

Spojitosť a limita funkcie - 2. časť

Zuzana Minarechová

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Slovenská technická univerzita, Stavebná fakulta

26 September 2024

Obsah prednášky

- **Limita funkcie** (riešené príklady)
- **Asymptoty funkcie** (asymptoty so smernicou, asymptoty bez smernice, riešené príklady, neriešené príklady)
- **Spojitosť funkcie** (neriešené príklady)

Obsah prednášky

- **Limita funkcie** (riešené príklady)
- **Asymptoty funkcie** (asymptoty so smernicou, asymptoty bez smernice, riešené príklady, neriešené príklady)
- **Spojitosť funkcie** (neriešené príklady)

Riešené príklady - limity

Príklad 1

Vypočítajte $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 5}{5x^2 + x}$.

Riešené príklady - limity

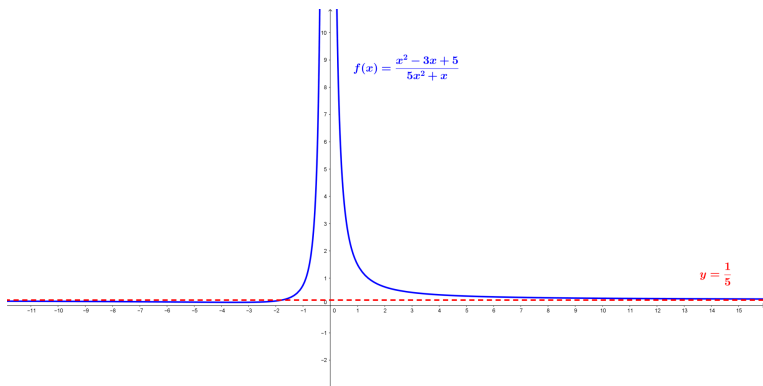
Príklad 1

Vypočítajte $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 5}{5x^2 + x}$.

Riešenie: Z čitateľa aj menovateľa vyberieme výraz x^n , resp. x^m pred zátvorku, kde n je najväčší exponent z čitateľa a m je najväčší exponent z menovateľa:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 5}{5x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(1 - 3\frac{x}{x^2} + \frac{5}{x^2}\right)}{x^2 \left(5 + \frac{x}{x^2}\right)} = \frac{1 - 0 + 0}{5 + 0} = \frac{1}{5}$$

Riešené príklady - limity



Obr.: Riešené príklady: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 5}{5x^2 + x} = \frac{1}{5}$.

Riešené príklady - limity

Príklad 2

Vypočítajte $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^x$.

Riešené príklady - limity

Príklad 2

Vypočítajte $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^x$.

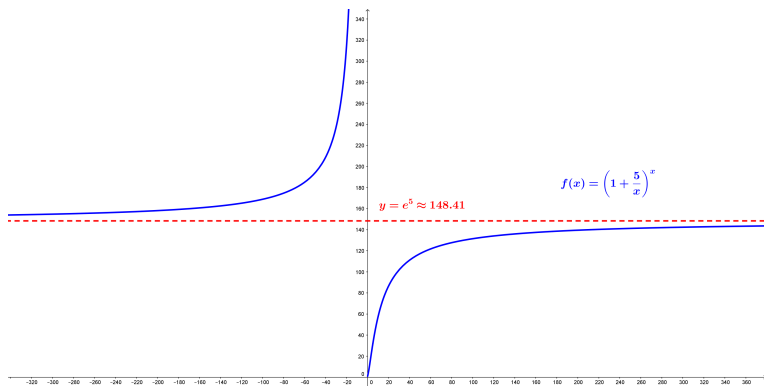
Riešenie: Označíme $t = \frac{x}{5}$, z toho $x = 5t$ a keďže $x \rightarrow \infty$ potom aj $t \rightarrow \infty$. Dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{5}}\right)^x = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{5t}$$

čo môžeme zapísať ako

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t \cdot 5} = \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right)^5 = e^5.$$

Riešené príklady - limity



Obr.: Riešené príklady: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^x = e^5$.

Riešené príklady - limity

Príklad 3

Vypočítajte $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^{\frac{x}{4}}$.

Riešené príklady - limity

Príklad 3

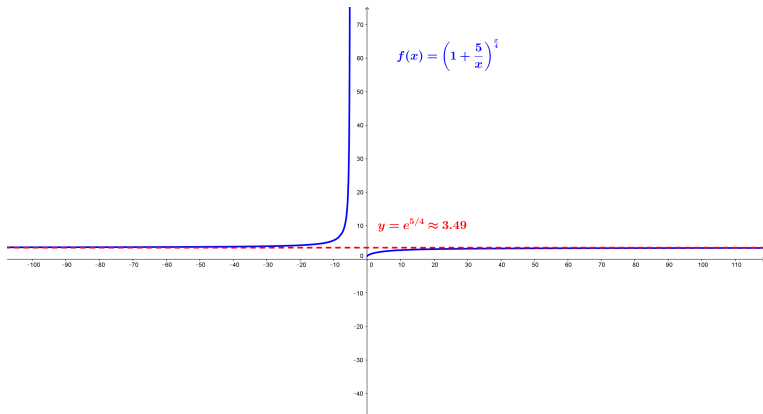
Vypočítajte $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^{\frac{x}{4}}$.

Riešenie: Nech $t = \frac{5}{x}$, z toho $x = \frac{5}{t}$ a keďže $x \rightarrow -\infty$, potom $t \rightarrow 0^-$.

Po dosadení dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^{\frac{x}{4}} = \lim_{t \rightarrow 0^-} (1 + t)^{\frac{5}{4t}} = \left(\lim_{t \rightarrow 0^-} (1 + t)^{\frac{1}{t}} \right)^{\frac{5}{4}} = e^{\frac{5}{4}}.$$

Riešené príklady - limity



Obr.: Riešené príklady: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^{\frac{x}{4}} = e^{\frac{5}{4}}.$

Riešené príklady - limity

Príklad 4

Vypočítajte $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-5}{3x+4} \right)^{\frac{x}{2}}$.

Riešené príklady - limity

Príklad 4

Vypočítajte $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-5}{3x+4} \right)^{\frac{x}{2}}$.

Riešenie:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-5}{3x+4} \right)^{\frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+4}{3x+4} - \frac{9}{3x+4} \right)^{\frac{x}{2}}.$$

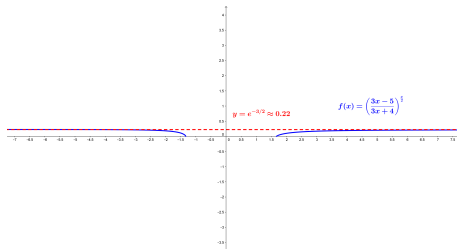
Označíme $t = -\frac{3x+4}{9}$. Potom $x = -3t - \frac{4}{3}$ a z toho dostávame

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+4}{3x+4} - \frac{9}{3x+4} \right)^{\frac{x}{2}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^{t \frac{-3t - \frac{4}{3}}{2t}}.$$

Riešené príklady - limity

Keďže $\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{-3t - \frac{4}{3}}{2t} = -\frac{3}{2}$ po dosadení dostávame

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t \frac{-3t - \frac{4}{3}}{2t}} = e^{-\frac{3}{2}}.$$



Obr.: Riešené príklady: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-5}{3x+4}\right)^{\frac{x}{2}} = e^{-\frac{3}{2}}.$

Riešené príklady - limity

Príklad 5

Vypočítajte $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x+9}-3}{\sin(3x)} \right)$.

Riešené príklady - limity

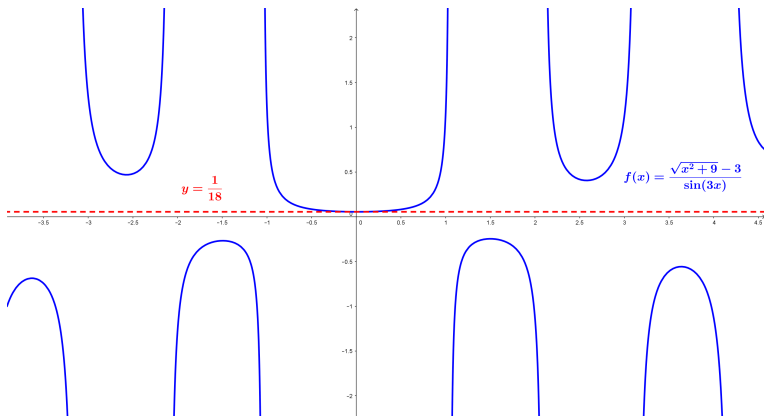
Príklad 5

Vypočítajte $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x+9}-3}{\sin(3x)} \right)$.

Riešenie:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x+9}-3}{\sin(3x)} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin(3x)} \cdot \frac{\sqrt{x+9}-3}{1} \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\frac{\sin(3x)}{3x} 3x} \cdot \frac{\sqrt{x+9}-3}{1} \cdot \frac{\sqrt{x+9}+3}{\sqrt{x+9}+3} \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\frac{\sin(3x)}{3x} 3x} \cdot \frac{x+9-9}{\sqrt{x+9}+3} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\frac{\sin(3x)}{3x} 3} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+9}+3} \right) = \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{18}
 \end{aligned}$$

Riešené príklady - limity



Obr.: Riešené príklady: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x^2 + 9} - 3}{\sin(3x)} \right) = \frac{1}{18}$.

Riešené príklady - limity

Príklad 6

Vypočítajte $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{x^3 - 8}{x - 2}}$.

Riešené príklady - limity

Príklad 6

Vypočítajte $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{x^3 - 8}{x - 2}}$.

Riešenie: Funkcia $f(z) = \sqrt{z}$ je spojitá na $D(f)$. To znamená, že dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{x^3 - 8}{x - 2}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}}.$$

Po vykrátení dostaneme funkciu, ktorá je definovaná a spojitá v 2, t.j.

$$\sqrt{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2}} = \sqrt{12}.$$

Riešené príklady - limity

Príklad 7

Vypočítajte $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2-8}}{x-1}$.

Riešené príklady - limity

Príklad 7

Vypočítajte $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 8}}{x - 1}$.

Riešenie: Všimnime si, že menovateľ je pre dostatočne veľké x (presnejšie pre $x > 1$) kladný, teda môžeme ho prepísať do tvaru

$$x - 1 = \sqrt{(x - 1)^2}$$

a potom postupujeme ako v predchádzajúcom príklade:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 8}}{x - 1} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 8}{(x - 1)^2}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{8}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 - 2\frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right)}} = 1.$$

Riešené príklady - limity

Príklad 8

Vypočítajte $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2-8}}{x-1}$.

Riešené príklady - limity

Príklad 8

Vypočítajte $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 8}}{x - 1}$.

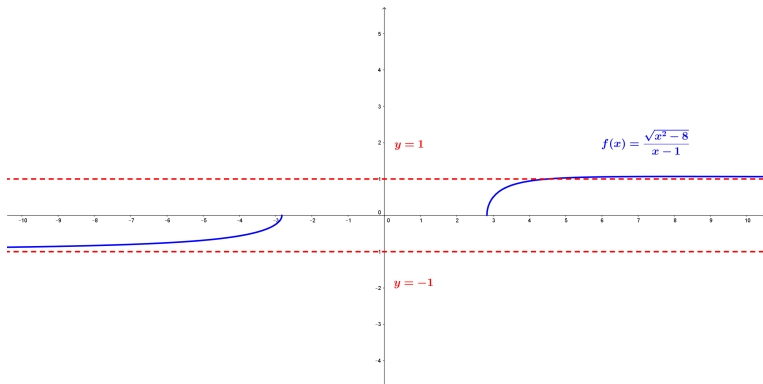
Riešenie: Menovateľ je záporný pre všetky $x < 0$. Preto ho musíme upraviť nasledujúco:

$$-(x - 1) = \sqrt{(x - 1)^2} \Rightarrow x - 1 = -\sqrt{(x - 1)^2}.$$

Teraz môžeme postupovať podobne ako predtým

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 8}}{x - 1} &= -\sqrt{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 8}{(x - 1)^2}} = -\sqrt{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{8}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 - 2\frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right)}} = \\ &= -\sqrt{\frac{1 - 0}{1 - 0 + 0}} = -1. \end{aligned}$$

Riešené príklady - limity



Obr.: Riešené príklady: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 8}}{x - 1} = 1$ a $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 8}}{x - 1} = -1$.

Riešené príklady - limity

Príklad 9

Vypočítajte $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x}{|x - \pi|}$.

Riešené príklady - limity

Príklad 9

Vypočítajte $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x}{|x - \pi|}$.

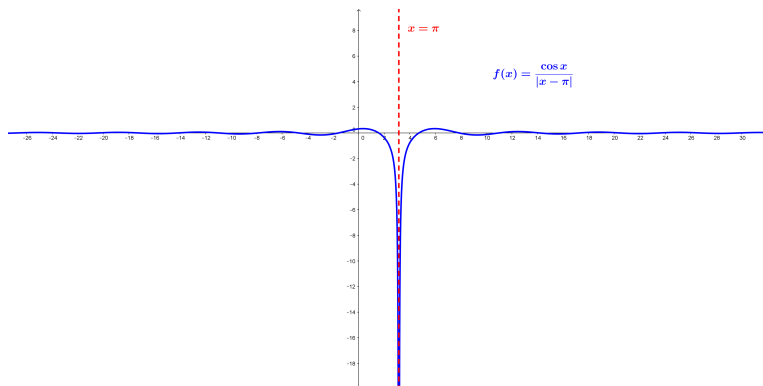
Riešenie: Upravíme si samostatne čitateľa aj menovateľa:

- $\lim_{x \rightarrow \pi} \cos x = -1$
- $\lim_{x \rightarrow \pi} |x - \pi| = 0$ a $|x - \pi| > 0$ pre $x \neq \pi$

Po dosadení dostávame

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x}{|x - \pi|} = \frac{-1}{0^+} = -\infty.$$

Riešené príklady - limity



Obr.: Riešené príklady: $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x}{|x - \pi|} = -\infty$

Riešené príklady - limity

Príklad 10

Vypočítajte $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\sin x}{\cos x}$ a $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin x}{\cos x}$.

Riešené príklady - limity

Príklad 10

Vypočítajte $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\sin x}{\cos x}$ a $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin x}{\cos x}$.

Riešenie: Platí $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x = 0$, a

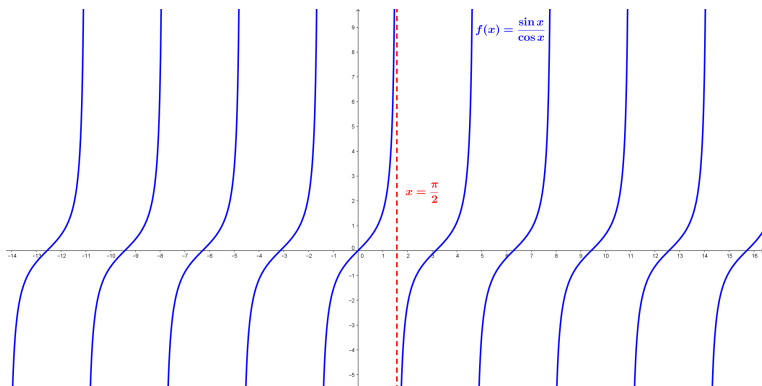
pre $x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ je $\cos x < 0$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

pre $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ je $\cos x > 0$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{0^+} = \infty.$$

Riešené príklady - limity



Obr.: Riešené príklady: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\sin x}{\cos x} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin x}{\cos x} = \infty$

Obsah prednášky

- **Limita funkcie** (riešené príklady)
- **Asymptoty funkcie** (asymptoty so smernicou, asymptoty bez smernice, riešené príklady, neriešené príklady)
- **Spojitosť funkcie** (neriešené príklady)

Asymptoty

Asymptoty funkcie

- Asymptota je priamka, ktorá opisuje správanie sa krivky. S narastajúcimi hodnotami súradníc sa vzdialenosť asymptoty a krivky znižuje.

Asymptoty

Asymptoty funkcie

- Asymptota je priamka, ktorá opisuje správanie sa krivky. S narastajúcimi hodnotami súradníc sa vzdialenosť asymptoty a krivky znižuje.
- Asymptoty rozdeľujeme na:
 - **Asymptoty bez smernice**
 - **Asymptoty so smernicou**

Asymptoty - Asymptoty bez smernice

Asymptoty bez smernice:

Asymptoty - Asymptoty bez smernice

Asymptoty bez smernice:

- Funkcia f má v bode x_0 **asymptotu bez smernice**, ak aspoň **jedna z jednostranných limit funkcie f v x_0 je nevlastná**.

Asymptoty - Asymptoty bez smernice

Asymptoty bez smernice:

- Funkcia f má v bode x_0 **asymptotu bez smernice**, ak aspoň **jedna z jednostranných limít funkcie f v x_0 je nevlastná**.
- Asymptota bez smernice má v tomto prípade rovnicu

$$x = x_0.$$

Asymptoty - Asymptoty so smernicou

Asymptoty so smernicou:

- Hovoríme, že priamka

$$p : y = kx + q$$

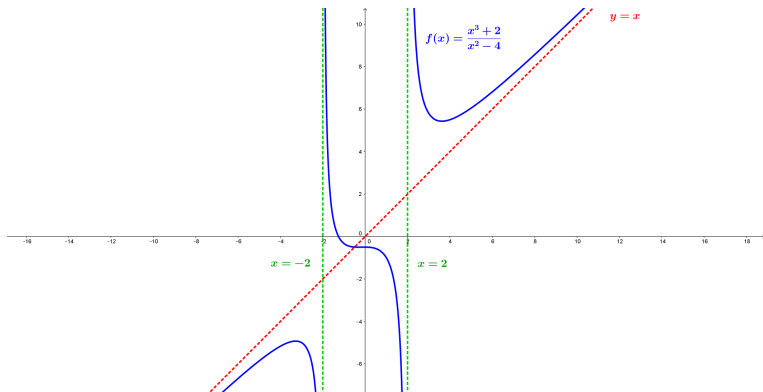
je **asymptotou so smernicou** funkcie f v ∞ (resp. v $-\infty$), ak platí
 $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx - q) = 0$ (resp. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx - q) = 0$),
 kde

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx).$$

Asymptota so smernicou existuje, ak **obe limity existujú a sú konečné**.

Asymptoty



Obr.: Asymptota so smernicou a asymptoty bez smernice

Príklady - asymptoty

Príklad 11

Nájdite všetky asymptoty grafov funkcií:

❶ $f(x) = \frac{2x^2 - 5x - 1}{2 - x},$

❷ $f(x) = \ln(x),$

❸ $f(x) = x \cdot 2^x.$

Príklady - asymptoty

Príklad 12

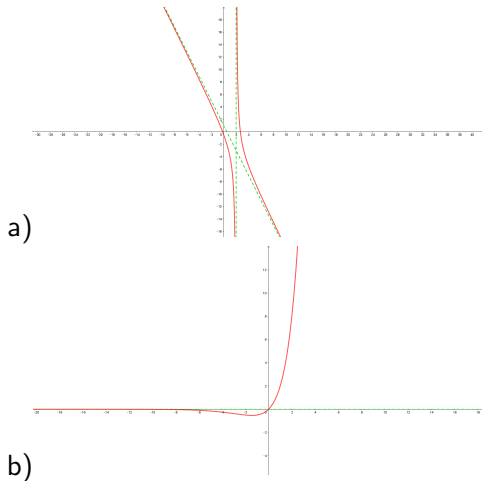
Nájdite všetky asymptoty grafov funkcií:

① $f(x) = \frac{2x^2 - 5x - 1}{2 - x}, \quad x = 2, y = -2x + 1$

② $f(x) = \ln(x), \quad x = 0$

③ $f(x) = x \cdot 2^x, \quad y = 0$

Príklady - asymptoty



Obr.: Grafy funkcií: a) $f(x) = \frac{2x^2 - 5x - 1}{2 - x}$ a b) $f(x) = x \cdot 2^x$.

Riešené príklady - asymptoty

Príklad 13

Nájdite asymptoty bez smernice funkcie $f(x) = \frac{x+3}{x-5}$.

Riešené príklady - asymptoty

Príklad 13

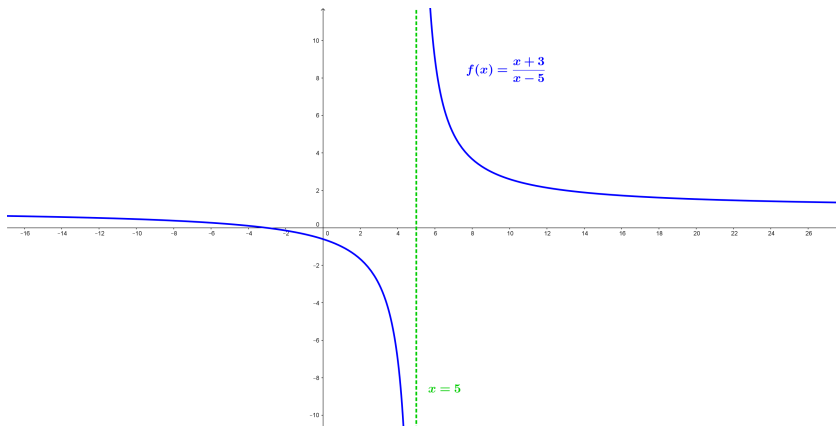
Nájdite asymptoty bez smernice funkcie $f(x) = \frac{x+3}{x-5}$.

Riešenie: $D(f) = \mathbf{R} \setminus \{5\}$. Jediný bod, v ktorom funkcia f môže mať asymptotu bez smernice, je $x_0 = 5$. Zistíme limitu sprava a zľava v tomto bode. Dostaneme

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x+3}{x-5} &= \frac{8}{0^+} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{x+3}{x-5} &= \frac{8}{0^-} = -\infty\end{aligned}$$

Teda asymptota bez smernice má rovnicu $x = 5$.

Riešené príklady - asymptoty



Obr.: Graf funkcie $f(x) = \frac{x+3}{x-5}$.

Riešené príklady - asymptoty

Príklad 14

Nájdite asymptoty so smernicou funkcie $f(x) = \frac{x^2-3x}{x+1}$.

Riešené príklady - asymptoty

Príklad 14

Nájdite asymptoty so smernicou funkcie $f(x) = \frac{x^2-3x}{x+1}$.

Riešenie: $D(f) = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$. Zistíme asymptotu so smernicou v $+\infty$. Pre jej smernicu dostaneme

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2-3x}{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-3x}{x^2+x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(1-3\frac{1}{x})}{x^2(1+\frac{1}{x^2})} = 1.$$

Pre úsek asymptoty $q = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx)$ platí

$$\begin{aligned} q &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-3x}{x+1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-3x-x^2-x}{x+1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4}{1+\frac{1}{x}} = -4. \end{aligned}$$

Riešené príklady - asymptoty

Asymptota so smernicou v $+\infty$ má rovnicu $p: y = x - 4$.

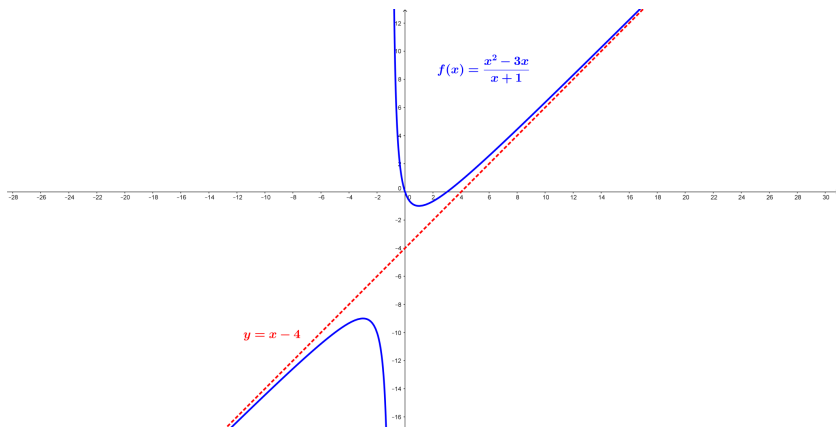
Podobne môžeme vypočítať asymptotu so smernicou v $-\infty$.

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2 - 3x}{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3x}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(1 - 3\frac{1}{x}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = 1.$$

$$\begin{aligned} q &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - 3x}{x+1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3x - x^2 - x}{x+1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4}{1 + \frac{1}{x}} = -4. \end{aligned}$$

Asymptota so smernicou v $-\infty$ má rovnicu $p: y = x - 4$.

Riešené príklady - asymptoty



Obr.: Graf funkcie $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x + 1}$.

Riešené príklady - asymptoty

Príklad 15

Nájdite všetky asymptoty funkcie $f(x) = \frac{\sqrt{4x^2+4}}{x-2}$.

Riešené príklady - asymptoty

Príklad 15

Nájdite všetky asymptoty funkcie $f(x) = \frac{\sqrt{4x^2+4}}{x-2}$.

Riešenie: Pre definičný obor funkcie f platí $D(f) = \mathbf{R} \setminus \{2\}$.

Najprv zistíme asymptoty so smernicou. Pre smernicu asymptoty v $+\infty$ dostaneme

$$\begin{aligned} k_1 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{4x^2+4}}{x-2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2+4}}{x^2-2x} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2+4}{(x^2-2x)^2}} = \\ &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2+4}{x^4-4x^3+4x^2}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(4+\frac{4}{x^2})}{x^4(1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2})}} = 0. \end{aligned}$$

Riešené príklady - asymptoty

Pre úsek asymptoty v $+\infty$ dostaneme

$$\begin{aligned}
 q_1 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 4}}{x - 2} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 4}{(x - 2)^2}} \\
 &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 4}{x^2 - 4x + 4}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(4 + \frac{4}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}\right)}} = \sqrt{4} = 2.
 \end{aligned}$$

Asymptota so smernicou v ∞ má rovnicu $p_1 : y_1 = 2$.

Riešené príklady - asymptoty

Pre smernicu asymptoty v $-\infty$ dostaneme

$$\begin{aligned} k_2 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{\sqrt{4x^2+4}}{x-2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2+4}}{x^2-2x} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2+4}{(x^2-2x)^2}} = \\ &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2+4}{x^4-4x^3+4x^2}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2(4+\frac{4}{x^2})}{x^4(1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2})}} = 0. \end{aligned}$$

Pre úsek asymptoty v $-\infty$ dostaneme

$$q_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2+4}}{x-2} = -\sqrt{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2+4}{(x-2)^2}} = -\sqrt{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2+4}{x^2-4x+4}} =$$

Riešené príklady - asymptoty

$$= -\sqrt{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(4 + \frac{4}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}\right)}} = -\sqrt{4} = -2$$

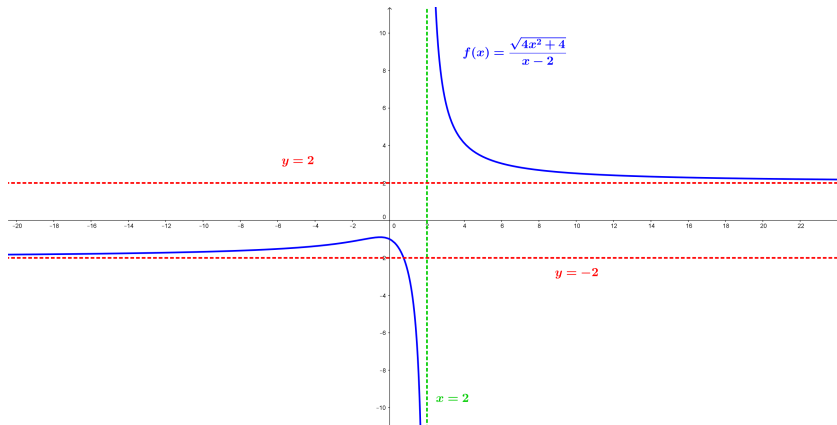
Asymptota so smernicou v $-\infty$ má rovnicu $p_2 : y_2 = -2$.

Určíme asymptoty bez smernice. Funkcia f je spojitá v každom bode $D(f)$, teda 2 je jediný bod, v ktorom môže existovať asymptota bez smernice danej funkcie f . Vypočítame limitu sprava a zľava pre $x_0 = 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{4x^2 + 4}}{x - 2} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4x^2 + 4}{(x - 2)^2}} = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{4x^2 + 4}}{x - 2} = -\sqrt{\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4x^2 + 4}{(x - 2)^2}} = -\infty.$$

Riešené príklady - asymptoty



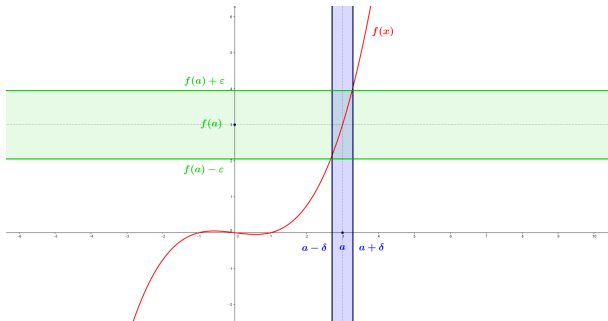
Obr.: Graf funkcie $f(x) = \frac{\sqrt{4x^2 + 4}}{x - 2}$.

Obsah prednášky

- **Limita funkcie** (riešené príklady)
- **Asymptoty funkcie** (asymptoty so smernicou, asymptoty bez smernice, riešené príklady, neriešené príklady)
- **Spojitosť funkcie** (neriešené príklady)

Spojitost'

- Funkcia f je spojitá v čísle (bode) a zo svojho definičného oboru, ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje také $\delta > 0$, že pre všetky $x \in (a - \delta, a + \delta) \cap D(f)$ platí $f(x) \in (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$.



Obr.: Spojitost' funkcií - definícia

Spojitosť - príklady

Príklad 16

Je funkcia $f(x)$ v bode a spojitá?

a) $a = 2$

$$f(x) = \frac{2x^2 + 6x - 20}{x^3 - 3x^2 + 2x} \quad \text{pre } x \neq 2, x \neq 0, x \neq 1$$

$$f(x) = 7 \quad \text{pre } x = 2$$

b) $a = 4$

$$f(x) = \frac{2x - 8}{\sqrt{x - 1} - \sqrt{3}} \quad \text{pre } x \neq 4$$

$$f(x) = 2 \quad \text{pre } x = 4$$

c) $a = \pi$

$$f(x) = \frac{(2x)^2 - 4\pi x}{\pi - x} \quad \text{pre } x < \pi$$

$$f(x) = 4x \sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) \quad \text{pre } x \geq \pi$$

Spojitost' - príklady

Príklad 17

Je funkcia $f(x)$ v bode a spojitá?

a) $a = 2$

$$f(x) = \frac{2x^2+6x-20}{x^3-3x^2+2x} \quad \text{pre } x \neq 2, x \neq 0, x \neq 1$$

$$f(x) = 7 \quad \text{pre } x = 2 \quad \text{Funkcia je spojitá v } a = 2.$$

b) $a = 4$

$$f(x) = \frac{2x-8}{\sqrt{x-1}-\sqrt{3}} \quad \text{pre } x \neq 4$$

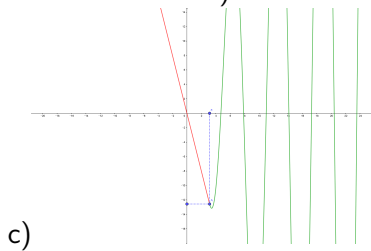
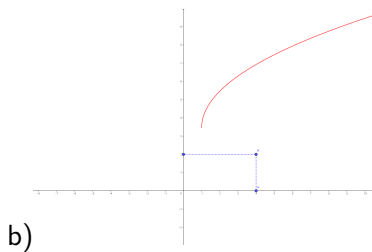
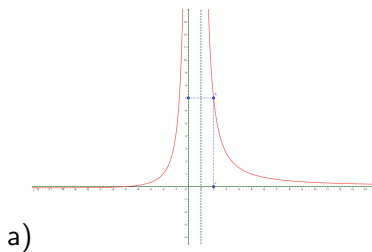
$$f(x) = 2 \quad \text{pre } x = 4 \quad \text{Funkcia nie je spojitá v } a = 4.$$

c) $a = \pi$

$$f(x) = \frac{(2x)^2-4\pi x}{\pi-x} \quad \text{pre } x < \pi$$

$$f(x) = 4x \sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) \quad \text{pre } x \geq \pi \quad \text{Funkcia je spojitá v } a = \pi.$$

Riešené príklady - spojitost'



Spojitosť - príklady

Príklad 18

Nájdite parameter p tak, aby funkcia $f(x)$ bola v bode a spojitá

a) $a = 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin(5x)}{2x} \quad \text{pre } x \neq 0 \\ f(x) &= p \quad \text{pre } x = 0 \end{aligned}$$

b) $a = 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\frac{1}{x}} \quad \text{pre } x \neq 0 \\ f(x) &= p \quad \text{pre } x = 0 \end{aligned}$$

c) $a = 1$

$$\begin{aligned} f(x) &= p^2 x \quad \text{pre } x < 1 \\ f(x) &= p \tan \frac{\pi x}{4} \quad \text{pre } x \geq 1 \end{aligned}$$

d) $a = 4$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{4p} - 1 \quad \text{pre } x < 4 \\ f(x) &= \frac{2x^2 - 8x}{x - 4} \quad \text{pre } x \geq 4 \end{aligned}$$

Spojitosť - príklady

Príklad 19

Nájdite parameter p tak, aby funkcia $f(x)$ bola v bode a spojitá

a) $a = 0$

$$f(x) = \frac{\sin(5x)}{2x} \quad \text{pre } x \neq 0$$

$$f(x) = p \quad \text{pre } x = 0 \quad p = \frac{5}{2}$$

b) $a = 0$

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad \text{pre } x \neq 0$$

$$f(x) = p \quad \text{pre } x = 0 \quad \text{parameter } p \text{ neexistuje}$$

c) $a = 1$

$$f(x) = p^2 x \quad \text{pre } x < 1$$

$$f(x) = p \tan \frac{\pi x}{4} \quad \text{pre } x \geq 1 \quad p = 0, p = 1$$

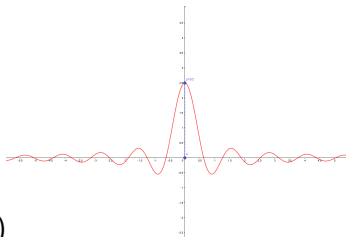
d) $a = 4$

$$f(x) = \frac{x}{4p} - 1 \quad \text{pre } x < 4$$

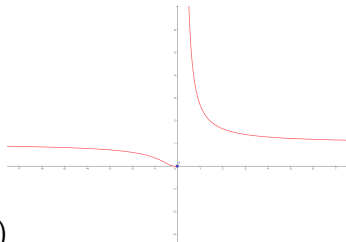
$$f(x) = \frac{2x^2 - 8x}{x - 4} \quad \text{pre } x \geq 4 \quad p = \frac{1}{9}$$

Riešené príklady - spojitost'

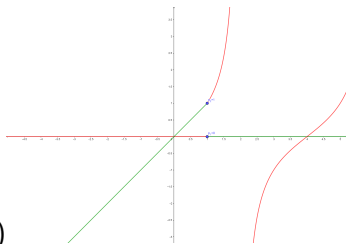
a)



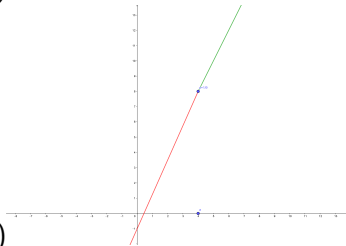
b)



c)



d)



Ďakujem za pozornosť.