Reálna funkcia jednej reálnej premennej

Pomocné pojmy

Zuzana Minarechová

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Slovenská technická univerzita, Stavebná fakulta

16 September 2024

Obsah prednášky

- Základné číselné obory
- Vlastnosti množiny reálnych čísel
- Číselné množiny
- Kvantifikátory
- Sumátory
- Operácie s množinami
- Zobrazenia množín
- Epsilonové okolie bodu
- Prstencové okolie bodu
- Operácie s nekonečnom

Základné číselné obory

- **N** - množina všetkých **prirodzených** čísel, teda **N** $= \{1, 2, \dots\}$.
- **Z** - množina všetkých **celých** čísel. Sú to čísla, ktoré môžeme vyjadriť ako rozdiel dvoch prirodzených čisel.
- **Q** - množina všetkých **racionálnych** čísel. Sú to čísla, ktoré môžeme vyjadriť ako podiel celého a prirodzeného čísla.
- **I** - množina všetkých **iracionálnych** čísel, t.j. čísel, ktoré možno vyjadriť v tvare nekonečného neperiodického desatinného zlomku, napr. $\sqrt{2}, \pi, ...$
- **R** - množina všetkých **reálnych** čísel. Je zjednotením množiny racionálnych a iracionálnych čísel.
- **C** - množina všetkých **komplexných** čísel.

Vlastnosti množiny reálnych čísel:

- je **usporiadaná**, t.j. pre každé dve reálne čísla a, b platí práve jeden zo vzťahov: $a = b$, $a < b$, $b < a$,
- je všade **hustá**, t.j. medzi dvoma ľubovoľnými rôznymi reálnymi číslami a, b, pre ktoré platí $a < b$, existuje aspoň jedno reálne číslo c, pre ktoré platí $a < c < b$,
- je **uzavretá** vzhľadom na operácie súčtu, súčinu, rozdielu a podielu, t.j. súčet, súčin, rozdiel a podiel reálnych čísel je reálne čislo,
- možno ju **jednoznačne zobraziť na číselnej osi**, t.j. každému reálnemu číslu možno priradiť jediný bod na číselnej osi a naopak.

Číselné množiny

- **Číselnou množninou** nazývame takú množinu, ktorej všetky prvky sú čísla.
- Hovoríme, že $M \in X$ a $m \in X$ je **najväčším**, resp. **najmenším prvkom** množiny X, ak pre každé $x \in X$ platí $x \leq M$ (ozn. $M = \max X$), resp. $m \leq x$ (ozn. $m = \min X$).
- Nech $X \subset \mathbf{R}$. Hovoríme, že $\xi \in \mathbf{R}$, resp. $\eta \in \mathbf{R}$, je **horným**, resp. **dolným ohraničením** množiny X, ak platí

$$(\forall x \in X)\,(x \leq \xi)\,, \quad \text{resp.} \quad (\forall x \in X)\,(\eta \leq x)\,.$$

Definícia

Nech $X \subset \mathbf{R}$. Hovoríme, že $S \in \mathbf{R}$ je **suprémum** *množiny X, ak S je* **najmenšie horné ohraničenie** *množiny X. Ozn. $S = \sup X$.*
Hovoríme, že $s \in \mathbf{R}$ je **infimum** *množiny X, ak s je* **najväčšie dolné ohraničenie** *množiny X. Ozn. $s = \inf X$.*

Číselné množiny

- Nech $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$. Potom označíme

$$\begin{aligned} \langle a,b\rangle &= \{x\in\mathbf{R}; a\le x\le b\}, \quad (a,b)=\{x\in\mathbf{R}; a<x<b\},\\ (a,b\rangle &= \{x\in\mathbf{R}; a<x\le b\}, \quad \langle a,b)=\{x\in\mathbf{R}; a\le x<b\} \end{aligned}$$

  a nazveme postupne **uzavretým, otvoreným** a **polootvoreným** (alebo presnejšie **zľava otvoreným**, resp. **sprava otvoreným**) intervalom.

- Intervaly **nemusia byť** sprava, resp. zľava **ohraničené**. Takéto (otvorené) intervaly označujeme

$$(a,\infty)=\{x\in\mathbf{R}; a<x\}, \quad (-\infty,b)=\{x\in\mathbf{R}; x<b\}.$$

  Podobné označenie môžeme zaviesť aj pre polootvorené intervaly.

Číselné množiny

- Degenerované intervaly:

$$\begin{aligned} \langle a, a\rangle &= a \\ (a, a) &= \emptyset. \end{aligned}$$

Hodnota $d(I) = b - a$ sa nazýva **dĺžka intervalu** I.

Číselné množiny

Príklad

Interval $[1,5]$ má najväčší prvok 5 a najmenší prvok 1.
Číslo 5 je zároveň aj najmenšie horné ohraničenie intervalu $[1,5]$, t.j. $\sup[1,5]=5$ a číslo 1 je najväčšie dolné ohraničenie intervalu $[1,5]$, t.j. $\inf[1,5]=1$.

Príklad

Interval $(1,5)$ nemá najväčší prvok ani najmenší prvok.
Ale platí, že číslo 5 je najmenšie horné ohraničenie intervalu $(1,5)$, t.j. $\sup(1,5)=5$ a číslo 1 je najväčšie dolné ohraničenie intervalu $(1,5)$, t.j. $\inf(1,5)=1$.

Kvantifikátory

- **Kvantifikátor** je výraz určujúci akému **počtu prvkov** možno pripísať (predikovať) nejakú vlastnosť alebo vzťah.
- Je to **operátor matematickej logiky**, ktorý sa uplatňuje na logický výraz a ktorý kvantitatívne charakterizuje oblasť predmetov (alebo oblasť predikátov), na ktoré sa tieto získané výrazy vzťahujú.
- Najviac sa používa **všeobecný kvantifikátor** a **existenčný kvantifikátor**.
- Označenia $\forall, \exists$ sú prevrátené písmená A, E. Jedná sa o začiatočné písmená slov ALL, EXISTS.

Kvantifikátory

- $\forall$ **všeobecný kvantifikátor** (t.j. každý, pre každé, všetky, ľubovoľný, žiadny (v zápore), ...)
  napr.: $\forall n \in N : a > 0 \Rightarrow a^n > 0$
  Čítame: „Pre všetky prirodzené čísla n platí, že ak $a > 0$, potom $a^n > 0$."
- $\exists$ **existenčný kvantifikátor** (t.j. existuje (aspoň jeden), niektorý, ...)
  napr.: $\exists n \in N : a < 0 \Rightarrow a^n > 0$
  Čítame: „Ak $a < 0$, potom $a^n > 0$ pre nejaké prirodzené číslo n."

Záleží na vzájomnom poradí kvantifikátorov:

- napr.: $\forall x \in R \quad \exists n \in Z : n < x$ (pravda)
  Čítame: „Pre každé $x \in R$ existuje $n \in Z$ také, že $n < x$."
- napr.: $\exists n \in Z \quad \forall x \in R : n < x$ (nepravda)
  Čítame: „Existuje $n \in Z$ také, že pre každé $x \in R$ platí $n < x$."

Sumátory

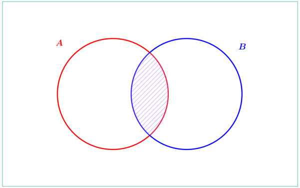
- **Suma** (t.j. súčet členov nejakej postupnosti)
  - $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$
    kde i je pomocný index, ktorý postupne nadobúda hodnoty od prvého (1 je prvý index) po posledný index (n je posledný index)
  - $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$
    V tomto prípade indexovanie pokračuje do nekonečna.
- **Produkt** (t.j. súčin členov nejakej postupnosti)
  - $\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$
  - $\prod_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot \ldots$
  - $\prod_{i=1}^{n} i = n!$

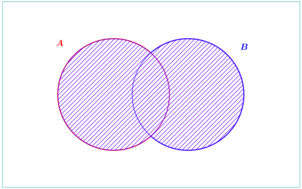
Sumátory

- **Prienik**
  - $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$
  - $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_i \cap \dots$
- **Zjednotenie**
  - $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$
  - $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_i \cup \dots$

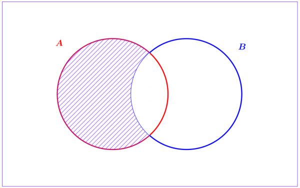
Operácie s množinami

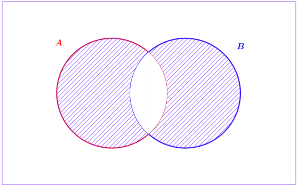
- **Prienik** $A \cap B$, **zjednotenie** $A \cup B$,





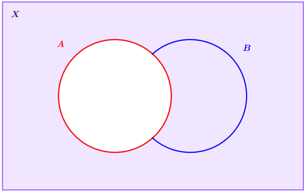
- **Rozdiel** $A - B$, **symetrický rozdiel** $A \Delta B$

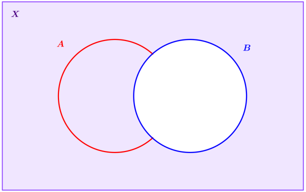




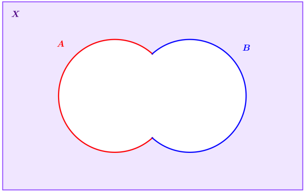
Operácie s množinami

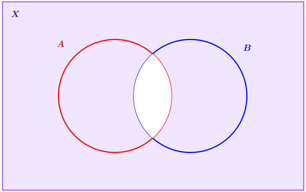
- **Doplnok množiny** A ozn. A^c, **Doplnok množiny** B ozn. B^c,





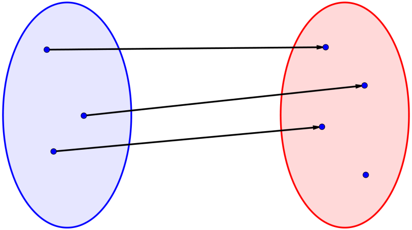
- **Doplnok množiny** $(A \cup B)^c$, **Doplnok množiny** $(A \cap B)^c$





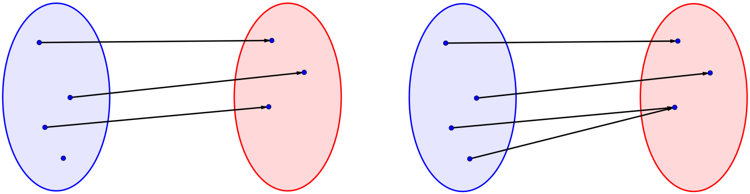
Zobrazenia množín

- Prosté zobrazenie alebo **injektívne zobrazenie** alebo injekcia je také zobrazenie východiskovej do množiny cieľovej, že každý prvok cieľovej množiny je obrazom **najviac jedného prvku** z východiskovej množiny.



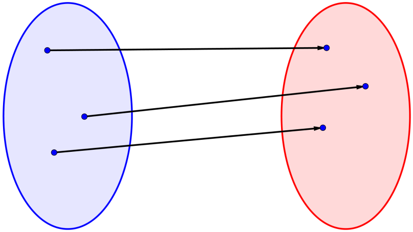
Zobrazenia množín

- **Surjektívne zobrazenie** alebo surjekcia je zobrazenie, ktoré priraďuje na každý prvok cieľovej množiny **aspoň jeden prvok** z východiskovej množiny.



Zobrazenia množín

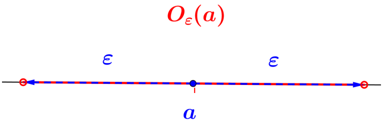
- **Bijektívne zobrazenie** alebo bijekcia je zobrazenie, ktoré je **súčasne injektívne aj surjektívne**. Bijektívne zobrazenie priraďuje každému prvku z východiskovej množiny práve jeden prvok z cieľovej množiny a na každý prvok cieľovej množiny sa zobrazuje jeden prvok východiskovej množiny.



Epsilonové okolie bodu

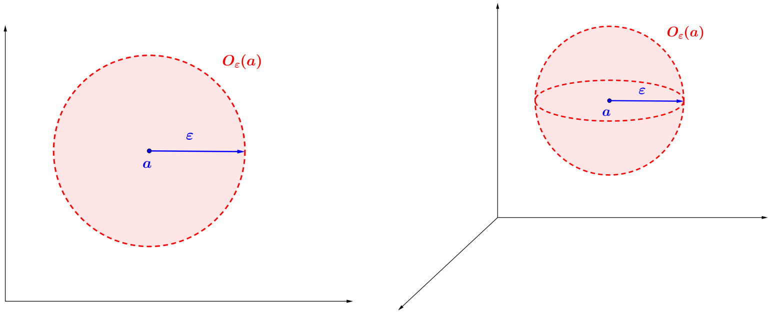
Definícia

Nech $a \in$ **R** *a* $\varepsilon > 0$. **Epsilonovým okolím bodu** a *nazývame množinu* $O_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$



Obr.: Epsilonové okolie bodu na priamke

Epsilonové okolie bodu

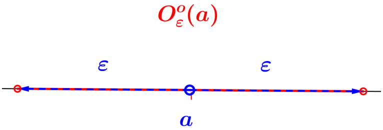


Obr.: Epsilonové okolie bodu v rovine a v priestore

Prstencové okolie bodu

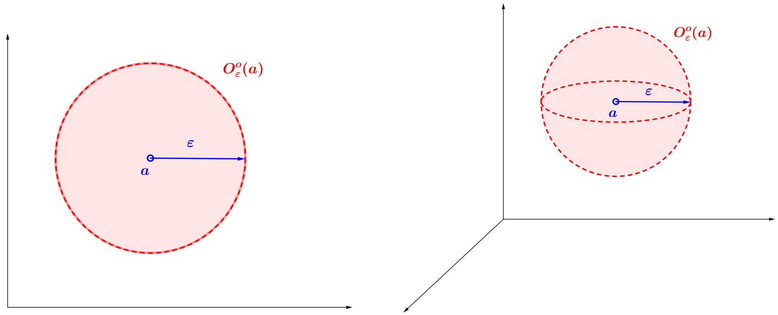
Definícia

Nech $a \in$ **R** *a* $\varepsilon > 0$. **Prstencovým okolím bodu** a *nazývame množinu* $O^o_\varepsilon(a) = O_\varepsilon(a) - \{a\}$



Obr.: Prstencové okolie bodu na priamke

Prstencové okolie bodu



Obr.: Prstencové okolie bodu v rovine a v priestore

Operácie s nekonečnom

- Pre všetky $a \in \mathbf{R}$ platí:

$$\begin{aligned} -\infty &< \infty, \\ -\infty < \; a &< \infty \end{aligned}$$

- Pre všetky $a, b \in \mathbf{R}, b > 0$ definujeme:

$$\begin{aligned} \infty + \infty &= \infty, \\ -\infty - \infty &= -\infty, \\ a \pm \infty &= \pm\infty, \\ \pm\infty \cdot \infty &= \pm\infty, \\ \pm b \cdot \infty &= \pm\infty, \\ \pm\infty \cdot (-\infty) &= \mp\infty, \end{aligned}$$

Operácie s nekonečnom

$$\begin{aligned}\frac{a}{\pm\infty} &= 0,\\ \frac{\infty}{\pm b} &= \pm\infty,\\ \frac{-\infty}{\pm b} &= \mp\infty,\end{aligned}$$

- Nedefinujeme (tzv. neurčité výrazy):

$$\infty - \infty, \qquad \pm\infty \cdot 0,$$

$$\tfrac{\pm\infty}{\infty}, \qquad \tfrac{\infty}{\pm\infty},$$

$$\tfrac{\infty}{0}, \qquad \tfrac{a}{0}, \qquad \tfrac{0}{0},$$

$$\infty^0, \qquad 1^\infty, \qquad 0^0.$$