Diferencijalna geometrija II

po predavanjima prof. Iljazovića

Autor: Lovro Malada

Verzija: v1.12.20240831

1 Nastavak teorije ploha

Definicija 1.1. *Neka su $m, n \in \mathbb{N}$, V otvoren skup u $\mathbb{R}^n$ te neka je funkcija $f\colon V \to \mathbb{R}^m$ klase C^∞. Za $y \in \mathbb{R}^m$ kažemo da je* ***regularna vrijednost*** *od f ako je $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$ te ako za svaki $x \in f^{-1}(\{y\})$ vrijedi kako je diferencijal $D(f)(x)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ surjekcija.*

Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $\mathcal{F}$ neprazna familija povezanih skupova u (X, d) td. $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$. Tada je i $\bigcup \mathcal{F}$ povezan skup u (X, d). Naime, uzmimo $x_0 \in \bigcap \mathcal{F}$ te pretpostavimo kako je (U, V) separacija unije. Pretpostavimo npr. $x_0 \in U$. Za svaki $F \in \mathcal{F}$ imamo $F \cap U \neq \emptyset$ (jer oba sadrže x_0) pa budući su $F \cap U$ i $F \cap V$ otvoreni disjunktni skupovi u F te je F povezan, slijedi $F \cap V = \emptyset$. Stoga je $F \subseteq U$ za sve $F \in \mathcal{F}$ pa je i $\bigcup \mathcal{F} \subseteq U$ te dobivamo $V = \emptyset$, kontradikcija. Dakle, $\bigcup \mathcal{F}$ je zaista povezan skup.

Definicija 1.2. *Neka je (X, d) metrički prostor i $x_0 \in X$. Za skup K, definiran kao*

$$K = \bigcup_{\substack{P \subseteq X \text{ povezan} \\ x_0 \in P}} P$$

kažemo kako je ***komponenta povezanosti*** *od (X, d) određena točkom x_0.*

Uočimo kako je K povezan skup u (X, d). Nadalje, ako je P povezan skup u (X, d) td. je $x_0 \in P$, onda je $P \subseteq K$. Dakle, K je najveći (u smislu inkluzije) povezan skup koji sadrži x_0.
Nadalje, pretpostavimo kako su K i L dvije različite komponente povezanosti od (X, d). Tada im je presjek prazan. Naime, u protivnom bi $K \cup L$ bio povezan skup koji sadrži i K i L pa dobivamo $K = K \cup L = L$, kontradikcija. Zaključujemo kako je familija svih komponenata povezanosti od (X, d) particija skupa X.

Teorem 1.3.

Neka je V otvoren skup u $\mathbb{R}^3$ te $f\colon V \to \mathbb{R}$ klase C^∞. Pretpostavimo kako je y_0 regularna vrijednost od f. Tada je svaka komponenta povezanosti od $f^{-1}(\{y_0\})$ ploha.

Dokaz. Neka je K komponenta povezanosti od $f^{-1}(\{y_0\})$ te neka je $x \in K$ po volji. Znamo kako je $D(f)(x)\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ surjekcija pa $\nabla(f)(x)$ nije nul-matrica. BSOMP kako je npr. derivacija po trećoj varijabli različita od 0. Definiramo

$$F\colon V \to \mathbb{R}^3$$
$$F(u, v, w) = (u, v, f(u, v, w)).$$

Slijedi

$$\nabla F(u,v,w) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \partial_1 f(u,v,w) & \partial_2 f(u,v,w) & \partial_3 f(u,v,w) \end{bmatrix} \implies \det(\nabla F(u,v,w)) = \partial_3 f(u,v,w).$$

Posebno, $\nabla(F)(x)$ je punog ranga pa je $D(F)(x)\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ izomorfizam. Prema teoremu o inverznoj funkciji postoje otvoreni skupovi $\widetilde{V}$ i W u $\mathbb{R}^3$ td.

- $x \in \widetilde{V} \subseteq V$
- $F(x) \in W,\ F(\widetilde{V}) \subseteq W$
- $F|_{\widetilde{V},W}\colon \widetilde{V} \to W$ glatki difeomorfizam.

Neka je $G\colon W \to \widetilde{V}$ dana s $G = (F|_{\widetilde{V},W})^{-1}$ te neka su $g_1, g_2, g_3\colon W \to \mathbb{R}$ komponentne funkcije od G. Tada za sve $(u,v,w) \in W$ vrijedi

$$(u,v,w) = (F|_{\widetilde{V},W} \circ G)(u,v,w) = F(g_1(u,v,w), g_2(u,v,w), g_3(u,v,w))$$

$$\implies \begin{cases} g_1(u,v,w) = u \\ g_2(u,v,w) = v \\ f(G(u,v,w)) = w. \end{cases}$$

Definiramo $U = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, (u,v,y_0) \in W\right\}$ i uočimo kako je on otvoren skup u $\mathbb{R}^2$. Zaista, vrijedi $U = \gamma^{-1}(W)$ pri čemu je $\gamma\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dana s $\gamma(u,v) = (u,v,y_0)$. Definiramo novu funkciju $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^3$ s $\varphi(u,v) = G(u,v,y_0)$. Jasno, φ je klase C^∞ te imamo $\varphi(u,v) = (u,v,g_3(u,v,y_0))$ pa je i injekcija. Vrijedi

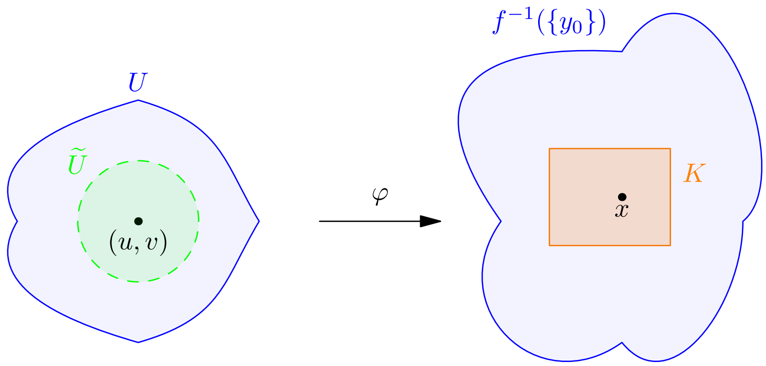
$$\begin{aligned} \varphi(U) &= \{G(u,v,y_0) \mid (u,v) \in U\} = \\ &= \{G(u,v,y_0) \mid (u,v,y_0) \in W\} = \\ &= \{G(u,v,w) \mid (u,v,w) \in W \text{ i } f(G(u,v,w)) = y_0\} = \\ &= \{G(u,v,w) \mid (u,v,w) \in W\} \cap f^{-1}(\{y_0\}) = \\ &= \widetilde{V} \cap f^{-1}(\{y_0\}) \end{aligned}$$

pa je $\varphi(U)$ otvoren skup u $f^{-1}(\{y_0\})$. Uočimo kako je $x \in \varphi(U)$, tj. $\varphi(U)$ otvorena okolina od x u $f^{-1}(\{y_0\})$. Dokažimo još da je φ smještenje, tj. da je $\varphi^{-1}\colon \varphi(U) \to U$ neprekidna funkcija.
Neka je $z \in \varphi(U)$ te neka je $\varphi^{-1}(z) = (u,v)$. Imamo $z = \varphi(u,v) = G(u,v,y_0)$ pa je $G^{-1}(z) = (u,v,y_0)$, tj. $(u,v) = \pi(G^{-1}(z))$, pri čemu je $\pi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ projekcija na prve dvije koordinate. Prema tome $\varphi^{-1} = \pi \circ (G|_{\varphi(U)})^{-1}$. Dakle, φ je smještenje.
Također, iz definicije φ slijedi $\nabla(\varphi)(u,v)$ ranga 2 za svaki $(u,v) \in U$, tj. $D(\varphi)(u,v)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ injekcija. Ovo bi bio kraj dokaza kada bi $f^{-1}(\{y_0\})$ bio povezan skup, međutim mi pokazujemo kako je K ploha,

stoga ćemo definirati parametriziranu plohu $\widetilde{\varphi}$ kao restrikciju od φ. Vrijedi

$$
\begin{aligned}
x \in \varphi(U) \Longrightarrow & \exists (u,v) \in U \text{ td. } x = \varphi(u,v) \Longrightarrow \exists r > 0 \text{ td. } \widetilde{U} \coloneqq K((u,v),r) \subseteq U \Longrightarrow \\
& \Longrightarrow \widetilde{U} \text{ otvoren u } U \Longrightarrow \varphi(\widetilde{U}) \text{ otvoren u } \varphi(U),
\end{aligned}
$$

odnosno skica



Dakle, imamo $\varphi(U)$ otvoren skup u $f^{-1}(\{y_0\})$ te $\varphi(\widetilde{U})$ otvoren u $\varphi(U) \Longrightarrow \varphi(\widetilde{U})$ otvoren u $f^{-1}(\{y_0\})$. Neka je $\widetilde{\varphi} = \varphi|_{\widetilde{U}} : \widetilde{U} \to \mathbb{R}^3$. Imamo

$$
\begin{aligned}
&(u,v) \in \widetilde{U} \Longrightarrow \varphi(u,v) \in \varphi(\widetilde{U}) \Longrightarrow x \in \widetilde{\varphi}(\widetilde{U}). \\
&\widetilde{U} \text{ povezan skup u } U \Longrightarrow \varphi(\widetilde{U}) \text{ povezan u } \mathbb{R}^3 \Longrightarrow \varphi(\widetilde{U}) \text{ povezan u } f^{-1}(\{y_0\}).
\end{aligned}
$$

Dakle, K je komponenta povezanosti od $f^{-1}(\{y_0\})$, $\varphi(\widetilde{U})$ povezan u $f^{-1}(\{y_0\})$ i $K \cap \widetilde{\varphi}(\widetilde{(U)}) \neq \emptyset$ (oba sadrže x). Slijedi kako je $K \cup \widetilde{\varphi}(\widetilde{U})$ povezan u $f^{-1}(\{y_0\})$, a jer je $K \subseteq K \cup \widetilde{\varphi}(\widetilde{U})$ imamo $K = K \cup \widetilde{\varphi}(\widetilde{U})$

$$
\Longrightarrow \widetilde{\varphi}(\widetilde{U}) \subseteq K \Longrightarrow \widetilde{\varphi}(\widetilde{U}) \text{ otvoren skup u } K \Longrightarrow \widetilde{\varphi}(\widetilde{U}) \text{ otvorena okolina od } x \text{ u } K.
$$

Budući je $\widetilde{\varphi}$ restrikcija od φ imamo da je i $\widetilde{\varphi}$ smještenje. Iz istog razloga je $D(\widetilde{\varphi})(z) = D(\varphi)(z)$ za sve $z \in \widetilde{U}$. Posebno, $D(\widetilde{\varphi})(z) \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ je injekcija za sve $z \in \widetilde{U}$. Time smo gotovi; za po volji odabranu točku $x \in K$ pronašli smo (uz dosta koraka između) parametriziranu plohu $\widetilde{\varphi}$ koja zadovoljava uvjete iz definicije plohe. $\square$

U sljedećim primjerima koristit ćemo dvije očite tvrdnje:

- Ako je L funkcional na $\mathbb{R}^n$ tada je on ili nul-operator ili surjekcija na $\mathbb{R}$

- Ako je (X, d) povezan metrički prostor, onda ima jednu komponentu povezanosti - sam X.

Primjer 1.4.

Neka su $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a, b, c > 0$ te neka je

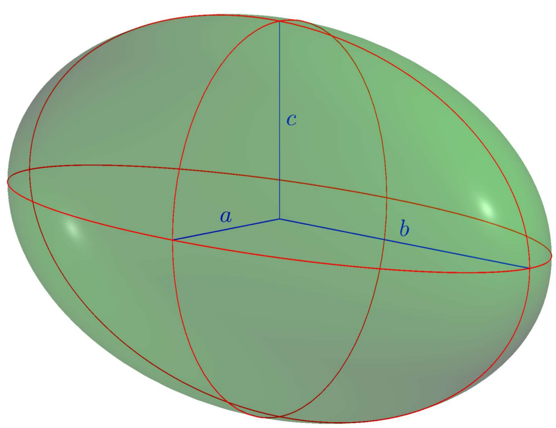
$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}.$$

Za skup S kažemo da je elipsoid (uočimo da za $a = b = c = 1$ dobivamo $S = \mathbb{S}^2$). Tvrdimo da je S ploha. Neka je $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ funkcija definirana s $f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$. Očito je f klase C^∞ te vrijedi

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{2x}{a^2} & \frac{2y}{b^2} & \frac{2z}{c^2} \end{pmatrix} \text{ za sve } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Ako je $(x, y, z) \in f^{-1}(\{1\})$, onda je $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ pa je bar jedan od x, y, z različit od 0, što povlači $D(f)(x, y, z) \neq 0$ pa je surjekcija. Dakle, 1 je regularna vrijednost od f. Po teoremu izlazi kako je svaka komponenta povezanosti od $f^{-1}(\{1\})$ ploha; stoga je dovoljno pokazati kako je $S = f^{-1}(\{1\})$ povezan.

Promatramo funkciju $g\colon \mathbb{S}^2 \to S$, $g(x, y, z) = (ax, by, cz)$. To je dobro definirana i očito neprekidna funkcija. Ako je $(x, y, z) \in S$ onda je $(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}) \in \mathbb{S}^2$ i $g(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}) = (x, y, z)$ pa vidimo kako je g i surjekcija. Budući je $\mathbb{S}^2$ povezan, slijedi i $S = g(\mathbb{S}^2)$ povezan.



Elipsoid

Primjer 1.5.

Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$ te neka je

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}.$$

Neka je $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ funkcija definirana s $f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$. Očito je f klase C^∞ te vrijedi

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{2x}{a^2} & \frac{2y}{b^2} & 0 \end{pmatrix} \text{ za sve } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Ako je $(x, y, z) \in f^{-1}(\{1\})$, onda je bar jedan od x, y različit od 0, što povlači $D(f)(x, y, z) \neq 0$ pa je surjekcija. Dakle 1 je regularna vrijednost od f. Po teoremu izlazi kako je svaka komponenta povezanosti od $f^{-1}(\{1\})$ ploha; stoga je dovoljno pokazati kako je $S = f^{-1}(\{1\})$ povezan.

Neka je $X = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leq x \leq 1 \right\}$ i $g \colon X \to \mathbb{R}^3$ dana s $g(x, y) = (a \cos 2\pi x, b \sin 2\pi x, y)$. Očito je X povezan skup (jer je konveksan pa povezan putevima) te je g neprekidna. Zato je i $g(X)$ povezan skup. Sve što preostaje je uočiti $g(X) = S$.

Propozicija 1.6.

Neka je S ploha. Tada za sve $p \in S$ postoji lokalna parametrizacija $\varphi \colon U \to \mathbb{R}^3$ od S oko p te funkcija $f \colon U \to \mathbb{R}$ klase C^∞ td. je

- $\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y))$ za sve $(x, y) \in U$

ili

- $\varphi(x, y) = (x, f(x, y), y)$ za sve $(x, y) \in U$

ili

- $\varphi(x, y) = (f(x, y), x, y)$ za sve $(x, y) \in U$.

Dokaz. Neka je $p \in S$. Tada postoji lokalna parametrizacija $\psi \colon U_1 \to \mathbb{R}^3$ od S oko p takva da je $0 \in U_1$ te $\psi(0) = p$ (napomena 13.2 iz DG1). Imamo da je diferencijal $D(\psi)(0) \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ injekcija, tj. da je $\nabla(\psi)(0)$ matrica ranga 2. Neka su ψ_1, ψ_2 i $\psi_3 \colon U_1 \to \mathbb{R}$ komponentne funkcije od ψ. Tada imamo

$$\nabla(\psi)(0) = \begin{bmatrix} \partial_1 \psi_1(0) & \partial_2 \psi_1(0) \\ \partial_1 \psi_2(0) & \partial_2 \psi_2(0) \\ \partial_1 \psi_3(0) & \partial_2 \psi_3(0) \end{bmatrix}$$

pa vidimo da su dva od tri retka linearno nezavisna. Pretpostavimo kako su to prva dva retka. Definiramo funkciju

$$F\colon U_1 \to \mathbb{R}^2$$
$$F(x,y) = (\psi_1(x,y), \psi_2(x,y))$$

Tada je

$$\nabla(F)(0) = \begin{bmatrix} \partial_1\psi_1(0) & \partial_2\psi_1(0) \\ \partial_1\psi_2(0) & \partial_2\psi_2(0) \end{bmatrix}.$$

Dakle, $\nabla(F)(0)$ je ranga 2, tj. regularna matrica pa je $D(F)(0)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ izomorfizam. Prema teoremu o inverznoj funkciji postoje otvoreni skupovi V, U u $\mathbb{R}^2$ td.

- $0 \in V \subseteq U_1$
- $F(0) \in U,\ F(V) \subseteq U$
- $F|_{V,U}\colon V \to U$ difeomorfizam.

Neka je $G\colon U \to V$ dana s $G = (F|_{V,U})^{-1}$. Definiramo $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^3$ s $\varphi = \psi \circ G$. Tada za svaki $(u,v) \in U$ vrijedi

$$\varphi(u,v) = \psi(G(u,v)) = (\psi_1(G(u,v)), \psi_2(G(u,v)), \psi_3(G(u,v))).$$

S druge strane imamo

$$(\psi_1(G(u,v)), \psi_2(G(u,v))) = F(G(u,v)) = F((F|_{V,U})^{-1}(u,v)) = F|_{V,U}((F|_{V,U})^{-1}(u,v)) = (u,v).$$

Stoga je

$$\varphi(u,v) = (u, v, \psi_3(G(u,v))).$$

Iz napomena 13.2 i 13.3 iz DG1 imamo kako je $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^3$ lokalna parametrizacija od S oko p (uočimo $p \in \varphi(U)$). Prema tome, imamo tvrdnju is iskaza propozicije (možemo definirati $f\colon U \to \mathbb{R}$, $f(u,v) = \psi_3(G(u,v))$). U preostala dva slučaja (kada su neka druga dva retka linearno nezavisna) argument je analogan. $\square$

> Dakle, plohe su lokalno grafovi glatkih funkcija!

Napomena 1.7. Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^3$ povezan skup td. za svaki $p \in S$ postoje otvoreni skup $U \subseteq \mathbb{R}^2$, funkcija $f\colon U \to \mathbb{R}$ klase C^∞ te funkcija $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^3$ td. je $\varphi(U)$ otvorena okolina od p u S te td. je $\varphi(x,y) = (x, y, f(x,y))$ za svaki $(x,y) \in U$ ili ... ili ... Tada je S ploha (dakle obrat prethodne propozicije). Argumentirati za DZ!

Primjer 1.8.

Neka je

$$S = \left\{ \left(x, y, \sqrt{x^2+y^2}\right) \,\middle|\, x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Tada S nije ploha. Zaista, pretpostavimo suprotno i uzmimo $p = (0,0,0) \in S$. Prema propoziciji postoji lokalna parametrizacija $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^3$ od S oko p te funkcija $f\colon U \to \mathbb{R}$ klase C^∞ td. je

$$\varphi(x,y) = (x, y, f(x,y)) \text{ za svaki } (x,y) \in U \text{ ili } \dots \text{ ili } \dots$$

Znamo kako je $\varphi(U)$ otvorena okolina od p u S pa stoga postoji $r > 0$ td. je

$$K_S(p,r) \subseteq \varphi(U). \quad (1)$$

Pretpostavimo kako vrijedi druga varijanta iz iskaza propozicije. Neka je $\pi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\pi(a,b,c) = (a,c)$. Za svaki $(x,y) \in U$ vrijedi $(\pi \circ \varphi)(x,y) = (x,y)$ pa zaključujemo kako je $\pi|_{\varphi(U)}$ injekcija. Promotrimo točke $p_1 = (0, \frac{r}{2}, \frac{r}{2})$ i $(0, -\frac{r}{2}, \frac{r}{2})$. Uočimo kako p_1, $p_2 \in S$ te

$$d(p,p_1) = \sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2} = \frac{r}{\sqrt{2}} < r.$$

Analogno $d(p,p_2) < r \implies p_1,\ p_2 \in K_S(p,r)$ pa prema (1) imamo p_1, $p_2 \in \varphi(U)$. Znamo da je $\pi|_{\varphi(U)}$ injekcija pa iz $p_1 \neq p_2$ slijedi $\pi(p_1) \neq \pi(p_2)$. S druge strane imamo $\pi(p_1) = (0, \frac{r}{2}) = \pi(p_2)$, kontradikcija! Dakle, ne vrijedi druga varijanta, a analogno dobijemo kako ne vrijedi ni treća. Stoga je ispunjeno

$$\varphi(x,y) = (x, y, f(x,y)) \text{ za svaki } (x,y) \in U.$$

Za svaki $(x,y) \in U$ imamo kako je $\varphi(x,y) \in S$, tj. $(x, y, f(x,y)) \in S$ pa iz definicije od S slijedi

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Obzirom da je $p \in \varphi(U)$, tj. $(0,0,0) \in \varphi(U)$ imamo $(0,0) \in U$. Budući je f klase C^∞ ona sigurno ima parcijalnu derivaciju po prvoj varijabli u točki $(0,0)$. Vrijedi

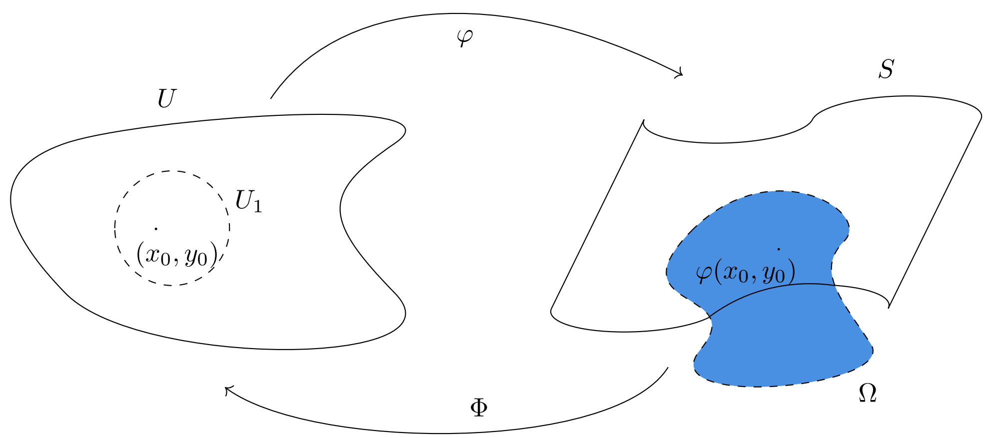
$$\partial_1 f(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(0+t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{|t|}{t}$$

što dovodi do kontradikcije budući posljednji limes ne postoji. Dakle, S nije ploha.

Važan je

Teorem 1.9.

Neka je S ploha te $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^3$ parametrizirana ploha td. $\varphi(U) \subseteq S$. Tada je $\varphi(U)$ otvoren skup u S. Nadalje, za svaki $(x_0, y_0) \in U$ postoje otvorena okolina Ω od $\varphi(x_0, y_0)$ u $\mathbb{R}^3$, glatka funkcija $\Phi\colon \Omega \to \mathbb{R}^2$ te otvorena okolina U_1 od (x_0, y_0) u U td. je $\varphi(U_1) \subseteq \Omega$ te $\Phi \circ \varphi|_{U_1} = id_{U_1}$. Posebno, ako je φ injekcija, funkcija $\varphi^{-1}\colon \varphi(U) \to U$ je neprekidna te imamo da je φ lokalna parametrizacija od S.



Dokaz. Neka je $p \in \varphi(U)$. Imamo $p = \varphi(x_0, y_0)$ za neki $(x_0, y_0) \in U$. Prema propoziciji 1.6 postoji lokalna parametrizacija $\psi\colon V \to \mathbb{R}^3$ od S oko p i funkcija $f\colon V \to \mathbb{R}$ klase C^∞ td. vrijedi jedna od tri varijante iskaza. Pretpostavimo prvu, ostale se tretiraju analogno. Vidimo

$$\psi(V) \text{ otvorena okolina od } p \text{ u } S \implies \text{ postoji otvoren skup } W \text{ u } \mathbb{R}^3 \text{ td. je } \psi(V) = W \cap S.$$
$$\varphi\colon U \to \mathbb{R}^3 \text{ neprekidna } \implies \text{ skup } \varphi^{-1}(W) \text{ je otvoren u } U \text{ (pa i u } \mathbb{R}^2).$$
$$\varphi(x_0, y_0) = p \in \psi(V) \subseteq W \implies (x_0, y_0) \in \varphi^{-1}(W).$$

Zato za $U_0 \coloneqq \varphi^{-1}(W)$ imamo U_0 otvorena okolina od (x_0, y_0) u $\mathbb{R}^2$, $U_0 \subseteq U$ i $\varphi(U_0) \subseteq W$. Nadalje, po pretpostavci teorema je $\varphi(U) \subseteq S \implies \varphi(U_0) \subseteq S$. Slijedi

$$\varphi(U_0) \subseteq W \cap S = \psi(V).$$

Neka je $(x, y) \in U_0$. Imamo da je $\varphi(x, y)$ trojka oblika $(a, b, f(a, b))$ za neki $(a, b) \in V$ pa imamo $a = \varphi_1(x, y)$, $b = \varphi_2(x, y)$, $f(a, b) = \varphi_3(x, y)$ pri čemu su φ_i komponentne funkcije od φ. Stoga za sve $(x, y) \in U_0$ vrijedi

$$\varphi_3(x, y) = f(\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)). \quad (1)$$

Definiramo funkciju $h\colon U_0 \to \mathbb{R}^2$ s $h(x, y) = (\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y))$. Očito je h glatka, a prema (1) vrijedi

$\varphi_3|_{U_0} = f \circ h$. Stoga za svaki $(x, y) \in U_0$ vrijedi

$$D(\varphi_3)(x, y) = D(f)(h(x, y)) \circ D(h)(x, y)$$

pa prelaskom na matrice imamo

$$\nabla(\varphi_3)(x, y) = \nabla(f)(h(x, y)) \cdot \nabla(h)(x, y)$$

tj.

$$\begin{bmatrix} \partial_1\varphi_3(x, y) & \partial_2\varphi_3(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_1 f(h(x, y)) & \partial_2 f(h(x, y)) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \partial_1\varphi_1(x, y) & \partial_2\varphi_1(x, y) \\ \partial_1\varphi_2(x, y) & \partial_2\varphi_2(x, y) \end{bmatrix}.$$

Množenjem matrica slijedi

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \partial_1\varphi_3(x, y) \\ \partial_2\varphi_3(x, y) \end{bmatrix}^\intercal &= \begin{bmatrix} \partial_1 f(h(x, y))\partial_1\varphi_1(x, y) + \partial_2 f(h(x, y))\partial_1\varphi_2(x, y) \\ \partial_1 f(h(x, y))\partial_2\varphi_1(x, y) + \partial_2 f(h(x, y))\partial_2\varphi_2(x, y) \end{bmatrix}^\intercal = \\ &= \partial_1 f(h(x, y)) \begin{bmatrix} \partial_1\varphi_1(x, y) & \partial_2\varphi_1(x, y) \end{bmatrix} + \partial_2 f(h(x, y)) \begin{bmatrix} \partial_1\varphi_2(x, y) & \partial_2\varphi_2(x, y) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

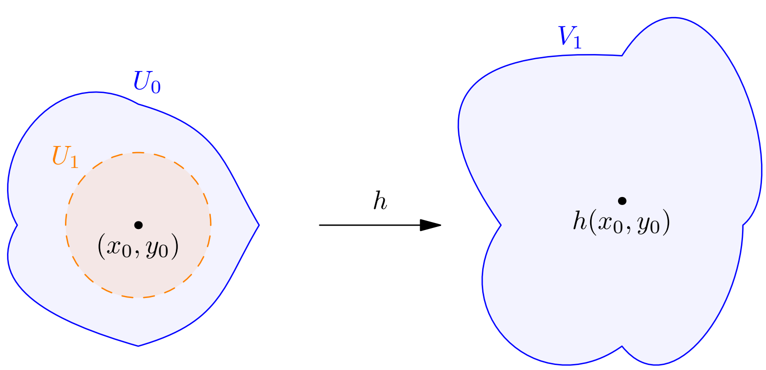
Vidimo kako je treći redak u matrici $\nabla(\varphi)(x, y)$ linearna kombinacija prva dva, a budući znamo kako je ona ranga 2 (jer je φ parametrizirana ploha), slijedi kako su prva dva retka linearno nezavisna. Međutim imamo

$$\nabla(h)(x, y) = \begin{bmatrix} \partial_1\varphi_1(x, y) & \partial_2\varphi_1(x, y) \\ \partial_1\varphi_2(x, y) & \partial_2\varphi_2(x, y) \end{bmatrix}$$

$\implies \nabla(h)(x, y)$ regularna $\implies D(h)(x, y) \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ izomorfizam. Posebno je $D(h)(x_0, y_0)$ izomorfizam pa iz teorema o inverznoj funkciji dobivamo U_1 i V_1 redom otvorene okoline od (x_0, y_0) i $h(x_0, y_0)$ u $\mathbb{R}^2$ td.

- $U_1 \subseteq U_0$
- $h(U_1) = V_1$
- $h|_{U_1, V_1} \colon U_1 \to V_1$ difeomorfizam,

odnosno skica govori tisuću simbola



Sada tvrdimo

$$\varphi(U_1) = \psi(V_1). \quad (2)$$

Za $\subseteq$, neka je $(x, y) \in U_1$. Imamo $\varphi(x, y) \in \varphi(U_1) \subseteq \varphi(U_0) \subseteq \psi(V)$. Stoga postoje $a, b \in \mathbb{R}$ td. $\varphi(x, y) = (a, b, f(a, b)) \implies (a, b) = h(x, y) \in h(U_1) = V_1$. Dakle, imamo $\varphi(x, y) = \psi(a, b) \in \psi(V_1)$.
Za $\supseteq$, neka je $(a, b) \in V_1$. Imamo $(a, b) = h(x, y)$ za $(x, y) \in U_1 \implies (a, b) = (\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)) \in V \implies$
$\implies (a, b, f(a, b)) = (\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), f(\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)))$. Iz (1) slijedi $\psi(a, b) = \varphi(x, y) \in \varphi(U_1)$.
Time smo pokazali (2).
Imamo kako je $\psi\colon V \to \mathbb{R}^3$ smještenje pa budući je V_1 otvoren u V, imamo $\psi(V_1)$ otvoren u $\psi(V)$, a stoga i $\psi(V_1)$ otvoren u S (jer $\psi(V)$ otvoren). Nadalje, imamo $(x_0, y_0) \in U_1 \implies \varphi(x_0, y_0) \in \varphi(U_1) \implies$
$\implies p \in \varphi(U_1)$. Iz (2) sada slijedi $\varphi(U_1)$ otvorena okolina od p u S. Jasno, $\varphi(U_1) \subseteq \varphi(U)$.
Dakle, pokazali smo kako za sve $p \in \varphi(U)$ postoji L_p otvorena okolina od p u S td. $L_p \subseteq \varphi(U)$

$$\implies \varphi(U) = \bigcup_{p \in \varphi(U)} L_p.$$

Posebno, $\varphi(U)$ je otvoren u S. Time je pokazana prva izreka u iskazu teorema.
Za nastavak, neka je $\pi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ projekcija na prve dvije koordinate. Za sve $(x, y) \in U_1$ imamo

$$\pi(\varphi(x, y)) = (\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)) = h(x, y) \in V_1,$$

stoga imamo $\pi(\varphi(U_1)) \subseteq V_1 \implies \varphi(U_1) \subseteq \pi^{-1}(V_1) \implies p \in \pi^{-1}(V_1)$. Nadalje, jer je h difeomorfizam, možemo pisati

$$h^{-1}(\pi(\varphi(x, y))) = (x, y).$$

Slijedi

$$((h^{-1} \circ \pi|_{\pi^{-1}(V_1)}) \circ \varphi|_{U_1})(x, y) = (x, y) \implies h^{-1} \circ \pi|_{\pi^{-1}(V_1)} \circ \varphi|_{U_1} = id_{U_1}.$$

Očito je $h^{-1} \circ \pi|_{\pi^{-1}(V_1)} \circ \varphi|_{U_1} \colon \pi^{-1}(V_1) \to \mathbb{R}^2$ klase C^∞. Definiramo $\Omega \coloneqq \pi^{-1}(V_1)$ te $\Phi \coloneqq h^{-1} \circ \pi|_\Omega$ pa imamo

$$\Phi \circ \varphi|_{U_1} = id_{U_1}.$$

Konačno, pretpostavimo kako je φ injekcija. Moramo još pokazati kako je φ smještenje (kako bi φ bila lokalna parametrizacija), a za to jedino preostaje pokazati kako je φ^{-1} neprekidna. Neka je $p \in \varphi(U)$ te neka je $(x_0, y_0) \in U$ td. $p = \varphi(x_0, y_0)$. Dokazali smo kako postoje otvorena okolina Ω od p u $\mathbb{R}^3$, $\Phi\colon \Omega \to \mathbb{R}^2$ klase C^∞ i otvorena okolina U_1 od (x_0, y_0) u U td. $\varphi(U_1) \subseteq \Omega$ te $\Phi \circ \varphi|_{U_1} = id_{U_1}$. Slijedi

$$\Phi|_{\varphi(U_1)} \circ \varphi|_{U_1} = id_{U_1}.$$

Gledamo $\varphi^{-1}\colon \varphi(U) \to U$ te restrikciju $\varphi^{-1}|_{\varphi(U_1)}\colon \varphi(U_1) \to U$. Znamo $\varphi^{-1}|_{\varphi(U_1)} \circ \varphi|_{U_1} = id_{U_1}$ pa iz gornje jednakosti imamo $\varphi^{-1}|_{\varphi(U_1)} = \Phi|_{\varphi(U_1)} \implies \varphi^{-1}|_{\varphi(U_1)}\colon \varphi(U_1) \to U$ neprekidna. Dakle, za sve $p \in \varphi(U)$ postoji otvorena okolina L od p u $\varphi(U)$ td. $\varphi^{-1}|_L$ neprekidna (naime, u prvom dijelu dokaza smo pokazali kako je $\varphi(U_1)$ otvoren u $\varphi(U)$). Uvažavajući sljedeću napomenu, slijedi kako je φ^{-1} neprekidna. $\square$

Napomena 1.10. Neka su (X, d) i (Y, d') metrički prostori, $f\colon X \to Y$ funkcija te $x_0 \in X$. Pretpostavimo kako postoji otvorena okolina U od x_0 u (X, d) td. $f|_U\colon U \to Y$ neprekidna u x_0 (s obzirom na $d|_{U\times U}$ i d'). Tada je f neprekidna u x_0. Naime, ako je V otvorena okolina od $f(x_0)$ u (Y, d'), onda postoji otvorena okolina W od x_0 u U td. $f(W) \subseteq V$; dakle W je otvorena okolina od x_0 u (X, d) pa tvrdnja slijedi.

Napomena 1.11. Ako je $U \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren, $f\colon U \to \mathbb{R}^2$ funkcija te $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ td. za svaki $x \in U$ postoji otvorena okolina U_1 od x u U td. $f|_{U_1}\colon U_1 \to \mathbb{R}^n$ klase C^r, onda je f klase C^r.

Korolar 1.12.

Neka je S ploha te neka su $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^3$, $\psi\colon V \to \mathbb{R}^3$ lokalne parametrizacije od S td. je $\varphi(U) \cap \psi(V) \neq \emptyset$. Označimo $W \coloneqq \varphi(U) \cap \psi(V)$. Tada je $\varphi^{-1}(W)$ otvoren skup u $\mathbb{R}^2$ te je funkcija

$$\psi^{-1} \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(W)}\colon \varphi^{-1}(W) \to \mathbb{R}^2$$

klase C^∞.

Dokaz. Imamo da je W otvoren u S (jer su $\varphi(U)$ i $\psi(V)$ otvoreni u S) pa je $\varphi^{-1}(W)$ otvoren u U po neprekidnosti. No, U je otvoren u $\mathbb{R}^2$ pa je i $\varphi^{-1}(W)$ otvoren u $\mathbb{R}^2$. Uzmimo sada $z \in \varphi^{-1}(W) \implies \varphi(z) \in W \implies \varphi(z) \in \psi(V) \implies \varphi(z) = \psi(z')$ za neki $z' \in V$. Prema teoremu 1.9 postoje otvorena okolina V_1 od z' u V, otvorena okolina Ω od $\psi(z')$ u $\mathbb{R}^3$ te funkcija $\Phi\colon \Omega \to \mathbb{R}^2$ klase C^∞ td.

- $\psi(V_1) \subseteq \Omega$
- $\Phi \circ \psi|_{V_1} = id_{V_1}$.

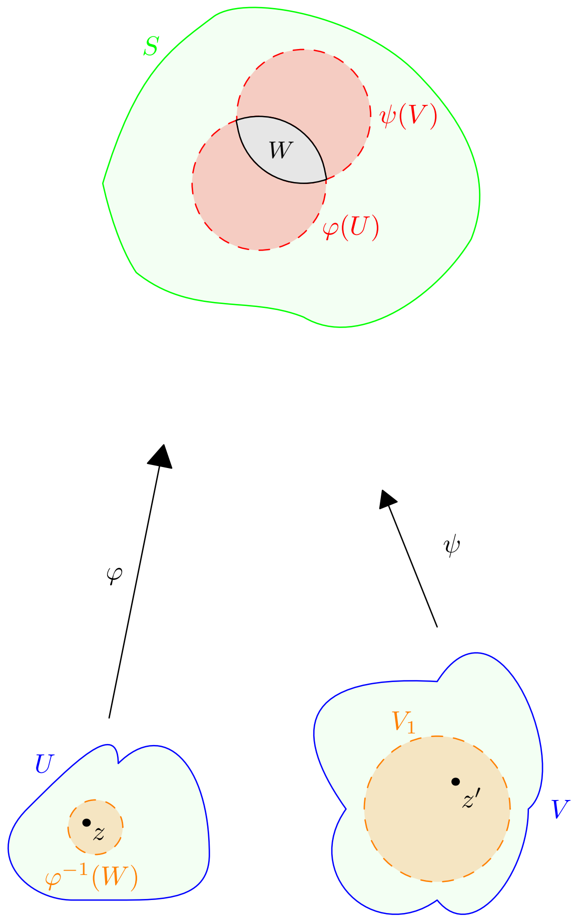
Ovo povlači da za svaki $y \in \psi(V_1)$ vrijedi $\psi^{-1}(y) = \Phi(y)$. (1)
Budući je $\psi(V_1)$ otvoren skup u $\psi(V)$ (smještenje), $\psi(V_1)$ je otvoren u S. Nadalje $\psi(z') \in \psi(V_1) \implies \varphi(z) \in \psi(V_1)$. Konačno, imamo kako je $\varphi|_{\varphi^{-1}(W)}\colon \varphi^{-1}(W) \to S$ neprekidna funkcija pa postoji otvorena okolina U_1 od z u $\varphi^{-1}(W)$ td. $\varphi(U_1) \subseteq \psi(V_1)$. Skupa s (1) izlazi kako za sve $x \in U_1$ vrijedi

$$\psi^{-1}(\varphi(x)) = \Phi(\varphi(x)).$$

Dakle imamo $\psi^{-1} \circ \varphi|_{U_1} = \Phi \circ \varphi|_{U_1} \implies \psi^{-1} \circ \varphi|_{U_1}$ je klase C^∞. Jasno, vrijedi

$$\psi^{-1} \circ \varphi|_{U_1} = \left(\psi^{-1} \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(W)}\right)|_{U_1}.$$

Zaključak: za svaki $z \in \varphi^{-1}(W)$ postoji otvorena okolina U_1 od z u $\varphi^{-1}(W)$ td. je $\left(\psi^{-1} \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(W)}\right)|_{U_1}$ klase C^∞. Prema napomeni 1.11 imamo kako je $\psi^{-1} \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(W)}$ klase C^∞. $\square$



Iskaz korolara

Definicija 1.13. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ te $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Neka je $p \in S$. Za $v \in \mathbb{R}^n$ kažemo da je **tangencijalni vektor** na S u p ako postoje $\varepsilon > 0$ i parametrizirana krivulja $c\colon \langle -\varepsilon, \varepsilon\rangle \to \mathbb{R}^n$ td. je $c(\langle -\varepsilon, \varepsilon\rangle) \subseteq S$, $c(0) = p$ i $\dot{c}(0) = v$. Skup svih tangencijalnih vektora na S u p označavamo s T_pS i nazivamo **tangencijalni konus** od S u p.*

Primjer 1.14.

Neka je $A = \{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ te $B = \{(0, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\}$. Neka su nadalje $S = A \cup B \subseteq \mathbb{R}^3$ i $p = (0, 0, 0) \in S$. Vrijedi

$$T_pS = S.$$

Dokazati za DZ (posebno, T_pS ne mora biti vektorski prostor).

Propozicija 1.15.

Neka je S ploha te neka je $p \in S$. Pretpostavimo da je $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^3$ lokalna parametrizacija od S u p te da je $x_0 \in U$ td. $\varphi(x_0) = p$. Tada je

$$D(\varphi)(x_0)(\mathbb{R}^2) = T_pS.$$

Dokaz. Dokazujemo dvije inkluzije.
Neka je $v \in \mathbb{R}^2$. Budući je U otvoren skup, postoji $r > 0$ td. $K(x_0, r) \subseteq U$. Odaberimo $\varepsilon > 0$ td. $\varepsilon\|v\| < r$. Tada za sve $t \in \langle -\varepsilon, \varepsilon\rangle$ vrijedi

$$\|tv\| = |t|\,\|v\| < \varepsilon\|v\| < r \Longrightarrow x_0 + tv \in K(x_0, r).$$

Stoga za funkciju $\alpha\colon \langle -\varepsilon, \varepsilon\rangle \to \mathbb{R}^2$ danu s $\alpha(t) = x_0 + tv$ vrijedi $\alpha(\langle -\varepsilon, \varepsilon\rangle) \subseteq U$. Definiramo $c\colon \langle -\varepsilon, \varepsilon\rangle \to \mathbb{R}^3$ s $c = \varphi\circ\alpha$. Imamo $c(0) = \varphi(\alpha(0)) = \varphi(x_0) = p$. Nadalje, $c(\langle -\varepsilon, \varepsilon\rangle) = \varphi(\alpha(\langle -\varepsilon, \varepsilon\rangle)) \subseteq$ $\subseteq \varphi(U) \subseteq S \Longrightarrow \dot{c}(0)$ je tangencijalni vektor na S u p te je stoga $\dot{c}(0) \in T_pS$. (1)
Neka su c_1, c_2, $c_3\colon \langle -\varepsilon, \varepsilon\rangle \to \mathbb{R}$ komponentne funkcije od c. Imamo

$$\dot{c}(0) = (c_1'(0), c_2'(0), c_3'(0)).$$

Znamo kako za linearan operator $D(c)(0)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ vrijedi $D(c)(0)(\lambda) = \lambda\cdot\dot{c}(0) = (\lambda c_1'(0), \lambda c_2'(0), \lambda c_3'(0))$. Posebno, $\dot{c}(0) = D(c)(0)(1)$. Iz definicije od c imamo

$$D(c)(0) = D(\varphi)(\alpha(0)) \circ D(\alpha)(0) = D(\varphi)(x_0) \circ D(\alpha)(0),$$

dok iz definicije od α imamo

$$D(\alpha)(0)(1) = \dot{\alpha}(0) = v.$$

Kombinacijom gornje tri jednakosti dobivamo

$$\dot{c}(0) = D(c)(0)(1) = D(\varphi)(x_0)(D(\alpha)(0)(1)) = D(\varphi)(x_0)(v)$$

pa iz (1) dobivamo $D(\varphi)(x_0)(v) \in T_pS$. Time je pokazana jedna inkluzija.
Obratno, neka je $v \in T_pS$. Tada postoje $\varepsilon > 0$ i parametrizirana krivulja $c\colon \langle -\varepsilon, \varepsilon\rangle \to \mathbb{R}^3$ td. je $c(0) = p$, $c(\langle -\varepsilon, \varepsilon\rangle) \subseteq S$ i $\dot{c}(0) = v$. Prema teoremu 1.9 postoje otvorena okolina U_1 od x_0 u U, otvorena okolina Ω od p u $\mathbb{R}^3$ te funkcija $\Phi\colon \Omega \to \mathbb{R}^2$ klase C^∞ td. je $\varphi(U_1) \subseteq \Omega$ te $\Phi \circ \varphi|_{U_1} = id_{U_1}$

$$\Longrightarrow \varphi^{-1}(y) = \Phi(y) \text{ za sve } y \in \varphi(U_1). \quad (2)$$

Imamo da je c neprekidna kao funkcija $\langle -\varepsilon, \varepsilon\rangle \to S$ pa budući je $\varphi(U_1)$ otvorena okolina od p u S, postoji $\delta > 0$ td. je $c(\langle -\delta, \delta\rangle) \subseteq \varphi(U_1)$. Definiramo $\alpha\colon \langle -\delta, \delta\rangle \to \mathbb{R}^2$, $\alpha = \varphi^{-1} \circ c|_{\langle -\delta, \delta\rangle}$. Iz (2) slijedi $\alpha = \Phi \circ c|_{\langle -\delta, \delta\rangle}$ pa vidimo kako je α funkcija klase C^∞. S druge strane, iz definicije od α slijedi da je

$\varphi \circ \alpha = c|_{\langle -\delta,\delta \rangle}$. Kao i maloprije imamo

$$v = \dot{c}(0) = (c|_{\langle -\delta,\delta \rangle})^{\cdot}(0) = D(c|_{\langle -\delta,\delta \rangle})(0)(1) = D(\varphi)(x_0)(D(\alpha)(0)(1)) \Longrightarrow v \in D(\varphi)(x_0)(\mathbb{R}^2).$$

Time smo pokazali i obratnu inkluziju. □

Direktno slijedi

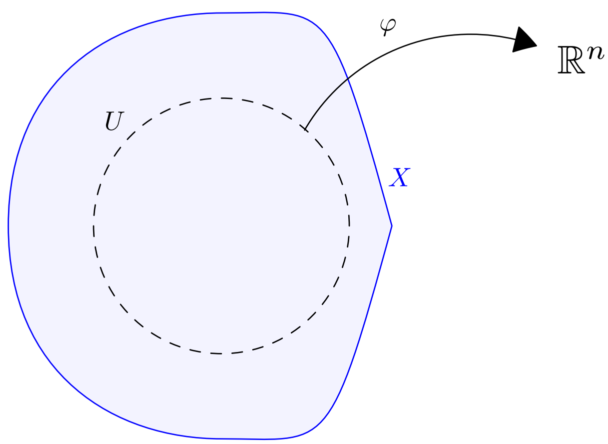
Korolar 1.16.

Neka je S ploha te $p \in S$. Tada je T_pS potprostor od $\mathbb{R}^3$ dimenzije 2.

Definicija 1.17. *Neka je S ploha te $p \in S$. Za T_pS kažemo da je* ***tangencijalna ravnina*** *na S u p.*

2 Mnogostrukosti

Definicija 2.1. *Neka je X topološki prostor te $n \in \mathbb{N}$. Za uređeni par (U, φ) kažemo da je* $n-$***karta*** *za X ako je U otvoren skup u X, $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$ smještenje te $\varphi(U)$ otvoren skup u $\mathbb{R}^n$.*



$n-$karta

Definicija 2.2. *Neka je X topološki prostor te $n \in \mathbb{N}$. Neka je $\mathcal{A}$ familija $n-$karata za X td. je*

$$\bigcup_{(U,\varphi)\in\mathcal{A}} U = X.$$

Tada za $\mathcal{A}$ kažemo da je $n-$***atlas*** *za X.*

Definicija 2.3. *Neka je X topološki prostor te $n \in \mathbb{N}$. Kažemo da je X* ***lokalno*** $n-$***euklidski*** *ako postoji $n-$atlas za X.*

Uočimo da je X lokalno $n-$euklidski ako i samo ako svaka točka od X ima otvorenu okolinu koja je homeomorfna otvorenom podskupu od $\mathbb{R}^n$. Svaka otvorena kugla u $\mathbb{R}^n$ je homeomorfna s $\mathbb{R}^n$; baci oko na skriptu iz normiranih.

Napomena 2.4. Neka je X topološki prostor te $n \in \mathbb{N}$. Tada je X lokalno $n-$euklidski ako i samo ako svaki $x \in X$ ima otvorenu okolinu u X koja je homeomorfna s $\mathbb{R}^n$. Dovoljnost je očita, pokažimo nužnost. Neka je X lokalno $n-$euklidski i $x \in X$. Tada postoje otvorena okolina U od x u X, V otvoren skup u $\mathbb{R}^n$ i $\varphi\colon U \to V$ homeomorfizam. Imamo $\varphi(x) \in V$ pa budući je V otvoren skup u $\mathbb{R}^n$ postoji $r > 0$ td. je $K(\varphi(x), r) \subseteq V$. Definiramo $U_1 = \varphi^{-1}(K(\varphi(x), r))$. Imamo da je U_1 otvorena okolina od x u X, a $\varphi|_{U_1, K(\varphi(x),r)}\colon U_1 \to K(\varphi(x), r)$ je homeomorfizam. Dakle, x ima otvorenu okolinu u X koja je homeomorfna otvorenoj kugli u $\mathbb{R}^n$, a time i $\mathbb{R}^n$.

Definicija 2.5. *Neka je X topološki prostor te $n \in \mathbb{N}$. Kažemo da je X **$n-$mnogostrukost** ako vrijedi*

(1) X je lokalno $n-$euklidski

(2) X zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti

(3) X je Hausdorffov.

Primjer 2.6.

Neka je S ploha (u $\mathbb{R}^3$). Neka je $\mathcal{E}$ euklidska topologija na S. Tada je $(S, \mathcal{E})$ $2-$mnogostrukost. Naime, prema definiciji plohe svaki x ima otvorenu okolinu u $(S, \mathcal{E})$ koja je homeomorfna otvorenom podskupu od $\mathbb{R}^2$. Prema tome, $(S, \mathcal{E})$ je lokalno $2-$euklidski.
Očito je $(S, \mathcal{E})$ i Hausdorffov prostor (topologija $\mathcal{E}$ je po definiciji inducirana euklidskom metrikom na S, dakle $(S, \mathcal{E})$ je metrizabilan).
Konačno, imamo kako je $(S, \mathcal{E})$ potprostor od $(\mathbb{R}^3, \mathcal{T})$, gdje je $\mathcal{T}$ euklidska topologija na $\mathbb{R}^3$. Jasno, $(\mathbb{R}^3, \mathcal{T})$ je separabilan (DZ) i metrizabilan $\Longrightarrow$ $(\mathbb{R}^3, \mathcal{T})$ zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti. Sada koristimo sljedeću općenitu tvrdnju: ako su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori td. $(Y, \mathcal{S})$ potprostor od $(X, \mathcal{T})$ te td. $(X, \mathcal{T})$ zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti, onda i $(Y, \mathcal{S})$ zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti (DZ). Uvažavajući ovu napomenu slijedi kako $(S, \mathcal{E})$ zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti

$$\Longrightarrow (S, \mathcal{E}) \text{ je } 2-\text{mnogostrukost.}$$

Primjer 2.7.

$$(1) \wedge (2) \not\Rightarrow (3).$$

Neka je $\mathcal{E}$ euklidska topologija na $\langle -1, 1\rangle$ i $X = \langle -1, 1\rangle \cup \{2\}$. Definiramo

$$\mathcal{T} = \mathcal{E} \cup \{U \cup \{2\} \,|\, U \in \mathcal{E} \text{ takav da } U \cup \{0\} \in \mathcal{E}\}.$$

$\mathcal{T}$ je topologija na X (DZ). Tvrdimo da je $(X, \mathcal{T})$ lokalno $1-$euklidski te da zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti, ali da nije Hausdorffov.
Kako bi pokazali da je lokalno $1-$ euklidski, trebamo oko svake točke $x \in X$ naći otvorenu okolinu u $(X, \mathcal{T})$ homeomorfnu otvorenom podskupu od $\mathbb{R}$. Promatramo slučaj $x \in \langle -1, 1\rangle$ i slučaj $x = 2$.
Prvo, uočimo kako je $(\langle -1, 1\rangle, \mathcal{E})$ potprostor od $(X, \mathcal{T})$. Stoga za svaki $x \in \langle -1, 1\rangle$ vrijedi kako je $\langle -1, 1\rangle$ otvorena okolina od x u $(X, \mathcal{T})$ i to homeomorfna otvorenom podskupu od $\mathbb{R}$.
Sada tvrdimo kako je $\langle -1, 0\rangle \cup \langle 0, 1\rangle \cup \{2\}$ otvorena okolina od 2 u $(X, \mathcal{T})$ te da je homeomorfna otvorenom podskupu od $\mathbb{R}$. Prva tvrdnja slijedi iz definicije, zato se fokusiramo drugu. Neka

je $\mathcal{S}$ relativna topologija na $\langle -1, 0\rangle \cup \langle 0, 1\rangle \cup \{2\}$. Tvrdimo kako su topološki prostori

$$(\langle -1, 0\rangle \cup \langle 0, 1\rangle \cup \{2\}, \mathcal{S}) \text{ i } (\langle -1, 1\rangle, \mathcal{E}) \text{ homeomorfni.}$$

Definiramo $f\colon \langle -1, 0\rangle \cup \langle 0, 1\rangle \cup \{2\} \to \langle -1, 1\rangle$ s

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{ako } x \neq 2 \\ 0 & \text{ako } x = 2. \end{cases}$$

Očito je f bijekcija; pokažimo kako je i neprekidna (s obzirom na $\mathcal{S}$ i $\mathcal{E}$), a zatim kako je i f^{-1} neprekidna. Neka je $U \in \mathcal{E}$, tvrdimo $f^{-1}(U) \in \mathcal{S}$.

1° $0 \notin U \implies f^{-1}(U) = U \in \mathcal{T}$. Jasno, $f^{-1}(U) = (\langle -1, 0\rangle \cup \langle 0, 1\rangle \cup \{2\}) \cap f^{-1}(U) \in \mathcal{S} \implies$ $\implies f^{-1}(U) \in \mathcal{S}$.

2° $0 \in U \implies f^{-1}(U) = (U \setminus \{0\}) \cup \{2\} \implies f^{-1}(U) \in \mathcal{S}$.

Dakle, f je neprekidna s obzirom na $\mathcal{S}$ i $\mathcal{E}$. Sada pokazujemo neprekidnost od f^{-1} s obzirom na $\mathcal{E}$ i $\mathcal{S}$.
Neka je $V \in \mathcal{S}$. Imamo da je $(f^{-1})^{-1}(V) = f(V)$ pa je dovoljno dokazati da je $f(V) \in \mathcal{E}$. Imamo

$$V \in \mathcal{S} \implies V = V' \cap (\langle -1, 0\rangle \cup \langle 0, 1\rangle \cup \{2\}) \text{ za neki } V' \in \mathcal{T} \implies V \in \mathcal{T}.$$

Ponovno promatramo dva slučaja.

1° $V \in \mathcal{E} \implies \{2\} \notin V \implies V \subseteq \langle -1, 0\rangle \cup \langle 0, 1\rangle \implies f(V) = V \implies f(V) \in \mathcal{E}$.

2° $V = U \cup \{2\}$, gdje je $U \in \mathcal{E}$ td. je $U \cup \{0\} \in \mathcal{E} \implies f(V) = f(U) \cup \{0\} \implies f(V) \in \mathcal{E}$.

Dakle, f^{-1} je neprekidna $\implies f$ je homeomorfizam topoloških prostora $(\langle -1, 0\rangle \cup \langle 0, 1\rangle \cup \{2\}, \mathcal{S})$ i $(\langle -1, 1\rangle, \mathcal{E})$. Prema tome, $\langle -1, 0\rangle \cup \langle 0, 1\rangle \cup \{2\}$ je otvorena okolina od 2 u $(X, \mathcal{T})$ homeomorfna otvorenom podskupu u $\mathbb{R}$, a time smo konačno pokazali

$$(X, \mathcal{T}) \text{ je } 1 - \text{euklidski.}$$

Prelazimo na drugi aksiom prebrojivosti. Znamo kako $\mathbb{R}$ (s euklidskom topologijom) zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti $\implies (\langle -1, 1\rangle, \mathcal{E})$, kao njegov potprostor, zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti $\implies$ postoji prebrojiva baza $\mathcal{B}_1$ topologije $\mathcal{E}$. Definiramo

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \left\{ \left\langle -\frac{1}{n}, 0 \right\rangle \cup \left\langle 0, \frac{1}{n} \right\rangle \cup \{2\} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Pokazat ćemo kako je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}$. Budući je prebrojiva, po definiciji će sljediti kako $(X, \mathcal{T})$ zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti.

Vrijedi da je $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$. Neka je $U \in \mathcal{E}$ td. je $U \cup \{0\} \in \mathcal{E}$. Dokažimo da se $U \cup \{2\}$ može zapisati kao unija elemenata od $\mathcal{B}$. Neka je $x \in U \cup \{2\}$. Za divno čudo, dva slučaja.

1° Ako je $x \in U$, budući $U \in \mathcal{E}$, onda postoji $\mathcal{B} \in \mathcal{B}_1$ td. $x \in B \subseteq U$, odnosno imamo $B \in \mathcal{B}$ i $x \in B \subseteq U \cup \{2\}$.

2° Pretpostavimo sada $x = 2$.
$U \cup \{0\} \in \mathcal{E} \implies \exists r > 0$ td. je $r < 1$ i $\langle -r, r\rangle \subseteq U \cup \{0\}$. Neka je $n \in \mathbb{N}$ td. $\frac{1}{n} < r$ pa imamo

$$\left\langle -\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right\rangle \subseteq U \cup \{0\} \implies \left\langle -\frac{1}{n}, 0\right\rangle \cup \left\langle 0, \frac{1}{n}\right\rangle \subseteq U \implies \left\langle -\frac{1}{n}, 0\right\rangle \cup \left\langle 0, \frac{1}{n}\right\rangle \cup \{2\} \subseteq U \cup \{2\}.$$

Prema tome, postoji $B \in \mathcal{B}$ td. je $x \in B \subseteq U \cup \{2\}$.

Zaključak: za svaki $x \in U \cup \{2\}$ postoji $B \in \mathcal{B}$ td. je $x \in B \subseteq U \cup \{2\} \implies U \cup \{2\}$ se može napisati kao unija elemenata iz $\mathcal{B} \implies \mathcal{B}$ je baza topologije $\mathcal{T}$

$$\implies (X, \mathcal{T}) \text{ zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti.}$$

Pretpostavimo sada da je $(X, \mathcal{T})$ Hausdorffov prostor

$$\begin{aligned}
&\implies \text{ postoje } V, W \in \mathcal{T} \text{ td. } 0 \in V,\ 2 \in W \implies \\
&\implies W = U \cup \{2\},\ \text{gdje je } U \in \mathcal{E} \text{ td. } U \cup \{0\} \in \mathcal{E} \implies \\
&\implies \text{ postoji } r > 0 \text{ td. } \langle -r, r\rangle \subseteq U \cup \{0\}. \quad (1)
\end{aligned}$$

Jasno, $2 \notin V \implies V \in \mathcal{E}$. Budući je $0 \in V$, postoji $s > 0$ td. je

$$\langle -s, s\rangle \subseteq V. \quad (2)$$

Odaberimo $t > 0$ td. je $t < r$ i $t < s$. Iz (1) i (2) redom slijedi $t \in U$ i $t \in V \quad \perp$

$$\implies (X, \mathcal{T}) \text{ nije Hausdorffov.}$$

Primjer 2.8.

$$(1) \wedge (3) \not\Rightarrow (2).$$

Neka je A neprebrojiv skup. Za $\alpha \in A$ neka je $\mathcal{T}_\alpha$ topologija na $\mathbb{R} \times \{\alpha\}$ definirana s

$$\mathcal{T}_\alpha = \{U \times \{\alpha\} \,|\, U \text{ otvoren u } \mathbb{R}\}.$$

Uočimo da je za $\alpha \in A$ funkcija $\mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \{\alpha\}$, $x \mapsto (x, \alpha)$ homoemorfizam. Neka je

$$X = \bigcup_{\alpha \in A} \mathbb{R} \times \{\alpha\}$$

te neka je

$$\mathcal{T} = \{W \subseteq X \,|\, W \cap (\mathbb{R} \times \{\alpha\}) \in \mathcal{T}_\alpha \text{ za sve } \alpha \in A\}\,.$$

Lako se provjeri kako je $\mathcal{T}$ topologija na X (DZ) te kako je $(\mathbb{R} \times \{\alpha\}, \mathcal{T}_\alpha)$ potprostor od $(X, \mathcal{T})$. Uočimo još kako je $\mathbb{R} \times \{\alpha\} \in \mathcal{T}$ za sve $\alpha \in A$. Zaključak: ako je $\alpha \in A$ i $x \in \mathbb{R} \times \{\alpha\}$, onda je $\mathbb{R} \times \{\alpha\}$ otvorena okolina od x u $(X, \mathcal{T})$ homeomorfna s $\mathbb{R}$

$$\implies (X, \mathcal{T}) \text{ je lokalno } 1-\text{euklidski.}$$

Neka su $x \neq y \in X$. Promatramo dva slučaja.

1° Postoji $\alpha \in A$ td. je $x, y \in \mathbb{R} \times \{\alpha\} \implies$ postoje $U, V \in \mathcal{T}_\alpha$ td. je $x \in U$, $y \in V$ i $U \cap V = \emptyset$.

2° $x \in \mathbb{R} \times \{\alpha\}$ i $y \in \mathbb{R} \times \{\beta\}$ za $\alpha, \beta \in A$, td. $\alpha \neq \beta \implies \mathbb{R} \times \{\alpha\}$ i $\mathbb{R} \times \{\beta\}$ su disjunktne otvorene okoline točaka x i y u $(X, \mathcal{T})$

$$\implies (X, \mathcal{T}) \text{ je Hausdorffov.}$$

Konačno, pretpostavimo kako $(X, \mathcal{T})$ zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti $\implies$ postoji prebrojiva baza $\mathcal{B}$ topologije $\mathcal{T}$. Za svaki $\alpha \in A$ imamo

$$(0, \alpha) \in \mathbb{R} \times \{\alpha\} \implies \text{ postoji } \mathcal{B}_\alpha \in \mathcal{B} \text{ td. je } (0, \alpha) \in \mathcal{B}_\alpha \subseteq \mathbb{R} \times \{\alpha\}.$$

Imamo funkciju $A \to \mathcal{B}, \alpha \mapsto \mathcal{B}_\alpha$ koja je injekcija (DZ). To je nemoguće jer je A neprebrojiv, a $\mathcal{B}$ prebrojiv

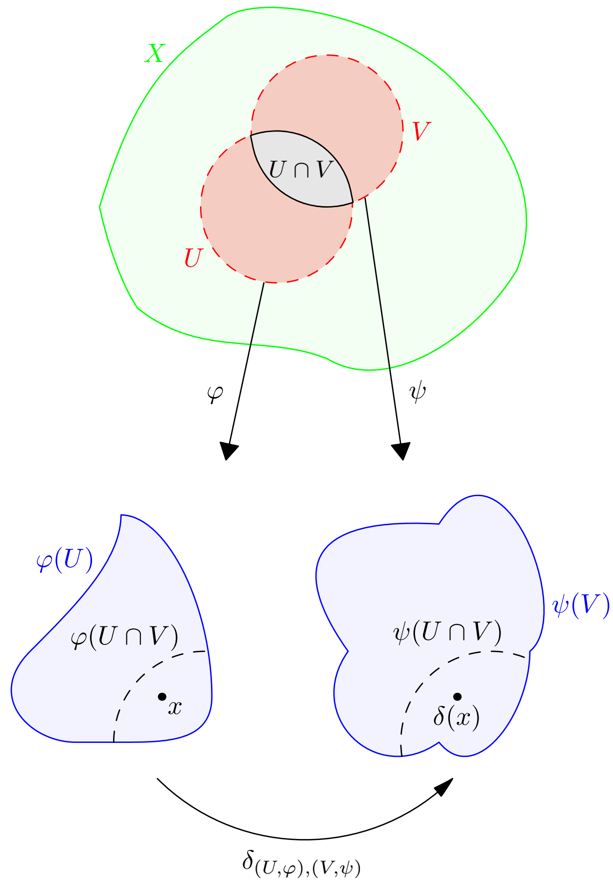
$$\implies (X, \mathcal{T}) \text{ ne zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti.}$$

Definicija 2.9. *Neka je X topološki prostor, $n \in \mathbb{N}$ te neka su (U, φ), (V, ψ) $n-$karte za X. Definiramo funkciju*

$$\delta_{(U,\varphi),(V,\psi)} \colon \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$
$$\delta_{(U,\varphi),(V,\psi)}(x) = \psi(\varphi^{-1}(x)).$$

Uočimo kako su skupovi $\varphi(U \cap V)$ i $\psi(U \cap V)$ otvoreni u $\mathbb{R}^n$. Za funkciju $\delta_{(U,\varphi),(V,\psi)}$ kažemo kako je ***funkcija prijelaza karata*** *(U, φ) i (V, ψ). Za karte (U, φ) i (V, ψ) kažemo da su* ***glatko povezane*** *ili C^∞ povezane ako je funkcija $\delta_{(U,\varphi),(V,\psi)}$ glatka, tj. klase C^∞.*

Napomena 2.10. Uočimo kako su (U, φ) i (V, ψ) glatko povezane u slučaju $U \cap V = \emptyset$.



Funkcija prijelaza (koristimo injektivnost od φ)

Definicija 2.11. *Neka je X $n-$mnogostrukost te neka je Φ $n-$atlas za X. Ako su (U,φ) i $(V,\psi) \in \Phi$, onda za $\delta_{(U,\varphi),(V,\psi)}$ kažemo da je* ***funkcija prijelaza atlasa*** *Φ. Za Φ kažemo da je* ***gladak $n-$atlas*** *za X ako je svaka funkcija prijelaza od Φ klase C^∞, tj. ako su svake dvije karte iz Φ glatko povezane.*

Definicija 2.12. *Pretpostavimo kako je Φ gladak $n-$atlas za X. Kažemo da je Φ* ***maksimalan gladak $n-$atlas*** *za X ako za svaki gladak $n-$atlas Φ' za X td. je $\Phi \subseteq \Phi'$ vrijedi $\Phi = \Phi'$.*

Teorem 2.13.

Neka je Φ gladak $n-$atlas za X. Tada postoji jedinstveni maksimalan gladak $n-$atlas Λ za X td. je $\Phi \subseteq \Lambda$.

Dokaz. Neka je $\mathcal{A}$ familija svih glatkih $n-$atlasa za X. Na $\mathcal{A}$ definiramo binarnu relaciju $\sim$ s

$$\begin{aligned}\Psi_1 \sim \Psi_2 \Longleftrightarrow & (\forall (U_1,\varphi_1) \in \Psi_1)(\forall (U_2,\varphi_2) \in \Psi_2) \text{ vrijedi } (U_1,\varphi_1) \text{ i } (U_2,\varphi_2) \\ & \text{glatko povezane te } (U_2,\varphi_2) \text{ i } (U_1,\varphi_1) \text{ glatko povezane.}\end{aligned}$$

Tvrdimo kako je $\sim$ relacija ekvivalencije. Refleksivnost i simetričnost su očite pa prelazimo na tranzitivnost. Pretpostavimo Ψ_1, Ψ_2, $\Psi_3 \in \mathcal{A}$ td. $\Psi_1 \sim \Psi_2$ i $\Psi_2 \sim \Psi_3$. Pokažimo $\Psi_1 \sim \Psi_3$.
Neka je $(U_1, \varphi_1) \in \Psi_1$ i $(U_3, \varphi_3) \in \Psi_3$ te neka je $x_0 \in \varphi_1(U_1 \cap U_3)$. Imamo $\varphi_1^{-1}(x_0) \in X$ pa jer je Ψ_2 atlas postoji $(U_2, \varphi_2) \in \Psi_2$ td. je $\varphi_1^{-1}(x_0) \in U_2$. No, $x_0 \in \varphi_1(U_1 \cap U_3) \implies \varphi_1^{-1}(x_0) \in U_1 \cap U_3 \implies$ $\implies \varphi_1^{-1}(x_0) \in U_1 \cap U_2 \cap U_3 \implies x_0 \in \varphi_1(U_1 \cap U_2 \cap U_3)$. Označimo

$$W \coloneqq \varphi_1(U_1 \cap U_2 \cap U_3).$$

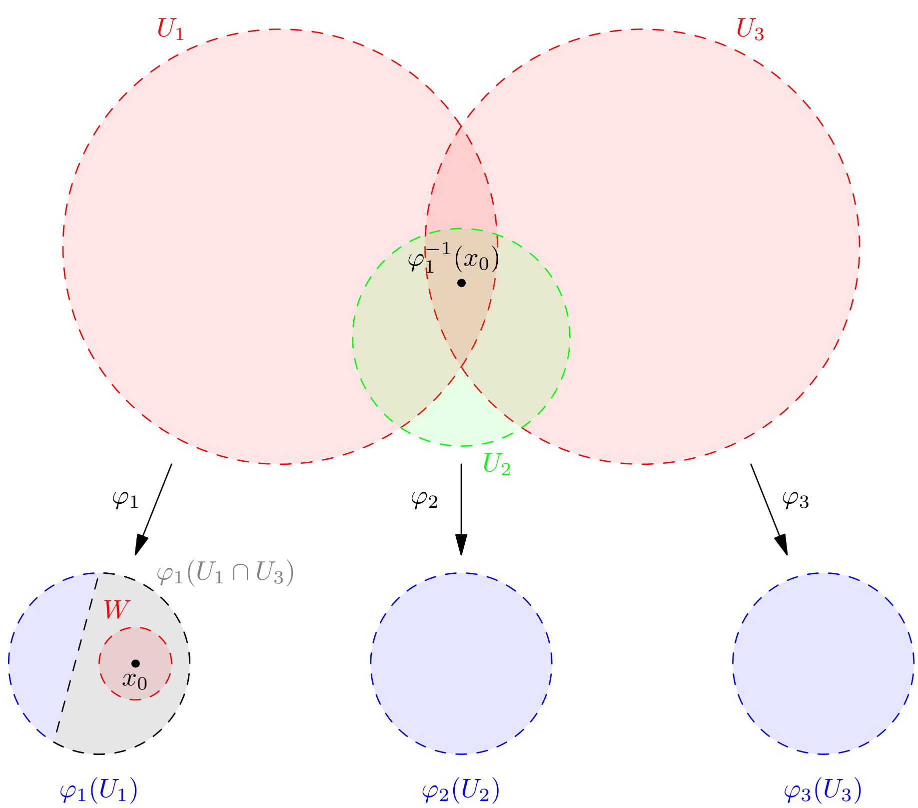
Imamo kako je W otvoren skup u $\mathbb{R}^n$ te za svaki $x \in W$ vrijedi

$$\delta_{(U_1,\varphi_1),(U_3,\varphi_3)}(x) = \varphi_3(\varphi_1^{-1}(x)) = \varphi_3(\varphi_2^{-1}(\varphi_2(\varphi_1^{-1}(x)))) = \delta_{(U_2,\varphi_2),(U_3,\varphi_3)}(\delta_{(U_1,\varphi_1),(U_2,\varphi_2)}(x)).$$

Dakle, $\delta_{(U_1,\varphi_1),(U_3,\varphi_3)}|_W = \delta_{(U_2,\varphi_2),(U_3,\varphi_3)} \circ (\delta_{(U_1,\varphi_1),(U_2,\varphi_2)}|_W)$. Znamo $\Psi_1 \sim \Psi_2 \implies \delta_{(U_1,\varphi_1),(U_2,\varphi_2)}$ klase C^∞ pa je takva i njena restrikcija na W. Isto tako, $\Psi_2 \sim \Psi_3 \implies \delta_{(U_2,\varphi_2),(U_3,\varphi_3)}$ klase C^∞. Sve skupa, $\delta_{(U_1,\varphi_1),(U_3,\varphi_3)}|_W$ je klase C^∞. Po lokalnom svojstvu diferencijabilnosti sada slijedi kako je i $\delta_{(U_1,\varphi_1),(U_3,\varphi_3)}$ klase C^∞.
Dakle, (U_1, φ_1) i (U_3, φ_3) su glatko povezane, a analogno slijedi kako su (U_3, φ_3) i (U_1, φ_1) glatko povezane

$$\implies \Psi_1 \sim \Psi_3.$$

Dakle, $\sim$ je relacija ekvivalencije na $\mathcal{A}$. Kao i obično, prethodni dokaz je puno jasniji kada se nacrta nego isparsira pa zato (na kraju samo faktoriziramo funkciju prijelaza preko plavih skupova)



Sada konstruiramo maksimalan gladak $n-$atlas za X. Očito je $\Phi \in \mathcal{A}$. Definiramo

$$\Lambda = \bigcup_{\substack{\Psi \in \mathcal{A} \\ \Psi \sim \Phi}} \Psi.$$

Imamo da je Λ familija $n-$karata za X pa iz $\Phi \subseteq \Lambda$ (i što je Φ $n-$atlas za X) slijedi kako je Λ $n-$atlas za X. Nadalje, ako su (U, φ), $(V, \psi) \in \Lambda$, onda postoje Ψ_1, $\Psi_2 \in \mathcal{A}$ td.

$$\Psi_1 \sim \Phi \text{ i } \Psi_2 \sim \Phi \text{ te } (U, \varphi) \in \Psi_1 \text{ i } (V, \psi) \in \Psi_2$$

$\Longrightarrow \Psi_1 \sim \Psi_2 \Longrightarrow (U, \varphi)$, (V, ψ) glatko povezani. Dakle, Λ je gladak $n-$atlas.
Uočimo sljedeće: ako je Φ' gladak $n-$atlas za X td. je $\Phi \subseteq \Phi'$, onda za svaki $(U, \varphi) \in \Phi$ i svaki $(V, \psi) \in \Phi'$ vrijedi kako su (U, φ) i (V, ψ) glatko povezani i (V, ψ) i (U, φ) glatko povezani. Naime, imamo kako su obe karte u Φ', a Φ' je gladak $n-$atlas. Stoga vrijedi $\Phi \sim \Phi'$, odnosno $\Phi' \subseteq \Lambda$. Dakle, vrijedi implikacija

$$(\Phi' \text{ je gladak } n-\text{atlas } \wedge \ \Phi \subseteq \Phi') \Longrightarrow \Phi' \subseteq \Lambda. \quad (1)$$

Pretpostavimo sada kako je Φ' gladak $n-$atlas za X td. je $\Lambda \subseteq \Phi'$. Iz (1) onda slijedi $\Phi' \subseteq \Lambda$, tj. $\Phi' = \Lambda$. Dakle, Λ je maksimalan gladak $n-$atlas za X (i sadrži Φ). Preostaje još pokazati jedinstvenost pa pretpostavimo kako postoji još jedan maksimalan gladak $n-$atlas za X koji sadrži Φ, nazovimo ga Λ'. Opet, (1) daje $\Lambda' \subseteq \Lambda$ pa iz maksimalnosti od Λ' slijedi $\Lambda' = \Lambda$, što je i trebalo pokazati. □

Propozicija 2.14.

Pretpostavimo kako je Φ maksimalan gladak $n-$atlas za X. Neka je $(U, \varphi) \in \Phi$ te neka je $W \neq \emptyset$ otvoren skup u X td. $W \subseteq U$. Tada je $(W, \varphi|_W) \in \Phi$.

Dokaz. Jasno, $\varphi(W)$ otvoren skup u $\mathbb{R}^n$ te $\varphi|_W : W \to \mathbb{R}^n$ smještenje. Dakle $(W, \varphi|_W)$ je $n-$karta za X. Stoga je

$$\Phi \cup \{(W, \varphi|_W)\}$$

$n-$atlas za X. Prema tome, dovoljno je pokazati kako je gornji atlas gladak. Neka je $(V, \psi) \in \Phi$ po volji (budući je Φ gladak $n-$atlas trebamo ispitati samo funkcije prijelaza između ove karte i karte $(W, \varphi|_W)$). Imamo funkciju prijelaza $\delta_{(W,\varphi|_W),(V,\psi)} : \varphi(W \cap V) \to \psi(W \cap V)$ te za svaki $x \in \varphi(W \cap V)$ vrijedi

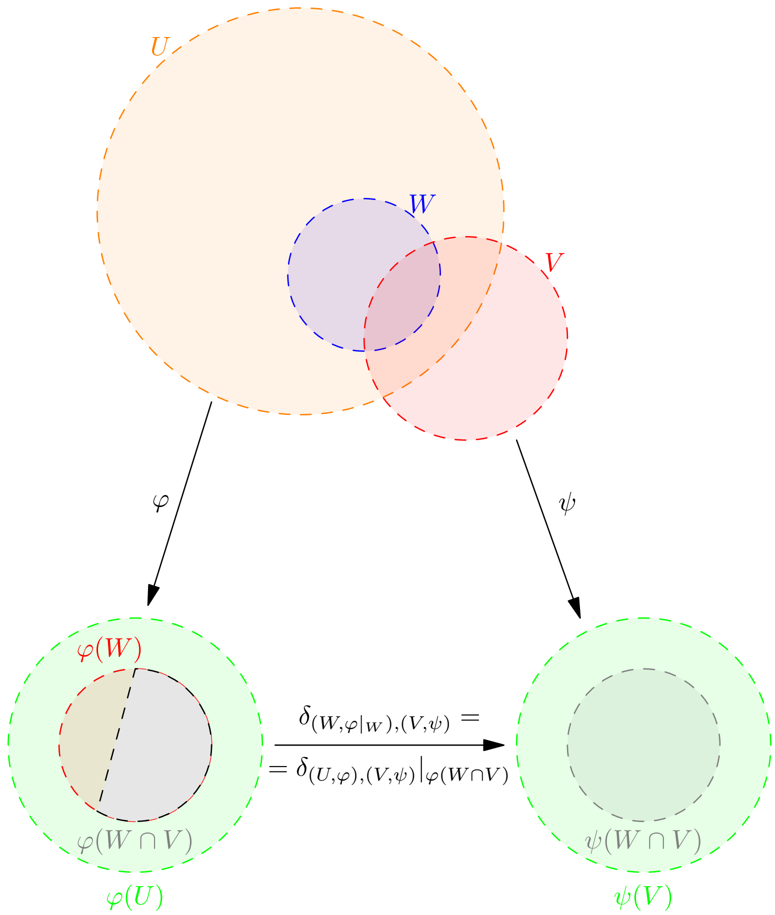
$$\delta_{(W,\varphi|_W),(V,\psi)}(x) = \psi((\varphi|_W)^{-1}(x)) = \psi(\varphi^{-1}(x)) = \delta_{(U,\varphi),(V,\psi)}(x).$$

Dakle,

$$\delta_{(W,\varphi|_W),(V,\psi)} = \delta_{(U,\varphi),(V,\psi)}|_{\varphi(W \cap V)}.$$

Budući je $\delta_{(U,\varphi),(V,\psi)}$ klase C^∞ (jer su obe karte u Φ), slijedi kako je $\delta_{(W,\varphi|_W),(V,\psi)}$ klase C^∞ pa stoga imamo kako su $(W, \varphi|_W)$ i (V, ψ) glatko povezane. Analogno dobijemo i obrnuti poredak $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow \Phi \cup \{(W, \varphi|_W)\}$ je gladak $n-$atlas za X i time smo gotovi (jer sadrži Φ pa iz maksimalnosti slijedi $(W, \varphi|_W) \in \Phi$).
Možda treba odustati od zapisivanja ovih dokaza i samo crtati krugove



$\square$

Sada ćemo uvesti diferencijalne mnogostrukosti; ipak, prije toga malo svijesti o tome što radimo.

> Maksimalni glatki atlasi predstavljaju dobar okvir za naša razmatranja! Naime, prema propoziciji 2.14, oni se dobro ponašaju prema restrikcijama. S druge strane, ne podigravaju prevelikim zahtjevima, budući se prema teoremu 2.13 bilo koji gladak atlas nalazi u jedinstvenom maksimalnom glatkom. Stoga ćemo uzeti maksimalne glatke atlase kao ambijent za našu teoriju (, a prethodna dva rezultata onda možemo uzeti kao pripremne). U svjetlu toga:

Definicija 2.15. *Neka je $n \in \mathbb{N}$, X $n-$mnogostrukost te Φ maksimalan gladak $n-$atlas za X. Tada za (X, Φ) kažemo kako je* ***diferencijalna $n-$mnogostrukost****. Koristimo još i nazive diferencijabilna $n-$mnogostrukost i glatka $n-$mnogostrukost.*

Napomena 2.16. Neka je Φ gladak $n-$atlas za X. Tada za sve (U,φ),$(V,\psi) \in \Phi$ vrijedi kako je funkcija prijelaza $\delta_{(U,\varphi),(V,\psi)} \colon \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ difeomorfizam (koristit ćemo u narednom primjeru).

Primjer 2.17.

Neka je S ploha u $(\mathbb{R}^3)$. Neka je $\mathcal{E}$ euklidska topologija na S. Znamo kako je $(S, \mathcal{E})$ $2-$mnogostrukost. Ako je $\varphi \colon U \to \mathbb{R}^3$ lokalna parametrizacija od S, neka je $\varphi^{-1} \colon \varphi(U) \to \mathbb{R}^2$ inverz od φ. Neka je

$$\Phi = \left\{ (\varphi(U), \varphi^{-1}) \,\middle|\, \varphi \colon U \to \mathbb{R}^3 \text{ lokalna parametrizacija od } S \right\}.$$

Tvrdimo kako je $((S, \mathcal{E}), \Phi)$ diferencijalna $2-$mnogostrukost (tj. kako je Φ maksimalan gladak $2-$atlas za $(S, \mathcal{E})$). Naravno, nacrtati ...
Jasno, ako je $\varphi \colon U \to \mathbb{R}^3$ lokalna parametrizacija od S, onda je $(\varphi(U), \varphi^{-1})$ $2-$karta za $(S, \mathcal{E})$. Stoga je Φ je $2-$ atlas za $(S, \mathcal{E})$. Dokažimo sada kako je Φ gladak $2-$atlas za $(S, \mathcal{E})$.
Neka su $\varphi \colon U \to \mathbb{R}^3$ te $\psi \colon V \to \mathbb{R}^3$ lokalne parametrizacije od S. Želimo dokazati kako su $2-$karte $(\varphi(U), \varphi^{-1})$ i $(\psi(V), \psi^{-1})$ glatko povezane, tj. da je funkcija

$$\delta_{(\varphi(U),\varphi^{-1}),(\psi(V),\psi^{-1})} \colon \varphi^{-1}(\varphi(U) \cap \psi(V)) \to \psi^{-1}(\varphi(U) \cap \psi(V))$$

klase C^∞. Za svaki $x \in \varphi^{-1}(\varphi(U) \cap \psi(V))$ vrijedi

$$\delta_{(\varphi(U),\varphi^{-1}),(\psi(V),\psi^{-1})}(x) = \psi^{-1}(\varphi(x))$$

pa vidimo kako je $\delta_{(\varphi(U),\varphi^{-1}),(\psi(V),\psi^{-1})}$ upravo funkcija iz korolara 1.12. Posebno je klase C^∞ pa zaključujemo kako je Φ gladak $2-$atlas za $(S, \mathcal{E})$. Dokažimo još kako je Φ maksimalan gladak $2-$atlas za $(S, \mathcal{E})$.
Pretpostavimo Ψ gladak $2-$atlas za $(S, \mathcal{E})$ td. $\Phi \subseteq \Psi$. Uzmimo $(V, \psi) \in \Psi$ po volji; pokazat ćemo $(V, \psi) \in \Phi$. Jasno, $\psi(V)$ otvoren u $\mathbb{R}^2$ i $\psi^{-1} \colon \psi(V) \to V$ je homeomorfizam, dakle ψ^{-1} kao funkcija $\psi(V) \to \mathbb{R}^3$ je smještenje čija je slika otvoren skup u S. Dokažimo još da je $\psi^{-1} \colon \psi(V) \to \mathbb{R}^3$ glatka funkcija čiji je diferencijal u svakoj točki injektivan. Neka je $x \in \psi(V)$. Prvo imamo

$$\psi^{-1}(x) \in V \implies \psi^{-1}(x) \in S \implies \text{ postoji lokalna parametrizacija } \varphi \colon U \to \mathbb{R}^3 \text{ od } S \text{ oko } \psi^{-1}(x),$$

a zatim

$$(\varphi(U), \varphi^{-1}) \in \Phi \overset{\Phi \subseteq \Psi}{\Longrightarrow} (\varphi(U), \varphi^{-1}) \in \Psi \overset{\Psi}{\Longrightarrow} (V, \psi), (\varphi(U), \varphi^{-1}) \text{ glatko povezane}.$$

Stoga je

$$\delta_{(V,\psi),(\varphi(U),\varphi^{-1})}\colon \psi(V\cap\varphi(U)) \to \varphi^{-1}(V\cap\varphi(U))$$
$$\delta_{(V,\psi),(\varphi(U),\varphi^{-1})}(z) = \varphi^{-1}(\psi^{-1}(z))$$

klase C^∞. Uočimo kako je $\psi(V\cap\varphi(U))$ otvorena okolina od x u $\psi(V)$ (pa i u $\mathbb{R}^2$). Imamo kako je

$$\varphi\circ\delta\colon \psi(V\cap\varphi(U)) \to \mathbb{R}^3$$

klase C^∞, a to je funkcija

$$\psi(V\cap\varphi(U)) \ni z \mapsto \varphi(\varphi^{-1}(\psi^{-1}(z))) = \psi^{-1}(z).$$

Dakle, $\psi^{-1}\mid_{\psi(V\cap\varphi(U))}$ je klase C^∞. Po lokalnom svojstvu diferencijabilnosti slijedi kako je $\psi^{-1}\colon \psi(V)\to\mathbb{R}^3$ klase C^∞. Iz $\psi^{-1}|_{\psi(V\cap\varphi(U))} = \varphi\circ\delta$ slijedi

$$D(\psi^{-1})(x) = D(\varphi)(\delta(x))\circ D(\delta)(x).$$

Prvi diferencijal je injekcija jer je lokalna parametrizacija, a drugi je izomorfizam prema napomeni 2.16. Dakle, $D(\psi^{-1})(x)$ je injekcija, što kompletira dokaz kako je $\psi^{-1}\colon\psi(V)\to\mathbb{R}^3$ lokalna parametrizacija od S

$$\implies (\psi^{-1}(\psi(V)), (\psi^{-1})^{-1}) \in \Phi \implies (V,\psi)\in\Phi.$$

Kako je (V,ψ) bio proizvoljan, slijedi $\Psi\subseteq\Phi$, odnosno $\Psi=\Phi$. Stoga je Φ maksimalan gladak 2−atlas za $(S,\mathcal{E})$ i time smo gotovi.

Definicija 2.18. *Neka je (X,Φ) diferencijalna $n-$mnogostrukost te neka je (Y,Ψ) diferencijalna $m-$mnogostrukost. Neka je $f\colon X\to Y$ neprekidna funkcija. Kažemo da je f* ***glatka funkcija*** *ili funkcija klase C^∞ (s obzirom na (X,Φ), (Y,Ψ)) ako za sve $(U,\varphi)\in\Phi$ i $(V,\psi)\in\Psi$ takve da je $f(U)\subseteq V$ vrijedi da je funkcija*

$$\varphi(U)\to\mathbb{R}^m$$
$$x\mapsto\psi(f(\varphi^{-1}(x)))$$

klase C^∞ (to je funkcija $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}\colon\varphi(U)\to\mathbb{R}^m$).

Propozicija 2.19.

Neka je (X, Φ) diferencijalna $n-$mnogostrukost, (Y, Ψ) diferencijalna $m-$mnogostrukost te neka je $f\colon X \to Y$ funkcija. Tada je f glatka ako i samo ako vrijedi izreka

$$(1)\ \begin{cases} \text{za sve } x \in X \text{ postoje } (U, \varphi \in \Phi) \text{ i } (V, \psi) \in \Psi \text{ td.} \\ x \in U,\ f(U) \subseteq V \text{ te } \psi \circ f \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U) \to \mathbb{R}^m \text{ klase } C^\infty. \end{cases}$$

Dokaz. Dokazujemo dva smjera.
Pretpostavimo da je f glatka. Neka je $x \in X$. Imamo $f(x) \in Y \implies \exists (V, \psi) \in \Psi$ td. je $f(x) \in V$. Slično, postoji $(U, \varphi) \in \Phi$ td. je $x \in U$. Budući je f neprekidna, imamo da je $f^{-1}(V)$ otvoren skup u X. Definiramo

$$U' = U \cap f^{-1}(V).$$

Imamo da je U' otvorena okolina od x u X. Očito je $U' \subseteq U$ pa iz propozicije 2.14 slijedi

$$(U', \varphi|_{U'}) \in \Phi.$$

Također vrijedi $f(U') \subseteq f(f^{-1}(V)) \subseteq V$. Zaključujemo $x \in U', (U', \varphi|_{U'}) \in \Phi, (V, \psi) \in \Psi, f(U') \subseteq V$ te je $\psi \circ f \circ (\varphi|_{U'})^{-1}\colon \varphi(U') \to \mathbb{R}^m$ klase C^∞ jer je f glatka.
Obratno, pretpostavimo kako vrijedi (1). Uzmimo $x \in X$. Sada (1) daje $(U, \varphi) \in \Phi$, $(V, \psi) \in \Psi$ td. $x \in U$, $f(U) \subseteq V$ i $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U) \to \mathbb{R}^m$ klase C^∞. Posebno, $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ je neprekidna kao funkcija $\varphi(U) \to \psi(V)$. Budući je $\varphi\colon U \to \varphi(U)$ neprekidna slijedi

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi\colon U \to \psi(V)$$

neprekidna, odnosno $\psi \circ f\colon U \to \psi(V)$ neprekidna. Sada, jer je $\psi^{-1}\colon \psi(V) \to V$ neprekidna, slijedi

$$\psi^{-1} \circ (\psi \circ f)\colon U \to V$$

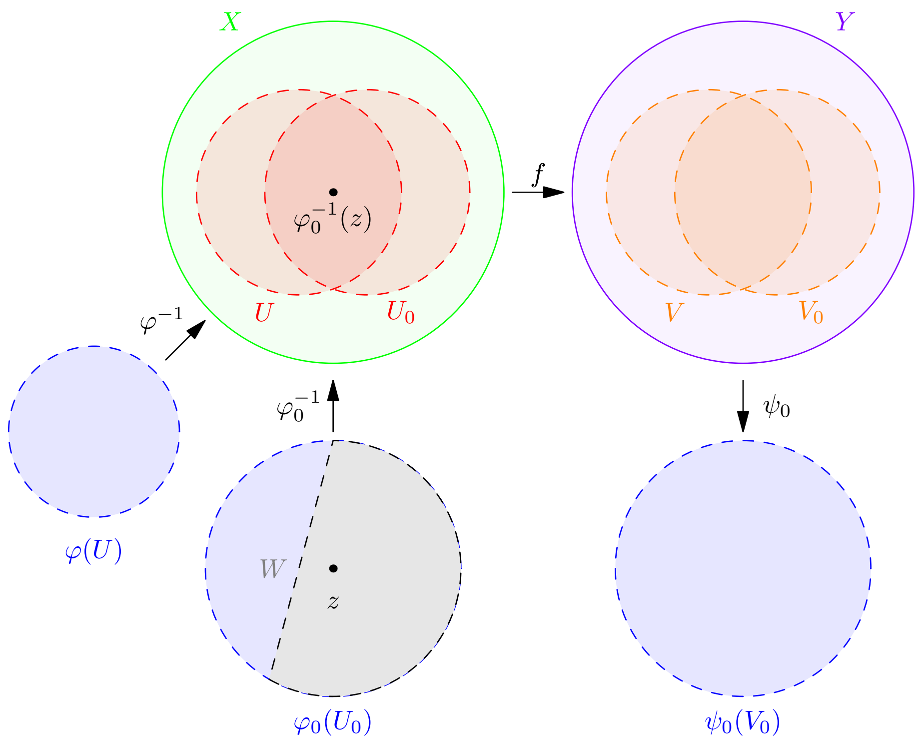
neprekidna, odnosno $f|_U\colon U \to Y$ neprekidna. Pokazali smo dakle, kako za svaki $x \in X$ postoji otvorena okolina U od x u X td. je funkcija $f|_U\colon U \to Y$ neprekidna. Iz ovoga lako zaključujemo (DZ) kako je f neprekidna.
Neka su sada $(U_0, \varphi_0) \in \Phi$, $(V_0, \psi_0) \in \Psi$ td. $f(U_0) \subseteq V_0$ po volji. Želimo dokazati kako je funkcija

$$\psi_0 \circ f \circ \varphi_0^{-1}\colon \varphi_0(U_0) \to \mathbb{R}^m$$

klase C^∞. Neka je zato $z \in \varphi_0(U_0)$. Imamo $\varphi_0^{-1}(z) \in U_0 \implies \varphi_0^{-1}(z) \in X \overset{(1)}{\implies}$ postoje $(U, \varphi) \in \Phi$, $(V, \psi) \in \Psi$ td. je $\varphi_0^{-1}(z) \in U$, $f(U) \subseteq V$ te da je $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U) \to \mathbb{R}^m$ klase C^∞. Imamo $\varphi_0^{-1}(z) \in U_0$ i $\varphi_0^{-1}(z) \in U \implies \implies \varphi_0^{-1}(z) \in U_0 \cap U \implies z \in \varphi_0(U_0 \cap U)$. Nadalje, iz $f(U_0) \subseteq V_0$ i $f(U) \subseteq V$ slijedi $f(U_0 \cap U) \subseteq V_0 \cap V$. Označimo

$$W \coloneqq \varphi_0(U_0 \cap U).$$

Ideja je dekomponirati funkciju preko plavih skupova



Imamo kako je W otvorena okolina od z u $\mathbb{R}^n$, a za svaki $y \in W$ vrijedi

$$\begin{aligned}(\psi_0 \circ f \circ \varphi_0^{-1})(y) &= \psi_0(f(\varphi_0^{-1}(y))) = \\ &= \psi_0(\psi^{-1}(\psi(f(\varphi^{-1}(\varphi(\varphi_0^{-1}(y))))))) = \\ &= \delta_{(V,\psi),(V_0,\psi_0)}((\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\delta_{(U_0,\varphi_0),(U,\varphi)}(y))).\end{aligned}$$

Stoga je

$$(\psi_0 \circ f \circ \varphi_0^{-1})|_W = \delta_{(V,\psi),(V_0,\psi_0)} \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ \delta_{(U_0,\varphi_0),(U,\varphi)}.$$

Uočimo sada kako su sve tri funkcije iz gornje dekompozicije klase C^∞, redom jer su $(V,\psi),(V_0,\psi_0) \in \Psi$, po pretpostavci te jer su $(U_0,\varphi_0),(U,\varphi) \in \Phi$

$$\implies (\psi_0 \circ f \circ \varphi_0^{-1})|_W \text{ je klase } C^\infty.$$

Iz lokalnog svojstva diferencijabilnosti slijedi kako je $\psi_0 \circ f \circ \varphi_0^{-1} : \varphi_0(U_0) \to \mathbb{R}^m$ klase C^∞.

□

Primjer 2.20.

Neka je $n \in \mathbb{N}$ te neka je $U \neq \emptyset$ otvoren skup u $\mathbb{R}^n$. Tada je (U, id_U) $n-$karta za U (pri čemu U gledamo kao topološki prostor s euklidskom topologijom). Lako vidimo kako je U

$n-$mnogostrukost (DZ). Stoga je $\{(U, id_U)\}$ gladak $n-$atlas za U pa prema teoremu 2.13 postoji jedinstven maksimalan gladak $n-$atlas za U koji sadrži (U, id_U).
S druge strane, definirajmo Φ kao familiju svih $n-$karata (V, ψ) za U, pri čemu je $\psi\colon V \to \psi(V)$ difeomorfizam (klase C^∞). Lako vidimo kako je Φ gladak $n-$atlas za U te $(U, id_U) \in \Phi$. Tvrdimo kako je i maksimalan gladak pa pretpostavimo kako je Φ' gladak $n-$atlas za U td. vrijedi $\Phi \subseteq \Phi'$. Neka je $(V, \psi) \in \Phi'$. Imamo

$$\begin{aligned}(U, id_U) \in \Phi \implies (U, id_U) \in \Phi' &\overset{\Phi' \text{ gladak}}{\implies} \\ &\implies (U, id_U) \text{ i } (V, \psi) \text{ glatko povezane te } (V, \psi) \text{ i } (U, id_U) \text{ glatko povezane.}\end{aligned}$$

Stoga su $\delta_{(U,id_U),(V,\psi)}$ i $\delta_{(V,\psi),(U,id_U)}$ klase C^∞. Uočimo kako je funkcija prijelaza $\delta_{(U,id_U),(V,\psi)}\colon id_U(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ zapravo funkcija

$$\begin{aligned}&\delta_{(U,id_U),(V,\psi)}\colon V \to \psi(V)\\ &\delta_{(U,id_U),(V,\psi)}(x) = \psi(x),\end{aligned}$$

tj. funkcija $\psi\colon V \to \psi(V)$. Dakle, $\psi\colon V \to \psi(V)$ je klase C^∞. Nadalje, funkcija prijelaza $\delta_{(V,\psi),(U,id_U)}\colon \psi(U \cap V) \to id_U(U \cap V)$ je zapravo funkcija

$$\begin{aligned}&\delta_{(V,\psi),(U,id_U)}\colon \psi(V) \to V\\ &\delta_{(V,\psi),(U,id_U)}(x) = \psi^{-1}(x).\end{aligned}$$

tj. funkcija $\psi^{-1}\colon \psi(V) \to V$. Stoga je i $\psi^{-1}\colon \psi(V) \to V$ klase C^∞. Dakle, $\psi\colon V \to \psi(V)$ je difeomorfizam, što po definiciji povlači $(V, \psi) \in \Phi$. Time smo pokazali $\Phi = \Phi'$, tj. Φ je maksimalan gladak $n-$atlas za U. Prema tome, Φ je onaj jedinstveni maksimalan gladak $n-$atlas za U koji sadrži (U, id_U).

Definicija 2.21. *Za Φ iz gornjeg primjera kažemo kako je* ***kanonski $n-$atlas*** *za U.*

Primjer 2.22.

Neka je $n \in \mathbb{N}$ te neka je $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ homeomorfizam. Tada je $\{(\mathbb{R}^n, h)\}$ gladak $n-$atlas za $\mathbb{R}^n$ pa prema teoremu 2.13 postoji jedinstven maksimalan gladak $n-$atlas Λ za $\mathbb{R}^n$ td. $(\mathbb{R}^n, h) \in \Lambda$. Tvrdimo

$$\Lambda \text{ kanonski } n-\text{atlas za } \mathbb{R}^n \iff h \text{ difeomorfizam.}$$

Ako je Λ kanonski $n-$atlas za $\mathbb{R}^n$, onda iz $(\mathbb{R}^n, h) \in \Lambda$ i definicije kanonskog atlasa imamo kako je $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ difeomorfizam. Obratno, pretpostavimo kako je h difeomorfizam. Neka je Φ kanonski $n-$atlas za $\mathbb{R}^n$. Tada je $(\mathbb{R}^n, h) \in \Phi$, a znamo kako je Φ maksimalan gladak $n-$atlas za $\mathbb{R}^n$. Iz jedinstvenosti od Λ slijedi $\Phi = \Lambda$, tj. Λ je kanonski $n-$atlas za $\mathbb{R}^n$.

Primjer 2.23.

Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana s $f(x) = x^3$. Tada je f homeomorfizam, ali f nije difeomorfizam jer $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nije klase C^1 (nije derivabilna u 0). Neka je $n \in \mathbb{N}$ te neka je $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ funkcija definirana s

$$h(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, f(x_n)).$$

Za funkciju $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definiranu s

$$g(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, f^{-1}(x_n))$$

vrijedi kako je $g \circ h = id_{\mathbb{R}^n}$ i $f \circ g = id_{\mathbb{R}^n}$, a očito su h, g neprekidne. Stoga je h homeomorfizam, ali ne i difeomorfizam jer g nije klase C^1. Neka je Λ maksimalan gladak $n-$atlas za $\mathbb{R}^n$ td. je $(\mathbb{R}^n, h) \in \Lambda$. Prema prethodnom primjeru Λ nije kanonski $n-$atlas za $\mathbb{R}^n$.

Definicija 2.24. *Neka su (X, Φ) i (Y, Ψ) diferencijalne mnogostrukosti te neka je $f\colon X \to Y$ funkcija. Kažemo kako je f **difeomorfizam mnogostrukosti** (X, Φ) i (Y, Ψ) ako je f glatka funkcija, f bijekcija i $f^{-1}\colon Y \to X$ glatka funkcija.*

Propozicija 2.25.

Neka je (X, Φ) diferencijalna $n-$mnogostrukost, Y topološki prostor te neka je $f\colon X \to Y$ homeomorfizam. Neka je

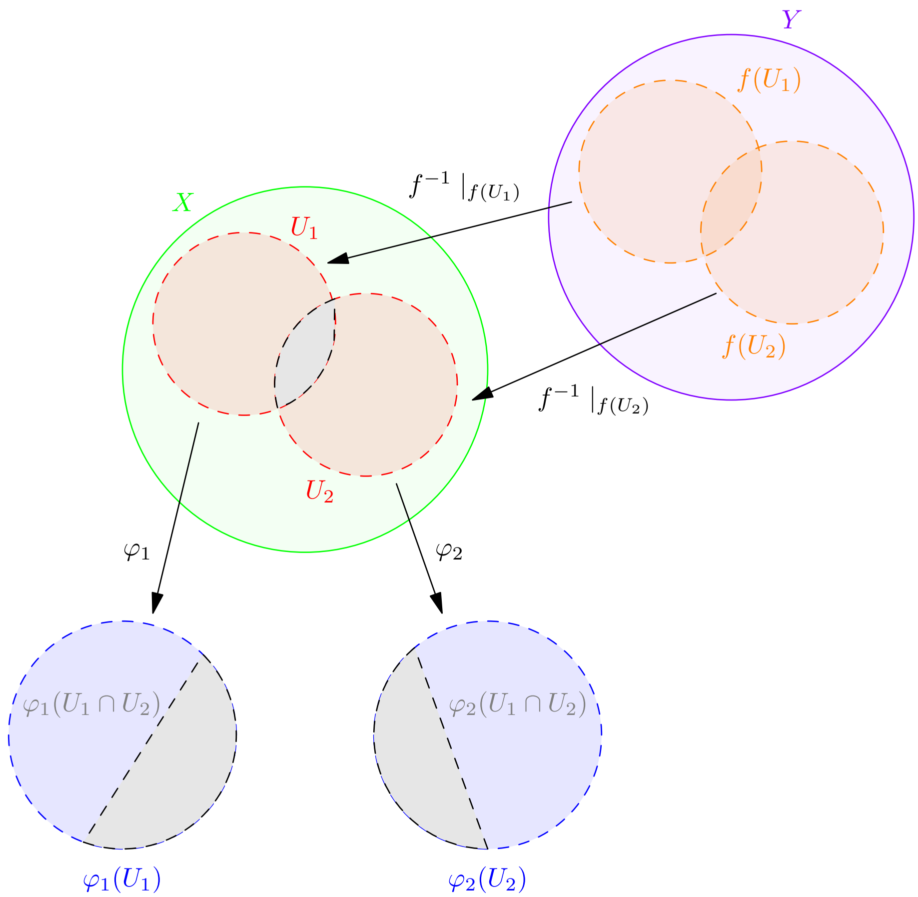
$$\Psi = \left\{ (f(U), \varphi \circ (f^{-1})|_{f(U)}) \,\middle|\, (U, \varphi) \in \Phi \right\}.$$

Tada je (Y, Ψ) diferencijalna $n-$mnogostrukost te je f difeomorfizam mnogostrukosti (X, Φ) i (Y, Ψ).

Dokaz. Uočimo kako je svaki element od Ψ $n-$karta za Y. Nadalje, imamo kako je Ψ $n-$atlas za Y. Iz ovoga odmah imamo kako je Y lokalno $n-$euklidski. Iz činjenice da je X Hausdorffov te da zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti te iz činjenice da je f homeomorfizam lako slijedi da je Y Hausdorffov te da zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti

$$\Longrightarrow Y \text{ je } n - \text{mnogostrukost}.$$

Sada se fokusiramo na glatkoću atlasa iz iskaza. Neka su zato $(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2) \in \Phi$. Slika



Vrijedi

$$\delta_{(f(U_1),\varphi_1\circ(f^{-1})|_{f(U_1)}),(f(U_2),\varphi_2\circ(f^{-1})|_{f(U_2)})} = \delta_{(U_1,\varphi_1),(U_2,\varphi_2)}. \quad (1)$$

Funkcija s desne strane znaka jednakosti je klase C^∞ jer su njene dvije karte iz $\Phi \implies \Psi$ je gladak $n-$atlas za Y. Za maksimalnost, pretpostavimo kako je Ψ' gladak $n-$atlas za Y td. je $\Psi \subseteq \Psi'$. Neka je $(V, \psi) \in \Psi'$. Definiramo

$$U = f^{-1}(V) \text{ i } \varphi = \psi \circ f|_U.$$

Tada je (U, φ) $n-$karta za X te je

$$(f(U), \varphi \circ (f^{-1})|_{f(U)}) = (V, \psi). \quad (2)$$

Po definiciji od Ψ, dovoljno je dokazati $(U, \varphi) \in \Phi$. Neka je $(U_1, \varphi_1) \in \Phi$ po volji. Karte

$$(f(U_1), \varphi_1 \circ (f^{-1})|_{f(U_1)}) \text{ i } (f(U), \varphi \circ (f^{-1})|_{f(U)})$$

su glatko povezane jer su elementi od Ψ'. Uočimo kako (1) vrijedi (sama jednakost) za bilo koje dvije karte na X; stoga su (U_1, φ_1) i (U, φ) glatko povezane. Isto tako, (U, φ) i (U_1, φ_1) su glatko povezane. Kombinirajući to dvoje izlazi kako je

$$\Phi \cup \{(U, \varphi)\}$$

gladak $n-$atlas za X. Iz maksimalnosti od Φ slijedi $\Phi = \Phi \cup \{(U,\varphi)\} \implies (U,\varphi) \in \Phi$ pa (2) daje $(V,\psi) \in \Psi$.
Prema tome, $\Psi' = \Psi \implies \Psi$ je maksimalan gladak $n-$atlas za Y

$$\implies (Y,\Psi) \text{ je diferencijalna } n-\text{mnogostrukost.}$$

Koristeći propoziciju 2.19 lako vidimo kako je f difeomorfizam mnogostrukosti (X,Φ) i (Y,Ψ).

$\square$

Propozicija 2.26.

Neka je (X,Φ) diferencijalna $n-$mnogostrukost. Neka je $V \neq \emptyset$ otvoren skup u X. Definiramo

$$\Psi = \{(U,\varphi) \in \Phi \,|\, U \subseteq V\}\,.$$

Tada je (V,Ψ) diferencijalna $n-$mnogostrukost.

Dokaz. Prvo, ako $(U,\varphi) \in \Phi$ td. $U \subseteq V$, onda je (U,φ) $n-$karta za V. Neka je $x \in V \implies x \in X \implies$ $\implies \exists (U,\varphi) \in \Phi$ td. $x \in U \implies x \in U \cap V$. Dakle, $U \cap V$ je neprazan otvoren skup u X i $U \cap V \subseteq U$. Propozicija 2.14 daje

$$(U \cap V, \varphi|_{U \cap V}) \in \Phi.$$

Očito je $(U \cap V, \varphi|_{U\cap V}) \in \Psi$. Zaključak: Ψ je $n-$atlas za V. Posebno je V lokalno $n-$euklidski; kao potprostor Hausdorffovog prostora i sam V je Hausdorffov, a isto tako imamo kako V zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti

$$\implies V \text{ je } n - \text{mnogostrukost.}$$

Očito je $\Psi \subseteq \Phi$ pa odmah dobivamo kako je Ψ gladak $n-$atlas za V. Želimo još pokazati maksimalnost pa uzmimo Ψ' gladak $n-$atlas za V td. je $\Psi \subseteq \Psi'$. Neka je $(W,\psi) \in \Psi'$ te neka je $(U,\varphi) \in \Phi$. Imamo funkciju prijelaza

$$\delta_{(U,\varphi),(W,\psi)} \colon \varphi(U \cap W) \to \psi(U \cap W)$$
$$\delta_{(U,\varphi),(W,\psi)}(x) = \psi(\varphi^{-1}(x)).$$

Znamo kako je $(U \cap V, \varphi\mid_{U\cap V}) \in \Psi$ pa je $(U \cap V, \varphi\mid_{U \cap V}) \in \Psi'$ te je funkcija

$$\delta_{(U\cap V,\varphi|_{U\cap V}),(W,\psi)} \colon \varphi(U \cap V \cap W) \to \psi(U \cap V \cap W)$$
$$\delta_{(U\cap V,\varphi|_{U\cap V}),(W,\psi)}(x) = \psi(\varphi^{-1}(x))$$

klase C^∞. No $U \cap V \cap W = U \cap W$, stoga je $\delta_{(U\cap V,\varphi|_{U\cap V}),(W,\psi)} = \delta_{(U,\varphi),(W,\psi)} \implies \delta_{(U,\varphi),(W,\psi)}$ klase $C^\infty \implies (U,\varphi),(W,\psi)$ glatko povezane. Analogno vidimo i kako su $(W,\psi),(U,\varphi)$ glatko povezane.

Slijedi kako je

$$\Phi \cup \{(W, \psi)\}$$

gladak $n-$atlas za X. Iz maksimalnosti Φ slijedi $(W,\psi) \in \Phi \overset{W \subseteq V}{\Longrightarrow} (W,\psi) \in \Psi$. Dakle, Ψ je maksimalan gladak $n-$atlas za V

$$\Longrightarrow (V, \Psi) \text{ je diferencijalna } n - \text{mnogostrukost.}$$

$\square$

Propozicija 2.27.

Neka je (X, Φ) diferencijalna $n-$mnogostrukost, (Y, Ψ) diferencijalna $m-$mnogostrukost te (Z, Λ) diferencijalna $k-$mnogostrukost. Pretpostavimo kako su $f\colon X \to Y$ i $g\colon Y \to Z$ glatke funkcije. Tada je $g \circ f\colon X \to Z$ glatka funkcija.

Dokaz. Neka je $x \in X$. Prema propoziciji 2.19 postoje $(V,\psi) \in \Psi$ i $(W,\lambda) \in \Lambda$ td. je $f(x) \in V$, $g(V) \subseteq W$ te td. je

$$\lambda \circ g \circ \psi^{-1}\colon \psi(V) \to \mathbb{R}^k \quad (1)$$

klase C^∞. Budući je f neprekidna, postoji otvorena okolina U' od x u X td. je $f(U') \subseteq V$. Budući je Φ atlas za X, postoji $(U,\varphi) \in \Phi$ td. je $x \in U$. Možemo pretpostaviti da je $U \subseteq U'$ (inače, umjesto (U,φ) uzmemo kartu $(U \cap U', \varphi\,|_{U \cap U'})$, a to možemo zbog propozicije 2.14). Imamo $f(U) \subseteq V$ pa iz činjenice da je f glatka funkcija slijedi kako je

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U) \to \mathbb{R}^m \quad (2)$$

klase C^∞. Vrijedi kako je $(g \circ f)(U) \subseteq W$. Kompozicija funkcija (1) i (2) je klase C^∞, a ta kompozicija je zapravo jednaka funkciji

$$\lambda \circ (g \circ f) \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U) \to \mathbb{R}^k.$$

Iz propozicije 2.19 slijedi kako je $g \circ f\colon X \to Z$ glatka funkcija. $\square$

Napomena 2.28. Neka su n, $m \in \mathbb{N}$, neka je U neprazan otvoren skup u $\mathbb{R}^n$ te neka je V neprazan otvoren skup u $\mathbb{R}^m$. Neka je Φ kanonski $n-$atlas za U te neka je Ψ kanonski $m-$atlas za V. Pretpostavimo kako je $f\colon U \to V$. Tada vrijedi

$$f \text{ klase } C^\infty \Longleftrightarrow f \text{ glatka s obzirom na mnogostrukosti } (U, \Phi) \text{ i } (V, \Psi).$$

Napomena 2.29. Neka je $n \in \mathbb{N}$, neka je U otvoren neprazan skup u $\mathbb{R}^n$ te neka je Φ kanonski $n-$atlas za U. Nadalje neka je S ploha (u $\mathbb{R}^3$) te neka je

$$\Psi = \left\{ (\psi(V), \psi^{-1}) \,\middle|\, \psi\colon V \to \mathbb{R}^3 \text{ lokalna parametrizacija od } S \right\}.$$

Znamo kako je (S, Ψ) diferencijalna $2-$mnogostrukost. Neka je $f\colon U \to S$. Tada vrijedi

$$f \text{ klase } C^{\infty}(\text{ kao funkcija } U \to \mathbb{R}^3) \iff f \text{ glatka s obzirom na mnogostrukosti } (U, \Phi) \text{ i } (S, \Psi).$$

U prvoj napomeni je nužnost (desne izreke) jasna, dok za dovoljnost treba iskoristiti lokalno svojstvo diferencijabilnosti. Dovoljnost u drugoj napomeni je analogna, dok za nužnost ne možemo koristiti ψ^{-1} klase C^{∞} već zaobilazimo pomoću teorema 1.9.

3 Tangencijalni prostori

Konstrukcija će biti donekle komplicirana, ali zasniva se na klasičnim topološkim objektima, a svakako ćemo ih obraditi i na općoj topologiji.

Definicija 3.1. *Neka su X,Y,Z topološki prostori. Neka je $\mathcal{B}$ familija podskupova od $X \times Y \times Z$ definirana s*

$$\mathcal{B} = \{U \times V \times W \,|\, U \text{ otvoren u } X, V \text{ otvoren u } Y, W \text{ otvoren u } Z\}.$$

Lako se vidi kako je

$$\bigcup \mathcal{B} = X \times Y \times Z$$

te kako je $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$ za sve B_1, $B_2 \in \mathcal{B}$. Stoga postoji jedinstvena topologija na $X \times Y \times Z$ kojoj je $\mathcal{B}$ baza i zovemo ju ***produktna topologija*** *na $X \times Y \times Z$, a za $X \times Y \times Z$ s tom topologijom kažemo kako je* ***produkt topoloških prostora*** *X, Y i Z te ga označavamo s $X \times Y \times Z$.*

Lako se vidi kako su projekcije $p_1 \colon X \times Y \times Z \to X$, $p_2 \colon X \times Y \times Z \to Y$ i $p_3 \colon X \times Y \times Z \to Z$ na prvu, drugu, odnosno treću koordinatu neprekidne te kako je funkcija $f \colon A \to X \times Y \times Z$ neprekidna (gdje je A neki topološki prostor) ako i samo ako su sve $p_i \circ f$ neprekidne funkcije, $i = 1, 2, 3$.

Napomena 3.2. Neka je za $i = 1, 2, 3$ $\mathcal{B}_i$ baza topologije X, Y, Z redom. Tada je

$$\{U \times V \times W \,|\, U \in \mathcal{B}_1, V \in \mathcal{B}_2, W \in \mathcal{B}_3\}$$

baza produktne topologije na $X \times Y \times Z$.

Definicija 3.3. *Neka je $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ indeksirana familija topoloških prostora. Za svaki $\alpha \in A$ na $X_\alpha \times \{\alpha\}$ promatramo topologiju definiranu s*

$$\{U \times \{\alpha\} \,|\, U \text{ otvoren u } X_\alpha\}$$

(lako se vidi kako je zaista riječ o topologiji na $X_\alpha \times \{\alpha\}$). Sada na $\bigcup_{\alpha \in A}(X_\alpha \times \{\alpha\})$ promotrimo topologiju $\mathcal{T}$ definiranu s

$$\mathcal{T} = \left\{ U \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} (X_\alpha \times \{\alpha\}) \,\middle|\, U \cap (X_\alpha \times \{\alpha\}) \text{ otvoren u } X_\alpha \times \{\alpha\} \right\}.$$

Za topološki prostor $\left(\bigcup_{\alpha \in A}(X_\alpha \times \{\alpha\}), \mathcal{T}\right)$ kažemo kako je ***disjunktna unija indeksirane familije topoloških prostora*** *$(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ te ga označavamo s*

$$\bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha.$$

Uočimo kako je skup $V \subseteq \bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ otvoren ako i samo ako vrijedi

$$V = \bigcup_{\alpha \in A} (U_\alpha \times \{\alpha\}),$$

za neku indeskiranu familiju skupova $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$, gdje je, za svaki $\alpha \in A$, U_α otvoren u X_α.

Napomena 3.4. Neka je $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ indeksirana familija topoloških prostora. Pretpostavimo kako je za svaki $\alpha \in A$, $\mathcal{B}_\alpha$ baza topologije od X_α. Tada je

$$\bigcup_{\alpha \in A} \{B \times \{\alpha\} \mid B \in \mathcal{B}_\alpha\}$$

baza topologije od $\bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ (DZ).

Na sljedeću napomenu ćemo se dosta pozivati tokom ovog poglavlja.

Napomena 3.5. Neka je (X, Φ) diferencijalna $n-$mnogostrukost. Neka je

$$F = \{(x, (U, \varphi), v) \in X \times \Phi \times \mathbb{R}^n \,|\, x \in U\}.$$

Očito je $F \subseteq X \times \Phi \times \mathbb{R}^n$. Promotrimo $X \times \Phi \times \mathbb{R}^n$ kao produkt topoloških prostora, pri čemu na Φ uzimamo diskretnu topologiju. Promotrimo sada F s relativnom topologijom u odnosu na topologiju od $X \times \Phi \times \mathbb{R}^n$. Tvrdimo kako je F homeomorfan s

$$\bigsqcup_{(U,\varphi) \in \Phi} (U \times \mathbb{R}^n)$$

(ovdje se radi o disjunktnoj uniji indeksirane familije topoloških prostora, gdje je indeksni skup Φ, a svakom (U, φ) se pridružuje topološki prostor $U \times \mathbb{R}^n$, dakle $\bigsqcup_{(U,\varphi) \in \Phi} U \times \mathbb{R}^n =$
$= \bigcup_{(U,\varphi) \in \Phi} U \times \mathbb{R}^n \times \{(U, \varphi)\}$).
Promatramo funkciju $f \colon F \to \bigsqcup_{(U,\varphi) \in \Phi} (U \times \mathbb{R}^n)$ definiranu s

$$f(x, (U, \varphi), v) = (x, v, (U, \varphi)).$$

Očito je f bijekcija. Imamo kako je

$$\{V \times \{(U, \varphi)\} \times W \,|\, V \text{ otvoren u } X, W \text{ otvoren u } \mathbb{R}^n, (U, \varphi) \in \Phi\}$$

baza topologije od $X \times \Phi \times \mathbb{R}^n$. Općenito vrijedi: ako je A_2 potprostor topološkog prostora A_1 te $\mathcal{B}$ baza topologije od A_1, onda je $\{B \cap A_2 \mid B \in \mathcal{B}\}$ baza topologije od A_2. Uočimo da za V otvoren u X, W otvoren u $\mathbb{R}^n$ i $(U, \varphi) \in \Phi$ vrijedi

$$(V \times \{(U, \varphi)\} \times W) \cap F = (V \cap U) \times \{(U, \varphi)\} \times W.$$

Stoga je

$$\mathcal{B}' = \{V' \times \{(U, \varphi)\} \times W \mid V' \text{ otvoren u } X, W \text{ otvoren u } \mathbb{R}^n, (U, \varphi) \in \Phi, V' \subseteq U\}$$

baza topologije od F. Za takve V', W i (U,φ) imamo

$$f(V' \times \{(U,\varphi)\} \times W) = V' \times W \times \{(U,\varphi)\}, \quad (1)$$

a to je otvoren skup u $U \times \mathbb{R}^n \times \{(U,\varphi)\}$ pa je otvoren i u $\bigsqcup_{(U,\varphi)\in\Phi}(U \times \mathbb{R}^n)$. Prema tome, f je otvoreno preslikavanje. Preostaje pokazati kako je f neprekidna. Ako je $(U,\varphi) \in \Phi$, onda je

$$\{V' \times W \mid V' \text{ otvoren u } U, W \text{ otvoren u } \mathbb{R}^n\}$$

baza topologije od $U \times \mathbb{R}^n$ pa je prema napomeni 3.4

$$\bigcup_{(U,\varphi)\in\Phi} \{(V' \times W) \times \{(U,\varphi)\} \mid V' \text{ otvoren u } U, W \text{ otvoren u } \mathbb{R}^n\}$$

baza topologije od $\bigsqcup_{(U,\varphi)\in\Phi}(U \times \mathbb{R}^n)$. Iz (1) slijedi kako je praslika pri f svakog elementa te baze element familije $\mathcal{B}'$, dakle otvoren skup u F pa zaključujemo kako je f neprekidna funkcija. Stoga je f homeomorfizam.

Definicija 3.6. *Neka je $(X,\mathcal{T})$ topološki prostor te neka je $\mathcal{F}$ particija skupa X. Neka je $q\colon X \to \mathcal{F}$ preslikavanje definirano tako da je, za $x \in X$, $q(x)$ onaj (jedinstveni) element od $\mathcal{F}$ koji sadrži x. Za q kažemo kako je* ***kvocijentno preslikavanje*** *od $\mathcal{F}$. Uočimo kako je q surjektivno preslikavanje. Neka je nadalje*

$$\mathcal{T}_{\mathcal{F}} = \left\{\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F} \,\middle|\, q^{-1}(\mathcal{U}) \in \mathcal{T}\right\}.$$

Lako se vidi kako je $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ topologija na $\mathcal{F}$. Zovemo ju ***kvocijentna topologija*** *na $\mathcal{F}$ (određena s $\mathcal{T}$), a za topološki prostor $(\mathcal{F},\mathcal{T}_{\mathcal{F}})$ kažemo kako je* ***kvocijentni prostor*** *od $(X,\mathcal{T})$. Uočimo još kako je $q\colon X \to \mathcal{F}$ neprekidna funkcija (s obzirom na $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$).*

Definicija 3.7. *Neka je (X,Φ) diferencijalna $n-$mnogostrukost. Neka je*

$$F = \{(x,(U,\varphi),v) \in X \times \Phi \times \mathbb{R}^n \mid x \in U\}.$$

Neka je $\sim$ relacija na F definirana s

$$(x,(U,\varphi),v) \sim (y,(V,\psi),w) \Longleftrightarrow \big(x = y \;\wedge\; D(\delta_{(U,\varphi),(V,\psi)})(\varphi(x))(v) = w\big).$$

Nije teško provjeriti kako je $\sim$ relacija ekvivalencije na F (DZ). Neka je $F/_\sim$ skup svih klasa ekvivalencije s obzirom na relaciju $\sim$. Imamo kako je $F/_\sim$ particija od F. Na F gledamo topologiju definiranu u napomeni 3.5. Sada na $F/_\sim$ gledamo pripadnu kvocijentnu topologiju te $F/_\sim$ s tom topologijom nazivamo ***totalni tangencijalni prostor*** *od (X,Φ) te ga označavamo s $T(X,\Phi)$.*

Napomena 3.8. Neka su X, Y topološki prostori te $f\colon X \to Y$ neprekidna funkcija. Pretpostavimo kako je $\mathcal{F}$ particija od X td. je f konstantna na svakom članu od $\mathcal{F}$. Neka je $q\colon X \to \mathcal{F}$ kvocijentno preslikavanje. Tada postoji jedinstvena funkcija $\widetilde{f}\colon \mathcal{F} \to Y$ td.

$$f = \widetilde{f} \circ q, \quad (1)$$

odnosno tako da sljedeći dijagram komutira

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "q"'] & & Y \\ & \mathcal{F} \arrow[ur, "\widetilde{f}"'] & \end{tikzcd}.$$

Nadalje, za tu funkciju vrijedi kako je neprekidna (pri čemu na $\mathcal{F}$ gledamo kvocijentnu topologiju). Naime, budući je q surjekcija, iz (1) zaključujemo kako takva funkcija $\widetilde{f}$, ako postoji, mora biti jedinstvena. Definiramo $\widetilde{f}\colon \mathcal{F} \to Y$ td. za $A \in \mathcal{F}$ stavimo

$$\widetilde{f}(A) = f(x),$$

gdje je $x \in A$. Očito je da za tako definiranu funkciju $\widetilde{f}$ vrijedi (1). Neka je V otvoren skup u Y. Želimo dokazati kako je $\widetilde{f}^{-1}(V)$ otvoren u $\mathcal{F}$. U tu svrhu, dovoljno je dokazati kako je $q^{-1}(\widetilde{f}^{-1}(V))$ otvoren skup u X. Vrijedi

$$q^{-1}(\widetilde{f}^{-1}(V)) = (\widetilde{f} \circ q)^{-1}(V) = f^{-1}(V),$$

što je otvoreno u X jer je f neprekidna. Dakle, $\widetilde{f}$ je neprekidna.

Definicija 3.9. *Neka je (X, Φ) diferencijalna $n-$mnogostrukost i neka je F kao u napomeni* 3.5*. Neka je $f\colon F \to X$ restrikcija projekcije na prvu koordinatu (sjetimo se kako je $F \subseteq X \times \Phi \times \mathbb{R}^n$). Jasno, f je neprekidna funkcija. Neka je $\sim$ relacija na F iz definicije* 3.7*. Svaka klasa ekvivalencije od $\sim$ je neki skup uređenih trojki od kojih svaka na prvoj koordinati ima istu točku. To znači kako je f konstantna na elementima od $F/_\sim$, tj. na elementima od $T(X, \Phi)$. Prema napomeni* 3.8*, postoji jedinstvena funkcija $\pi\colon T(X, \Phi) \to X$ td.*

$$f = \pi \circ q,$$

*gdje je $q\colon F \to T(X, Y)$ kvocijentno preslikavanje. Znamo kako je π neprekidna funkcija. Za uređeni par $(T(X, \Phi), \pi)$ kažemo da je **tangencijalni svežanj** od (X, Φ). Ako je $x \in X$, onda za potprostor $\pi^{-1}(\{x\})$ od $T(X, \Phi)$ kažemo da je **tangencijalni prostor** od (X, Φ) u x te ga označavamo s $T_x(X, \Phi)$.*

Naš sljedeći cilj je pokazati kako smo u definiciji totalnog tangencijalnog prostora na X mogli proći jeftinije, odnosno uzeti samo atlas $\Phi' \subseteq \Phi$. Argument će biti malo duži.

Napomena 3.10. Neka je (X, Φ) diferencijalna $n-$mnogostrukost. Pretpostavimo kako je Φ' $n-$atlas za X td. $\Phi' \subseteq \Phi$. Neka je

$$F' = \{(x, (U, \varphi), v) \in X \times \Phi' \times \mathbb{R}^n \mid x \in U\}.$$

Imamo $F' \subseteq X \times \Phi' \times \mathbb{R}^n$ te uzmimo na F' relativnu topologiju u odnosu na produktnu topologiju od $X \times \Phi' \times \mathbb{R}^n$ (na Φ' uzimamo diskretnu topologiju). Neka je $\sim'$ relacija na F' definirana s

$$(x, (U, \varphi), v) \sim' (y, (V, \psi), w) \iff \big(x = y \ \wedge \ D(\delta_{(U,\varphi),(V,\psi)})(\varphi(x))(v) = w\big).$$

Kao i prije, imamo kako je $\sim'$ relacija ekvivalencije na F'. Na particiji $F'/_{\sim'}$ uzmimo kvocijentnu topologiju. Tvrdimo kako je kvocijenti prostor $F'/_{\sim'}$ homeomorfan s $T(X, \Phi)$. Neka su F i $\sim$ iz definicije 3.7, zatim neka su $q'\colon F' \to F'/_{\sim'}$ i $q\colon F \to F/_{\sim}$ kvocijentna preslikavanja. Očito je $F' \subseteq F$. Neka je $i\colon F' \to F$ inkluzija. Uočimo kako je $X \times \Phi' \times \mathbb{R}^n$ potprostor od $X \times \Phi \times \mathbb{R}^n$. Stoga je inkluzija $j\colon X \times \Phi' \times \mathbb{R}^n \to X \times \Phi \times \mathbb{R}^n$ neprekidna funkcija pa je i

$$j\,|_{F'}\colon F' \to X \times \Phi \times \mathbb{R}^n$$

neprekidna funkcija, a onda je i neprekidna kao funkcija $F' \to F$; dakle $i\colon F' \to F$ je neprekidna. Funkcija $q \circ i\colon F' \to F/_{\sim}$ je neprekidna i konstantna je na elementima od $F'/_{\sim'}$. Stoga, postoji neprekidna funkcija $f\colon F'/_{\sim'} \to F/_{\sim}$ td. sljedeći dijagram komutira

$$\begin{tikzcd} F' \arrow[rr, "q\circ i"] \arrow[dr, "q'"'] & & F/_{\sim} \\ & F'/_{\sim'} \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}.$$

Klasu elementa $(x,(U,\varphi),v) \in F'$ pri relaciji $\sim'$ označimo s $[(x,(U,\varphi),v)]'$, a pri relaciji $\sim$ s $[(x,(U,\varphi),v)]$. Uočimo kako je

$$f\left([(x,(U,\varphi),v)]'\right) = [(x,(U,\varphi),v)]\,,\ \text{za sve } (x,(U,\varphi),v) \in F'.$$

Nadalje, očito je da za sve $(x,(U,\varphi),v)$, $(y,(V,\psi),w) \in F'$ vrijedi sljedeće

$$(x,(U,\varphi),v) \not\sim' (y,(V,\psi),w) \Longrightarrow (x,(U,\varphi),v) \not\sim (y,(V,\psi),w).$$

Iz ovoga slijedi kako je f injekcija. Neka je $(x,(U,\varphi),v) \in F$. Imamo $x \in X \Longrightarrow \exists (V,\psi) \in \Phi'$ td. $x \in V$. Označimo

$$w = D(\delta_{(U,\varphi),(V,\psi)})(\varphi(x))(v).$$

Očito je tada

$$(x,(U,\varphi),v) \sim (x,(V,\psi),w),$$

pri tom je $(x,(V,\psi),w) \in F'$. Stoga je klasa od $(x,(U,\varphi),v)$ pri relaciji $\sim$ jednaka $[(x,(V,\psi),w)]$, tj. $f\left([(x,(V,\psi),w)]'\right)$. Prema tome, f je surjekcija. Dakle, $f\colon F'/_{\sim'} \to F/_{\sim}$ je neprekidna bijekcija.
Da bismo dokazali kako je f homeomorfizam, dovoljno je dokazati kako je f otvoreno preslikavanje. Dokažimo prvo kako je $q\colon F \to F/_{\sim}$ otvoreno preslikavanje. Prema napomeni 3.5 imamo kako je

$$\mathcal{B} = \{U' \times \{(U,\varphi)\} \times W \mid (U,\varphi) \in \Phi, U' \text{ otvoren u } U, W \text{ otvoren u } \mathbb{R}^n\}$$

baza topologije od F. Dovoljno je dokazati kako je $q(B)$ otvoren u $F/_{\sim}$ za svaki $B \in \mathcal{B}$. Neka je $(U,\varphi) \in \Phi$, U' otvoren u U te W otvoren u $\mathbb{R}^n$. Želimo dokazati da je $q(U' \times \{(U,\varphi)\} \times W)$ otvoren skup u $F/_{\sim}$. U tu svrhu, prema definiciji kvocijentne topologije, dovoljno je dokazati kako je

$q^{-1}(q(U' \times \{(U,\varphi)\} \times W))$ otvoren u F. Imamo

$$\begin{aligned}(x,(V,\psi),v) \in q^{-1}(q(U' \times \{(U,\varphi)\} \times W)) &\Longrightarrow q(x,(V,\psi),v) \in q(U' \times \{(U,\varphi)\} \times W) \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow q(x,(V,\psi),v) = q(x',(U,\varphi),w) \text{ za neke } x' \in U' \text{ i } w \in W \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow (x,(V,\psi),v) \sim (x',(U,\varphi),w) \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow x = x' \text{ i } D(\delta_{(V,\psi),(U,\varphi)})(\psi(x))(v) = w \quad (1)\end{aligned}$$

(posebno $x \in U'$). Imamo kako je funkcija $\delta_{(V,\psi),(U,\varphi)} \colon \psi(V \cap U) \to \mathbb{R}^n$ klase C^∞ pa zaključujemo kako je funkcija

$$\begin{gathered}\Delta \colon (V \cap U) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ \Delta(z,u) = D(\delta_{(V,\psi),(U,\varphi)})(\psi(z))(u)\end{gathered}$$

neprekidna. Naime, označimo li $h = \delta_{(V,\psi),(U,\varphi)}$, imamo

$$\begin{bmatrix}\partial_1 h_1(\psi(z)) & \cdots & \partial_n h_1(\psi(z)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 h_n(\psi(z)) & \cdots & \partial_n h_n(\psi(z))\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}u_1 \\ \vdots \\ u_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\partial_1 h_1(\psi(z))u_1 + \cdots + \partial_n h_1(\psi(z))u_n \\ \vdots \\ \partial_1 h_n(\psi(z))u_1 + \cdots + \partial_n h_n(\psi(z))u_n\end{bmatrix}.$$

Komponentne funkcije od Δ su u retcima desne matrice pa lako vidimo kako su neprekidne.
Jasno, $x \in V$ pa je $x \in V \cap U' \subseteq V \cap U$. Prema (1) vrijedi $\Delta(x,v) = w \in W$. Budući je Δ neprekidna funkcija (pa neprekidna i u točki (x,v)), postoje otvoren skup V' u $V \cap U$ i otvoren skup W' u $\mathbb{R}^n$ td. je $(x,v) \in V' \times W'$ i $\Delta(V' \times W') \subseteq W$. (2)
Pritom možemo pretpostaviti kako je $V' \subseteq V \cap U'$ (inače umjesto V' uzmemo $V' \cap V \cap U'$).
Jasno, $x \in V'$ i $v \in W'$ pa je $V' \times \{(V,\psi)\} \times W'$ otvorena okolina od $(x,(V,\psi),v)$ u F. Tvrdimo

$$V' \times \{(V,\psi)\} \times W' \subseteq q^{-1}(q(U' \times \{(U,\varphi)\} \times W)). \quad (4)$$

Neka su $y \in V'$, $u \in W'$. Želimo dokazati kako je

$$(y,(V,\psi),u) \in q^{-1}(q(U' \times \{(U,\varphi)\} \times W)),$$

tj. da je

$$q(y,(V,\psi),u) \in q(U' \times \{(U,\varphi)\} \times W). \quad (3)$$

Prema (2) je $\Delta(y,u) \in W$, tj. $D(\delta_{(V,\psi),(U,\varphi)})(\psi(y))(u) \in W$ pa je

$$(y,(V,\psi),u) \sim (y,(U,\varphi),D(\delta_{(V,\psi),(U,\varphi)})(\psi(y))(u)) \in U' \times \{(U,\varphi)\} \times W$$

$\Longrightarrow$ vrijedi (3) $\Longrightarrow$ vrijedi (4). To znači da za svaku točku od $q^{-1}(q(U \times \{(U,\varphi)\} \times W))$ postoji otvorena okolina te točke sadržana u $q^{-1}(q(U \times \{(U,\varphi)\} \times W)) \Longrightarrow q^{-1}(q(U' \times \{(U,\varphi)\} \times W))$ je otvoren skup u F. Time smo pokazali kako je

$$q \colon F \to F/_\sim$$

otvoreno preslikavanje. Posve isti argumenti pokazuju kako je $q' \colon F' \to F'/_{\sim'}$ otvoreno preslikavanje; pri tome vrijedi i analogon tvrdnje iz napomene 3.5 za bazu topologije od F, tj. vrijedi kako je familija

$$\mathcal{B}' = \{U' \times \{(U,\varphi)\} \times W \mid (U,\varphi) \in \Phi', U' \text{ otvoren u } U, W \text{ otvoren u } \mathbb{R}^n\}$$

baza topologije od F'. Iz ovoga odmah zaključujemo kako je inkluzija $i \colon F' \to F$ otvoreno preslikavanje. Sada iz komutativnog dijagrama

$$\begin{tikzcd} F' \arrow[rr, "q\circ i"] \arrow[dr, "q'"'] & & F/_{\sim} \\ & F'/_{\sim'} \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

lako zaključujemo kako je f otvoreno preslikavanje. Naime U otvoren u $F'/_{\sim'} \implies f(U) = f(q'((q')^{-1}(U))) =$ $= (f \circ q')((q')^{-1}(U)) = (q \circ i)((q')^{-1}(U))$. S desne strane imamo sliku otvorenog skupa pri otvorenom preslikavanju, stoga otvoren skup u $F/_{\sim}$. Dakle, f je homeomorfizam, tj. $F'/_{\sim'}$ je homeomorfan s $T(X,\Phi)$.

Lema 3.11.

Neka je (X,Φ) diferencijalna $n-$mnogostrukost. Tada postoji prebrojiv $n-$atlas Φ' za X td. je $\Phi' \subseteq \Phi$.

Dokaz. Budući je X $n-$mnogostrukost, postoji prebrojiva baza $\mathcal{B}$ topologije od X. Stoga, za svaki $x \in X$ postoji $(U_x, \varphi_x) \in \Phi$ td. je $x \in U_x$, i nadalje, za svaki $x \in X$ postoji $B_x \in \mathcal{B}$ td. je $x \in B_x \subseteq U_x$. Neka je

$$\mathcal{F} = \{B_x \mid x \in X\}.$$

Imamo kako je $\mathcal{F}$ prebrojiva familija (jer je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$), stoga postoji niz $(x_n)_n$ u X td. je

$$\mathcal{F} = \{B_{x_1}, B_{x_2}, \dots\}.$$

Iz definicije od $\mathcal{F}$ je jasno kako je $\mathcal{F}$ otvoren pokrivač od X, dakle

$$X = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_{x_i}.$$

Za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi $B_{x_i} \subseteq U_{x_i} \implies X = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_{x_i}$. Stoga je $\{(U_{x_i}, \varphi_{x_i}) \mid i \in \mathbb{N}\}$ traženi $n-$atlas. $\square$

Propozicija 3.12.

Neka je (X,Φ) diferencijalna $n-$mnogostrukost. Tada je $T(X,\Phi)$ Hausdorffov te zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti.

Dokaz. Prema lemi 3.11 postoji prebrojiv $n-$atlas Φ' za X td. je $\Phi' \subseteq \Phi$. Prema napomeni 3.10 onda imamo kako je $T(X, \Phi)$ homeomorfan s $F'/_{\sim'}$, gdje je $F' = \{(x, (U, \varphi), v) \in X \times \Phi' \times \mathbb{R}^n \mid x \in U\}$ te $\sim'$ relacija ekvivalencije na F' kao u 3.10. Pri tome znamo kako je kvocijentno preslikavanje $q' \colon F' \to F'/_{\sim'}$ otvoreno preslikavanje, a F' gledamo kao potprostor od $(X \times \Phi' \times \mathbb{R}^n)$.
Iz napomene 3.2 slijedi: ako su X, Y i Z topološki prostori koji zadovoljavaju drugi aksiom prebrojivosti, onda ga zadovoljava i $X \times Y \times Z$. Stoga $X \times \Phi' \times \mathbb{R}^n$ zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti, a onda ga zadovoljava i F'. Sada iz činjenice kako je $q' \colon F' \to F'/_{\sim'}$ neprekidno i otvoreno preslikavanje te surjekcija, lako slijedi kako $F'/_{\sim'}$ zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti (DZ). Stoga i $T(X, \Phi)$ zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti.
Dokažmo sada kako je $T(X, \Phi)$ Hausdorffov prostor. Neka su F i $\sim$ iz definicije 3.7 te neka je $q \colon F \to F/_{\sim}$ kvocijentno preslikavanje. Neka su $\alpha \neq \beta \in T(X, \Phi)$ (tj. $\alpha, \beta \in F/_{\sim}$). Imamo

$$\alpha = q(x, (U, \varphi), v)$$
$$\beta = q(y, (V, \psi), w),$$

za neke $(x, (U, \varphi), v)$ i $(y, (V, \psi), w) \in F$. Iz $\alpha \neq \beta$ slijedi $(x, (U, \varphi), v) \not\sim (y, (V, \psi), w)$.

1° $x \neq y$.
Budući je X Hausdorffov, postoje disjunktni otvoreni skupovi U' i V' u X td. je $x \in U'$ i $y \in V'$. Definiramo

$$A = (U' \cap U) \times \{(U, \varphi)\} \times \mathbb{R}^n$$
$$B = (V' \cap V) \times \{(V, \psi)\} \times \mathbb{R}^n.$$

Tada su A i B otvoreni skupovi u F td. je $(x, (U, \varphi), v) \in A$ i $(y, (V, \psi), w) \in B$ pa je $\alpha \in q(A)$ i $\beta \in q(B)$. Prema napomeni 3.10, q je otvoreno preslikavanje pa su stoga $q(A)$ i $q(B)$ otvoreni skupovi u $T(X, \Phi)$. Kada bi vrijedilo $q(A) \cap q(B) \neq \emptyset$, postojali bi $a \in A$ i $b \in B$ td. je $q(a) = q(b)$, tj. $a \sim b$. No, to je nemoguće jer je a uređena trojka kojoj je prva koordinata element od $U' \cap U$, a prva koordinata od b je element od $V' \cap V$ (a znamo kako je $U' \cap V' = \emptyset$). Dakle, $q(A) \cap q(B) = \emptyset$.

2° $x = y$.
Zbog $(x, (U, \varphi), v) \not\sim (y, (V, \psi), w)$ imamo $D(\delta_{(U,\varphi),(V,\psi)})(\varphi(x))(v) \neq w$. Stoga postoje disjunktni otvoreni skupovi W_1 i W_2 u $\mathbb{R}^n$ td. je $D(\delta_{(U,\varphi),(V,\psi)})(\varphi(x))(v) \in W_1$ i $w \in W_2$. Neka je $\Delta \colon (U \cap V) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ funkcija dana s

$$\Delta(z, u) = D(\delta_{(U,\varphi),(V,\psi)})(\varphi(z))(u)$$

Kao u napomeni 3.10 imamo kako je Δ neprekidna funkcija, a imamo kako je $\Delta(x, v) \in W_1$. Stoga postoji otvorena okolina U' od x u $U \cap V$ i W' od v u $\mathbb{R}^n$ td. je

$$\Delta(U' \times W') \subseteq W_1. \quad (1)$$

Neka su

$$A = U' \times \{(U,\varphi)\} \times W'$$
$$B = U' \times \{(V,\psi)\} \times W_2.$$

Imamo

$$(x,(U,\varphi),v) \in A \Longrightarrow \alpha \in q(A)$$
$$(y,(V,\psi),w) \in B \Longrightarrow \beta \in q(B).$$

Skupovi $q(A)$ i $q(B)$ su otvoreni u $T(X,\Phi)$. Za sve $a \in A$ i $b \in B$ imamo $a \not\sim b$ (što slijedi iz (1) i $W_1 \cap W_2 = \emptyset$) $\Longrightarrow q(a) \neq q(b) \Longrightarrow q(A) \cap q(B) = \emptyset$.

U oba slučaja α i β imaju disjunktne otvorene okoline u $T(X,\Phi)$ pa zaključujemo kako je $T(X,\Phi)$ Hausdorffov prostor. □

Napomena 3.13. Neka je (X,Φ) diferencijalna $n-$mnogostrukost te neka su F i $\sim$ iz definicije 3.7. Neka je $q\colon F \to F/_\sim$ kvocijentno preslikavanje. Definiramo

$$G = \{(x,(U,\varphi),0) \mid (U,\varphi) \in \Phi, x \in U\}.$$

Očito je $G \subseteq F$. Tvrdimo kako je $q(G)$, kao potprostor od $T(X,\Phi)$, homeomorfan s X te kako je

$$\pi\mid_{q(G)}\colon q(G) \to X$$

homeomorfizam, pri čemu je π td. $(T(X,\Phi),\pi)$ tangencijalni svežanj od (X,Φ), tj. za $(x,(U,\varphi),v) \in F$ imamo $\pi([(x,(U,\varphi),v)]) = x$, pri čemu je $[x,(U,\varphi),v]$ pripadna klasa elementa pri $\sim$.
Jasno, $\pi\mid_{q(G)}\colon q(G) \to X$ je neprekidna surjekcija. Vrijedi $q(G) = \{[(x,(U,\varphi),0)] \mid (U,\varphi) \in \Phi, x \in U\}$ te za $(U,\varphi) \in \Phi$ i $x \in U$ imamo

$$[(x,(U,\varphi),0)] = \{(x,(V,\psi),0) \mid (V,\psi) \in \Phi, x \in V\}.$$

Stoga je $\pi\mid_{q(G)}\colon q(G) \to X$ neprekidna bijekcija. Preostaje pokazati kako je i otvoreno preslikavanje. Promotrimo komutativni dijagram

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "q|_G"'] & & X \\ & q(G) \arrow[ur, "\pi|_{q(G)}"'] & \end{tikzcd},$$

gdje je p projekcija na prvu koordinatu (tj. restrikcija projekcije $X \times \Phi \times \mathbb{R}^n \to X$ na prvu koordinatu). Ako je p otvoreno preslikavanje, onda na isti način kao u napomeni 3.10, odnosno iz

$$\pi\mid_{q(G)}(U) = \pi\mid_{q(G)}(q\mid_G((q\mid_G)^{-1}(U))) = p((q\mid_G)^{-1}(U)),$$

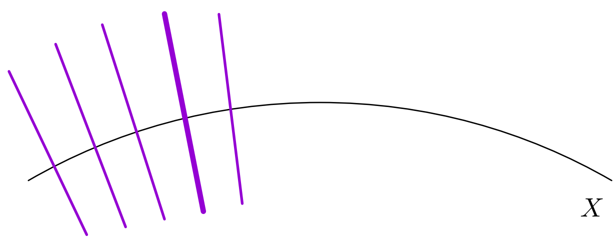
vidimo kako je $\pi\ |_{q(G)}$ otvoreno preslikavanje. Prema tome, dovoljno je pokazati kako je p otvoreno preslikavanje. Imamo kako je G potprostor od F i nadalje, prema napomeni 3.5, imamo kako je $\{U' \times \{(U,\varphi)\} \times W \mid (U,\varphi) \in \Phi, U'$ otvoren u U, W otvoren u $\mathbb{R}^n\}$ baza topologije od F pa slijedi kako je $\{G \cap (U' \times \{(U,\varphi)\} \times W) \mid (U,\varphi) \in \Phi, U'$ otvoren u U, W otvoren u $\mathbb{R}^n\}$ baza topologije od G, odnosno kako je

$$\{U' \times \{(U,\varphi)\} \times \{0\} \mid (U,\varphi) \in \Phi, U' \text{ otvoren u } U\}$$

baza topologije od G. Za sve $(U,\varphi) \in \Phi$ i za svaki U' otvoren u U očito vrijedi

$$p(U' \times \{(U,\varphi)\} \times \{0\}) = U'$$

$\implies p\colon G \to X$ je otvoreno preslikavanje $\implies \pi|_{q(G)}\colon q(G) \to X$ je homeomorfizam. Za potprostor $q(G)$ od $T(X,\Phi)$, tj. za $\{[(x,(U,\varphi),0)] \mid (U,\varphi) \in \Phi, x \in U\}$, kažemo da je **0−prerez** od π.



Napomena 3.14. Neka je (X,Φ) diferencijalna $n-$mnogostrukost te neka je $x \in X$. Tada je

$$T_x(X,\Phi) = \{[(x,(U,\varphi),v)] \mid (U,\varphi) \in \Phi, x \in U, v \in \mathbb{R}^n\},$$

gdje je $[z]$ klasa elementa $z \in F$ pri relaciji $\sim$ (iz definicije 3.7).

Propozicija 3.15.

Neka je (X,Φ) diferencijalna $n-$mnogostrukost te neka su F i $\sim$ iz definicije 3.7. Neka je $q\colon F \to F/_\sim$ kvocijentno preslikavanje. Neka je $x \in X$ te neka je $(U,\varphi) \in \Phi$ td. je $x \in U$. Tada je $\{x\} \times \{(U,\varphi)\} \times \mathbb{R}^n \subseteq F$ (očito), $q(\{x\} \times \{(U,\varphi)\} \times \mathbb{R}^n) \subseteq T_x(X,\Phi)$ i vrijedi kako je

$$q|_{\{x\}\times\{(U,\varphi)\}\times\mathbb{R}^n}$$

kao funkcija $\{x\} \times \{(U,\varphi)\} \times \mathbb{R}^n \to T_x(X,\Phi)$ homeomorfizam.

Dokaz. Iz napomene 3.14 je jasno $q(\{x\} \times \{(U,\varphi)\} \times \mathbb{R}^n) \subseteq T_x(X,\Phi)$. Imamo kako je

$$f \coloneqq q|_{\{x\}\times\{(U,\varphi)\}\times\mathbb{R}^n, T_x(X,\Phi)}\colon \{x\} \times \{(U,\varphi)\} \times \mathbb{R}^n \to T_x(X,\Phi)$$

neprekidna funkcija. Ako su v, $w \in \mathbb{R}^n$ td. je $f(x,(U,\varphi),v) = f(x,(U,\varphi),w)$, onda imamo

$$\begin{aligned} f(x,(U,\varphi),v) = f(x,(U,\varphi),w) &\implies (x,(U,\varphi),v) \sim (x,(U,\varphi),w) \implies \\ &\implies D(\delta_{(U,\varphi),(U,\varphi)})(\varphi(x))(v) = w \implies \\ &[\text{diferencijal identitete}] \implies v = w \implies \\ &\implies (x,(U,\varphi),v) = (x,(U,\varphi),w). \end{aligned}$$

Dakle, f je injekcija. Neka je $\alpha \in T_x(X,\Phi) \implies \alpha = [(x,(V,\psi),w)]$, gdje je $(V,\psi) \in \Phi$ td. je $x \in V$ i $w \in \mathbb{R}^n$. Želimo naći $v \in \mathbb{R}^n$ td. je $(x,(U,\varphi),v) \sim (x,(V,\psi),w)$. No, ako stavimo

$$v := D(\delta_{(V,\psi),(U,\varphi)})(\psi(x))(w),$$

onda očito imamo $(x,(V,\psi),w) \sim (x,(U,\varphi),v) \implies (x,(U,\varphi),v) \sim (x,(V,\psi),w)$. Zaključujemo kako je $(x,(U,\varphi),v) \in \{x\} \times \{(U,\varphi)\} \times \mathbb{R}^n$ i $f(x,(U,\varphi),v) = [(x,(U,\varphi),v)]$. Dakle, $f(x,(U,\varphi),v) = \alpha$. Prema tome, f je surjekcija. Dakle,

$$f \colon \{x\} \times \{(U,\varphi)\} \times \mathbb{R}^n \to T_x(X,\Phi)$$

je neprekidna bijekcija. Uzimajući u obzir kako je

$$\{V' \times \{(V,\psi)\} \times W \mid (V,\psi) \in \Phi, V' \text{ otvoren u } V, W \text{ otvoren u } \mathbb{R}^n\}$$

baza topologije od F, imamo kako je

$$\{\{x\} \times \{(U,\varphi)\} \times W \mid W \text{ otvoren u } \mathbb{R}^n\}$$

baza topologije od $\{x\} \times \{(U,\varphi)\} \times \mathbb{R}^n$ (zapravo je to topologija tog potprostora). Neka je W otvoren skup u $\mathbb{R}^n$. Imamo

$$\begin{aligned} f(\{x\} \times \{(U,\varphi)\} \times W) &= q(\{x\} \times \{(U,\varphi)\} \times W) = \\ &= q(\{x\} \times \{(U,\varphi)\} \times \mathbb{R}^n) \cap q(U \times \{(U,\varphi)\} \times W) = \\ &= T_x(X,\Phi) \cap q(U \times \{(U,\varphi)\} \times W). \end{aligned}$$

Skup s desne strane znaka presjeka je otvoren u $T(X,\Phi) \implies f(\{x\} \times \{(U,\varphi)\} \times W)$ otvoren u $T_x(X,\Phi) \implies f$ je otvoreno preslikavanje. Prema tome, f je homeomorfizam. $\square$

Korolar 3.16.

Neka je (X,Φ) diferencijalna $n-$mnogostrukost te neka je $x \in X$. Tada je $T_x(X,\Phi)$ homeomorfan (kao potprostor od $T(X,\Phi)$) s $\mathbb{R}^n$.

Dokaz. Prema propoziciji 3.15 dovoljno je dokazati kako je $\{x\} \times \{(U, \varphi)\} \times \mathbb{R}^n$ homeomorfan s $\mathbb{R}^n$, pri čemu je $(U, \varphi) \in \Phi$ td. je $x \in U$ i pri čemu na $\{x\} \times \{(U, \varphi)\} \times \mathbb{R}^n$ gledamo kao na potprostor od F (iz definicije 3.7). Funkcija

$$\begin{gathered} f\colon \{x\} \times \{(U, \varphi)\} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ f(x, (U, \varphi), v) = v \end{gathered}$$

je neprekidna jer je restrikcija projekcije na zadnju koordinatu, a inverz od f je funkcija

$$\begin{gathered} \mathbb{R}^n \to \{x\} \times \{(U, \varphi)\} \times \mathbb{R}^n \\ v \mapsto (x, (U, \varphi), v), \end{gathered}$$

koja je neprekidna kao funkcija $\mathbb{R}^n \to X \times \Phi \times \mathbb{R}^n$, jer su joj komponentne funkcije neprekidne. □

Napomena 3.17. Neka je $(V, +, \cdot)$ (realni) vektorski prostor, neka je W skup te neka je $f\colon V \to W$ bijekcija. Tada postoje jedinstvena binarna relacija $+'$ na W i jedinstvena funkcija $\cdot'\colon \mathbb{R} \times W \to W$ td. je $(W, +', \cdot')$ vektorski prostor te da je f izomorfizam vektorskih prostora $(V, +, \cdot)$ i $(W, +', \cdot')$.
Naime, definirajmo $+'$ i $\cdot'$ (za sve x, $y \in W$ i sve $\lambda \in \mathbb{R}$) s

$$\begin{gathered} x +' y = f(f^{-1}(x) + f^{-1}(y)) \\ \lambda \cdot' x = f(\lambda \cdot f^{-1}(x)). \end{gathered}$$

Uočimo kako je tada

$$\begin{gathered} f^{-1}(x +' y) = f^{-1}(x) + f^{-1}(y), \\ f^{-1}(\lambda \cdot' x) = \lambda \cdot f^{-1}(x) \end{gathered}$$

za sve x, $y \in W$ i za sve $\lambda \in \mathbb{R}$ te

$$\begin{gathered} f(a + b) = f(a) +' f(b), \\ f(\lambda \cdot a) = \lambda \cdot' f(a) \end{gathered}$$

za sve a, $b \in V$ i za sve $\lambda \in \mathbb{R}$. Lako se provjeri kako je $(W, +', \cdot')$ vektorski prostor te znamo kako je f izomorfizam vektorskih prostora $(V, +, \cdot)$ i $(W, +', \cdot')$.
Ako su $+''$ i $\cdot''$ td. je $(W, +'', \cdot'')$ vektorski prostor te da je f izomorfizam od $(V, +, \cdot)$ i $(W, +'', \cdot'')$, onda je f^{-1} izomorfizam od $(W, +'', \cdot'')$ i $(V, +, \cdot)$ pa za sve x, $y \in W$ vrijedi

$$f^{-1}(x +'' y) = f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$$

$\Longrightarrow x +'' y = f(f^{-1}(x) + f^{-1}(y)) \Longrightarrow +'' = +'$. Analogno dobivamo i $\cdot'' = \cdot'$.
Kažemo da je $(W, +', \cdot')$ vektorski prostor induciran s $(V, +, \cdot)$ i f.
Neka je (X, Φ) diferencijalna $n-$mnogostrukost te neka je $x \in X$. Odaberimo $(U, \varphi) \in \Phi$ td. je $x \in U$. Funkcija $f\colon \mathbb{R}^n \to T_x(X, \Phi)$ dana s

$$f(v) = [(x, (U, \varphi), v)]$$

je bijekcija kao kompozicija funkcije $\mathbb{R}^n \to \{x\} \times \{(U, \varphi)\} \times \mathbb{R}^n$, $v \mapsto (x, (U, \varphi), v)$ koja je očito bijekcija, i funkcije $\{x\} \times \{(U, \varphi)\} \times \mathbb{R}^n \to T_x(X, \Phi)$, $(x, (U, \varphi), v) \mapsto [(x, (U, \varphi), v)]$, koja je bijekcija prema propoziciji 3.15. Neka su $+$ i $\cdot$ td. je $(T_x(X, \Phi), +, \cdot)$ vektorski prostor induciran s $\mathbb{R}^n$ (standardni vektorski prostor) i f. Tvrdimo da ovako uvedeni $+$ i $\cdot$ ne ovise o izboru karte (U, φ). Pretpostavimo kako je $(V, \psi) \in \Phi$ td. je $x \in V$. Neka je $g \colon \mathbb{R}^n \to T_x(X, \Phi)$ dana s

$$g(v) = [(x, (V, \psi), v)].$$

Neka su $+'$ i $\cdot'$ td. je $(T_x(X, \Phi), +', \cdot')$ vektorski prostor induciran s $\mathbb{R}^n$ i g. Neka su α, $\beta \in T_x(X, \Phi)$. Imamo $\alpha = f(v)$ i $\beta = f(w)$ za neke v, $w \in \mathbb{R}^n$ pa je

$$\alpha + \beta = f(v + w) = [(x, (U, \varphi), v + w)]. \quad (1)$$

S druge strane, imamo $\alpha = g(v')$ i $\beta = g(w')$ pa je

$$\alpha +' \beta = g(v' + w') = [(x, (V, \psi), v' + w')]. \quad (2)$$

Iz $f(v) = g(v')$ i $f(w) = g(w')$ slijedi

$$\begin{aligned} &\begin{cases} [(x, (U, \varphi), v)] = [(x, (V, \psi), v')] \\ [(x, (U, \varphi), w)] = [(x, (V, \psi), w')] \end{cases} \implies \begin{cases} D(\delta_{(U,\varphi),(V,\psi)})(\varphi(x))(v) = v' \\ D(\delta_{(U,\varphi),(V,\psi)})(\varphi(x))(w) = w' \end{cases} \implies \\ &\implies D(\delta_{(U,\varphi),(V,\psi)})(\varphi(x))(v + w) = v' + w' \implies \\ &\implies [(x, (U, \varphi), v + w)] = [(x, (V, \psi), v' + w')]. \end{aligned}$$

Iz (1) i (2) sada slijedi $\alpha + \beta = \alpha +' \beta$. Prema tome, $+ = +'$. Analogno dobivamo kako je $\cdot = \cdot'$.

Od sada pa nadalje, ako je (X, Φ) diferencijalna $n-$mnogostrukost i $x \in X$, na $T_x(X, \Phi)$ promatramo strukturu vektorskog prostora dobivenu na gore opisan način. Uočimo: ako je $(U, \varphi) \in \Phi$ td. je $x \in U$, onda je funkcija $\mathbb{R}^n \to T_x(X, \Phi), v \mapsto [(x, (U, \varphi), v)]$ izomorfizam.

Lema 3.18.

Neka su n, $m \in \mathbb{N}$ te neka je $h \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n+m}$ funkcija definirana s

$$h((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_m)) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m).$$

Tada je h homeomorfizam.

Dokaz. Neka je $i \in \{1, \ldots, n\}$. Tada je $i-$ta komponentna funkcija od h jednaka kompoziciji projekcije $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ na prvu koordinatu i projekcije $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ na $i-$tu koordinatu. Dakle, $i-$ta komponentna funkcija od h je neprekidna (kao funkcija $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$). Analogno vidimo kako isto vrijedi i za svaki $i \in \{n + 1, \ldots, n + m\}$. Prema tome, h je neprekidna.

S druge strane, funkcija $h^{-1}\colon \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ je neprekidna jer su joj obje komponentne funkcije neprekidne. $\square$

Napomena 3.19. Ako su $f\colon X \to X'$ i $g\colon Y \to Y'$ homeomorfizmi, onda je funkcija

$$\begin{aligned} X \times Y &\to X' \times Y' \\ (x, y) &\mapsto (f(x), g(y)) \end{aligned}$$

homeomorfizam.

Teorem 3.20.

Neka je (X, Φ) diferencijalna $n-$mnogostrukost. Tada je $T(X, \Phi)$ $2n-$mnogostrukost.

Dokaz. Prema propoziciji 3.12 imamo kako je $T(X, \Phi)$ Hausdorffov prostor te kako zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti. Dokažimo još kako je $T(X, \Phi)$ lokalno $2n$-euklidski prostor.
Neka je $(U, \varphi) \in \Phi$, pri čemu je $U \neq \emptyset$ te neka je $q\colon F \to F/_\sim$ kvocijentno preslikavanje (gdje su F i $\sim$ iz definicije 3.7). Skup $U \times \{(U, \varphi)\} \times \mathbb{R}^n$ je otvoren u F pa je $q(U \times \{(U, \varphi)\} \times \mathbb{R}^n)$ otvoren skup u $T(X, \Phi)$ (jer je q otvoreno preslikavanje). Uočimo kako su sljedeća preslikavanja homeomorfizmi.

- $f = q|_{U \times \{(U,\varphi)\} \times \mathbb{R}^n, q(U \times \{(U,\varphi)\} \times \mathbb{R}^n)}\colon U \times \{(U, \varphi)\} \times \mathbb{R}^n \to q(U \times \{(U, \varphi)\} \times \mathbb{R}^n)$.
  Imamo kako je f neprekidna surjekcija, ali i otvoreno preslikavanje (jer je q otvoreno preslikavanje, a $U \times \{(U, \varphi)\} \times \mathbb{R}^n$ je otvoren skup u F). Pokažimo još i kako je injekcija.
  Neka su $(x, (U, \varphi), v) \neq (y, (U, \varphi), w) \in U \times \{(U, \varphi)\} \times \mathbb{R}^n$.
  1° Ako je $x \neq y$, onda je jasno $[(x, (U, \varphi), v)] \neq [(y, (U, \varphi), w)]$, tj. $f(x, (U, \varphi), v) \neq f(y, (U, \varphi), w)$.
  2° Ako je $x = y$ onda iz propozicije 3.15 slijedi kako je $f(x, (U, \varphi), v) \neq f(x, (U, \varphi), w)$.
- $U \times \mathbb{R}^n \to U \times \{(U, \varphi)\} \times \mathbb{R}^n$, $(x, v) \mapsto (x, (U, \varphi), v)$.
- $\varphi(U) \times \mathbb{R}^n \to U \times \mathbb{R}^n$, $(x, v) \mapsto (\varphi^{-1}(x), v)$; prema napomeni 3.19.
- $h\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{2n}$ kao funkcija iz leme 3.18 (za $m = n$).

Skup $\varphi(U) \times \mathbb{R}^n$ je otvoren u $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ pa je $h(\varphi(U) \times \mathbb{R}^n)$ otvoren u $\mathbb{R}^{2n}$. Jasno je kako h inducira homeomorfizam $\varphi(U) \times \mathbb{R}^n \to h(\varphi(U) \times \mathbb{R}^n)$; pri tome na $\varphi(U) \times \mathbb{R}^n$ imamo relativnu topologiju s obzirom na topologiju za $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. No, općenito vrijedi: ako su A i B potprostori od X i Y redom, onda je $A \times B$ potprostor od $X \times Y$ (DZ). Prema tome, topologija na $\varphi(U) \times \mathbb{R}^n$ (kao potprostoru od $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$) je ista kao produktna topologija. Sve skupa, imamo

$$h(\varphi(U) \times \mathbb{R}^n) \cong \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \cong U \times \mathbb{R}^n \cong U \times \{(U, \varphi)\} \times \mathbb{R}^n \cong q(U \times \{(U, \varphi)\} \times \mathbb{R}^n).$$

Skup na lijevoj strani je otvoren skup u $\mathbb{R}^{2n}$ pa je $q(U \times \{(U, \varphi)\} \times \mathbb{R}^n)$ homeomorfan otvorenom skupu u $\mathbb{R}^{2n}$. Budući takvi skupovi pokrivaju $T(X, \Phi)$ (za $(U, \varphi) \in \Phi$), dokazali smo kako svaka točka iz $T(X, \Phi)$ ima otvorenu okolinu homeomorfnu otvorenom podskupu od $\mathbb{R}^{2n}$. Prema tome, $T(X, \Phi)$ je lokalno $2n-$euklidski, dakle $T(X, \Phi)$ je $2n-$mnogostrukost. $\square$

Neka je (X, Φ) diferencijalna $n-$mnogostrukost, $(U, \varphi) \in \Phi$. Uz oznake iz prethodnog dokaza, promotrimo sljedeću kompoziciju

$$q(U \times \{(U,\varphi)\} \times \mathbb{R}^n) \xrightarrow{q^{-1}} U \times \{(U,\varphi)\} \times \mathbb{R}^n \xrightarrow[\text{1 i 3}]{\text{proj.}} U \times \mathbb{R}^n \xrightarrow[(\varphi(z),v)]{(z,v)\mapsto} \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{h} h(\varphi(U) \times \mathbb{R}^n)$$

Imamo kako je to homeomorfizam. Označimo ga, kao funkciju $q(U \times \{(U,\varphi)\} \times \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^{2n}$, sa $\xi_{(U,\varphi)}$. Dakle, $\xi_{(U,\varphi)} \colon q(U \times \{(U,\varphi)\} \times \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^{2n}$ je smještenje pa zaključujemo kako je

$$(q(U \times \{(U,\varphi)\} \times \mathbb{R}^n), \xi_{(U,\varphi)})$$

$2n-$karta za $T(X, \Phi)$. Neka je Σ_Φ skup svih ovakvih karata (za $(U,\varphi) \in \Phi$).

Propozicija 3.21.

Neka je (X, Φ) diferencijalna $n-$mnogostrukost. Tada je Σ_Φ gladak $2n-$atlas za $T(X, \Phi)$.

Dokaz. Prema dokazu teorema 3.20, imamo kako je Σ_Φ $2n-$atlas za $T(X, \Phi)$. Ostaje još pokazati kako su svake dvije karte ovog atlasa glatko povezane.

Neka su (U, φ), $(V, \psi) \in \Phi$ td. je $q(U \times \{(U,\varphi)\} \times \mathbb{R}^n) \cap q(V \times \{(V,\psi)\} \times \mathbb{R}^n) \neq \emptyset$. Promotrimo funkciju η prijelaza karata $(q(U \times \{(U,\varphi)\} \times \mathbb{R}^n), \xi_{(U,\varphi)})$ i $(q(V \times \{(V,\psi)\} \times \mathbb{R}^n), \xi_{(V,\psi)})$ kao funkciju u $\mathbb{R}^{2n}$. Imamo

$$\eta \colon \xi_{(U,\varphi)} \left(q(U \times \{(U,\varphi)\} \times \mathbb{R}^n) \cap q(V \times \{(V,\psi)\} \times \mathbb{R}^n)\right) \to \mathbb{R}^{2n}$$
$$\eta(z) = \xi_{(V,\psi)}(\xi^{-1}_{(U,\varphi)}(z)).$$

Uočimo kako vrijedi

$$q(U \times \{(U,\varphi)\} \times \mathbb{R}^n) \cap q(V \times \{(V,\psi)\} \times \mathbb{R}^n) = q((U \cap V) \times \{(U,\varphi)\} \times \mathbb{R}^n) = q((U \cap V) \times \{(V,\psi)\} \times \mathbb{R}^n);$$

dokazati za DZ. Stoga je domena od η jednaka

$$\xi_{(U,\varphi)}(q((U \cap V) \times \{(U,\varphi)\} \times \mathbb{R}^n)) = h(\varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n)$$

te imamo kako je η kompozicija sljedećih funkcija

$$
\begin{tikzcd}
h(\varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n) \arrow[d] & (z, v) \arrow[d, mapsto] \\
\varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \arrow[d] & (z, v) \arrow[d, mapsto] \\
(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \arrow[d] & (\varphi^{-1}(z), v) \arrow[d, mapsto] \\
(U \cap V) \times \{(U, \varphi)\} \times \mathbb{R}^n \arrow[d] & (\varphi^{-1}(z), (U, \varphi), v) \arrow[d, mapsto] \\
q((U \cap V) \times \{(U, \varphi)\} \times \mathbb{R}^n) \arrow[d, equal] & q(\varphi^{-1}(z), (U, \varphi), v) \arrow[d, equal] \\
q((U \cap V) \times \{(V, \psi)\} \times \mathbb{R}^n) \arrow[d] & q(\varphi^{-1}(z), (V, \psi), D(\delta_{(U,\varphi),(V,\psi)})(z)(v)) \arrow[d, mapsto] \\
(U \cap V) \times \{(V, \psi)\} \times \mathbb{R}^n \arrow[d] & (\psi(\varphi^{-1}(z)), D(\delta_{(U,\varphi),(V,\psi)})(z)(v)) \\
(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \arrow[d] & \\
\psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \arrow[d] & \\
h(\psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n) &
\end{tikzcd}
$$

Stoga je za $z \in \varphi(U \cap V)$ i $v \in \mathbb{R}^n$, $\eta(z, v) = (\psi(\varphi^{-1}(z)), D(\delta_{(U,\varphi),(V,\psi)})(z)(v))$

$$\Longrightarrow \eta(z, v) = (\delta_{(U,\varphi),(V,\psi)}(z), D(\delta_{(U,\varphi),(V,\psi)})(z)(v)).$$

Funkcija $\delta_{(U,\varphi),(V,\psi)} \colon \varphi(U \cap V) \to \mathbb{R}^n$ je glatka (jer su (U, φ), $(V, \psi) \in \Phi$), a lako zaključujemo kako je funkcija $\varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(z, v) \mapsto D(\delta_{(U,\varphi),(V,\psi)})(z)(v)$ također glatka (kao u napomeni 3.10 za funkciju Δ). Prema tome, η je glatka funkcija. Dakle, Σ_Φ je gladak $2n-$atlas za $T(X, \Phi)$. $\square$

Neka je (X, Φ) diferencijalna $n-$mnogostrukost. Imamo kako je Σ_Φ gladak $2n-$atlas za $T(X, \Phi)$ pa prema teoremu 2.13 postoji jedinstveni maksimalan gladak $2n-$atlas Λ_Φ za $T(X, \Phi)$ td. je $\Sigma_\Phi \subseteq \Lambda_\Phi$. Imamo kako je $(T(X, \Phi), \Lambda_\Phi)$ diferencijalna $2n-$mnogostrukost.

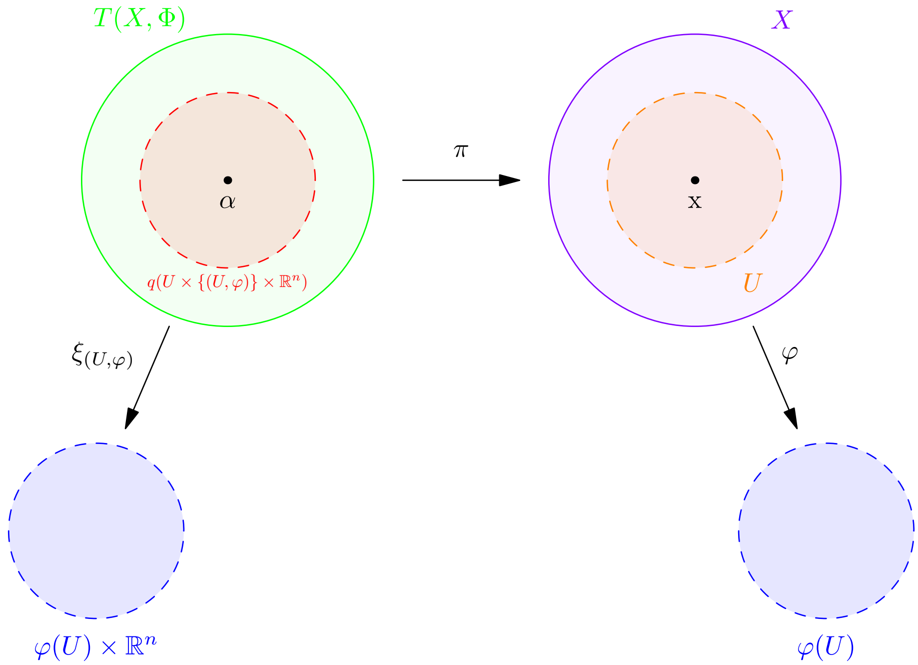
Propozicija 3.22.

Neka je (X, Φ) diferencijalna $n-$mnogostrukost te neka je $(T(X, \Phi), \pi)$ tangencijalni svežanj od (X, Φ). Tada je π glatka funkcija s obzirom na $(T(X, \Phi), \Lambda_\Phi)$ i (X, Φ).

Dokaz. Neka je $\alpha \in T(X, \Phi)$. Imamo $\alpha = [(x, (U, \varphi), v)]$ za neke $(U, \varphi) \in \Phi$, $x \in U$ i $v \in \mathbb{R}^n$. Vrijedi

- $\pi(q(U \times \{(U, \varphi)\} \times \mathbb{R}^n)) \subseteq U$
- $(q(U \times \{(U, \varphi)\} \times \mathbb{R}^n), \xi_{(U,\varphi)}) \in \Lambda_\Phi$
- $(U, \varphi) \in \Phi$.

Imamo sliku



Dovoljno je, prema propoziciji 2.19, dokazati kako je funkcija

$$\varphi \circ \pi \circ \xi_{(U,\varphi)}^{-1} \colon \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

klase C^∞. Za $z \in \varphi(U)$ i $v \in \mathbb{R}^n$ vrijedi

$$\begin{aligned}(\varphi \circ \pi \circ \xi_{(U,\varphi)}^{-1})(z, v) &= \varphi(\pi(\xi_{(U,\varphi)}^{-1}(z, v))) \\ &= \varphi(\pi([(\varphi^{-1}(z), (U, \varphi), v)])) \\ &= \varphi(\varphi^{-1}(z)) = z\end{aligned}$$

$\Longrightarrow \varphi \circ \pi \circ \xi_{(U,\varphi)}^{-1}$ je klase C^∞. $\square$

Napomena 3.23. Prema primjeru 2.17, ukoliko je S ploha (u $\mathbb{R}^3$), imamo kako je (S, Φ) diferencijalna $2-$mnogostrukost, pri čemu je $\Phi = \{(\varphi(U), \varphi^{-1}) \mid \varphi \colon U \to \mathbb{R}^3$ lokalna parametrizacija od $S\}$. Neka je $p \in S$. Ranije smo definirali T_pS, tangencijalnu ravninu na S u p; znamo kako je to dvodimenzionalni vektorski potprostor od $\mathbb{R}^3$ te kako je $T_pS = D(\varphi)(x_0)(\mathbb{R}^2)$ za bilo koju lokalnu parametrizaciju $\varphi \colon U \to \mathbb{R}^3$ od S td. je $p = \varphi(x_0)$ za neki $x_0 \in U$. Definiramo funkciju $g \colon T_pS \to T_p(S, \Phi)$ na sljedeći način. Fiksirajmo lokalnu parametrizaciju $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^3$ od S oko p. Neka je $x_0 \in U$ td. je $\varphi(x_0) = p$. Definiramo

$$g(u) = [(p, (\varphi(U), \varphi^{-1}), (D(\varphi)(x_0))^{-1}(u))] \in T_p(S, \Phi).$$

Ovdje gledamo na $D(\varphi)(x_0)$ kao na izomorfizam $\mathbb{R}^2 \to T_pS$. Uočimo kako je g kompozicija izomorfizma $(D(\varphi)(x_0))^{-1}\colon T_pS \to \mathbb{R}^2$ i izomorfizma $\mathbb{R}^2 \to T_p(S, \Phi), v \mapsto [(p, (\varphi(U), \varphi^{-1}), v)]$. Dakle, g je izomorfizam. Tvrdimo kako g ne ovisi o izboru lokalne parametrizacije φ. Neka je zato $\psi\colon V \to \mathbb{R}^3$ lokalna parametrizacija od S oko p te neka su $y_0 \in V$ td. je $\psi(y_0) = p$ i $v \in T_pS$. Trebamo pokazati

$$[(p, (\varphi(U), \varphi^{-1}), (D(\varphi)(x_0))^{-1}(v))] = [(p, (\psi(V), \psi^{-1}), (D(\psi)(y_0))^{-1}(v))].$$

Ovo je redom ekvivalentno s

$$\begin{aligned}
&D(\delta_{(\varphi(U),\varphi^{-1}),(\psi(V),\psi^{-1})})(\varphi^{-1}(p))((D(\varphi)(x_0))^{-1}(v)) = (D(\psi)(y_0))^{-1}(v) \iff \\
\iff &D(\psi)(y_0)(D(\delta_{(\varphi(U),\varphi^{-1}),(\psi(V),\psi^{-1})})(x_0)((D(\varphi)(x_0))^{-1}(v))) = v \iff \\
\iff &(D(\psi)(y_0) \circ D(\delta_{(\varphi(U),\varphi^{-1}),(\psi(V),\psi^{-1})})(x_0))((D(\varphi)(x_0))^{-1}(v)) = v \iff \\
\iff &D(\psi \circ \delta_{(\varphi(U),\varphi^{-1}),(\psi(V),\psi^{-1})})(x_0)((D(\varphi)(x_0))^{-1}(v)) = v. \quad (1)
\end{aligned}$$

Imamo

$$\begin{aligned}
\psi \circ \delta_{(\varphi(U),\varphi^{-1}),(\psi(V),\psi^{-1})}\colon \varphi^{-1}(\varphi(U) \cap \psi(V)) &\to \mathbb{R}^3 \\
x &\mapsto \psi(\psi^{-1}(\varphi(x))) = \varphi(x)
\end{aligned}$$

$\implies \psi \circ \delta_{(\varphi(U),\varphi^{-1}),(\psi(V),\psi^{-1})} = \varphi|_{\varphi^{-1}(\varphi(U)\cap\psi(V))}$. Prema lokalnom svojstvu diferencijabilnosti imamo

$$D(\psi \circ \delta_{(\varphi(U),\varphi^{-1}),(\psi(V),\psi^{-1})})(x_0) = D(\varphi)(x_0),$$

stoga vrijedi (1) pa smo gotovi.

Neka je (X, Φ) diferencijalna $n-$mnogostrukost, (Y, Ψ) diferencijalna $m-$mnogostrukost te $f\colon X \to Y$ glatka funkcija. Definiramo funkciju $Df\colon T(X, \Phi) \to T(Y, \Psi)$ na sljedeći način. Neka je $\alpha \in T(X, \Phi)$. Imamo kako je $\alpha \in T_x(X, \Phi)$ za neki $x \in X$. Odaberimo $(U, \varphi) \in \Phi$ i $(V, \psi) \in \Psi$ td. je $x \in U$, $f(U) \subseteq V$ te $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U) \to \mathbb{R}^m$ klase C^∞ (propozicija 2.19). Prema propoziciji 3.15 postoji jedinstveni $v \in \mathbb{R}^n$ td. je $\alpha = [x, (U, \varphi), v]$. Definiramo

$$(Df)(\alpha) = [(f(x), (V, \psi), D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))(v))].$$

Definicija 3.24. *Neka je (X, Φ) diferencijalna $n-$mnogostrukost, (Y, Ψ) diferencijalna $m-$mnogostrukost te $f\colon X \to Y$ glatka funkcija. Za $Df\colon T(X, \Phi) \to T(Y, \Psi)$ kao gore kažemo da je* ***derivacija*** *funkcije f (s obzirom na (X, Φ) i (Y, Ψ)).*

Nije teško pokazati (DZ) kako ova definicija ne ovisi o izboru karata (U, φ) i (V, ψ). Nadalje, za sve $x \in X$ imamo kako je $(Df)(T_x(X, \Phi)) \subseteq T_{f(x)}(Y, \Psi)$ te vrijedi kako je

$$Df|_{T_x(X,\Phi),T_{f(x)}(Y,\psi)}\colon T_x(X, \Phi) \to T_{f(x)}(Y, \Psi)$$

linearan operator (DZ).

Propozicija 3.25.

Neka je (X, Φ) diferencijalna $n-$mnogostrukost, (Y, Ψ) diferencijalna $m-$mnogostrukost te $f\colon X \to Y$ glatka funkcija. Tada je $Df\colon T(X,\Phi) \to T(Y,\Psi)$ glatko preslikavanje mnogostrukosti $(T(X,\Phi), \Lambda_\Phi)$ i $(T(Y,\Psi), \Lambda_\Psi)$.

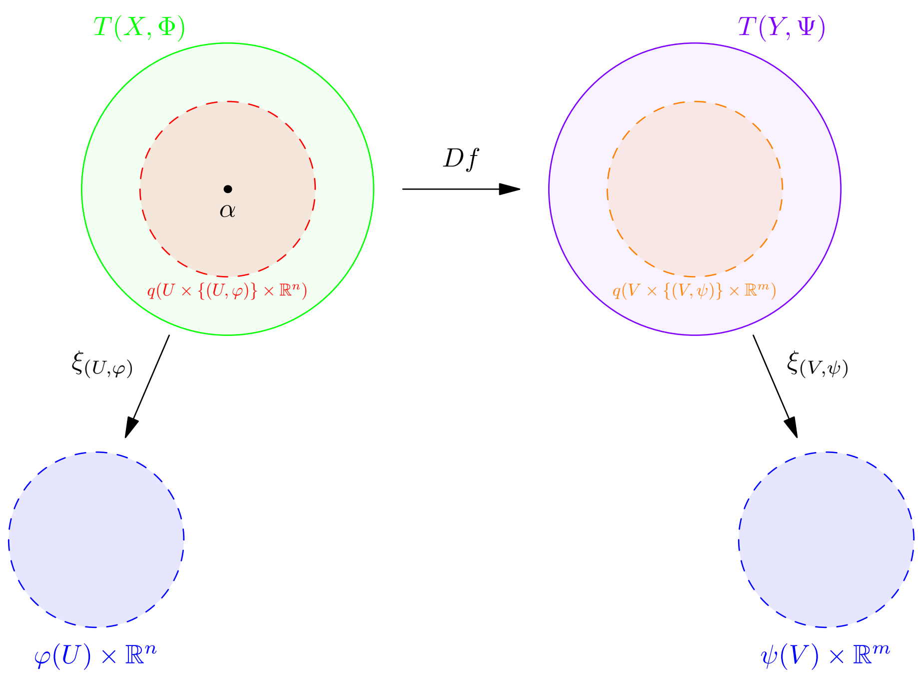
Dokaz. Neka je $\alpha \in T(X,\Phi)$. Tada je $\alpha \in T_x(X,\Phi)$ za neki $x \in X$. Nadalje, postoje $(U,\varphi) \in \Phi$, $(V,\psi) \in \Psi$ td. je

- $x \in U$
- $f(U) \subseteq V$
- $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U) \to \mathbb{R}^m$ klase C^∞.

Vrijedi $\alpha = [(x,(U,\varphi),v)]$ za neki $v \in \mathbb{R}^n$. Očito je $[(x,(U,\varphi),v)] \in q(U \times \{(U,\varphi)\} \times \mathbb{R}^n)$, pri čemu je q pripadno kvocijentno preslikavanje iz definicije 3.7, tj. $\alpha \in q(U \times \{(U,\varphi)\} \times \mathbb{R}^n)$. Za $y \in U$ i $w \in \mathbb{R}^n$ vrijedi

$$(Df)([(y,(U,\varphi),w)]) = [(f(y),(V,\psi),D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(y))(w))]. \quad (1)$$

Stoga je $(Df)(q(U \times \{(U,\varphi)\} \times \mathbb{R}^n)) \subseteq q(V \times \{(V,\psi)\} \times \mathbb{R}^m)$.



Dovoljno je, prema propoziciji 2.19, dokazati kako je

$$\xi_{(V,\psi)} \circ Df \circ (\xi_{(U,\varphi)})^{-1}\colon \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{2m}$$

klase C^∞. Podsjetimo se kako je za $y \in U$ i $w \in \mathbb{R}^n$, $\xi_{(U,\varphi)}([(y,(U,\varphi),w)]) = (\varphi(y),w)$. Za $z \in \varphi(U)$ i $u \in \mathbb{R}^n$ imamo

$$\begin{aligned}\left(\xi_{(V,\psi)} \circ Df \circ \xi^{-1}_{(U,\varphi)}\right)(z,u) &= \xi_{(V,\psi)}(Df(\xi^{-1}_{(U,\varphi)}(z,u))) = \\ &= \xi_{(V,\psi)}(Df([(\varphi^{-1}(z),(U,\varphi),u)])) \overset{(1)}{=} \\ &\overset{(1)}{=} \xi_{(V,\psi)}([(f(\varphi^{-1}(z)),(V,\psi),D(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})(z)(u))]) = \\ &= (\psi(f(\varphi^{-1}(z))), D(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})(z)(u)) = \\ &= ((\psi\circ f\circ\varphi^{-1})(z), D(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})(z)(u)).\end{aligned}$$

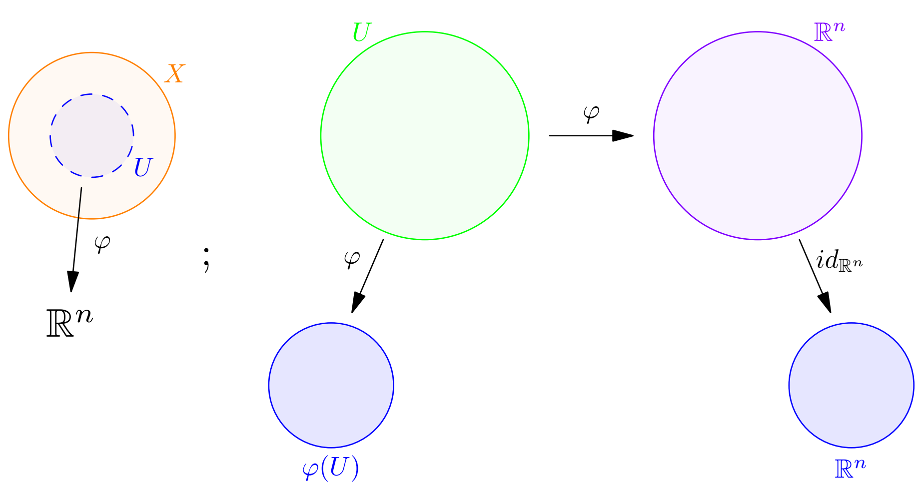
Budući su obe funkcije klase C^∞, zaključujemo kako je $\xi_{(V,\psi)} \circ Df \circ (\xi_{(U,\varphi)})^{-1} \colon \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{2m}$ klase C^∞ pa smo gotovi. □

Propozicija 3.26.

Neka je (X,Φ) diferencijalna $n-$mnogostrukost, (Y,Ψ) diferencijalna $m-$mnogostrukost te (Z,Θ) diferencijalna $l-$mnogostrukost. Pretpostavimo kako su $f\colon X\to Y$ i $g\colon Y \to Z$ glatke funkcije. Tada vrijedi
$$D(g\circ f) = D(g)\circ D(f).$$

Dokaz. DZ. □

Napomena 3.27. Neka je (X,Φ) diferencijalna $n-$mnogostrukost. Neka je $(U,\varphi)\in\Phi$. Budući je U otvoren skup u X, prema propoziciji 2.26 imamo kako za skup $\Phi_U = \{(V,\psi)\in\Phi \mid V\subseteq U\}$ vrijedi da je (U,Φ_U) diferencijalna $n-$mnogostrukost. Nadalje, neka je $\mathcal{K}$ kanonski $n-$atlas za $\mathbb{R}^n$. Je li $\varphi\colon U\to\mathbb{R}^n$ glatko preslikavanje mnogostrukosti (U,Φ_U) i $(\mathbb{R}^n,\mathcal{K})$?



Dovoljno je, prema propoziciji 2.19, dokazati kako je funkcija

$$id_{\mathbb{R}^n} \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \colon \varphi(U) \to \mathbb{R}^n$$

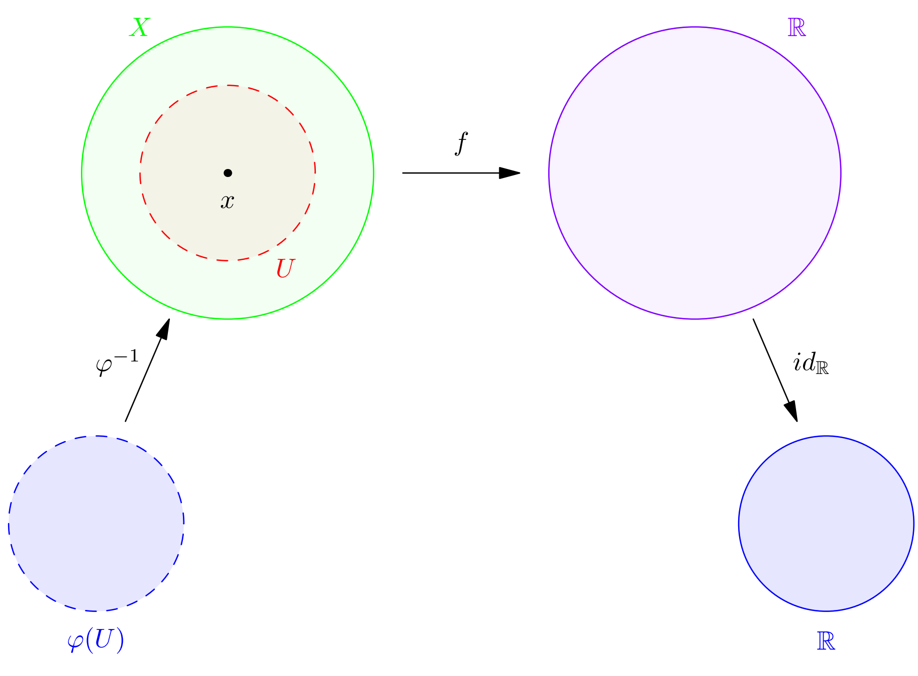
klase C^∞, no ovo je očito jer se radi o funkciji $id_{\varphi(U)} \colon \varphi(U) \to \mathbb{R}^n$. Nadalje, čemu je jednaka funkcija $D\varphi \colon T(U, \Phi_U) \to T(\mathbb{R}^n, \mathcal{K})$? Za $x \in U$ i $v \in \mathbb{R}^n$ imamo

$$\begin{aligned} D\varphi([(x,(U,\varphi),v)]) &= [(\varphi(x),(\mathbb{R}^n, id_{\mathbb{R}^n}), D(id_{\mathbb{R}^n} \circ \varphi \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))(v))] \\ &= [(\varphi(x),(\mathbb{R}^n, id_{\mathbb{R}^n}), v)]. \end{aligned}$$

Propozicija 3.28.

Neka je (X, Φ) diferencijalna $n-$ mnogostrukost te neka su $f, g \colon X \to \mathbb{R}$ glatke funkcije (mnogostrukosti (X, Φ) i $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$, gdje je $\mathcal{K}$ kanonski $1-$atlas za $\mathbb{R}$). Tada su $f + g \colon X \to \mathbb{R}$ i $f \cdot g \colon X \to \mathbb{R}$ također glatke funkcije.

Dokaz. Neka je $x \in X$. Odaberimo $(U, \varphi) \in \Phi$ td. je $x \in U$. Imamo $(\mathbb{R}, id_{\mathbb{R}}) \in \mathcal{K}$ te je $f(U), g(U) \subseteq \mathbb{R}$ pa po definiciji glatkog preslikavanja slijedi kako je $f \circ \varphi^{-1} = id_{\mathbb{R}} \circ f \circ \varphi^{-1} \colon \varphi(U) \to \mathbb{R}$ klase C^∞.



Isto tako je $g \circ \varphi^{-1} \colon \varphi(U) \to \mathbb{R}$ klase C^∞. Stoga su

$$f \circ \varphi^{-1} + g \circ \varphi^{-1} \colon \varphi(U) \to \mathbb{R} \text{ i } (f \circ \varphi^{-1}) \cdot (g \circ \varphi^{-1}) \colon \varphi(U) \to \mathbb{R}$$

klase C^∞. Dakle

$$id_{\mathbb{R}} \circ (f+g) \circ \varphi^{-1} \colon \varphi(U) \to \mathbb{R} \text{ i } id_{\mathbb{R}} \circ (f \cdot g) \circ \varphi^{-1} \colon \varphi(U) \to \mathbb{R}$$

su klase C^∞ pa prema propoziciji 2.19 slijedi kako su $f+g$ i $f \cdot g$ glatke funkcije. □

Napomena 3.29. Neka je (X, Φ) diferencijalna $n-$mnogostrukost te neka je (Y, Ψ) diferencijalna $m-$mnogostrukost. Tada je svaka konstantna funkcija $X \to Y$ glatka (DZ). Nadalje, ako je $f \colon X \to \mathbb{R}$ glatka funkcija te $\lambda \in \mathbb{R}$, onda kao u prethodnom dokazu vidimo kako je $\lambda f \colon X \to \mathbb{R}$ glatka funkcija (to zapravo slijedi iz prvog dijela ove napomene i propozicije 3.28). Posebno, $-f \colon X \to \mathbb{R}$ je glatka funkcija.

Neka je (X, Φ) diferencijalna $n-$mnogostrukost. Označimo s $C^\infty(X, \Phi)$ skup svih glatkih funkcija $f \colon X \to \mathbb{R}$. Uz zbrajanje i množenje funkcija (po točkama) imamo kako je $C^\infty(X, \Phi)$ prsten (propozicija 3.28). Fiksirajmo $p \in X$. Na $C^\infty(X, \Phi)$ definiramo relaciju $\sim_p$ s

$$f \sim_p g \iff \text{ postoji } U \text{ otvorena okolina od } p \text{ u } X \text{ td. je } f|_U = g|_U.$$

Lako se vidi kako je $\sim_p$ relacija ekvivalencije na $C^\infty(X, \Phi)$. Za $f \in C^\infty(X, \Phi)$ neka je $[f]_p$ pripadna klase ekvivalencije od f, tj. $[f]_p = \{g \in C^\infty(X, \Phi) \mid f \sim_p g\}$. Označimo s $C_p^\infty(X, \Phi)$ skup svih pripadnih klasa ekvivalencije; dakle $C_p^\infty(X, \Phi) = \{[f]_p \mid f \in C^\infty(X, \Phi)\}$. Na $C_p^\infty(X, \Phi)$ definiramo linearne operacije $+$ i $\cdot$ s

$$[f]_p + [g]_p = [f+g]_p \text{ i } [f]_p \cdot [g]_p = [f \cdot g]_p$$

(za DZ provjeriti kako je definicija dobra, tj. kako ne ovisi o izboru predstavnika klasa).

Definicija 3.30. *Neka je (X, Φ) diferencijalna $n-$mnogostrukost te $p \in X$. Tada je $C_p^\infty(X, \Phi)$ uz operacije $+$ i $\cdot$ (sve kao gore) također prsten kojeg zovemo* ***prsten klica glatkih funkcija*** *na X u p.*

Napomena 3.31. Neka je (X, Φ) diferencijalna $n-$mnogostrukost. Prema napomeni 3.29 i propoziciji 3.28 imamo kako je $C^\infty(X, \Phi)$ vektorski prostor. Stoga, za $p \in X$, uz operacije

$$[f]_p + [g]_p = [f+g]_p \text{ i } \lambda [f]_p = [\lambda f]_p,$$

$C_p^\infty(X, \Phi)$ dobiva strukturu vektorskog prostora.

Neka je (X, Φ) diferencijalna $n-$mnogostrukost te neka je $p \in X$. Označimo s $D_p(X, \Phi)$ skup svih funkcija $\tau \colon C^\infty(X, \Phi) \to \mathbb{R}$ koja imaju sljedeća svojstva

1. $\tau(\alpha f + \beta g) = \alpha \tau(f) + \beta \tau(g)$ za sve $\alpha,\, \beta \in \mathbb{R}$ i sve $f,\, g \in C^\infty(X, \Phi)$
2. $\tau(f \cdot g) = f(p)\tau(g) + g(p)\tau(f)$ za sve $f,\, g \in C^\infty(X, \Phi)$
3. $f,\, g \in C^\infty(X, \Phi)$ td. $f|_U = g|_U$ za neku otvorenu okolinu U od p u $X \implies \tau(f) = \tau(g)$.

Intuitivno: τ je derivacija.

Neka su $\tau_1,\, \tau_2 \in D_p(X,\Phi)$ te $\alpha_1,\, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Tada je $\alpha\tau_1+\alpha_2\tau_2 \colon C^\infty(X,\Phi) \to \mathbb{R}$ funkcija za koju tvrdimo kako je element od $D_p(X,\Phi)$:

1. Za $\alpha,\, \beta \in \mathbb{R}$ i $f,g \in C^\infty(X,\Phi)$ vrijedi

$$\begin{aligned}(\alpha_1\tau_1+\alpha_2\tau_2)(\alpha f+\beta g) &= \alpha_1\tau_1(\alpha f+\beta g)+\alpha_2\tau_2(\alpha f+\beta g) = \\ &= \alpha_1(\alpha\tau_1(f)+\beta\tau_1(g))+\alpha_2(\alpha\tau_1(f)+\beta\tau_2(g)) = \\ &= \alpha(\alpha_1\tau_1(f)+\alpha_2\tau_2(f))+\beta(\alpha_1\tau_1(g)+\alpha_2\tau_2(g)) = \\ &= \alpha(\alpha_1\tau_1+\alpha_2\tau_2)(f)+\beta(\alpha_1\tau_1+\alpha_2\tau_2)(g).\end{aligned}$$

2. Neka su $f,g \in C^\infty(X,\Phi)$. Imamo

$$\begin{aligned}(\alpha_1\tau_1+\alpha_2\tau_2)(f\cdot g) &= \alpha_1\tau_1(f\cdot g)+\alpha_2\tau_2(f\cdot g) = \\ &= \alpha_1(f(p)\cdot\tau_1(g)+g(p)\cdot\tau_1(f))+\alpha_2(f(p)\tau_2(g)+g(p)\tau_2(f)) = \\ &= f(p)\cdot(\alpha_1\tau_1+\alpha_2\tau_2)(g)+g(p)\cdot(\alpha_1\tau_1+\alpha_2\tau_2)(f).\end{aligned}$$

3. Ako su $f,g \in C^\infty(X,\Phi)$ td. je $f|_U = g|_U$ za neku otvorenu okolinu U od p u X, onda je $\tau_1(f)=\tau_1(g)$ i $\tau_2(f)=\tau_2(g)$ pa je $(\alpha_1\tau_1+\alpha_2\tau_2)(f)=(\alpha_1\tau_1+\alpha_2\tau_2)(g)$.

Prema tome, $\alpha_1\tau_1+\alpha_2\tau_2 \in D_p(X,\Phi)$. Dakle, $D_p(X,\Phi)$ ima strukturu vektorskog prostora (uz standardno zbrajanje i množenje skalarom). Definirajmo sada funkciju $\Theta \colon T_p(X,\Phi) \to D_p(X,\Phi)$ na sljedeći način. Neka je $v \in T_p(X,\Phi)$. Definiramo $\Theta(v) \colon C^\infty(X,\Phi) \to \mathbb{R}$ tako da za $f \in C^\infty(X,\Phi)$ stavimo

$$(\Theta(v))(f) = (Df)(v) \quad \in T_{f(p)}(\mathbb{R},\mathcal{K}) \cong \mathbb{R},$$

pri čemu je $\mathcal{K}$ kanonski $1-$atlas za $\mathbb{R}$, a $T_y(\mathbb{R},\mathcal{K})$ $(y \in \mathbb{R})$ identificiramo s $\mathbb{R}$ koristeći izomorfizam

$$\begin{gathered}T_y(\mathbb{R},\mathcal{K}) \to \mathbb{R} \\ [(y,(\mathbb{R},id_{\mathbb{R}}),u)] \mapsto u\end{gathered}$$

(komentar prije leme 3.18). Kako bismo dokazali da je $\Theta(v) \in D_p(X,\Phi)$, trebamo pokazati kako $\Theta(v)$ zadovoljava svojstva 1, 2 i 3. Uzmimo $\alpha,\, \beta \in \mathbb{R}$ te $f,\, g \in C^\infty(X,\Phi)$.

1. Želimo

$$\Theta(v)(\alpha f+\beta g) = \alpha\Theta(v)(f)+\beta\Theta(v)(g).$$

Imamo $v=[(p,(U,\varphi),u)]$, gdje je $(U,\varphi)\in\Phi$ td. $p \in U$, $u \in \mathbb{R}^n$. Vrijedi

$$\begin{aligned}D(\alpha f+\beta g)(v) &= D(\alpha f+\beta g)[(p,(U,\varphi),u)] = \\ &= [((\alpha f+\beta g)(p),(\mathbb{R},id_{\mathbb{R}}),D(id_{\mathbb{R}}\circ(\alpha f+\beta g)\circ\varphi^{-1})(\varphi(p))(u))]\end{aligned}$$

te

$$\begin{gathered}Df(v) = Df[(p,(U,\varphi),u)] = [(f(p),(\mathbb{R},id_{\mathbb{R}}),D(f\circ\varphi^{-1})(\varphi(p))(u))] \\ Dg(v) = [(g(p),(\mathbb{R},id_{\mathbb{R}}),D(g\circ\varphi^{-1})(\varphi(p))(u))].\end{gathered}$$

Stoga imamo

$$\begin{aligned}\Theta(v)(\alpha f+\beta g) &= D(\alpha f+\beta g)(\varphi(p))(u)\\ \Theta(v)(f) &= D(f\circ\varphi^{-1})(\varphi(p))(u)\\ \Theta(v)(g) &= D(g\circ\varphi^{-1})(\varphi(p))(u).\end{aligned}$$

Općenito, ako je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren i $f,\ g\colon \Omega \to \mathbb{R}$ klase C^1 te $p \in \Omega$, onda je $D(\alpha f+\beta g)(p) = = \alpha D(f)(p) + \beta D(g)(p)$. Slijedi

$$\begin{aligned}\Theta(v)(\alpha f+\beta g) &= D(\alpha(f\circ\varphi^{-1})+\beta(g\circ\varphi^{-1}))(\varphi(p))(u) =\\ &= \alpha D(f\circ\varphi^{-1})(\varphi(p))(u)+\beta D(g\circ\varphi^{-1})(\varphi(p))(u) =\\ &= \alpha\Theta(v)(f)+\beta\Theta(v)(g).\end{aligned}$$

2. Želimo

$$\Theta(v)(f\cdot g) = f(p)\Theta(v)(g)+g(p)\Theta(v)(f).$$

Koristimo činjenicu kako za $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren, $f,\ g\colon \Omega \to \mathbb{R}$ klase C^1 te $p \in \Omega$ vrijedi

$$D(f\cdot g)(p) = f(p)\cdot D(g)(p) + g(p)\cdot D(f)(p),$$

što lako vidimo promatrajući parcijalne derivacije.

3. Ovo je očigledno, detalje za DZ.

Sada kada smo definirali $\Theta\colon T_p(X,\Phi) \to D_p(X,\Phi)$, tvrdimo kako je linearno preslikavanje. Uzmimo $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ te $v,\ w \in T_p(X,\Phi)$. Želimo

$$\Theta(\alpha v+\beta w) = \alpha\Theta(v)+\beta\Theta(w)$$

(jednakost funkcija $C^\infty(X,\Phi) \to \mathbb{R}$). To vidimo na elementima domene. Zaista, za $f \in C^\infty(X,\Phi)$ uvjet $\Theta(\alpha v+\beta w)(f) = \alpha\Theta(v)(f)+\beta\Theta(w)(f)$ ekvivalentan je, prema definiciji od Θ, s

$$D(f)(\alpha v+\beta w) = \alpha D(f)(v)+\beta D(f)(w),$$

a to vrijedi jer je

$$Df|_{T_p(X,\Phi),T_{f(p)}(\mathbb{R},\mathcal{K})}\colon T_p(X,\Phi) \to T_{f(p)}(\mathbb{R},\mathcal{K})$$

linearan operator (ponovno koristimo identifikaciju prije leme 3.18).

Napomena 3.32. Neka je $n \in \mathbb{N}$, $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ klase C^1 te $x,\ y \in \mathbb{R}^n$. Tada postoji $z \in [x,y]$ td.

$$f(y)-f(x) = \langle(\partial_1 f(z),\dots,\partial_n f(z)), y-x\rangle\,.$$

Naime, definirajmo $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ s $\psi(t) = x+t(y-x)$ te primijenimo Lagrangeov teorem srednje vrijednosti na $f\circ\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (DZ).

Lema 3.33.

Neka je $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija klase C^1 te neka je $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ neprekidna. Definiramo funkciju $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ s

$$g(x) \coloneqq \int_0^1 h(tx)f(t)\,dt.$$

Tada je g neprekidna, za sve $i \in \{1,\dots,n\}$ postoji $\partial_i g$ te za sve $x \in \mathbb{R}^n$ vrijedi

$$\partial_i g(x) = \int_0^1 \partial h(tx) \cdot tf(t)\,dt.$$

Dokaz. Imamo kako je f omeđena pa postoji $N > 0$ td. $|f(t)| \leq N$ za sve $t \in [0,1]$. Neka je $M > 0$. Kako je h neprekidna, a $\overline{K}(0,M)$ je kompaktan skup u $\mathbb{R}^n$, imamo kako je h i uniformno neprekidna na $\overline{K}(0,M)$, tj. vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in \overline{K}(0,M))\left(\|x-y\| < \delta \Longrightarrow |h(x) - h(y)| < \frac{\varepsilon}{N}\right).$$

Uočimo kako je tada i tx, $ty \in \overline{K}(0,M)$, za sve $t \in [0,1]$. Također imamo $\|tx - ty\| = |t| \cdot \|x-y\| \leq \leq \|x-y\| < \delta$ pa slijedi

$$\begin{aligned}
|g(x) - g(y)| &= \left|\int_0^1 h(tx)f(t)\,dt - \int_0^1 h(ty)f(t)\,dt\right| = \\
&= \left|\int_0^1 (h(tx) - h(ty))f(t)\,dt\right| \leq \\
&\leq \int_0^1 |(h(tx) - h(ty))| \cdot |f(t)|\,dt \leq \\
&\leq \int_0^1 \varepsilon\,dt = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Dakle, za sve x, $y \in \overline{K}(0,M)$ vrijedi implikacija

$$\|x-y\| < \delta \Longrightarrow \|g(x) - g(y)\| \leq \varepsilon.$$

Stoga je g uniformno neprekidna na $\overline{K}(0,M)$, za sve $M > 0$. Iz toga slijedi (DZ) kako je $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ neprekidna. Neka je $x \in \mathbb{R}^n$, $i \in \{1,\dots,n\}$ te $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Imamo

$$\begin{aligned}
\frac{g(x+se_i) - g(x)}{s} &= \frac{\int_0^1 h(tx+tse_i)f(t)\,dt - \int_0^1 h(tx)f(t)\,dt}{s} = \\
&= \int_0^1 \frac{h(tx+tse_i) - h(tx)}{s} f(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Prema napomeni 3.32 imamo kako za sve $t \in [0,1]$ postoji $z_{s,t} \in \overline{tx, (tx+tse_i)}$ td. je

$$h(tx+tse_i) - h(tx) = \langle(\partial_1 h(z_{s,t}), \dots, \partial_n h(z_{s,t})), tse_i\rangle = \partial_i h(z_{s,t})ts.$$

Iz ovoga slijedi
$$\frac{g(x+se_i)-g(x)}{s} = \int_0^1 \partial_i h(z_{s,t}) t f(t)\, dt \quad (1)$$
te $\|z_{s,t} - tx\| \leq \|(tx + tse_i) - tx\| = \|tse_i\| = t|s|. \quad (2)$

Neka je $M > 0$ td. $x \in K(0, M)$ i uzmimo $\lambda > 0$ td. za sve $s \in \langle -\lambda, \lambda \rangle$ vrijedi $x + se_i \in K(0, M)$. Neka je $\varepsilon > 0$ po volji. Iz uniformne neprekidnosti slijedi kako postoji $\delta > 0$ td. za sve u, $v \in \overline{K}(0, M)$ vrijedi implikacija
$$\|u - v\| \ < \delta \Longrightarrow |\partial_i h(u) - \partial_i h(v)| < \frac{\varepsilon}{N}. \quad (3)$$
Konačno, odaberimo $\mu > 0$ td. $K(x, \mu) \subseteq K(0, M)$ te $\mu < \lambda$ i $\mu < \delta. \quad (4)$

Neka je $s \in \langle -\mu, \mu \rangle$, $s \neq 0$. Za sve $t \in \langle 0, 1]$ prema (2) vrijedi
$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{t} z_{s,t} - x \right\| \leq |s| \Longrightarrow \left\| \frac{1}{t} z_{s,t} - x \right\| < \mu \overset{(4)}{\Longrightarrow} \\ \overset{(4)}{\Longrightarrow} \frac{1}{t} z_{s,t} \in K(0, M) \Longrightarrow z_{s,t} = t \cdot \frac{1}{t} z_{s,t} \in K(0, M). \end{aligned}$$
Jasno, $tx \in K(0, M)$ jer $x \in K(0, M)$. Isto vrijedi i za $t = 0$. Dakle, $z_{s,t} \in K(0, M)$, $tx \in K(0, M)$ i $\|z_{s,t} - tx\| \overset{(2)}{\leq} |s| < \mu < \delta$ pa iz (3) slijedi
$$|\partial_i h(z_{s,t}) - \partial_i h(tx)| < \frac{\varepsilon}{N},$$
za sve $t \in \langle 0, 1]$. Stoga je prema (1)
$$\begin{aligned} \left| \frac{g(x+se_i)-g(x)}{s} - \int_0^1 \partial_i h(tx) t f(t)\, dt \right| \overset{(1)}{=} \left| \int_0^1 \partial_i h(z_{s,t}) t f(t)\, dt - \int_0^1 \partial_i h(tx) t f(t)\, dt \right| \leq \\ \leq \int_0^1 |\partial_i h(z_{s,t}) - \partial_i h(tx)| \cdot t \cdot |f(t)|\, dt \leq \varepsilon \end{aligned}$$
$\Longrightarrow \lim_{s \to 0} \frac{g(x+se_i)-g(x)}{s} = \int_0^1 \partial_i h(tx) t f(t)\, dt$, iz čega slijedi tvrdnja leme. □

Propozicija 3.34.

Neka je $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija klase C^∞. Tada postoje funkcije $g_1, \ldots, g_n \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ klase C^∞ td.
$$\partial_i f(0) = g_i(0)$$
za sve $i = 1, \ldots, n$ te td.
$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^n x_i g_i(x)$$
za sve $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Dokaz. Neka je $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Funkcija $f_x \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana s $f_x(t) = f(tx)$ je klase C^∞ te je prema osnovnom stavku diferencijalnog i integralnog računa

$$\int_0^1 f_x'(t)\,dt = f_x(1) - f_x(0) = f(x) - f(0).$$

Nadalje, za sve $t \in \mathbb{R}$ vrijedi $f_x'(t) = D(f)(tx)(x) = \partial_i f(tx)x_1 + \ldots + \partial_n f(tx)x_n$. Prema tome

$$f(x) - f(0) = \sum_{i=1}^n \left(x_i \int_0^1 \partial_i f(tx)\,dt \right). \quad (1)$$

Za $i \in \{1, \ldots, n\}$, neka je $g_i \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dana s

$$g_i(x) = \int_0^1 \partial_i f(tx)\,dt.$$

Iz leme 3.33 lako zaključujemo kako su funkcije g_i klase C^∞, a očito je i $g_i(0) = \partial_i f(0)$. Konačno, prema (1) vrijedi

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^n x_i g_i(x)$$

za sve $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. □

Lema 3.35.

Neka je (X, Φ) diferencijalna $n-$mnogostrukost te neka je $(U, \varphi) \in \Phi$. Pretpostavimo da je $\lambda \colon \varphi(U) \to \Omega$ difeomorfizam klase C^∞, gdje je Ω otvoren podskup od $\mathbb{R}^n$. Tada je $(U, \lambda \circ \varphi) \in \Phi$.

Dokaz. DZ. □

Lema 3.36.

Neka je (X, Φ) diferencijalna $n-$mnogostrukost. Neka je $p \in X$ te neka je $(U, \varphi) \in \Phi$ td. $p \in U$. Tada postoji $(V, \psi) \in \Phi$ td. $p \in V \subseteq U$, $\psi(U) = \mathbb{R}^n$ te $\psi(p) = 0$.

Dokaz. Za sve $x_0 \in \mathbb{R}^n$ i sve $r > 0$, $K(x_0, r)$ i $\mathbb{R}^n$ su C^∞ difeomorfne; kombinirajući s lemom 3.35 slijedi tvrdnja. Detalje za DZ. □

Propozicija 3.37.

Neka je (X, Φ) diferencijalna $n-$mnogostrukost, neka je $(U, \varphi) \in \Phi$, $p \in U$ te neka je $f\colon U \to \mathbb{R}$ glatka funkcija. Tada postoje $\hat{f} \in C^\infty(X, \Phi)$ i otvorena okolina V od p u U td. je $f|_V = \hat{f}|_V$.

Dokaz. Koristimo sljedeću činjenicu: ako su a, $b \in \mathbb{R}$, pri čemu vrijedi $0 < a < b$, onda postoji funkcija $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ klase C^∞ td. $g([-a, a]) = \{1\}$ i $g(\langle -\infty, -b] \cup [b, \infty\rangle) = \{0\}$.
Neka je sada $n \in \mathbb{N}$ te neka su a, $b \in \mathbb{R}$ td. $0 < a < b$; neka je $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija iz gornjeg komentara za parametre $0 < a^2 < b^2$. Definiramo funkciju $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ s

$$h(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1^2 + \ldots + x_n^2).$$

Tada je h klase C^∞ te je $h(x) = 1$ za sve $x \in \mathbb{R}^n$ td. $\|x\| \leq a$ i $h(x) = 0$ za sve $x \in \mathbb{R}^n$ td. $\|x\| \geq b$.
Neka je sada $x_0 \in \mathbb{R}^n$; funkcija $\widetilde{h}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dana s $\widetilde{h} = h(x - x_0)$ je klase C^∞ te za sve $x \in \mathbb{R}^n$ imamo

$$\begin{aligned} \|x - x_0\| \leq a &\Longrightarrow \widetilde{h}(x) = 1 \\ \|x - x_0\| \geq b &\Longrightarrow \widetilde{h}(x) = 0. \end{aligned}$$

Vrijedi $\varphi(p) \in \varphi(U)$, a kako je $\varphi(U)$ otvoren u $\mathbb{R}^n$, postoji $b > 0$ td. $\overline{K}(\varphi(p), b) \subseteq \varphi(U)$. Sada naprosto odaberemo $a \in \langle 0, b\rangle$ pa prema dokazanom postoji funkcija $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ klase C^∞ td. za sve $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \|x - \varphi(p)\| \leq a &\Longrightarrow h(x) = 1 \\ \|x - \varphi(p)\| \geq b &\Longrightarrow h(x) = 0. \end{aligned}$$

Funkcija $f \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U) \to \mathbb{R}$ je klase C^∞ pa imamo kako je

$$k = (f \circ \varphi^{-1}) \cdot h|_{\varphi(U)}\colon \varphi(U) \to \mathbb{R}$$

klase C^∞. Uočimo, za $x \in K(\varphi(p), a)$ je $k(x) = (f \circ \varphi^{-1})(x)$, za $x \in \varphi(U) \setminus \overline{K}(\varphi(p), b)$ je $k(x) = 0$.
Promotrimo sada funkciju $k \circ \varphi\colon U \to \mathbb{R}$. Imamo $(k \circ \varphi)(x) = f(x)$ za $x \in \varphi^{-1}(K(\varphi(p), a))$ te $(k \circ \varphi)(x) = 0$ za $x \in U \setminus \varphi^{-1}(\overline{K}(\varphi(p), b))$. Definiramo $\hat{f}\colon X \to \mathbb{R}$ s

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} (k \circ \varphi)(x), & \text{za } x \in U, \\ 0, & \text{inače .} \end{cases}$$

Imamo $\hat{f}(x) = f(x)$ za sve $x \in \varphi^{-1}(K(\varphi(p), a)) =: V$; uočimo kako je V otvorena okolina od p u U.
Preostaje pokazati kako je $\hat{f}$ glatka, za što je dovoljno provjeriti valjanost sljedeće izreke

$$(\forall x \in X)(\exists (V, \psi) \in \Phi) \text{ td. } x \in V \wedge \hat{f} \circ \psi^{-1}\colon \psi(V) \to \mathbb{R} \text{ klase } C^\infty.$$

Neka je stoga $x \in X$ po volji.

1° Ako je $x \in U$, (U, φ) je dobra karta.

2° Pretpostavimo sada $x \notin U$. Imamo

$$\overline{K}(\varphi(p), b) \subseteq \varphi(U) \Longrightarrow \varphi^{-1}(\overline{K}(\varphi(p), b)) \subseteq U \Longrightarrow x \notin \varphi^{-1}(\overline{K}(\varphi(p), b)).$$

No, posljednji skup je kompaktan u X (jer je $\overline{K}(\varphi(p), b)$ kompaktan skup u $\mathbb{R}^n$ i φ^{-1} je neprekidna funkcija) pa je stoga i zatvoren u X. Dakle, $x \in X \setminus \varphi^{-1}(\overline{K}(\varphi(p), b))$ koji je otvoren pa možemo naći kartu $(V, \psi) \in \Phi$ td. $x \in V$ i $V \subseteq X \setminus \varphi^{-1}(\overline{K}(\varphi(p), b))$. Iz ovoga slijedi kako su skupovi V i $\varphi^{-1}(\overline{K}(\varphi(p), b))$ disjunktni, a to povlači kako je vrijednost funkcije $\hat{f}$ jednaka 0 u svakoj točki skupa V (prema definiciji od $\hat{f}$). Stoga je $\hat{f} \circ \psi^{-1}$ nul-funkcija, a time i klase C^∞.

□

Teorem 3.38.

Neka je (X, Φ) diferencijalna $n-$mnogostrukost te $p \in X$. Tada je $\Theta\colon T_p(X, \Phi) \to D_p(X, \Phi)$ izomorfizam vektorskih prostora.

Dokaz. Prema lemi 3.36, postoji $(U, \varphi) \in \Phi$ td. $p \in U$, $\varphi(p) = 0$ i $\varphi(U) = \mathbb{R}^n$. Za sve $v \in \mathbb{R}^n$ i sve $f \in C^\infty(X, \mathbb{R})$ vrijedi

$$\Theta([(p, (U, \varphi), v)])(f) = Df([(p, (U, \varphi), v)]) = [(f(p), (\mathbb{R}, id_{\mathbb{R}}), D(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))(v))]. \quad (1)$$

Neka su $e_1, \ldots, e_n$ vektori standardne baze za $\mathbb{R}^n$. Znamo kako je $\mathbb{R}^n \to T_p(X, \Phi)$, $v \mapsto [(p, (U, \varphi), v)]$ izomorfizam vektorskih prostora. Za $i \in \{1, \ldots, n\}$, označimo $E_i := [(p, (U, \varphi), e_i)]$, tako da je $E_1, \ldots, E_n$ baza za $T_p(X, \Phi)$. Dovoljno je dokazati kako je $\Theta(E_1), \ldots, \Theta(E_n)$ baza za $D_p(X, \Phi)$.
Uočimo kako za $i \in \{1, \ldots, n\}$ i $f \in C^\infty(X, \Phi)$ prema (1) vrijedi

$$\begin{aligned}(\Theta(E_i))(f) &= D(f \circ \varphi^{-1})(0)(e_i) = \\ &= \left\langle (\partial_1(f \circ \varphi^{-1})(0), \ldots, \partial_n(f \circ \varphi^{-1})(0)), e_i \right\rangle = \\ &= \partial_i(f \circ \varphi^{-1})(0).\end{aligned} \quad (2)$$

Za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$ je funkcija $p_i \circ \varphi\colon U \to \mathbb{R}$ glatka ($p_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je projekcija na $i-$tu koordinatu). Prema propoziciji 3.37 onda postoji $\widetilde{p_i} \in C^\infty(X, \Phi)$ td. se $p_i \circ \varphi$ i $\widetilde{p_i}$ podudaraju na nekoj otvorenoj okolini od p u U.
Neka je $f \in C^\infty(X, \Phi) \Longrightarrow f \circ \varphi^{-1}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ klase $C^\infty \overset{3.34}{\Longrightarrow}$ postoje $g_1, \ldots, g_n\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ klase C^∞ td. za sve $x \in \mathbb{R}^n$ vrijedi

$$f \circ \varphi^{-1}(x) = f \circ \varphi^{-1}(0) + \sum_{i=1}^{n} p_i(x) g_i(x) \quad (3)$$

te za sve $i \in \{1, \ldots, n\}$ vrijedi $g_i(0) = \partial_i(f \circ \varphi^{-1})(0)$. Iz (3) imamo kako za sve $x \in U$ vrijedi

$$f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^{n} (p_i \circ \varphi)(x) g_i(\varphi(x)). \quad (4)$$

Za sve $i \in \{1, \ldots, n\}$ postoji $\widetilde{g_i} \in C^\infty(X, \Phi)$ td. se $g_i \circ \varphi$ i $\widetilde{g_i}$ podudaraju na nekoj otvorenoj okolini od p u U. Prema (4) onda postoji otvorena okolina W od p u U na kojoj se funkcije f i $C + \sum_{i=1}^n \widetilde{p_i}\widetilde{g_i}$ podudaraju, pri čemu je $C \colon X \to \mathbb{R}$ konstantna. Neka je sada $\tau \in D_p(X, \Phi)$. Imamo

$$\begin{aligned}
\tau(f) = \tau\left(C + \sum_{i=1}^n \widetilde{p_i}\widetilde{g_i}\right) &= \sum_{i=1}^n \tau(\widetilde{p_i}\widetilde{g_i}) = \\
&= \sum_{i=1}^n (\tau(\widetilde{p_i})\widetilde{g_i}(p) + \tau(\widetilde{g_i})\widetilde{p_i}(p)) = \\
&= \sum_{i=1}^n \tau(\widetilde{p_i}) g_i(0) = \\
&= \sum_{i=1}^n \tau(\widetilde{p_i})\partial_i(f \circ \varphi^{-1})(0) \stackrel{(2)}{=} \\
&\stackrel{(2)}{=} \sum_{i=1}^n \tau(\widetilde{p_i})(\Theta(E_i))(f) = \\
&= \left(\sum_{i=1}^n \tau(\widetilde{p_i})\Theta(E_i)\right)(f)
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow \tau = \sum_{i=1}^n \tau(\widetilde{p_i})\Theta(E_i) \Longrightarrow \{\Theta(E_i)\}_{i=1,\ldots,n}$ generiraju $D_p(X, \Theta)$. Pokažimo još kako su i linearno nezavisne. Pretpostavimo kako su $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ td.

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \Theta(E_i) = 0. \quad (5)$$

Neka je $j \in \{1, \ldots, n\}$. Za sve $i \in \{1, \ldots, n\}$ prema (2) vrijedi $\Theta(E_i)(\widetilde{p_j}) = \partial_i(\widetilde{p_j} \circ \varphi^{-1})(0)$, no $\widetilde{p_j} \circ \varphi^{-1}$ se podudara s p_j na nekoj okolini od 0 u $\mathbb{R}^n$. Stoga imamo $\Theta(E_i)(\widetilde{p_j}) = \partial_i(p_j)(0) = \delta_{ij}$ pa iz (5) slijedi

$$0 = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \Theta(E_i)\right)(\widetilde{p_j}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{ij} = \alpha_j.$$

Dakle, $\alpha_j = 0$ za sve $j \in \{1, \ldots, n\}$. Stoga su $\{\Theta(E_i)\}_{i=1,\ldots,n}$ linearno nezavisne i time smo gotovi. $\square$