzeni. Przykład 8.3 świadczy o tym, że składowe przestrzeni mogą być istotnie większe od składowych łukowych.

Przykład 9.3. Składowymi łukowymi przestrzeni Y z przykładu 8.3 są zbiory X_+, X_- i $(\{0\} \times [-1, 1])$.

Stwierdzenie 9.2. *Składowe łukowe przestrzeni topologicznej X tworzą rozkład przestrzeni X.*

Dowód. Trzeba sprawdzić, że różne składowe łukowe są rozłączne i dają w sumie X.

Niech więc A_1, A_2 będą różnymi składowymi łukowymi i $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$. Wybierzmy punkt $a \in A_1 \cap A_2$ i niech x, y będą dowolnymi różnymi punktami zbioru $A_1 \cup A_2$. Jeśli oba punkty x, y leżą w tej samej składowej A_i ($i = 1, 2$), to oczywiście w A_i istnieje łuk xy. Jeśli leżą w różnych składowych, to przyjmijmy, że np. $x \in A_1$, $y \in A_2$ i wybierzmy łuki $xa \subset A_1$, $ay \subset A_2$. W sumie $xa \cup ay$ zawiera się łuk xy (9.2). Zatem zbiór $A_1 \cup A_2$ jest łukowo spójny, a ponieważ A_1 i A_2 są maksymalnymi podzbiorami łukowo spójnymi, to $A_1 = A_1 \cup A_2 = A_2$, sprzeczność.

Ponieważ każdy podzbiór jednopunktowy jest łukowo spójny, więc zawiera się w składowej łukowej, to cała przestrzeń X jest sumą swoich składowych łukowych. □

Ze stwierdzenia 9.1 wynika, ze pojęcie składowej łukowej jest niezmiennikiem homeomorfizmów:

Stwierdzenie 9.3. *Jeśli A jest składową łukową przestrzeni topologicznej X i $h : X \to Y$ jest homeomorfizmem, to $h(A)$ jest składową łukową przestrzeni Y.*

Stwierdzenia 9.2 i 9.3 implikują analogiczne do twierdzenia 8.5 twierdzenie o składowych łukowych.

Twierdzenie 9.2. *Niech $\mathbf{A}_X$ i $\mathbf{A}_Y$ oznaczają rodziny wszystkich składowych łukowych przestrzeni topologicznych X i Y, odpowiednio. Jeśli $h : X \to Y$ jest homeomorfizmem, to rodziny $\mathbf{A}_X$ i $\mathbf{A}_Y$ są równoliczne, przy czym $\mathbf{A}_Y = \{h(A) : A \in \mathbf{A}_X\}$ i funkcja $A \mapsto h(A)$ ustala równoliczność tych rodzin.*

Powyższym twierdzeniem można się posłużyć do udowodnienia, że jakieś dwie przestrzenie nie są homeomorficzne. Ilustrują to następujące przykłady.

Przykład 9.4.

(1) Przestrzeń Y_+ ma dwie składowe łukowe, a Y— trzy, więc te przestrzenie nie są homeomorficzne.
(2) Podprzestrzeń $Z = X_+ \cup (\{0\} \times [-1, 1))$ płaszczyzny euklidesowej nie jest homeomorficzna z Y_+. Obie mają po dwie składowe łukowe, ale składowa łukowa $(\{0\} \times [0, 1))$ przestrzeni Z nie jest homeomorficzna z żadną ze składowych łukowych w Y_+.

Twierdzenia 8.5 i 9.2 jednak nie wystarczają bezpośrednio, by uzasadnić niehomeomorficzność takich nieskomplikowanych podprzestrzeni płaszczyzny euklidesowej, jak

$$\{\, (x, \sin\frac{1}{x}) : 0 < x \leq \pi \,\} \cup (\{0\} \times [-1, 1])$$

i

$$\{\,(x,\sin\frac{1}{x}) : 0 < x \le \pi\,\} \cup (\{0\} \times [0,\frac{1}{2}]).$$

Wygodnym narzędziem będzie w tym przypadku zwartość, której poświęcamy kolejny rozdział.

Ćwiczenia

(1) Sprawdzić spójność i łukową spójność oraz znaleźć składowe i łukowe składowe
  (a) płaszczyzny z metrykami "rzeka" i "centrum";
  (b) kul $K((1,1);r)$, gdzie $r = 1, 2$, na płaszczyźnie w metrykach "rzeka" i "centrum";
  (c) zbiorów podanych w ćwiczeniach 8 i 9 w rozdziale 3.

(2) Czy płaszczyzna (przestrzeń $\mathbb{R}^n$) euklidesowa bez przeliczalnej ilości punktów jest łukowo spójna?

(3) Udowodnić, że każda przestrzeń ściągalna jest łukowo spójna.

(4) Niech Y będzie przestrzenią łukowo spójną. Pokazać, że każde dwa przekształcenia stałe z dowolnej przestrzeni X w Y są homotopijne.

(5) Udowodnić, że kule w przestrzeniach unormowanych są wypukłe.

(6) Badając składowe lub łukowe składowe sprawdzić, czy wśród następujących podprzestrzeni płaszczyzny euklidesowej są przestrzenie homeomorficzne:
  (a) $X_1 = \big\{(x,y) : y = \sin\frac{1}{x}, 0 \neq |x| \leq 2\big\}$
  (b) $X_2 = X_1 \cup \{(0,y) : y \in [-1,1]\}$
  (c) $X_3 = \big\{(x,y) : y = \sin\frac{1}{x}, 0 \neq |x| < 2\big\}$
  (d) $X_4 = \big\{(x,y) : y = \sin\frac{1}{x}, 0 < x < 2\big\} \cup \{(0,y) : y \in [-1,1]\}$
  (e) $X_5 = \big\{(x,y) : y = \sin\frac{1}{x}, -2 < x < 0\big\}$
  (f) $X_6 = X_3 \cup \{(0,-1),(0,1)\}$
  (g) $X_7 = X_5 \cup \{(0,0)\}$
  (h) $X_8 = X_1 \cup \{(0,-1)\}$
  (i) $X_9 = \operatorname{cl} X_4 \cup \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq y \leq -1\} \cup \{(x,-2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2\} \cup \{(2,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq y \leq \sin\frac{1}{2}\}$
  (j) $X_{10} = X_1 \cup \{(-2,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq y \leq \sin\frac{1}{-2}\} \cup \{(x,-2) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 2\} \cup \{(2,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq y \leq \sin\frac{1}{2}\}$

  Czy X_9 i X_{10} są homeomorficzne z okręgiem euklidesowym?

ROZDZIAŁ 10

Przestrzenie zwarte

DEFINICJA 10.1. Przestrzeń metryczna (X, ρ) jest *zwarta* , gdy każdy ciąg punktów w X ma podciąg zbieżny w X.

PRZYKŁAD 10.1.

(1) Każda przestrzeń skończona jest zwarta.
(2) Nieskończona przestrzeń dyskretna nie jest zwarta.
(3) Prosta euklidesowa nie jest zwarta.
(4) Przedział domknięty $[\alpha, \beta]$ na prostej euklidesowej jest zwarty.
    Jest to konsekwencją znanego z kursu analizy matematycznej, podstawowego twierdzenia Bolzano-Weierstrassa głoszącego, ze każdy ograniczony ciąg liczb rzeczywistych ma podciąg zbieżny. Jeśli ciąg zawiera się w przedziale $[\alpha, \beta]$, to i granica jego podciągu zbieżnego jest w tym przedziale.

Aby móc podać dalsze przykłady przestrzeni zwartych, sformułujemy kilka ogólnych własności.

STWIERDZENIE 10.1. *Podprzestrzeń domknięta przestrzeni metrycznej zwartej jest zwarta.*

DOWÓD. Załóżmy, że X jest przestrzenią zwartą, Y jej podzbiorem domkniętym i $y_n \in Y$, dla $n \in \mathbb{N}$. Istnieje podciąg $(y_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ zbieżny w X, tzn. mający granicę $y \in X$. Z domkniętości zbioru Y wynika, że $y \in Y$ (zob. uwagę 3.1), czyli podciąg (y_{k_n}) jest zbieżny w Y. $\square$

STWIERDZENIE 10.2. *Jeśli przestrzeń zwarta Y jest podprzestrzenią przestrzeni metrycznej X, to Y jest podzbiorem domkniętym w X.*

DOWÓD. Zgodnie z uwagą 3.1 sprawdzimy, że każdy ciąg punktów przestrzeni Y, który jest zbieżny w X, ma granicę w Y. Niech $y_n \in Y$, dla $n \in \mathbb{N}$, będzie ciągiem zbieżnym do punktu $y \in X$. Na mocy zwartości Y istnieje podciąg $(y_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ zbieżny w Y. Ponieważ podciąg ciągu zbieżnego ma tę samą granicę, co cały ciąg, to $y \in Y$. $\square$

UWAGA 10.1. Własność przestrzeni metrycznych zwartych, o której jest mowa w stwierdzeniu 10.2, jest czasami nazywana ich *absolutną domkniętością*.

Stwierdzenie 10.3. *Każda przestrzeń metryczna zwarta jest ograniczona.*

Dowód. Przypuśćmy, że przestrzeń metryczna zwarta (X, ρ) nie jest ograniczona, tzn. $\operatorname{diam} X = \sup\{\rho(x, y) : x, y \in X\} = \infty$. Przypomnijmy, że wówczas X nie zawiera się w sumie skończenie wielu kul (ćwiczenie 3 z rozdziału 2). Zdefiniujemy ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bez podciągu zbieżnego. Niech x_1 będzie dowolnym punktem przestrzeni X. Istnieje punkt $x_2 \in X$ taki, że $\rho(x_1, x_2) \geq 1$, bo w przeciwnym razie $X \subset K(x_1; 1)$. Indukcyjnie określamy kolejne punkty ciągu: załóżmy, że punkty $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zostały zdefiniowane. Istnieje wtedy punkt $x_{n+1} \in X$ taki, że $\rho(x_{n+1}, x_i) \geq 1$ dla wszystkich $i = 1, 2, \ldots, n$, gdyż w przeciwnym razie

$$X \subset \bigcup_{i=1}^{n} K(x_i; 1),$$

dla pewnego $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Każde dwa różne punkty ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ są odległe od siebie o co najmniej 1, więc jest jasne, ze ani sam ten ciąg, ani żaden jego podciąg nie może być zbieżny. □

Twierdzenie 10.1. *Iloczyn kartezjański przeliczalnie wielu przestrzeni metrycznych zwartych jest przestrzenią zwartą.*

Dowód. Udowodnimy twierdzenie najpierw dla iloczynu dwóch przestrzeni zwartych X i Y. Niech $(x_n, y_n) \in X \times Y$, $n \in \mathbb{N}$. Ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ma podciąg zbieżny $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ do pewnego punktu $x \in X$. Podciąg $(y_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ nie musi być zbieżny, ale ma podciąg $(y_{k_{m_n}})_{n\in\mathbb{N}}$ zbieżny do pewnego punktu $y \in Y$. Z twierdzenia 6.1 o zbieżności po współrzędnych wynika, że podciąg $(x_{k_{m_n}}, y_{k_{m_n}})_{n\in\mathbb{N}}$ ciągu $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny do punktu $(x, y) \in X \times Y$.

Stosując indukcję matematyczną i prosty fakt, że iloczyny kartezjąńskie $(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k) \times X_{k+1}$ oraz $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k \times X_{k+1}$ są izometryczne (zob. ćwiczenie 6 z rozdziału 6), dowodzimy twierdzenia dla dowolnej skończonej ilości przestrzeni metrycznych zwartych.

W przypadku iloczynu X nieskończenie wielu przestrzeni zwartych $X_1, X_2, , \ldots,$ rozważmy dowolny ciąg $\mathbf{x}_n = (x_{n1}, x_{n2}, \ldots) \in X$, gdzie $x_{ni} \in X_i$. Podobnie, jak wyżej, znajdziemy punkt w X, który będzie granicą podciągu ciągu $\mathbf{x}_n$. Określenie takiego podciągu jest nieco bardziej skomplikowane i polega na, tak zwanej, metodzie przekątniowej. Ciąg pierwszych współrzędnych x_{n1}, $n \in \mathbb{N}$, ma podciąg $x_{k_n 1}$ zbieżny do pewnego punktu $a_1 \in X_1$, gdy $n \to \infty$. Podciąg drugich współrzędnych $x_{k_n 2}$ ma podciąg $x_{m_{k_n} 2}$ zbieżny do pewnego punktu $a_2 \in X_2$, gdy $n \to \infty$. Podciąg trzecich współrzędnych $x_{m_{k_n} 3}$ ma podciąg $x_{l_{m_{k_n}} 3}$ zbieżny do punktu $a_3 \in X_3$ dla $n \to \infty$, itd. Otrzymujemy w ten sposób punkt $(a_1, a_2, a_3, \dots) \in X$, będący, na podstawie twierdzenia o zbieżności po współrzędnych 6.1, granicą ciągu punktów

$$\begin{aligned} &(x_{k_1 1}, x_{k_1 2}, x_{k_1 3}, \dots), \\ &(x_{m_{k_2} 1}, x_{m_{k_2} 2}, x_{m_{k_2} 3}, \dots), \\ &(x_{l_{m_{k_3}} 1}, x_{l_{m_{k_3}} 2}, x_{l_{m_{k_3}} 3}, \dots), \\ &\dots \end{aligned}$$

który jest podciągiem ciągu $\mathbf{x}_n$. □

Można teraz podać obszerną klasę przestrzeni zwartych.

PRZYKŁAD 10.2. Kostki euklidesowe, kostka Hilberta (zob. ćwiczenie 5b z rozdziału 6) oraz ich podzbiory domknięte są przestrzeniami zwartymi. W szczególności domknięcia kul w przestrzeniach euklidesowych są zwarte (istotnie, domknięcie takiej kuli zawiera się w pewnej kostce, a więc jest podzbiorem domkniętym przestrzeni zwartej).

TWIERDZENIE 10.2. *Podprzestrzeń przestrzeni euklidesowej jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy jest podzbiorem domkniętym i ograniczonym.*

DOWÓD. Niech $A \subset (\mathbb{R}^n, \rho_e)$. Jeśli podprzestrzeń A jest zwarta, to jest podzbiorem domkniętym (stwierdzenie 10.2) i ograniczonym (stwierdzenie 10.3).

Na odwrót, jeśli A jest ograniczony, to zawiera się w pewnej kuli K (stwierdzenie 2.2), której domknięcie $\operatorname{cl} K$ jest podzbiorem zwartym w $(\mathbb{R}_n, \rho_e)$ (przykład 10.2). Ponieważ A jest domknięty w $\mathbb{R}^n$, to jest również domkniętym podzbiorem podprzestrzeni $\operatorname{cl} K$, więc jest podprzestrzenią zwartą (stwierdzenie 10.1). □

W powyższym twierdzeniu trzeba zwrócić uwagę na założenie, że A jest podzbiorem przestrzeni euklidesowej. Jest to istotne, jak wskazują następujące przykłady.

PRZYKŁAD 10.3.

(1) Domknięcie kuli $K(\mathbf{0}; 1)$ w przestrzeni Hilberta l_2 jest podzbiorem ograniczonym i domkniętym, ale nie jest podprzestrzenią zwartą w l_2: punkty

$$\mathbf{x}_1 = (1, 0, 0, \dots), \mathbf{x}_2 = (0, 1, 0, \dots), \mathbf{x}_3 = (0, 0, 1, 0, \dots), \dots$$

należą do tego domknięcia i tworzą ciąg bez podciągu zbieżnego, bo odległość między nimi wynosi 1.

(2) Na płaszczyźnie z metryką "centrum" ρ_c domknięcie kuli o środku $(0,0)$ i promieniu 1 jest równe zbiorowi
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\},$$
który oczywiście jest domknięty i ograniczony w $(\mathbb{R}^2, \rho_c)$, ale nie jest podprzestrzenią zwartą, bo np. ciąg punktów
$$(\cos\frac{1}{n}, \sin\frac{1}{n})$$
nie ma podciągu zbieżnego w tej podprzestrzeni.

(3) Jeśli X jest przedziałem otwartym $(0,1)$ na prostej euklidesowej, to X jest podzbiorem ograniczonym i domkniętym w przestrzeni X, ale nie jest przestrzenią zwartą, bo ciąg $\frac{1}{n}$, dla $n = 2, 3, \ldots$, nie ma podciągu zbieżnego w X.

Przekształcenia ciągłe określone na przestrzeniach metrycznych zwartych mają ważne własności, często wykorzystywane w analizie matematycznej.

Stwierdzenie 10.4. *Przestrzeń metryczna, będąca obrazem ciąglym przestrzeni metrycznej zwartej, jest zwarta.*

Dowód. Niech X będzie przestrzenią metryczną zwartą,a f—przekształceniem ciąglym przestrzeni X na przestrzeń metryczną Y. Załóżmy, że (y_n) jest dowolnym ciągiem punktów przestrzeni Y. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ wybierzmy punkt $x_n \in f^{-1}(y_n)$. Ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ma podciąg zbieżny $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ do pewnego punktu $x \in X$. Z ciągłości przekształcenia f wynika, że
$$\lim_{n\to\infty} y_{k_n} = \lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = f(x) \in Y,$$
więc podciąg $(y_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny w Y. □

Przykład 10.4.

(1) Stwierdzenie 10.4 pozwala natychmiast uzasadnić niehomeomorficzność przestrzeni podanych na końcu poprzedniego rozdziału: pierwsza jest zwarta, a druga nie.

(2) Prosta euklidesowa nie jest zwarta, więc nie może być obrazem ciągłym domkniętego przedziału euklidesowego.

Następujący wniosek daje podstawę do badania maksimum i minimum funkcji rzeczywistych wielu zmienych.

Wniosek 10.1. *Każde przekształcenie ciągłe określone na przestrzeni metrycznej zwartej o wartościach w prostej euklidesowej przyjmuje swoje oba kresy.*

Dowód. Obrazem przestrzeni zwartej jest podprzestrzeń zwarta, a więc podzbiór domknięty i ograniczony prostej. Istnieją więc kresy takiego podzbioru, a z jego domkniętości wynika, że kresy do niego należą. □

Stwierdzenie 10.5. *Każde przekształcenie ciągłe między przestrzeniami metrycznymi określone na przestrzeni zwartej jest jednostajnie ciagłe i domknięte.*

Dowód. Niech $f : (X, \rho_X) \to (Y, \rho_Y)$ będzie ciągłe, a przestrzeń metryczna (X, ρ_X)—zwarta.

Przypuśćmy najpierw, że f nie jest jednostajnie ciągłe, czyli istnieje liczba $\epsilon > 0$ taka, że dla każdej liczby $\delta > 0$ znajdziemy punkty $x, y \in X$ takie, że $\rho_X(x, y) < \delta$ oraz $\rho_Y(f(x), f(y)) \geq \epsilon$. Przyjmując $\delta = \frac{1}{n}$, dla $n = 1‘, 2, \ldots$, znajdziemy więc punkty $x_n, y_n \in X$ odległe od siebie o mniej niż $\frac{1}{n}$ i takie, że $\rho_Y(f(x_n), f(y_n)) \geq \epsilon$. Ponieważ iloczyn kartezjański $X \times X$ jest przestrzenią zwartą (twierdzenie 10.1) więc ciąg par $(x_n, y_n) \in X \times X$, dla $n = 1, 2, \ldots$, ma podciąg zbieżny $((x_{k_n}, y_{k_n}))_{n\in\mathbb{N}}$ zbieżny do pewnego punktu $(x, y) \in X \times X$. Z nierówności

$$\rho_X(x_{k_n}, y_{k_n}) < \frac{1}{k_n}$$

i z ciągłości metryki ρ_X (stwierdzenie 6.2) wynika, ze

$$\rho_X(x, y) = \lim_{n\to\infty} \rho_X(x_{k_n}, y_{k_n}) = 0.$$

Z drugiej strony, z ciągłości metryki ρ_Y i przekształcenia f, mamy

$$\rho_Y(f(x), f(y)) = \rho_Y(\lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}), \lim_{n\to\infty} f(y_{k_n})) = \\ \lim_{n\to\infty} \rho_Y(f(x_{k_n}), f(y_{k_n})) \geq \epsilon > 0,$$

co daje sprzeczność.

Aby pokazać domkniętość przekształcenia f, załóżmy, że A jest domkniętym podzbiorem w X. Trzeba uzasadnić, że $f(A)$ jest domknięty w Y. W tym celu rozważamy dowolny ciąg punktów $y_n \in f(A)$ zbieżny do punktu $y \in Y$ i pokażemy, ze $y \in f(A)$ (zob. uwaga 3.1). Wybierzmy punkt $x_n \in f^{-1}(y_n)$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ma podciąg $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ zbieżny do pewnego $x \in X$. Ponieważ $x_{k_n} \in A$ oraz A jest domknięty, więc $x \in A$, skąd, na mocy ciągłości f, otrzymujemy

$$y = f(x) \in f(A).$$

□

Ze stwierdzeń 10.5 i 4.7 wynika bardzo pożyteczny wniosek: aby stwierdzić, że przekształcenie ciągłe i wzajemnie jednoznaczne f określone na przestrzeni zwartej jest homeomorfizmem, nie trzeba sprawdzać ciągłości przekształcenia odwrotnego f^{-1}!

WNIOSEK 10.2. *Przekształcenie ciągłe i wzajemnie jednoznaczne między przestrzeniami metrycznymi o dziedzinie zwartej jest homeomorfizmem.*

Ciekawą i chyba intuicyjnie zrozumiałą własnością zwartych przestrzeni metrycznych jest to, że, poza izometriami, nie dopuszczają ani przekształceń zwężających, ani rozszerzających na siebie (przekształcenie ciągłe jest *rozszerzające*, gdy odległość obrazów dowolnych dwóch punktów nie jest mniejsza od odległości tych punktów).

TWIERDZENIE 10.3. [1] *Jeśli przestrzeń metryczna (X, ρ) jest zwarta i $f : X \to X$ jest rozszerzającą lub zwężającą surjekcją, to f jest izometrią.*

DOWÓD. Załóżmy najpierw, że f jest rozszerzające i rozważmy dowolne $x, y \in X$. Zachodzi

$$\rho(f(x), f(y)) \geq \rho(x, y).$$

Udowodnimy nierówność odwrotną. Niech $\epsilon > 0$. Określamy indukcyjnie dwa ciągi punktów:

$$x_0 = x, \quad x_n = f(x_{n-1}) \quad \text{(tzw. orbita punktu } x \text{ względem } f)$$

oraz

$$y_0 = y, \quad y_n = f(y_{n-1}) \quad \text{(orbita punktu } y).$$

Ciąg $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zawiera podciąg $(x_{k_n}, y_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ zbieżny do pewnego punktu (a, b) przestrzeni zwartej $X \times X$, zatem podciąg $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny do a, a podciąg $(y_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ do b. Znaczy to, że prawie wszystkie punkty pierwszego podciągu znajdują się w kuli $K(a; \frac{\epsilon}{4})$ i prawie wszystkie punkty drugiego podciągu są w kuli $K(b; \frac{\epsilon}{4})$. Wybierzmy taki wskaźnik k_n, że

$$x_{k_n}, x_{k_{n+1}} \in K(a; \frac{\epsilon}{4})$$

i

$$y_{k_n}, y_{k_{n+1}} \in K(b; \frac{\epsilon}{4}).$$

Dla uproszczenia zapisu wskaźników przyjmijmy $i = k_n, j = k_{n+1} - i$. Oczywiście mamy $i \geq 0, j > 0$ oraz

$$\rho(x_i, x_{i+j}) \leq \rho(x_i, a) + \rho(a, x_{i+j}) < \frac{\epsilon}{2},$$

[1] H. Freudenthal i W. Hurewicz,Fund. Math. 26(1936),120–122

$$\rho(y_i, y_{i+j}) \leq \rho(y_i, b) + \rho(b, y_{i+j}) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Ponieważ, dla dowolnych $m, n \in \mathbb{N}$,

$$\rho(x_m, x_n) \geq \rho(x_{m-1}, x_{n-1}), \tag{10.1}$$

$$\rho(y_m, y_n) \geq \rho(y_{m-1}, y_{n-1}) \tag{10.2}$$

$$\rho(x_n, y_n) = \rho(f(x_{n-1}), f(y_{n-1})) \geq \rho(x_{n-1}, y_{n-1}), \tag{10.3}$$

więc

$$\rho(x_0, x_j) \leq \rho(x_i, x_{i+j}) < \frac{\epsilon}{2} \tag{10.4}$$

i

$$\rho(y_0, y_j) \leq \rho(y_i, y_{i+j}) < \frac{\epsilon}{2}. \tag{10.5}$$

Otrzymujemy stąd nierówności

$$\begin{aligned} \rho(f(x), f(y)) = \rho(x_1, y_1) \leq \rho(x_j, y_j) \leq \\ \rho(x_j, x_0) + \rho(x_0, y_0) + \rho(y_0, y_j) < \\ \rho(x_0, y_0) + \epsilon = \rho(x, y) + \epsilon. \end{aligned} \tag{10.6}$$

Wobec dowolności liczby dodatniej ϵ, otrzymujemy żądaną nierówność

$$\rho(f(x), f(y)) \leq \rho(x, y).$$

Załóżmy teraz, że f jest zwężeniem. Dowód, że f jest izometrią jest bardzo podobny do przypadku rozszerzenia. Gdyby f było wzajemnie jednoznaczne, to wtedy przekształcenie odwrotne f^{-1} byłoby rozszerzeniem, a więc izometrią. Tę intuicję można jednak wykorzystać nawet, gdy f nie jest wzajemnie jednoznaczne. Niech $x, y \in X$ i $\epsilon > 0$. Zaczynamy od indukcyjnego zdefiniowania dwóch ciągow:

$$x_{-1} = f(x), x_0 = x, x_n \in f^{-1}(x_{n-1}) \quad \text{(orbita wsteczna punktu } f(x)\text{)},$$

$$y_{-1} = f(y), y_0 = y, y_n \in f^{-1}(y_{n-1}) \quad \text{(orbita wsteczna punktu } f(y)\text{)},$$

dla $n \in \mathbb{N}$.

Dla tych ciągów można powtórzyć rozumowanie przeprowadzone w przypadku rozszerzenia (zauważmy, że zachodzą te same nierówności 10.1,10.2,10.3 dla $m, n \geq 0$, a w 10.4 i 10.5 wskaźniki $0, j$ zmniejszą się o -1).

Otrzymamy nierówność

$$\rho(x_0, y_0) < \rho(x_{-1}, y_{-1}) + \epsilon,$$

która, wobec dowolności liczby $\epsilon > 0$, daje

$$\rho(x, y) \leq \rho(f(x), f(y)).$$

Stąd f jest izometrią.

□

Zwartość w topologii jest rozważana znacznie ogólniej dla przestrzeni topologicznych. Ponieważ nie ma w takim wypadku wygodnego i naturalnego pojęcia ciągu zbieżnego, stosuje się inną definicję, tzw, *pokryciową*, która jest równoważna z definicją 10.1 (zwaną często *ciągową* w zakresie przestrzeni metrycznych.

Definicja 10.2. Każdą rodzinę podzbiorów przestrzeni topologicznej X, których suma mnogościowa równa się X nazywamy *pokryciem* przestrzeni X. Pokrycie jest *otwarte*, gdy składa się z podzbiorów otwartych przestrzeni X.

Rodzina podzbiorów, będąca pokryciem przestrzeni X i zawarta w pokryciu $\mathcal{U}$ tej przestrzeni, nazywa się *podpokryciem* pokrycia $\mathcal{U}$.

Kolejne twierdzenie podaje ciekawą własność przestrzeni metrycznych zwartych (dla rybaków oczywistą: z każdej sieci uciekną dostatecznie małe rybki).

Twierdzenie 10.4. *Jeśli $\mathcal{U}$ jest pokryciem otwartym zwartej przestrzeni metrycznej (X, ρ), to istnieje liczba $\lambda > 0$ taka, że każdy podzbiór w X o średnicy mniejszej od λ zawiera się w pewnym elemencie pokrycia.*

Dowód. Przypuśćmy, że teza nie jest spełniona. Zatem dla każdej liczby $\lambda = \frac{1}{n}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, istnieje podzbiór $A_n \subset X$ o średnicy mniejszej od $\frac{1}{n}$, nie zawierający się w żadnym elemencie pokrycia.

Niech $U \in \mathcal{U}$. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje punkt $a_n \in A_n$ taki, że $a_n \in X \setminus U$. Z ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wybierzmy podciąg $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ zbieżny do pewnego punktu $a \in X$. Ponieważ zbiór $X \setminus U$ jest domknięty w X, to $a \in X \setminus U$. Wobec tego istnieje zbiór $U' \in \mathcal{U}$ różny od U, zawierający punkt a. Zbiór U', jako otoczenie punktu a zawiera prawie wszystkie punkty podciągu $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$—możemy przyjąć dla prostoty, że wszystkie. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje punkt $a'_{k_n} \in A_{k_n}$ który nie należy do U'. Ponieważ

$$\rho(a'_{k_n}, a) \leq \rho(a'_{k_n}, a_{k_n}) + \rho(a_{k_n}, a) \leq \\ \operatorname{diam} A_{k_n} + \rho(a_{k_n}, a) \leq \frac{1}{k_n} + \rho(a_{k_n}, a) \to 0 \quad \text{gdy } n \to \infty,$$

to ciąg $(a'_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny do a, więc prawie wszystkie jego punkty należą do otoczenia U'—sprzeczność. □

Definicja 10.3. Każda liczba $\lambda > 0$, spełniająca tezę twierdzenia 10.4 nazywana jest *współczynnikiem Lebesgue'a* pokrycia $\mathcal{U}$ przestrzeni X.

Oczywiście współczynnik Lebesgue'a nie jest jednoznacznie wyznaczony przez pokrycie—liczba dodatnia mniejsza od niego też jest współczynnikiem Lebesgue'a tego pokrycia.

Lemat 10.1. *Jeśli przestrzeń metryczna (X, ρ) jest zwarta, to dla każdej liczby $\epsilon > 0$ istnieje skończone pokrycie przestrzeni X kulami o promieniach ϵ.*

Dowód. Przypuśćmy, że teza nie zachodzi, tzn.

(*): istnieje liczba $\epsilon_0 > 0$, dla której nie ma skończonego pokrycia przestrzeni X kulami o promieniach $< \epsilon_0$.

Określimy indukcyjnie ciąg punktów $x_1, x_2, \dots \in X$ taki, że dla dowolnych różnych $m, n \in \mathbb{N}$ będzie spełniona nierówność $\rho(x_m, x_n) \geq \epsilon_0$. Taki ciąg nie ma podciągu zbieżnego, co przeczy zwartości X.

Punkt x_1 wybieramy dowolnie. Załóżmy, że punkty $x_1, \dots, x_k$ zostały określone tak, by $\rho(x_m, x_n) \geq \epsilon_0$ dla różnych $m, n \leq k$. Z warunku (*) wynika, że suma kul $S = K(x_1; \epsilon_0) \cup \dots \cup K(x_k; \epsilon_0)$ nie pokrywa X, więc znajdziemy punkt $x_{k+1} \notin S$. Wtedy $\rho(x_{k+1}, x_n) \geq \epsilon_0$ dla każdego $n \leq k$ i konstrukcja ciągu jest zakończona. □

Lemat 10.2. *Każda przestrzeń metryczna zwarta spełnia* **warunek Borela-Lebesgue'a***: każde pokrycie otwarte przestrzeni zawiera podpokrycie skończone.*

Dowód. Niech $\mathcal{U}$ będzie pokryciem otwartym zwartej przestrzeni metrycznej X. Oznaczmy, dla każdego $n \in \mathbb{N}$, przez $\mathcal{K}_n$ skończone pokrycie przestrzeni X kulami o promieniach $\frac{1}{n}$ (takie pokrycie istnieje na mocy lematu 10.1) i niech $\mathcal{K} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}_n$.

(a): Każdy zbiór otwarty w X jest sumą kul z pokrycia $\mathcal{K}$.

Istotnie, jeśli $V \subset X$ jest otwarty i $x \in V$, to istnieje kula $K(x; \epsilon) \subset V$ (zob. stwierdzenie 2.1). Niech $n \in \mathbb{N}$ będzie tak duże, by $\frac{1}{n} < \frac{\epsilon}{2}$. Ponieważ $\mathcal{K}_n$ jest pokryciem X, to istnieje kula $K \in \mathcal{K}_n$ zawierająca punkt x. Łatwo sprawdzić, że $K \subset K(x; \epsilon)$, a więc $K \subset V$, co dowodzi stwierdzenia (a).

(b): Pokrycie $\mathcal{U}$ zawiera przeliczalne podpokrycie $\mathcal{U}'$ przestrzeni X.

Na podstawie (a) bowiem, rodzina

$$\mathcal{K}_{\mathcal{U}} = \{\, K \in \mathcal{K} : (\exists U \in \mathcal{U})(K \subset U) \,\}$$

jest pokryciem X. Przyporządkujmy każdej kuli $K \in \mathcal{K}_{\mathcal{U}}$ jeden wybrany zbiór $U_K \in \mathcal{U}$, zawierający K. Ponieważ rodzina $\mathcal{K}_{\mathcal{U}} \subset \mathcal{K}$ jest przeliczalna, to rodzina

$$\mathcal{U}' = \{U_K : K \in \mathcal{K}_{\mathcal{U}}\} \subset \mathcal{U}$$

jest też przeliczalna; ponadto $\mathcal{U}'$ jest pokryciem X, gdyż $\mathcal{K}_{\mathcal{U}}$ jest pokryciem.

(c): Przeliczalne pokrycie $\mathcal{U}'$ zawiera skończone podpokrycie przestrzeni X.

Istotnie, niech $\mathcal{U}' = \{U_1, U_2, \dots\}$ i przypuśćmy, że $\mathcal{U}'$ nie zawiera skończonego podpokrycia przestrzeni X. Określimy indukcyjnie ciąg punktów $x_1, x_2, \dots \in X$ oraz ciąg rosnący $1 = k_1 < k_2 < \dots$ liczb naturalnych tak, by dla każdego $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n \in U_{k_n}, \quad \text{oraz} \quad x_{n+1} \notin U_1 \cup \dots \cup U_{k_n}.$$

Taki ciąg można łatwo wybrać: x_1 może być dowolnym punktem z U_1, a gdy x_n jest określony dla $n > 1$ i spełnia warunek $x_n \in U_{k_n} \setminus (U_1 \cup \dots \cup U_{k_{n-1}})$, to ponieważ zbiory $U_1, \dots, U_{k_n}$ nie stanowią pokrycia X, więc wybieramy punkt $x_{n+1} \notin U_1 \cup \dots \cup U_{k_n}$ oraz zbiór $U_{k_{n+1}}$ z pokrycia $\mathcal{U}'$, zawierający x_{n+1}. Oczywiste jest przy tym, że $k_{n+1} > k_n$.

Zauważmy teraz, że ciąg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nie ma podciągu zbieżnego. Gdyby bowiem podciąg $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots$ był zbieżny do jakiegoś punktu $x \in X$, to dla pewnego $k \in \mathbb{N}$ zachodziłoby $x \in U_k$, więc $x_{n_m} \in U_k$ dla dostatecznie dużych n_m; w szczególności, dla tak dużych m, że $x_{n_m} \in U_{k_{n_m}}$ i $k_{n_m} > k$. Ale wtedy

$$x_{n_m} \notin U_1 \cup \dots \cup U_k \cup \dots \cup U_{k_{n_m - 1}},$$

co daje sprzeczność.

Ze stwierdzeń (b) i (c) wynika ostatecznie, że pokrycie $\mathcal{U}$ ma skończone podpokrycie.

□

Lemat 10.3. *Każda przestrzeń metryczna X spełniająca warunek Borela-Lebesgue'a spełnia* **warunek Cantora***: jeśli $F_1, F_2, \dots$ są niepustymi i domkniętymi podzbiorami w X, tworzącymi ciąg zstępujący $F_1 \supset F_2 \supset \dots$, to $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i \neq \emptyset$.*

Dowód. Przypuśćmy, że $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i = \emptyset$. Wtedy zbiory $X \setminus F_i$ są otwarte dla $i = 1, 2, \dots$ i stanowią pokrycie przestrzeni X, bo

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} (X \setminus F_i) = X \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i = X.$$

Z warunku Borela-Lebesgue'a wynika istnienie liczby naturalnej n takiej, że $\bigcup_{i=1}^{n}(X \setminus F_i) = X$. Stąd $F_n = \bigcap_{i=1}^{n} F_i = \emptyset$, co jest sprzeczne z niepustością zbioru F_n. □

LEMAT 10.4. *Każda przestrzeń metryczna (X, ρ), spełniająca warunek Cantora, jest zwarta.*

DOWÓD. Przypuśćmy, że tak nie jest, tzn. przestrzeń X zawiera ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bez podciągu zbieżnego. Niech

$$F_i = \{x_k : k \geq i\}.$$

Możemy założyć, że wyrazy x_n są wzajemnie różne. Zbiory F_i są niepuste. Są też domknięte. Istotnie, gdyby $x \in \operatorname{cl} F_i \setminus F_i$, to ze wzoru $\operatorname{cl} F_i = F_i \cup F_i^d$ (zob. uwaga 3.2) wynika, że $x \in F_i^d$, więc x jest granicą ciągu wzajemnie różnych punktów należących do F_i. Jest jasne, że z takiego ciągu można wybrać podciąg, który jest zarazem podciągiem ciagu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, no i będzie on zbieżny (do x) wbrew przypuszczeniu. Zatem $x \in F_i$, co pokazuje domkniętość zbioru F_i.

Z warunku Cantora stwierdzamy, że istnieje punkt $p \in \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$. Oznacza to, że dla każdego wskaźnika i istnieje liczba $k_i \geq i$ taka, że $p = x_{k_i}$. Można przyjąć, że $k_1 < k_2 < \ldots$ i wtedy powstaje podciąg $(x_{k_i})_{i\in\mathbb{N}}$ zbieżny do p, co jest znowu sprzeczne z przypuszczeniem. □

Powyższe lematy można zebrać w postaci jednego ważnego twierdzenia, charakteryzującego zwartość przestrzeni metrycznych poprzez warunek Borela-Lebesgue'a lub Cantora.

TWIERDZENIE 10.5. *Następujące warunki są równoważne:*

(1) *Przestrzeń metryczna X jest zwarta.*
(2) *Przestrzeń metryczna X spełnia warunek Borela-Lebesgue'a.*
(3) *Przestrzeń metryczna X spełnia warunek Cantora.*

Zauważmy, że w warunkach Borela-Lebesgue'a i Cantora nie występuje specyficzne dla przestrzeni metrycznych pojęcie ciągu i zbieżności, natomiast są te warunki niezmiennikami topologicznymi. Zatem można by je przyjąć za definicje zwartości w ogólnych przestrzeniach topologicznych. Z praktycznych powodów, aby uzyskać podobne jak w przypadku przestrzeni zwartych metrycznych własności, zakłada się wtedy zwykle dodatkowo, że rozważane przestrzenie są Hausdorffa i wybiera się za definicję warunek pokryciowy Borela-Lebesgue'a.

DEFINICJA 10.4. Przestrzeń topologiczna Hausdorffa jest *zwarta*, gdy spełnia warunek Borela-Lebesgue'a: każde pokrycie otwarte tej przestrzeni zawiera podpokrycie skończone.

Intuicja zwartości pokryciowej mówi, że istnieją dowolnie “małe” skończone pokrycia otwarte przestrzeni.

Ćwiczenia

(1) Uzasadnić dokładnie prawdziwość stwierdzeń (1)–(3) w przykładzie 10.1.
(2) Zbadać zwartość domknięć kul na płaszczyźnie z metryką "rzeka".
(3) Zbadać zwartość przestrzeni $C(I,I)$ oraz $B(I,I)$, gdzie $I=[0,1]$ z metryką zbieżności jednostajnej (zob. przykład 1.10).
(4) Sprawdzić zwartość kwadratu $[0,1]\times[0,1]$ z metrykami $\rho_c, \rho_r, \rho_m, \rho_{01}$.
(5) Pokazać, że przestrzeń metryczna X jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy każda funkcja ciągła $f : X \to (\mathbb{R}, \rho_e)$ jest ograniczona.
(6) Pokazać, że jeśli niepusty zbiór $A \subset (X, \rho_e)$ jest zwarty, to dla każdego $x \in X$ istnieje punkt $a_0 \in A$ taki, że $d_A(x) = \rho(a_0, x)$, gdzie $d_A(x) = \inf\{\rho(a,x) : a \in A\}$ (czyli odległość punktu od zbioru A jest realizowana).
(7) Udowodnić, że każda zwarta podprzestrzeń przestrzeni X liczb niewymiernych z metryką euklidesową jest brzegowa w X.
(8) Dla których podanych niżej przestrzeni X i Y istnieje przekształcenie ciągłe (homeomorfizm) z X na Y?
   (a) $X, Y \in \{\, ([a,b]\times[c,d], \rho_e), ([a,b)\times[c,d), \rho_e), (\mathbb{R}^2, \rho_c)\,\}$
   (b) $X, Y \in \left\{\, [a,b], [a,b), (a,b), \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}, \mathrm{cl}\{\, \frac{1}{n} : n = 1, 2, \dots \}, S^1 \,\right\}$ z metrykami euklidesowymi.
   (c) $X, Y \in \{\, [a,b], \mathrm{cl}\,\{\, (x, \sin x) \in \mathbb{R}^2\ 0 < x \leq 1 \,\}\,\}$ z metrykami euklidesowymi.
   (d) $X, Y \in \{\, [a,b], (F, \rho_e), (F, \rho_c)\,\}$, gdzie F = suma odcinków o końcach $(0,0)$ i $(\cos\alpha, \sin\alpha)$, $\alpha = 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$

   Czy $(\mathbb{R}^2, \rho_e)$ jest homeomorficzna z $(R^2 \setminus \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}, \rho_e)$?

   Podać przekształcenia lub uzasadnić ich brak w oparciu o poznane własności zachowywane przez przekształcenia ciągłe, jak zwartość, spójność, itp.
(9) *Uzwarceniem przestrzeni metrycznej* X nazywamy przestrzeń metryczną zwartą $\bar{X}$ zawierającą zbiór gęsty X' homeomorficzny z X. Zbiór $\bar{X} \setminus X'$ nazywamy *narostem* uzwarcenia.

   Znaleźć uzwarcenie prostej o naroście będącym
   (a) zbiorem 1-punktowym;
   (b) zbiorem 2-punktowym;
   (c) odcinkiem domkniętym;
   (d) dwoma rozłącznymi odcinkami domkniętymi na płaszczyźnie euklidesowej;
   (e) okręgiem.

ROZDZIAŁ 11

Przestrzenie zupełne

DEFINICJA 11.1. Ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ w przestrzeni metrycznej (X,ρ) nazywa się *ciągiem Cauchy'ego* w X, gdy spełniony jest

warunek Cauchy'ego: dla każdej liczby $\epsilon > 0$ istnieje liczba naturalna k taka, że $\rho(x_n, x_m) < \epsilon$ dla wszystkich $m, n \geq k$.

Przestrzeń metryczna (X,ρ) jest *zupełna*, gdy każdy ciąg Cauchy'ego w X jest zbieżny w X. Metryka w przestrzeni zupełnej nazywana jest metryką *zupełną*.

Pojęcie ciągu Cauchy'ego jest dobrze znane z analizy matematycznej. Podstawowe własności ciągów Cauchy'ego w ogólnych przestrzeniach metrycznych są takie same jak na prostej euklidesowej. W szczególności wymieńmy trzy stwierdzenia.

STWIERDZENIE 11.1. *Każdy ciąg zbieżny jest Cauchy'ego.*

STWIERDZENIE 11.2. *Każdy ciąg Cauchy'ego jest ograniczony.*

STWIERDZENIE 11.3. *Jeśli ciąg Cauchy'ego zawiera podciąg zbieżny, to jest on zbieżny do tego samego punktu, co ten podciąg.*

DOWÓD. Załóżmy, że ciąg Cauchy'ego $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ w przestrzeni metrycznej (X,ρ) ma podciąg $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ zbieżny do punktu $x \in X$. Przypomnijmy, że wskaźniki podciągu tworzą ciąg rosnący $k_1 < k_2 < \ldots$, stąd $n \leq k_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Niech $\epsilon > 0$. Istnieje wskaźnik m taki, że dla $i, j \geq m$

$$\rho(x, x_{k_i}) < \frac{\epsilon}{2},$$
$$\rho(x_i, x_j) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Wtedy

$$\rho(x_{k_i}, x_{k_j}) < \frac{\epsilon}{2}$$

i

$$\rho(x, x_i) \leq \rho(x, x_{k_i}) + \rho(x_{k_i}, x_i) < \epsilon,$$

zatem ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny do x. □

Ze stwierdzenia 11.3 otrzymujemy

Wniosek 11.1. *Każda przestrzeń metryczna zwarta jest zupełna.*

Spośród przestrzeni zupełnych niezwartych najważniejszymi przykładami są przestrzenie euklidesowe.

Przykład 11.1. Przestrzenie euklidesowe są zupełne.

Zupełność prostej euklidesowej, to jeden z podstawowych faktów, o których jest mowa na pierwszych wykładach analizy. Wyrażony jest on zwykle w postaci twierdzenia, że ciąg liczbowy spełniający warunek Cauchy'ego jest zbieżny. Zupełność wyżej wymiarowych przestrzeni euklidesowych można uzasadnić, korzystając ze stwierdzenia 11.2, twierdzenia 10.2 i wniosku 11.1: ciąg Cauchy'ego jest ograniczony, więc zbiór jego punktów zawiera się w pewnej kuli, której domknięcie w przestrzeni euklidesowej jest podprzestrzenią zwartą, a więc ciąg jest w niej zbieżny.

Można też oprzeć się na następującym fakcie ogólnym.

Stwierdzenie 11.4. *Iloczyn kartezjański przestrzeni metrycznych jest zupełny wtedy i tylko wtedy, gdy każda z tych przestrzeni jest zupełna (w przypadku nieskończenie wielu przestrzeni w ich iloczynie rozważamy którąkolwiek z metryk opisanych w rozdziale 6 wzorami 6.2, 6.3, 6.4).*

Dowód. Zasadniczą rolę w dowodzie odgrywa postać odległości w iloczynie. Niech $(X,\rho) = (X_1,\rho_1) \times (X_2,\rho_2) \times \dots$. Przypomnijmy, że jeśli osi jest skończenie wiele, np. n, to zachodzi

$$\rho_i(x_i,y_i) \leq \rho((x_1,x_2,\dots,x_n),(y_1,y_2,\dots,y_n)),$$

a jeśli nieskończenie wiele, to, w zależności od wybranej metryki w iloczynie, mamy

$$\rho_i(x_i,y_i) \leq \rho((x_1,x_2,\dots),(y_1,y_2,\dots))$$

lub

$$\rho_i(x_i,y_i) \leq 2^i\rho((x_1,x_2,\dots),(y_1,y_2,\dots))$$

lub

$$\min(1,\rho_i(x_i,y_i)) \leq 2^i\rho((x_1,x_2,\dots),(y_1,y_2,\dots)).$$

Załóżmy, że wszystkie osie są zupełne i rozważmy ciąg Cauchy'ego w iloczynie X. Z powyższych nierówności wynika w każdym przypadku, że i-te współrzędne punktów tego ciągu tworzą ciąg Cauchy'ego na osi X_i dla każdego $i \in \mathbb{N}$, więc są zbieżne w X_i. Z twierdzenia 6.1 o zbieżności po współrzędnych wnioskujemy, że nasz ciąg w iloczynie jest zbieżny.

Na odwrót, załóżmy, że iloczyn X jest zupełny i dany jest ciąg Cauchy'ego $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ na osi X_i. Dla każdego $j \neq i$ wybierzmy punkt $p_j \in X_j$. Punkty iloczynu X postaci

$$\mathbf{p}_n = (p_1, \ldots, x_n, p_{i+1}, \ldots),$$

tzn. punkty, których i-ta współrzędna jest równa x_n, a j-ta równa się p_j dla każdego n i $j \neq i$, tworzą ciąg Cauchy'ego w X, bo

$$\rho(\mathbf{p}_m, \mathbf{p}_n) = \rho_i(x_m, x_n),$$

$$\rho(\mathbf{p}_m, \mathbf{p}_n) = \frac{1}{2^i}\rho_i(x_m, x_n)$$

lub

$$\rho(\mathbf{p}_m, \mathbf{p}_n) = \frac{1}{2^i}\min(1, \rho_i(x_m, x_n)),$$

w zależności od metryki w X. Wobec tego ciąg $(\mathbf{p}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny w X i z twierdzenia 6.1 wnosimy, że ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny w X_i. $\square$

STWIERDZENIE 11.5. *Podprzestrzeń przestrzeni zupełnej X jest zupełna wtedy i tylko wtedy, gdy jest podzbiorem domkniętym w X.*

Posługując się powyższym stwierdzeniem można często rozpoznać, czy dana przestrzeń metryczna jest zupełna. Na przykład wszystkie podzbiory domknięte przestrzeni euklidesowych są zupełne, a przedział otwarty, zbiór liczb niewymiernych (wymiernych) na prostej euklidesowej nie są zupełne.

UWAGA 11.1. Zupełność jest niezmiennikiem izometrii, tzn. przestrzeń metryczna izometryczna z przestrzenią zupełną jest zupełna.

Jak wskazuje przykład prostej euklidesowej i jej przedziału otwartego, zupełność przestrzeni nie jest własnością topologiczną, tzn. nie jest niezmiennikiem homeomorfizmów. Pomimo tego, zachodzi następujący fakt, będący konsekwencją stwierdzenia 5.2 i uwagi 11.1.

STWIERDZENIE 11.6. *Jeśli przestrzeń metryczna (X, ρ_X) jest homeomorficzna z przestrzenią zupełną, to w X istnieje metryka zupełna równoważna z metryką ρ_X* (określona w dowodzie stwierdzenia 5.2).

DEFINICJA 11.2. Przestrzeń topologiczna X jest *metryzowalna w sposób zupełny*, gdy w X istnieje metryka zupełna, generująca topologię przestrzeni X.

Można więc powiedzieć, że przedział otwarty prostej jest metryzowalny w sposób zupełny, ale nie jest na razie jasne, czy zbiór liczb niewymiernych lub zbiór liczb wymiernych są metryzowalne w sposób zupełny.

Przykład 11.2.

Przestrzeń $B(X, Y)$ funkcji ograniczonych ze zbioru X w przestrzeń zupełną (Y, ρ) z metryką ρ_{sup} (zob. przykład 1.10) jest zupełna.

Rzeczywiście, niech $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem Cauchy'ego w $B(X, Y)$. Dla każdego $x \in X$ ciąg wartości $f_n(x)$ jest Cauchy'ego w Y, gdyż $\rho(f_n(x), f_m(x)) \leq \rho_{sup}(f_n, f_m)$. Oznaczmy

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x).$$

Otrzymana w ten sposób funkcja $f : X \to Y$ jest ograniczona (sprawdź!) i jest granicą funkcji f_n w przestrzeni $B(X, Y)$: dla $\epsilon > 0$ istnieje $k \in \mathbb{N}$ takie, że $\rho(f_m(x), f_n(x)) < \frac{\epsilon}{2}$ dla każdego $x \in X$ i $m, n \geq k$. Dla każdego x przyjmijmy $m(x) \geq k$ tak duże, by $\rho(f(x), f_{m(x)}(x)) < \frac{\epsilon}{2}$. Wtedy dla każdego x i $n \geq k$

$$\rho(f(x), f_n(x)) \leq \rho(f(x), f_{m(x)}(x)) + \rho(f_{m(x)}(x), f_n(x)) < \epsilon,$$

więc

$$\rho_{sup}(f, f_n) \leq \epsilon.$$

Przykład 11.3.

Podprzestrzeń $C(X, Y) \subset B(X, Y)$ złożona z przekształceń ciągłych ograniczonych przestrzeni metrycznej X w przestrzeń zupełną Y jest zupełna.

Jest to konsekwencja zupełności $B(X, Y)$ oraz stwierdzeń 4.5 i 11.5.

Ważnym pojęciem jest uzupełnienie przestrzeni metrycznej.

Definicja 11.3. Przestrzeń zupełna Y jest *uzupełnieniem* przestrzeni metrycznej X, gdy X jest izometryczna z gęstą podprzestrzenią przestrzeni Y.

Oto pewne przykłady.

Przykład 11.4.

(1) Jeśli X jest już zupełna, to jedynymi jej uzupełnieniami są przestrzenie izometryczne z X.
(2) Uzupełnieniem zbioru liczb wymiernych, jak również zbioru liczb niewymiernych jest prosta euklidesowa.

Klasyczna w arytmetyce konstrukcja liczb rzeczywistych z liczb wymiernych polega właśnie na uzupełnianiu liczb wymiernych, tzn. konstruowaniu przestrzeni zupełnej, w której liczby wymierne są gęste.

Okazuje się, że każdą przestrzeń metryczną można uzupełnić.

Twierdzenie 11.1. *Każda przestrzeń metryczna ma uzupełnienie.*

Dowód. Wygodnym "światem", w którym można uzupełnić daną przestrzeń (X, ρ) jest przestrzeń funkcyjna $C(X, \mathbb{R})$ z metryką zbieżności jednostajnej

$$\rho_{sup}(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|,$$

która jest zupełna (przykład 11.3).

Aby określić izometrię między przestrzenią X, a podprzestrzenią przestrzeni $C(X, \mathbb{R})$, ustalmy najpierw punkt $a \in X$ i rozpatrzmy dla każdego $x \in X$ przekształcenie

$$f_x : X \to \mathbb{R} \quad f_x(z) = \rho(z, x) - \rho(z, a),$$

które jest ciągłe (bo metryka ρ jest ciągła) i ograniczone (bo $|f_x(z)| = |\rho(z, x) - \rho(z, a)| \leq \rho(a, x)$ dla każdego $z \in X$).

Szukaną izometrią jest przekształcenie

$$T : X \to T(X) \subset C(X, \mathbb{R}) \quad T(x) = f_x.$$

Sprawdzić trzeba równość

$$\rho_{sup}(f_x, f_y) = \rho(x, y)$$

dla dowolnych $x, y \in X$, co pozostawiam jako ćwiczenie.

Domknięcie $Y = \operatorname{cl} T(X)$ w przestrzeni $C(X, \mathbb{R})$ jest podprzestrzenią zupełną, w której zbiór $T(X)$ jest gęsty. To znaczy, że Y jest uzupełnieniem przestrzeni X. □

Następujące twierdzenie jest odpowiednikiem lematu 10.3.

Twierdzenie 11.2. *Jeśli przestrzeń metryczna (X, ρ) jest zupełna i podzbiory $F_1, F_2, \ldots$ są niepuste, domknięte w X i takie, że*

$$F_1 \supset F_2 \supset \ldots \quad i \quad \lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} F_n = 0,$$

to przekrój $\cap_{n=1}^{\infty} F_n$ jest jednopunktowy.

Dowód. Pokażemy najpierw, że $\cap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$. Wybierzmy punkt x_n ze zbioru F_n, dla każdego n. Ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest Cauchy'ego. Rzeczywiście, niech $\epsilon > 0$ będzie dowolną liczbą, a k będzie takie, że $\operatorname{diam} F_n < \epsilon$ dla każdego $n \geq k$. Jeśli $m, n \geq k$, to przyjmując, że np. $m \geq n$, mamy

$$x_m \in F_m \subset F_n,$$

więc

$$\rho(x_m, x_n) \leq \operatorname{diam} F_n < \epsilon \quad \text{dla } m, n \geq k.$$

Niech x oznacza granicę ciagu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $k \in \mathbb{N}$. Ponieważ dla każdego $n \geq k$ zbiór F_n zawiera się w F_k, więc $x_n \in F_k$. Z domkniętości zbioru F_k wynika, że granica x ciągu punktów x_n, $n \geq k$, tego zbioru należy do F_k. Zatem $x \in \cap_{n=1}^{\infty} F_n$.

Gdyby w zbiorze $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ był jeszcze inny punkt y, to

$$0 < \rho(x,y) \leq \operatorname{diam} F_n \quad \text{dla każdego } n,$$

co jest niemożliwe, bo $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} F_n = 0$. □

Jednym z ważniejszych twierdzeń, mającym liczne zastosowania w matematyce, jest twierdzenie Baire'a.

Twierdzenie 11.3. (Baire'a) *W przestrzeni metryzowalnej w sposób zupełny suma przeliczalnej ilości zbiorów nigdziegęstych jest zbiorem brzegowym.*

Dowód. Załóżmy, że metryka ρ w X jest zupełna i wyznacza topologię w X. Niech $F_1, F_2, \ldots$ będą podzbiorami nigdziegęstymi w X. Aby stwierdzić brzegowość ich sumy, sprawdzimy, że nie zawiera ona żadnego niepustego zbioru otwartego $U \subset X$.

Istnieje

$$x_1 \in U \setminus \operatorname{cl} F_1,$$

bo F_1 jest nigdziegęsty, i istnieje kula

$$K(x_1; r_1) \subset \operatorname{cl} K(x_1; r_1) \subset U \setminus \operatorname{cl} F_1$$

o promieniu $r_1 < 1$, bo $U \setminus \operatorname{cl} F_1$ jest otwarty.

Podobnie istnieją

$$x_2 \in K(x_1; r_1) \setminus \operatorname{cl} F_2$$

oraz kula

$$K(x_2; r_2) \subset \operatorname{cl} K(x_2; r_2) \subset K(x_1; r_1) \setminus \operatorname{cl} F_2,$$

o promieniu $r_2 < \frac{1}{2}$.

Kontynuując indukcyjnie, znajdziemy dla każdej liczby naturalnej n punkt x_n i kulę $K(x_n; r_n)$ takie, że

$$x_{n+1} \in K(x_n; r_n) \setminus \operatorname{cl} F_{n+1},$$

$$K(x_{n+1}; r_{n+1}) \subset \operatorname{cl} K(x_{n+1}; r_{n+1}) \subset K(x_n; r_n) \setminus \operatorname{cl} F_{n+1}$$

oraz

$$r_n < \frac{1}{n}.$$

Widać, że domknięcia wybieranych kul tworzą ciąg zstępujący

$$U \supset \operatorname{cl} K(x_1; r_1) \supset \operatorname{cl} K(x_2; r_2) \supset \ldots,$$

przy czym

$$\operatorname{diam} \operatorname{cl} K(x_n; r_n) \leq \frac{1}{2n},$$

skąd
$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} \operatorname{cl} K(x_n; r_n) = 0.$$
Z twierdzenia 11.2 wynika, że
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \operatorname{cl} K(x_n; r_n) \neq \emptyset.$$
Ponadto
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \operatorname{cl} K(x_n; r_n) \subset U \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n,$$
więc zbiór U nie zawiera się w sumie $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$.

□

Twierdzenie Baire'a formułuje się często w równoważnej (dualnej) postaci:

TWIERDZENIE 11.4. *W przestrzeni metryzowalnej w sposób zupełny przekrój przeliczalnej ilości gęstych zbiorów otwartych jest zbiorem gęstym.*

Twierdzenie Baire'a daje negatywną odpowiedź na pytanie o metryzowalność zupełną przestrzeni liczb wymiernych ze zwykłą metryką euklidesową.

PRZYKŁAD 11.5. Przestrzeń liczb wymiernych $(\mathbb{Q}, \rho_e)$ nie jest metryzowalna w sposób zupełny.

Gdyby była, to
$$\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \dots\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{q_n\},$$
gdzie zbiory jednopunktowe $\{q_n\}$ są domknięte i brzegowe w $\mathbb{Q}$, a więc na mocy twierdzenia Baire'a 11.3, ich suma $\mathbb{Q}$ jest brzegowa w $\mathbb{Q}$, co jest niemożliwe.

Twierdzenia Baire'a w wersji 11.3 lub 11.4 używa się często w dowodach egzystencjalnych, tzn. w niekonstruktywnych dowodach istnienia pewnych obiektów matematycznych. Jeśli mianowicie uda się potraktować zbiór takich obiektów jako podzbiór pewnej przestrzeni zupełnej, będący przekrojem przeliczalnej ilości jej podzbiorów otwartych i gęstych, to, jako podzbiór gęsty, jest on w szczególności niepusty (czyli takie obiekty istnieją i jest ich "większość").

W taki sposób, opierając się na zupełności przestrzeni funkcyjnych $B(X,Y)$ lub $C(X,Y)$) (zob. przykłady 11.2 i 11.3), można stwierdzić np. istnienie funkcji nieróżniczkowalnej w żadnym punkcie prostej; co więcej większość funkcji ciągłych rzeczywistych jest tego typu.

Podobnie w przestrzeni wszystkich podzbiorów spójnych i zwartych płaszczyzny euklidesowej, zupełnej w pewnej naturalnej metryce, zbiory bez łuków stanowią gęstą "większość".

Zazwyczaj w "naturze" większość stanowią obiekty o skomplikowanej strukturze, które trudno jest skonstruować. Twierdzenie Baire'a potrafi je ujawnić.

Przykład 11.5 może też ilustrować metodę (raczej sztuczną) dowodu istnienia liczb niewymiernych, albo nieprzeliczalności zbioru liczb rzeczywistych, jeśli przyjmiemy za znany skądinąd fakt zupełności prostej euklidesowej.

Twierdzenie Baire'a nie daje odpowiedzi na pytanie o zupełną metryzowalność zbioru liczb niewymiernych. Rozstrzyga to następne twierdzenie.

TWIERDZENIE 11.5. *Podprzestrzeń przestrzeni zupełnej X, będąca zbiorem typu G_δ w X, jest metryzowalna w sposób zupełny.*

DOWÓD. Niech $Y = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, gdzie G_n jest otwartym podzbiorem w X dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Udowodnimy, że podprzestrzeń Y jest homeomorficzna z przestrzenią zupełną (zob. stwierdzenie 11.6).

Dla dowolnego punktu $y \in Y$ rozważmy jego odległości $d_{F_n}(y)$ od zbiorów domkniętych $F_n = X \setminus G_n$, $n \in \mathbb{N}$. Ponieważ przekształcenia $d_{F_n} : Y \to \mathbb{R}$ są ciągłe (zob. przykład 4.1), więc ciągłe są przekształcenia

$$f_n : Y \to \mathbb{R} \quad f_n(y) = \frac{1}{d_{F_n}(y)}$$

(zauważmy, że f_n jest dobrze określone, bo $d_{F_n}(y) \neq 0$) oraz przekształcenie

$$f : Y \to \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \quad f(y) = (f_1(y), f_2(y), \dots)$$

(zob. wniosek 6.1).

Okazuje się, że wykres

$$W = \{(y, f(y)) \in Y \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots : y \in Y\}$$

przekształcenia f, jest podzbiorem domkniętym iloczynu kartezjańskiego $Z = X \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots$. Rzeczywiście, załóżmy, że ciąg punktów $(y_k, f(y_k)) \in W$ jest zbieżny do punktu $(y, x_1, x_2, \dots) \in Z$, o którym trzeba udowodnić, że należy również do W. Z twierdzenia 6.1 o zbieżności po współrzędnych mamy

$$\lim_{k\to\infty} y_k = y, \quad \lim_{k\to\infty} \frac{1}{d_{F_n}(y_k)} = x_n$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Z ciągłości d_{F_n} i zbieżności ułamków $\frac{1}{d_{F_n}(y_k)}$ do (skończonej) liczby x_n, gdy $k \to \infty$, wynika, że

$$\lim_{k\to\infty} d_{F_n}(y_k) = d_{F_n}(y) \neq 0.$$

Korzystając z równoważności (4.1) z przykładu 4.1 i domkniętości zbiorów F_n, stwierdzamy, że $y \notin F_n$, czyli $y \in G_n$ dla każdego n, co oznacza, że $y \in Y$. Ponadto

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{d_{F_n}(y_k)} = \frac{1}{d_{F_n}(y)} = x_n.$$

Wynika stąd, że

$$(y, x_1, x_2, \dots) = (y, \frac{1}{d_{F_1}(y)}, \frac{1}{d_{F_2}(y)}, \dots) = (y, f(y)) \in W.$$

Przestrzeń Z jest zupełna, jako iloczyn kartezjański przestrzeni zupełnych (stwierdzenie 11.4), a jej podzbiór domknięty W jest podprzestrzenią zupełną (stwierdzenie 11.5), która—jako wykres przekształcenia ciągłego f— jest homeomorficzna z dziedziną Y (stwierdzenie 6.1). □

Ponieważ zbiór liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ jest F_σ (suma przeliczalnej ilości zbiorów jednopunktowych), to zbiór liczb niewymiernych, jako dopełnienie $\mathbb{Q}$, jest G_δ na prostej euklidesowej. Stąd otrzymujemy niebanalny

Wniosek 11.2. *Zbiór liczb niewymiernych z metryką euklidesową jest przestrzenią metryzowalną w sposób zupełny.*

Uwaga 11.2. Zachodzi interesujące twierdzenie odwrotne do twierdzenia 11.5:

> Jeśli przestrzeń metryzowalna w sposób zupełny Y jest podprzestrzenią przestrzeni metrycznej X, to Y jest typu G_δ w X (zob. np. [**O**])

Dlatego mówi się o przestrzeniach zupełnych, że są *absolutnymi zbiorami* G_δ.

Przypomnijmy (zob. ćwiczenia 8 i 9 z rozdziału 8) że punkt x przestrzeni topologicznej X nazywa się *punktem stałym*, przekształcenia $f : X \to X$, gdy $f(x) = x$. Twierdzenia o istnieniu i położeniu punktów stałych odgrywają znaczną rolę w całej matematyce. Jednym z nich, o prostym dowodzie i licznych zastosowaniach (np. przy dowodzeniu istnienia rozwiązań pewnych równań różniczkowych) jest następujące twierdzenie Banacha o punkcie stałym dla przekształceń ściśle zwężających.

Twierdzenie 11.6. (Banacha) *Jeśli (X, ρ) jest przestrzenią zupełną, a przekształcenie $f : X \to X$ jest ściśle zwężające, to f ma dokładnie jeden punkt stały.*

Dowód pokaże zadziwiające zjawisko: startując od dowolnego punktu $x_0 \in X$ i rozpatrując jego kolejne obrazy przez f (czyli *orbitę* punktu x_0 tworzoną przez f) dążymy w granicy do tego jedynego punktu stałego. Mówimy, że jest on *punktem przyciągającym* przy przekształceniu f.

Dowód. Ponieważ f jest ściśle zwężające, więc istnieje liczba dodatnia $c < 1$ taka, że dla wszystkich $x, y \in X$ zachodzi nierówność

$$\rho(f(x), f(y)) \leq c\rho(x, y).$$

Pokażemy najpierw, że f ma punkt stały. Niech

$$x_0 \in X \quad \text{i} \quad x_n = f(x_{n-1})$$

dla $n \in \mathbb{N}$.

Jeśli $x_0 = x_1$, to x_0 jest punktem stałym przekształcenia f, więc załóżmy, że $x_0 \neq x_1$. Sprawdzimy, że ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest Cauchy'ego. Niech $\epsilon > 0$ i $m > n$. Szacujemy odległość

$$\begin{gathered}\rho(x_m, x_n) = \rho(f(x_{m-1}), f(x_{n-1})) \leq c\rho(x_{m-1}, x_{n-1}) \leq \dots \\ c^n\rho(x_{m-n}, x_0) \leq c^n\left(\rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \cdots + \rho(x_{m-n-1}, x_{m-n})\right) \leq \\ c^n\left(\rho(x_0, x_1) + c\rho(x_0, x_1) + \cdots + c^{m-n-1}\rho(x_0, x_1)\right) = \\ c^n\rho(x_0, x_1)\left(1 + c + \cdots + c^{m-n-1}\right) \leq \rho(x_0, x_1)\frac{c^n}{1-c} < \epsilon,\end{gathered}$$

gdy tylko n jest tak duże, by liczba c^n była mniejsza od liczby $\frac{\epsilon(1-c)}{\rho(x_0,x_1)}$, zależnej wyłacznie od x_0 i f. Taki wybór n jest oczywiście możliwy, bo ciąg c^n dąży do 0, gdy $n \to \infty$.

Ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest więc zbieżny w przestrzeni zupełnej X. Oznaczmy jego granicę przez p. Punkt p jest właśnie szukanym punktem stałym przekształcenia f, bo

$$f(p) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = p.$$

Pozostaje uzasadnić jedyność punktu stałego. Załóżmy więc, że oprócz p istnieje jeszcze inny punkt stały p' przekształcenia f. Wtedy otrzymujemy następującą sprzeczność:

$$\rho(p, p') = \rho(f(p), f(p')) \leq c\rho(p, p') < \rho(p, p').$$

□

Ćwiczenia

(1) Sprawdzić prawdziwość stwierdzeń 11.1 i 11.2.
(2) Udowodnić stwierdzenie 11.5.
(3) Udowodnić uwagę 11.1.
(4) Udowodnić stwierdzenie 11.6.
(5) Sprawdzić równość

$$\rho_{sup}(f_x, f_y) = \rho(x, y)$$

dla dowolnych $x, y \in X$ z dowodu twierdzenia 11.1.
(6) Uzasadnić dualne sformułowanie twierdzenia Baire'a 11.4.
(7) Zbadać zupełność płaszczyzny z metrykami ρ_m, ρ_s, "rzeka" i "centrum".
(8) Kiedy przestrzeń dyskretna jest zupełna?
(9) Sprawdzić, że jeśli $f : X \to Y$ jest przekształceniem Lipschitza i ciąg $(x_n) \subset X$ jest Cauchy'ego, to $(f(x_n))$ jest ciągiem Cauchy'ego w Y.
(10) Niech $X = \left\{\frac{1}{n} : n = 1, 2, \dots\right\}$ z metryką euklidesową, a $f : X \to \mathbb{N}$ będzie określone wzorem $f(\frac{1}{n}) = n$. Sprawdzić, czy f jest homeomorfizmem i czy f przeprowadza ciągi Cauchy'ego w X na ciągi Cauchy'ego w $(\mathbb{N}, \rho_e)$. Czy przestrzenie X i $\mathbb{N}$ są zupełne?
(11) Wywnioskować bezpośrednio z twierdzenia Baire'a, że zbiór liczb niewymiernych nie jest zbiorem typu F_σ , a zbiór liczb wymiernych nie jest typu G_δ na prostej euklidesowej.
(12) Podać przykład na istotność założenia, że średnice zbiorów domkniętych dążą do 0 w twierdzeniu Cantora 11.2. Udowodnić twierdzenie odwrotne do twierdzenia Cantora.

ROZDZIAŁ 12

Przestrzenie ośrodkowe

Definicja 12.1. Przestrzeń topologiczna nazywa się *ośrodkowa*, gdy zawiera podzbiór przeliczalny i gęsty zwany *ośrodkiem*.

Przykład 12.1. Przestrzenie euklidesowe są ośrodkowe. Ośrodkiem jest w nich, np. zbiór wszystkich punktów o współrzędnych wymiernych.

Przykład 12.2. Ze znanego z kursu analizy twierdzenia Weierstrassa o aproksymacji funkcji ciągłych prze wielomiany wynika, że wielomiany o współczynnikach wymiernych tworzą ośrodek w przestrzeni funkcyjnej $C(I, \mathbb{R})$.

Następujące stwierdzenie przydaje się często do uzasadnienia nieośrodkowości przestrzeni, w której potrafimy wskazać nieprzeliczalnie wiele rozłącznych podzbiorów otwartych.

Stwierdzenie 12.1. *W przestrzeni topologicznej ośrodkowej nie istnieje nieprzeliczalnie wiele wzajemnie rozłącznych niepustych podzbiorów otwartych.*

Dowód. Gdyby taka rodzina istniała, to każdy z jej zbiorów zawierałby punkt z gęstego ośrodka, co jest niemożliwe wobec jego przeliczalności. □

Stwierdzenie 12.2. *Jeśli przestrzeń topologiczna X jest ośrodkowa i f jest przekształceniem ciągłym X na przestrzeń topologiczną Y, to Y jest też ośrodkowa.*

Dowód. Niech D będzie ośrodkiem w X. Zbiór $f(D)$ jest wtedy przeliczalny, a ponieważ z ciągłości f wynika

$$Y = f(X) = f(\operatorname{cl} D) \subset \operatorname{cl} f(D),$$

więc $f(D)$ jest również gęsty w Y. □

Szczególne znaczenie ma własność ośrodkowości dla przestrzeni metrycznych.

Twierdzenie 12.1. *Podprzestrzeń przestrzeni metrycznej ośrodkowej jest ośrodkowa.*

Dowód. Niech (X, ρ) będzie przestrzenią ośrodkową z ośrodkiem $D = \{d_1, d_2, \dots\}$, a Y jej podprzestrzenią. Rozważmy przeliczalną rodzinę kul

$$\mathcal{K} = \{K(d_i; \frac{1}{n}) : i, n = 1, 2, \dots\}.$$

Ośrodek E w Y definiujemy następująco: rozpatrujemy wszystkie kule z $\mathcal{K}$, które mają niepusty przekrój z Y i z tego przekroju wybieramy punkt; zbiór E składa się z tak wybranych punktów. Aby udowodnić, że E jest gęsty w Y, pokażemy, że dla każdej kuli $K(y; \epsilon)$ przekrój $K(y; \epsilon) \cap E$ jest niepusty. Niech n będzie takie, że $\frac{2}{n} < \epsilon$. Ponieważ D jest gęsty w X, więc istnieje punkt d_i taki, że $\rho(y, d_i) < \frac{1}{n}$, co oznacza, że $y \in K(d_i; \frac{1}{n})$, zatem przekrój $K(d_i; \frac{1}{n}) \cap Y$ jest niepusty. Z tego przekroju został więc wybrany pewien punkt $e \in E$. Zachodzi oczywiście nierówność

$$\rho(y, e) \leq \rho(y, d_i) + \rho(d_i, e) \leq \frac{2}{n} < \epsilon,$$

z której wnioskujemy, że $e \in K(y; \epsilon) \cap E$. □

Twierdzenie 12.2. *Przestrzenie metryczne zwarte są ośrodkowe.*

Dowód. Niech przestrzeń (X, ρ) będzie zwarta. Skorzystamy z lematu 10.1. Dla każdej liczby naturalnej n wybierzmy skończone pokrycie przestrzeni X kulami o promieniach $\frac{1}{n}$:

$$K(x_1^n; \frac{1}{n}), \dots, K(x_{k_n}^n; \frac{1}{n}).$$

Okazuje się, że zbiór

$$D = \{\, x_i^n : i = 1, \dots, k_n, n \in \mathbb{N} \,\}$$

wszystkich środków tak wybranych kul stanowi ośrodek w X. Rzeczywiście, D jest przeliczalny. Aby pokazać jego gęstość, niech x będzie dowolnym punktem przestrzeni X i ϵ dowolną liczbą dodatnią. Istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $\frac{1}{n} < \epsilon$. Punkt x należy do pewnej kuli $K(x_i^n; \frac{1}{n})$ (bo takie kule tworzą pokrycie X), więc $\rho(x, x_i^n) < \frac{1}{n} < \epsilon$, zatem $x_i^n \in K(x; \epsilon)$. □

Na zakończenie udowodnimy ważne twierdzenie o *uniwersalności* kostki Hilberta.

Definicja 12.2. Mówimy, że przestrzeń topologiczną X można *zanurzyć* w przestrzeń Y, gdy X jest homeomorficzna z pewną podprzestrzenią przestrzeni Y, tzn. gdy istnieje homeomorfizm $h : X \to h(X) \subset Y$, zwany *zanurzeniem* przestrzeni X w Y.

TWIERDZENIE 12.3. *Każdą przestrzeń metryczną ośrodkową można zanurzyć w kostkę Hilberta.*

DOWÓD. Niech (X, ρ) będzie przestrzenią metryczną ośrodkową z ośrodkiem $D = \{d_1, d_2, \dots\}$. Przypomnijmy, że kostka Hilberta Q jest zbiorem ciągów liczb rzeczywistych $(t_1, t_2, \dots)$ takich, że $|t_n| \leq \frac{1}{n}$ z metryką

$$\rho_H((t_1, t_2, \dots), (t'_1, t'_2, \dots)) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (t_n - t'_n)^2}.$$

Dla każdego punktu $x \in X$ niech $f_n : X \to [\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}]$ będzie przekształceniem określonym następująco:

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \min(1, \rho(x, d_n)).$$

Oczywiście f_n jest ciągłe.

Określamy przekształcenie $f : X \to f(X) \subset Q$ wzorem

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots).$$

Funkcja f jest różnowartościowa, bo jeśli $x \neq y$, to istnieje d_n taki, że $\rho(x, d_n) < \frac{1}{2}\rho(x, y)$ oraz $\rho(x, d_n) < 1$; wtedy $\rho(x, d_n) \neq \rho(y, d_n)$ (w przeciwnym razie $\rho(x, y) \leq \rho(x, d_n) + \rho(d_n, y) = 2\rho(x, d_n)$, co jest sprzeczne z wyborem d_n). Ponieważ dodatkowo $\rho(x, d_n) < 1$, więc

$$\rho(x, d_n) = \min(1, \rho(x, d_n)) \neq \min(1, \rho(y, d_n)),$$

a więc również $f_n(x) \neq f_n(y)$, skąd $f(x) \neq f(y)$.

Ponieważ dla każdego n przekształcenie f_n jest ciągłe, więc również f jest ciągłe (zob. wniosek 6.1). Pozostaje do uzasadnienia ciągłość przekształcenia odwrotnego $f^{-1} : f(X) \to X$. Niech więc ciąg $(\mathbf{p}_k)_{k \in \mathbb{N}} \in f(X)$ będzie zbieżny do punktu $\mathbf{p} \in f(X)$. Przyjmijmy

$$\mathbf{p}_k = (f_1(x_k), f_2(x_k), \dots), \quad \mathbf{p} = (f_1(x), f_2(x), \dots).$$

Ponieważ w kostce Hilberta Q zbieżność punktów jest "po współrzędnych" (zob. ćwiczenie 3, rozdział 6), więc dla każdego n mamy

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{n} \min(1, \rho(x_k, d_n)) = \lim_{k \to \infty} f_n(x_k) = f_n(x) = \frac{1}{n} \min(1, \rho(x, d_n)),$$

czyli

$$\lim_{k \to \infty} \min(1, \rho(x_k, d_n) = \min(1, \rho(x, d_n). \tag{12.1}$$

Niech ϵ będzie dowolną liczbą dodatnią mniejszą od 1. Z gęstości zbioru D wnosimy, że istnieje punkt d_n taki, że $\rho(x, d_n) < \frac{\epsilon}{3}$, a z (12.1)—że istnieje k_0 takie, że jeśli $k \geq k_0$, to

$$\min(1, \rho(x_k, d_n)) < \min(1, \rho(x, d_n)) + \frac{\epsilon}{3};$$

ponieważ $\epsilon < 1$, to $\min(1, \rho(x, d_n)) = \rho(x, d_n)$ i w rezultacie

$$\rho(x_k, d_n) < \rho(x, d_n) + \frac{\epsilon}{3}.$$

Stąd

$$\rho(x, x_k) \leq \rho(x, d_n) + \rho(d_n, x_k) < 2\rho(x, d_n) + \frac{\epsilon}{3} < \frac{2\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon,$$

dla $k \geq k_0$, zatem $\lim_{k\to\infty} x_k = x$, co dowodzi ciągłości przekształcenia odwrotnego f^{-1}. $\square$

Ćwiczenia

(1) Sprawdzić, czy w przestrzeniach euklidesowych i w l_2 zbiór wszystkich punktów o współrzędnych wymiernych jest ośrodkiem.
(2) Kiedy przestrzeń dyskretna jest ośrodkowa?
(3) Znajdź ośrodek w iloczynie kartezjańskim $P \times P$, gdzie P jest zbiorem liczb niewymiernych z metryką euklidesową.
(4) Sprawdzić ośrodkowość płaszczyzny z metrykami "rzeka" i "centrum" oraz ośrodkowość domknięć różnych kul w tych metrykach.
(5) Czy przestrzeń zupełna musi być ośrodkowa?
(6) Udowodnić, że iloczyn kartezjański skończenie (przeliczalnie) wielu przestrzeni metrycznych ośrodkowych jest przestrzenią ośrodkową.
(7) Czy następujące przestrzenie można zanurzyć w kostkę Hilberta: łuk, prosta euklidesowa, prosta z metryką ρ_{01}, zbiór przeliczalny z metryką ρ_{01}, kwadrat z metrykami "rzeka" i "centrum"?

ROZDZIAŁ 13

Zbiór Cantora

Jednym z najciekawszych i najczęściej spotykanych w matematyce zbiorów jest zbiór Cantora. W tym rozdziale opiszemy jego podstawowe własności topologiczne. Najprościej można go zdefiniować analitycznie.

Definicja 13.1. *Zbiorem Cantora* nazywamy zbiór

$$C = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{3^n} : c_n = 0, 2 \right\}.$$

Innymi słowy, zbiór C składa się z liczb przedziału euklidesowego $I = [0, 1]$, które w systemie trójkowym zapisują się przy użyciu tylko cyfr 0 i 2, a więc mają postać

$$c = (0.c_1c_2c_3\dots)_3, \quad c_1, c_2, c_3, \dots = 0, 2.$$

Nietrudno sprawdzić, że jeśli pierwsza cyfra $c_1 = 0$, to $c \in [0, \frac{1}{3}]$, a gdy $c_1 = 2$, to $c \in [\frac{2}{3}, 1]$. Podobnie, jeśli $c_2 = 0$, to w zależności od tego, czy $c_1 = 0$, czy $c_1 = 2$, mamy $c \in [0, \frac{1}{9}]$ lub $c \in [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}]$, a w przypadku $c_2 = 2$, otrzymamy, odpowiednio do wartości pierwszej cyfry, $c \in [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}]$ lub $c \in [\frac{8}{9}, 1]$.

Kontynuując w ten sposób badanie położenia w przedziale I danej liczby $c = (0.c_1c_2c_3\dots)_3 \in C$, w zależności od wartości jej kolejnych cyfr, możemy stwierdzić, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$, c należy do przedziału postaci

$$I_{c_1c_2\dots c_n} = \left[\frac{i_n}{3^n}, \frac{i_n + 1}{3^n}\right],$$

dla pewnej liczby naturalnej $i_n < 3^n$, przy czym położenie to jest zdeterminowane cyframi $c_1, \dots, c_n$ w następujący, indukcyjny sposób dla $n > 1$:

jeśli

$$c \in I_{c_1\dots c_{n-1}} = \left[\frac{i_{n-1}}{3^{n-1}}, \frac{i_{n-1} + 1}{3^{n-1}}\right]$$

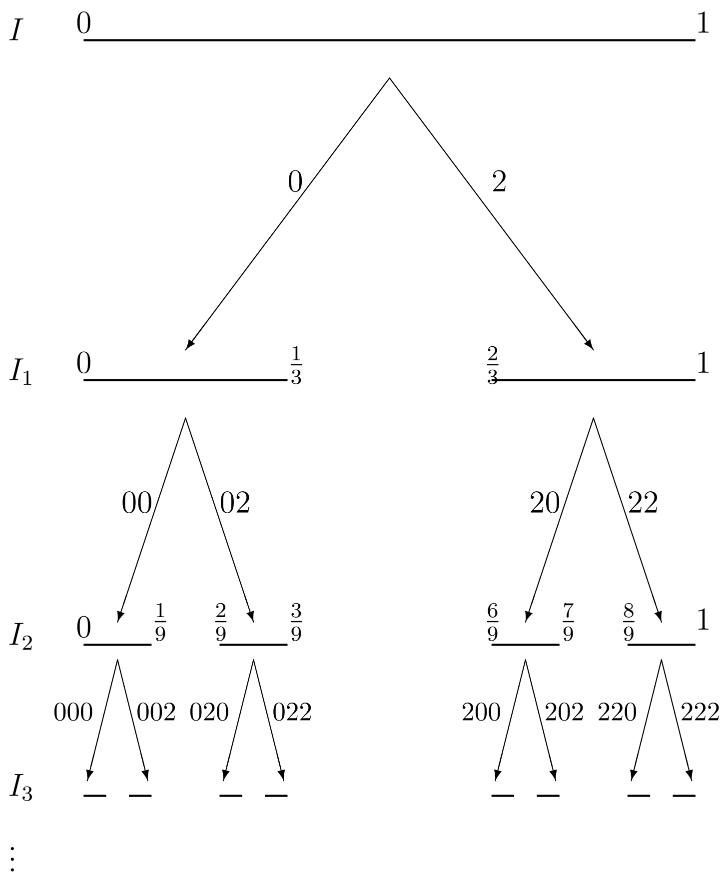
i $c_n = 0$, to

$$c \in I_{c_1\dots c_{n-1}c_n} = \left[\frac{3i_{n-1}}{3^n}, \frac{3i_{n-1} + 1}{3^n}\right],$$

a gdy $c_n = 2$, to

$$c \in I_{c_1 \dots c_{n-1} c_n} = \left[\frac{3i_{n-1} + 2}{3^n}, \frac{3i_{n-1} + 3}{3^n} \right].$$

Dla wygody, przedstawia się położenie punktu $c \in C$ w przedziale I w postaci następującego schematu-drzewa.



Z powyższych uwag wynika następujące stwierdzenie.

Stwierdzenie 13.1. *Każdy punkt $c = (0.c_1 c_2 c_3 \dots)_3 \in C$ wyznaczony jest jednoznacznie przez przez ciąg cyfr $c_1, c_2, \dots \in \{0, 2\}$.*

Ponieważ opisane wyżej przedziały $I_{c_1 c_2 \dots c_n}$ mają długości $\frac{1}{3^n}$ dążące do 0, to można również stwierdzić, że każdy punkt $c = (0.c_1 c_2 c_3 \dots)_3 \in C$ wyznacza jednoznacznie ciąg takich przedziałów, których jest jedynym punktem wspólnym. Otrzymujemy stąd następujący geometryczny, indukcyjny opis zbioru Cantora, przyjmowany często za jego definicję. Występujące w nim przedziały, to właśnie przedziały $I_{c_1 c_2 \dots c_n}$.

Stwierdzenie 13.2. *Niech $\boldsymbol{I}_n$ będzie sumą 2^n składowych, będących przedziałami domkniętymi, powstałymi z podziału każdej składowej zbioru $\boldsymbol{I}_{n-1}$ na 3 przystające przedziały długości $\frac{1}{3^n}$ każdy i usunięcia wnętrza środkowego z nich. Wtedy*

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{I}_n.$$

Warto zanotować następujące przydatne spostrzeżenie, które łatwo wynika ze stwierdzenia 13.2.

Lemat 13.1. *Jeśli $c = (0.c_1c_2c_3\dots)_3$ i $c' = (0.c'_1c'_2c'_3\dots)_3$ są punktami zbioru Cantora C, to nierówność $|c - c'| < \frac{1}{3^n}$ implikuje $c_i = c'_i$ dla $i \leq n$; na odwrót, jeśli dla każdego $i \leq n$ zachodzi $c_i = c'_i$, to $|c - c'| \leq \frac{1}{3^n}$*

Przejdźmy teraz do omówienia podstawowych własności topologicznych zbioru Cantora, rozumianego jako podprzestrzeń prostej euklidesowej.

Bezpośrednio z definicji 13.1 i określenia szeregu zbieżnego wynika następujący fakt.

Stwierdzenie 13.3. *Zbiór $\{(0.c_1\dots c_n) : c_1,\dots,c_n = 0,2, n \in \mathbb{N}\}$ jest podzbiorem przeliczalnym i gęstym w C.*

Stwierdzenie 13.4. *Zbiór Cantora jest w sobie gęsty.*

Dowód. Niech $c = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{3^n}$, gdzie $c_n = 0, 2$. Oznaczmy

$$x_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{c_n}{3^n}, \quad y_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{c_n}{3^n} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{2}{3^n}.$$

Wtedy $x_k, y_k \in C, x_k \neq y_k$ i oczywiście

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} y_k = c.$$

□

Stwierdzenie 13.5. *Zbiór Cantora C jest przestrzenią zwartą.*

Dowód. Jest to konsekwencja stwierdzenia 13.2, gdyż C, jako przekrój podzbiorów $\boldsymbol{I}_n$ domkniętych w przedziale I jest podzbiorem domkniętym przestrzeni zwartej I, więc jest podprzestrzenią zwartą na mocy stwierdzenia 10.1. □

Stwierdzenie 13.6. *Jedynymi podprzestrzeniami spójnymi zbioru Cantora są podzbiory jednopunktowe.*

Dowód. Niejedopunktowymi podprzestrzeniami spójnymi prostej euklidesowej mogą być wyłącznie różnego typu przedziały. Przypuśćmy więc, że jakiś przedział $[a, b]$, gdzie $b > a$, zawiera się w $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{I}_n$. Wtedy $[a, b] \subset \boldsymbol{I}_n$, więc istnieje składowa $I_{c_1 c_2 \ldots c_n}$ zbioru $\boldsymbol{I}_n$, zawierająca przedział $[a, b]$ dla każdego n. Wynika stąd, że $0 < |b - a| \leq \frac{1}{3^n}$ dla każdego n, co jest niemożliwe. □

Uwaga 13.1. Własność przestrzeni C opisana w stwierdzeniu 13.6 nazywa się *całkowitą niespójnością* tej przestrzeni.

Kolejne własności zbioru Cantora nie są już tak oczywiste—można je nawet uznać za zaskakujące.

Stwierdzenie 13.7. *Iloczyn kartezjański $C \times C$ jest homeomorficzny z C.*

Dowód. Określimy naturalny homeomorfizm $h : C \times C \to C$ wzorem

$$h(c, c') = (0.c_1 c'_1 c_2 c'_2 \ldots)_3,$$

gdzie $c = (0.c_1 c_2 \ldots)_3, c' = (0.c'_1 c'_2 \ldots)_3$.

Łatwo widać, że h jest funkcją wzajemnie jednoznaczną. Pozostaje sprawdzić ciągłość h (zob. wniosek 10.2). Wygodnie jest w tym wypadku sprawdzać jednostajną ciągłość h. Niech $\epsilon > 0$ i n będzie taką liczbą naturalną, że $\frac{1}{3^{2n}} < \epsilon$. Załóżmy,że

$$\rho((c, c'), (d, d')) = \sqrt{|c - d|^2 + |c' - d'|^2} < \frac{1}{3^{2n}},$$

gdzie ρ jest metryką w iloczynie $C \times C$.

Wtedy $|c - d| < \frac{1}{3^{2n}}$ oraz $|c' - d'| < \frac{1}{3^{2n}}$. Na podstawie lematu 13.1 liczby c i d mają takie same pierwsze n cyfr, tzn. jeśli $c = (0.c_1 c_2 \ldots)_3$ i $d = (0.d_1 d_2 \ldots)_3$, to $c_i = d_i$ dla $i \leq n$; podobnie jeśli $c' = (0.c'_1 c'_2 \ldots)_3$ i $d' = (0.d'_1 d'_2 \ldots)_3$, to $c'_i = d'_i$ dla $i \leq n$. Wynika stąd, znów na podstawie lematu 13.1, że

$$|h(c, c') - h(d, d')| = |(0.c_1 c'_1 c_2 c'_2 \ldots c_n c'_n \ldots)_3 - (0.d_1 d'_1 \ldots d_n d'_n \ldots)_3| \leq \frac{1}{3^{2n}} < \epsilon.$$

□

Stosując prostą indukcję, otrzymujemy następujący wniosek.

Wniosek 13.1. *Iloczyn kartezjański skończenie wielu zbiorów Cantora przez siebie jest homeomorficzny ze zbiorem Cantora.*

Uwaga 13.2. Podobny fakt zachodzi również dla iloczynu nieskończonego: *iloczyn kartezjański przeliczalnej ilości zbiorów Cantora przez siebie jest homeomorficzny ze zbiorem Cantora.* Dowodzić tego można w sposób podobny do dowodu stwierdzenia 13.7.

Twierdzenie 13.1. *Istnieje przekształcenie ciągłe zbioru Cantora C na przedział euklidesowy $I = [0,1]$. Przekształcenie takie można określić wzorem*

$$s((0.c_1c_2\dots)_3) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{2^n}.$$

Dowód. Zauważmy najpierw, że przekształcenie s przyjmuje wartości w przedziale I. Widać to z oszacowania

$$0 \le \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{2^n} \le \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2^n} \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = 1.$$

Następnie sprawdzimy, że jest to przekształcenie "na". W tym celu przedstawmy dowolną liczbę $x \in I$ w zapisie dwójkowym

$$x = (0.b_1b_2\dots)_2, \quad \text{gdzie } b_1, b_2, \dots \in \{0,1\};$$

oznacza to, jak wiadomo, że $x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{2^n}$. Przyjmując $c_n = 2b_n$, dla każdego n, otrzymujemy równość

$$s(0.c_1c_2\dots)_3) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{2^n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2b_n}{2^n} = x.$$

Pozostaje do uzasadnienia ciągłość przekształcenia s. Wygodnie jest sprawdzać od razu jego jednostajną ciągłość. Niech więc $\epsilon > 0$. Wybieramy liczbę naturalną N tak dużą, by $\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{2^n} < \epsilon$ (szereg jest zbieżny, więc takie N istnieje!). Przyjmując $\delta = \frac{1}{3^N}$, wnosimy na podstawie lematu 13.1, że jeśli $c = (0.c_1c_2\dots)_3, c' = (0.c'_1c'_2\dots)_3$ oraz $|c - c'| < \delta$, to $c_n = c'_n$ dla $n < N$. Stąd

$$|s(c) - s(c')| = |\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{2^n} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c'_n}{2^n}| = |\frac{1}{2}\sum_{n=N}^{\infty}\frac{c_n - c'_n}{2^n}| \le$$
$$\frac{1}{2}\sum_{n=N}^{\infty}\frac{|c_n - c'_n|}{2^n} \le \frac{1}{2}\sum_{n=N}^{\infty}\frac{2}{2^n} = \sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{2^n} < \epsilon.$$

□

Definicja 13.2. Przekształcenie $s : C \to I$, opisane w twierdzeniu 13.1, nazywamy *funkcją schodkową.*

Wniosek 13.2. *Zbiór Cantora ma moc continuum* $\mathfrak{c}$.

Dowód. Moc C nie jest mniejsza niż moc obrazu $s(C) = I$, która wynosi $\mathfrak{c}$, a z drugiej strony C jest podzbiorem przedziału I, więc moc C nie jest większa od $\mathfrak{c}$. □

Uwaga 13.3. Warto zwrócić uwagę na wniosek 13.2. W geometrycznym opisie i przy próbie rysowania przybliżeń zbioru Cantora, zauważamy jedynie jego punkty trójkowo-wymierne (postaci $c = \frac{k}{3^n} = (0.c_1, \dots c_n)$, dla pewnych $k \leq 3^n$), których jest oczywiście przeliczalnie wiele (stwierdzenie 13.3). Większość punktów zbioru Cantora jest dla nas niewidoczna!

Wniosek 13.3. *Istnieją przekształcenia ciągłe zbioru Cantora na kostki euklidesowe I^n dowolnego wymiaru skończonego n oraz na kostkę Hilberta $I^{\aleph_0}$.*

Dowód. Jeśli $s : C \to I$ jest funkcją schodkową i C^n oznacza iloczyn kartezjański n egzemplarzy zbiorów Cantora przez siebie, to przekształcenie $s^n : C^n \to I^n$ określone wzorem

$$s^n(c^1, c^2, \dots, c^n) = (s(c^1), s(c^2), \dots s(c^n))$$

jest przekształceniem ciągłym i "na". Ponadto, z wniosku 13.1 wiemy, że istnieje homeomorfizm $h : C \to C^n$, więc złożenie $s^n h : C \to I^n$ jest przekształceniem ciągłym zbioru C na kostkę I^n. W przypadku kostki Hilberta argumentacja jest podobna. □

Uwaga 13.4. Zachodzi znacznie ogólniejszy fakt, który podajemy tylko informacyjnie : *każda przestrzeń metryczna zwarta jest obrazem ciągłym zbioru Cantora*! (zob. [**ES**]).

Wniosek 13.4. *Istnieją przekształcenia ciągłe przedziału euklidesowego $I = [0, 1]$ na kostki euklidesowe I^n dowolnego wymiaru n i na kostkę Hilberta.*

Dowód. Jeśli Y jest jedną z tych kostek, to istnieje przekształcenie ciągłe f zbioru Cantora C na Y. Ponieważ C jest domkniętym podzbiorem w I, to można skorzystać z twierdzenia Tietzego 4.1, które gwarantuje istnienie przedłużenia ciągłego $f^* : I \to Y$ przekształcenia f.

Można też skonstruować takie przedłużenie bezpośrednio, nie korzystając z twierdzenia Tietzego. W tym celu skorzystamy z opisu geometrycznego zbioru C zawartego w stwierdzeniu 13.2. Oznaczmy przez a i b końce dowolnie ustalonej składowej dopełnienia w I zbioru I_n

(te składowe są przedziałami otwartymi usuwanymi w konstrukcji geometrycznej zbioru C). Ponieważ przedziały otwarte (a, b) są rozłączne z C, więc na nie trzeba przedłużyć przekształcenie f.

Jeśli $f(a) = f(b)$, to kładziemy $f^*(x) = f(a)$ dla wszystkich $x \in (a, b)$; w przeciwnym razie, odcinek prostoliniowy $f(a)f(b)$ o końcach $f(a), f(b)$ zawiera się w kostce Y i można go sparametryzować funkcją $\alpha : [a, b] \to f(a)f(b)$ (zależną oczywiście, tak jak i punkty a, b, od ciągu cyfr $c_1, \ldots, c_n$) w standardowy sposób:

$$\alpha(x) = \frac{x-a}{b-a} f(b) + (1 - \frac{x-a}{b-a}) f(a).$$

Teraz możemy określić przedłużenie f^* na punktach $x \in [a, b]$ wzorem

$$f^*(x) = \alpha(x).$$

Ciągłość f^* w punktach odcinków otwartych postaci (a, b) wynika wprost z ciągłości parametryzacji α.

Uzasadnimy ciągłość f^* w punktach zbioru Cantora. Niech $\epsilon > 0$. Z jednostajnej ciągłości przekształcenia f (zob. stwierdzenie 10.5) wynika istnienie liczby $\delta > 0$ takiej, że jeśli $x, x' \in C$ oraz $|x - x'| < \delta$, to $\|f(x) - f(x')\| < \frac{\epsilon}{2}$. Niech $c \in C$. Istnieje składowa $I_{c_1 \ldots c_n}$ zbioru I_n zawierająca c o średnicy mniejszej od δ. Przedział $I_{c_1 \ldots c_n}$ może mieć wspólne końce z co najwyżej dwiema składowymi dopełnienia $I \setminus C$, czyli przedziałami otwartymi postaci $(a, b), (a', b')$, rozważanymi wyżej przy określaniu przedłużenia f^*. Na przedziałach $[a, b], [a'b']$ określone są parametryzacje α i α', które, oczywiście, też są jednostajnie ciągłe, więc istnieje liczba $\theta > 0$ taka, że jeśli $x, x' \in [a, b]$ ($x, x' \in [a', b']$) oraz $|x - x'| < \theta$, to $\|\alpha(x) - \alpha(x')\| < \frac{\epsilon}{2}$ ($\|\alpha'(x) - \alpha'(x')\| < \frac{\epsilon}{2}$, odpowiednio). Przyjmijmy $\delta' = \min\{\delta, \theta\}$ i załóżmy, że $x \in I \setminus C$ oraz $|x - c| < \delta'$. W przypadku, gdy $x \in I_{c_1 \ldots c_n}$, istnieje składowa dopełnienia $I \setminus C$ postaci (a_x, b_x), zawierająca punkt x i zawarta wraz z końcami a_x, b_x w $I_{c_1 \ldots c_n}$ (przypomnijmy przy tym , że te końce należą do zbioru Cantora C). Wtedy otrzymujemy oszacowanie odległości

$$\begin{aligned} \|f^*(x) - f^*(c)\| \leq \|f^*(x) - f^*(a_x)\| + \|f^*(a_x) - f^*(c)\| \leq \\ \|f^*(b_x) - f^*(a_x)\| + \|f(a_x) - f(c)\| = \|f(b_x) - f(a_x)\| + \\ \|f(a_x) - f(c)\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Gdy $x \notin I_{c_1 \ldots c_n}$, to $x \in (a, b)$ lub $x \in (a', b')$. Załóżmy, że $x \in (a, b)$ i przyjmijmy, że przedział (a, b) leży na prawo od przedziału $I_{c_1 \ldots c_n}$ (dla drugiego przypadku rozumowanie jest analogiczne). Wtedy

$$\|f^*(x) - f^*(c)\| \leq \|f^*(x) - f^*(a)\| + \|f^*(a) - f^*(c)\| = \\ \|\alpha(x) - \alpha(a)\| + \|f(a) - f(c)\| < \epsilon.$$

Wreszcie, jeśli $x \in C$ i $|x - c| < \delta'$, to oczywiście

$$\|f^*(x) - f^*(c)\| = \|f(x) - f(c)\| < \epsilon.$$

□

UWAGA 13.5. Przekształcenia ciągłe przedziału I na kwadrat I^2 zwą się tradycyjnie *przekształceniami Peana* . Opis geometryczny takiego przekształcenia zamieszczają podręczniki [**ES**] i [**Ku**].

Na zakończenie warto wymienić jeszcze kilka ważnych własności zbioru Cantora, których dowody (lub wskazówki do nich) można znaleźć np. w [**ES**] i [**Ku**].

- Przestrzeń topologiczna X jest homeomorficzna ze zbiorem Cantora wtedy i tylko wtedy, gdy X jest przestrzenią metryczną zwartą, w sobie gęstą, której jedynymi podprzestrzeniami spójnymi są podzbiory jednopunktowe.
- Każda przestrzeń metryzowalna w sposób zupełny i w sobie gęsta zawiera podprzestrzeń homeomorficzną ze zbiorem Cantora.
- Każda przestrzeń metryczna ośrodkowa której każdy punkt ma otoczenia otwarto-domknięte dowolnie małej średnicy (taka przestrzeń nazywa się *zero-wymiarowa*) jest homeomorficzna z podzbiorem zbioru Cantora.

Ćwiczenia

(1) Sprawdź, czy zbiór końców usuwanych przedziałów w konstrukcji zbioru Cantora C (tzn. zbiór końców składowych zbiorów I_n dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$) jest przeliczalny i gęsty w C i czy jest zwarty.

(2) Wskaż kilka podzbiorów otwarto-domkniętych w C.

Wykaż, że zbiór C jest podobny do swych podzbiorów $C \cap [0, \frac{1}{3}]$, $C \cap [\frac{2}{3}, 1]$, $C \cap [0, \frac{1}{9}]$, $C \cap [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$, itd.

(3) Niech $X = \{0,1\} \times \{0,1\} \times \dots$ z metryką

$$\rho\left((s_1, s_2, \dots), (t_1, t_2, \dots)\right) = \frac{1}{\min\{n : s_n \neq t_n\}}$$

lub 0, gdy $(s_1, s_2, \dots) = (t_1, t_2, \dots)$.

Sprawdź, że ρ jest metryką w X.

Wykaż, że przekształcenie $f : C \to X$ określone wzorem

$$f\left(\frac{t_1}{3} + \frac{t_2}{3^2} + \dots\right) = \left(\frac{t_1}{2}, \frac{t_2}{2}, \dots\right) \quad \text{gdzie } t_n \in \{0, 2\} \text{ dla każdego } n,$$

jest homeomorfizmem.

(4) Skonstruuj zbiór homeomorficzny ze zbiorem Cantora C zawarty w zbiorze liczb niewymiernych z metryką euklidesową (zob. [**Ku**]).

(5) Przestrzeń metryczna X jest *grupą topologiczną*, gdy w X jest określone działanie grupowe, które jest ciągłe jako przekształcenie $X \times X \to X$ i w którym branie elementu odwrotnego $x \mapsto x^{-1}$ też jest przekształceniem ciągłym $X \to X$. Sprawdzić, czy przestrzenie euklidesowe, przestrzeń Hilberta l_2, $\mathbb{R}^{\aleph_0}$, okrąg $S^1 = \{z \in (\mathbb{R}^2, \rho_e) : \|z\| = 1\}$, *torus n-wymiarowy* $(S^1)^n$ są grupami topologicznymi (z jakimi działaniami ?).

Korzystając z zadania 3 pokazać, że zbiór Cantora jest grupą topologiczną.

(6) Czy istnieją przekształcenia ciągłe (homeomorfizmy) z:

C na C^3, C na $\mathbb{Q}$, C na $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, C na I^3, C na $\mathbb{R}^2$, C na okrąg S^1, C na sferę S^2, C na $C \times I$, C na $X = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$, C na $X \times I$, I na C, $X \times I$ na C, $\mathbb{R}$ na C, $\mathbb{Q}$ na C, $Q \times I$ na C, S^2 na C ?

Podaj przekształcenia (wykorzystuj, m. in. funkcję z C na I) lub przyczynę ich braku (np. zwartość, spójność).

(7) Czy zbiór Cantora jest ściągalny?

Czy przestrzeń X= suma odcinków łączących punkt $(\frac{1}{2}, 1)$ z punktami zbioru C na osi x na płaszczyźnie euklidesowej jest ściągalna?

Bibliografia

[D] R. Duda, *Wprowadzenie do topologii*, PWN, Warszawa 1984.

[E] R. Engelking, *Topologia ogólna*, wyd. 2, PWN, Warszawa 1989.

[ES] ——— i K. Sieklucki, *Wstęp do topologii*, PWN, Warszawa 1986

[Ku] K. Kuratowski, *Wstęp do topologii i teorii mnogości*, wyd. 8, PWN, Warszawa, 1980.

[O] J. C. Oxtoby, *Measure and Category*, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1980.

Indeks