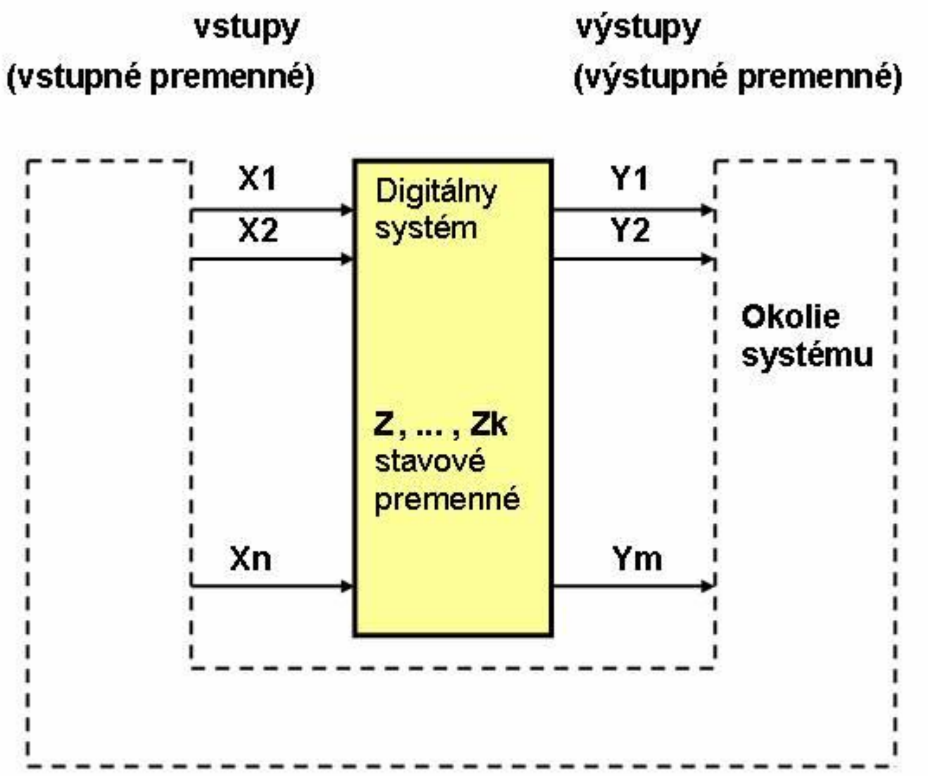
# 2.1. LOGICKÉ OBVODY

**Logické obvody** – elektronické obvody, ktoré pracujú s **dvojhodnotovými premennými**

**LOG.“0“ – NIE – FALSE – LOW(L)**

**LOG.“1“ – ÁNO – TRUE – HIGH(H)**



**x1, x2, ..., xn - vstupné premenné**

**y1, y2, ..., ym – výstupné premenné**

**Vstupné slovo (vstup)**

**X= (x1, x2, ..., xn)** $2^n$ **možností**

**Výstupné slovo (výstup)**

**Y=(y1, y2, ..., ym)** $2^m$ **možností**

**Funkcia - zobrazenie**

$$F : X \rightarrow Y$$

## Logický obvod

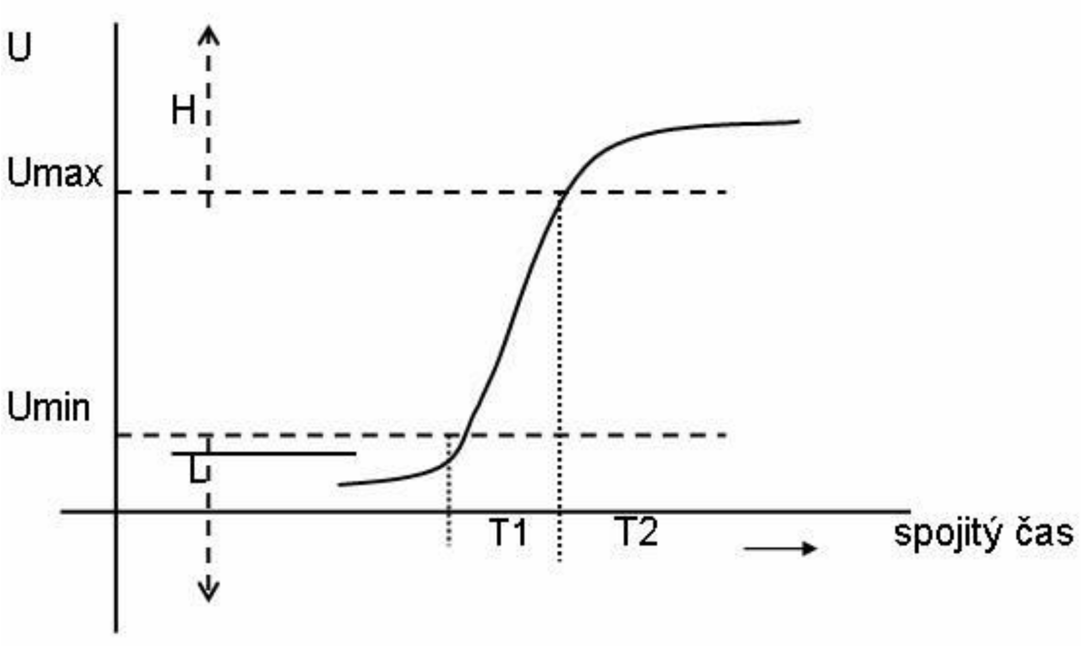
- diskrétny dynamický systém, ktorý sa vyznačuje
  - vstupným slovom
  - výstupným slovom
  - správaním obvodu (opis dynamických vlastností)
  - štruktúrou obvodu (súbor logických členov a ich pripojení)

**Pri práci s logickými obvodmi existujú tieto úlohy:**

**ANALÝZA**
**SYNTÉZA**
    **DIAGNOSTIKA** (testovanie, kontrola funkcie obvodu)
    **LOGICKÝ NÁVRH Z HĽADISKA DIAGNOSTIKY** (design for testability)
    **ZABUDOVANÉ PROSTRIEDKY DIAGNOSTIKY**
**SIMULÁCIA** ( alebo **VERIFIKÁCIA**)

# *PPI 2. Logická úroveň a stavba počítačových systémov*

*Premenné logického obvodu sú definované nad spojitými analógovými veličinami (napr. napätie).*



**Hodnotám H a L sú priradené intervaly hodnôt fyzikálnej veličiny**

**H <=> U >= Umax L <=> U =< Umin**

**Týmto "elektrickým" úrovniam H a L môžu byť podľa daného kódu priradené logické (boolovské) hodnoty 0 a 1 a to dvoma spôsobmi:**

**<u>Záporná logika</u> : 0 <=> H**
**1 <=> L**

**<u>Kladná logika</u> : 0 <=> L**
**1 <=> H**

# ROZDELENIE LOGICKÝCH OBVODOV

a/ podľa funkcie
    KOMBINAČNÉ OBVODY
    SEKVENČNÉ OBVODY
b/ podľa činnosti v čase
    ASYNCHRÓNNE
    SYNCHRÓNNE
c/ podľa spôsobu realizácie
    S PEVNOU FUNKCIOU
    S PROGRAMOVATEĽNOU FUNKCIOU

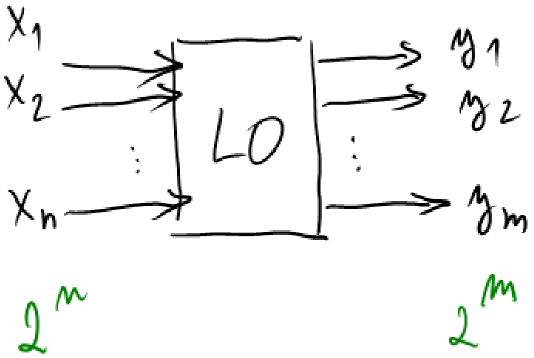
## 2.1. LOGICKÉ OBVODY

### 2.1.1. KOMBINAČNÉ LOGICKÉ OBVODY

**Spôsoby zápisu Booleovských funkcií (B-funkcií)**

**Booleovská funkcia - zobrazenie**

**f: {0, I}ⁿ → {0, I}**



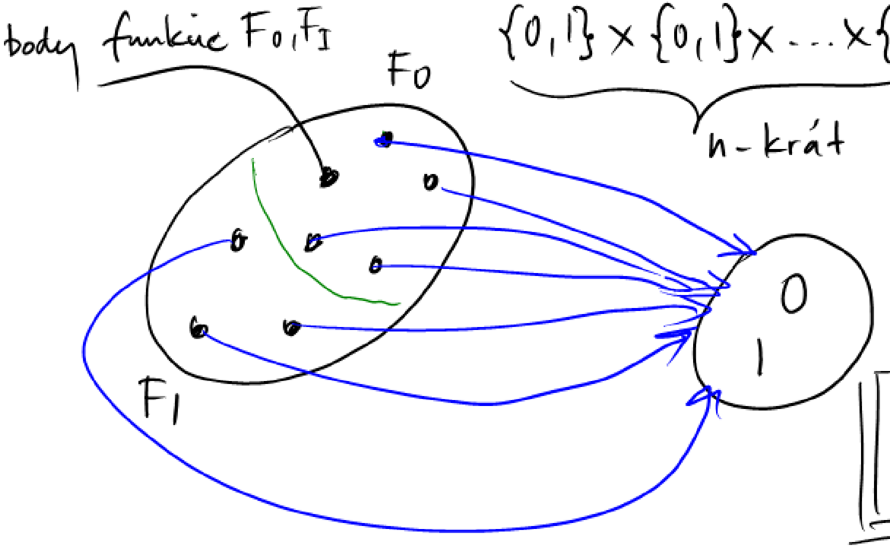
$$\left.\begin{array}{l} y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_m = f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{array}\right\} \text{B-funkcie}$$

# *PPI 2. Logická úroveň a stavba počítačových systémov*

## 1. Úplne definované B-funkcie

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n\} : \{0,1\}^n \longrightarrow \{0,1\}$$

$$\underbrace{\{0,1\} \times \{0,1\} \times \dots \times \{0,1\}}_{n\text{-krát}}$$ – karteziánsky súčin



– počet funkcií s n-premennými

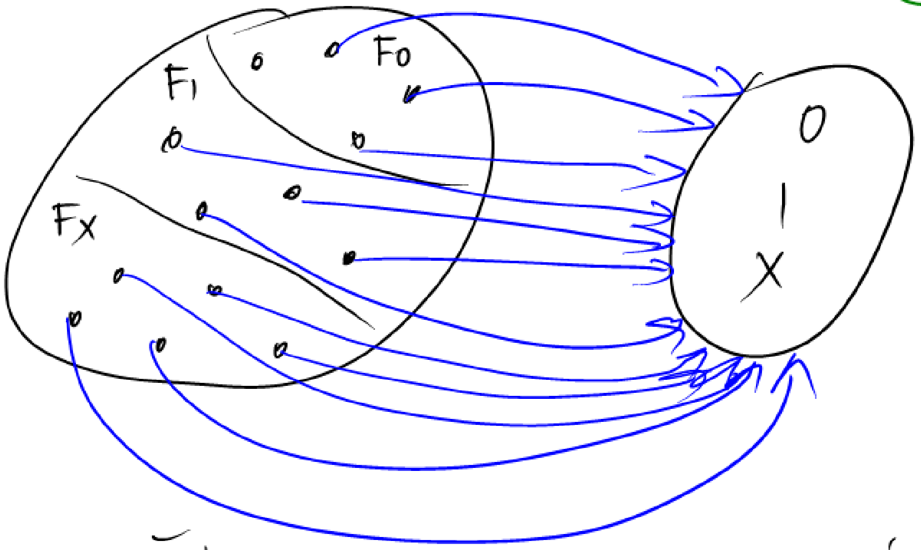
$$\boxed{2^{2^n}}$$

# PPI 2. Logická úroveň a stavba počítačových systémov

## 2. Neúplne definované B-funkcie

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n): \{0,1\}^n \longrightarrow \{0,1,x\}$$

nedefinovaná hodnota



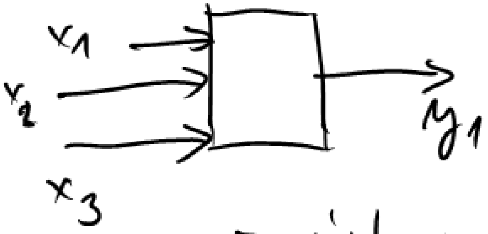
počet funkcií s n-premennými

$$\boxed{3^{2^n}}$$

## 2.1.1.1. SPÔSOBY ZÁPISU B- FUNKCIÍ

### a/ pravdivostná tabuľka

Príklad 1



$y_1 = f_1(x_1, x_2, x_3)$

$y_1 = 1$ → ak väčšina vstup. premenných má hodnotu 1 (MAJORITNÁ FUNKCIA)

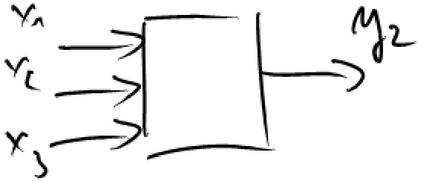
→ úplne definovaná B-funkcia

| DE | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $y_1$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 6 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 1 |

DE - desiatkový ekvivalent bodu funkcie pri váhovom poradí premenných $x_1 - x_2 - x_3$

$$DE(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot 2^2 + x_2 \cdot 2^1 + x_3 \cdot 2^0$$

# Príklad 2



$$y_2 = f_2(x_1, x_2, x_3)$$

$\Rightarrow$ neúplne definovaná funkcia (na vstupe sa nevyskytnú trojice (000) a (111))

pravdivostná tabuľka neuplne určenej B-funkcie

| DE | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $y_2$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | X |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 6 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | X |

## *PPI 2. Logická úroveň a stavba počítačových systémov*

### b/ číselný zápis

Pomocou desiatkových ekvivalentov bodov funkcie

Pr. 1

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, x_3) = \underset{\left(\overset{\Downarrow}{1}\right)}{D}\left(\underbrace{3, 5, 6, 7}_{F_I}\right)$$

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, x_3) = \underset{\left(\overset{\Downarrow}{0}\right)}{K}\left(\underbrace{0, 1, 2, 4}_{F_0}\right)$$

Pr. 2

$$y_2 = f_2(x_1, x_2, x_3) = D\left(\underbrace{3, 5, 6}_{F_I} ; \underbrace{\{0, 7\}}_{F_X}\right)$$

$$y_2 = f_2(x_1, x_2, x_3) = K\left(\underbrace{1, 2, 4}_{F_0} ; \underbrace{\{0, 7\}}_{F_X}\right)$$

| DE | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $y$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 6 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 1 |

# PPI 2. Logická úroveň a stavba počítačových systémov

c/ vektorový zápis

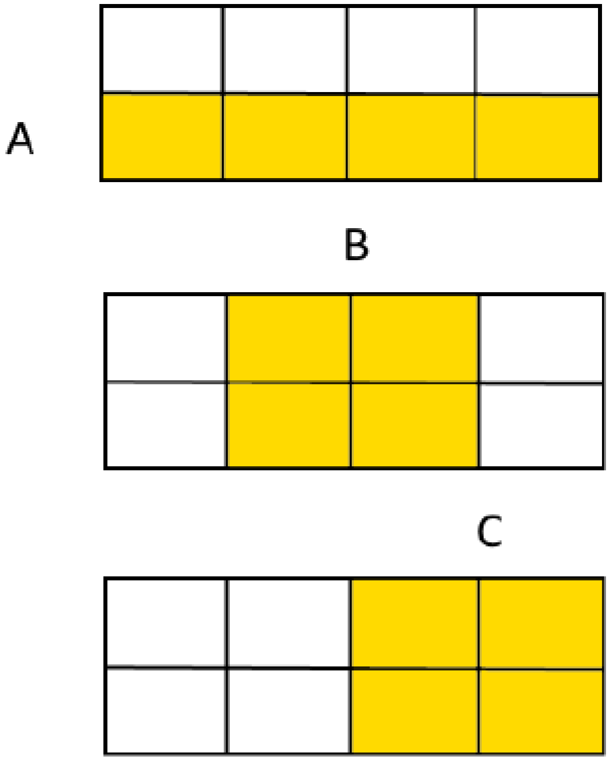
<u>Pr. 1</u> $y_1 = f_1(x_1, x_2, x_3) = (00010111)$

<u>Pr. 2</u> $y_2 = f_2(x_1, x_2, x_3) - (x001011x)$

zodpovedá stĺpcu výstupov pre usporiadanú množinu prvkov vstupnej abecedy

# *PPI 2. Logická úroveň a stavba počítačových systémov*

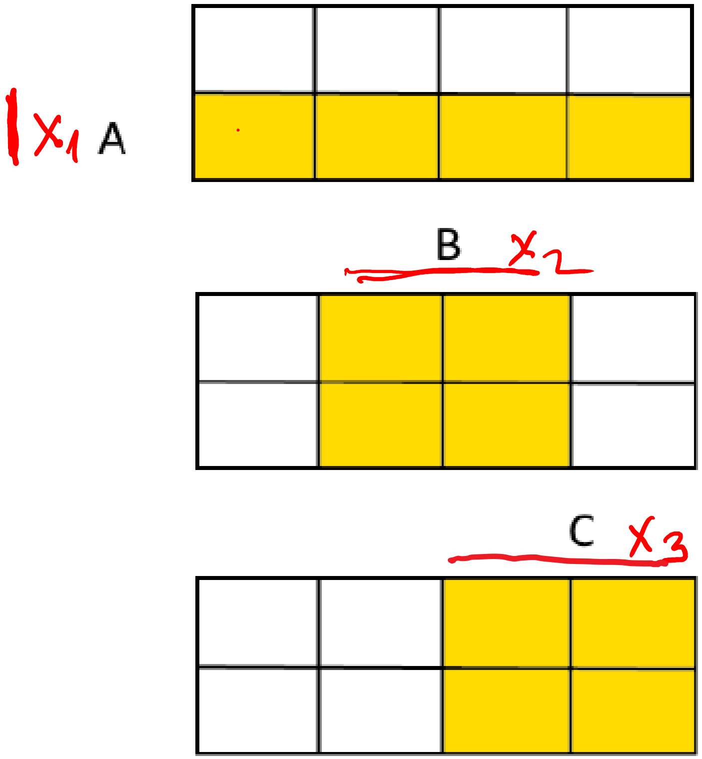
d/ mapový zápis



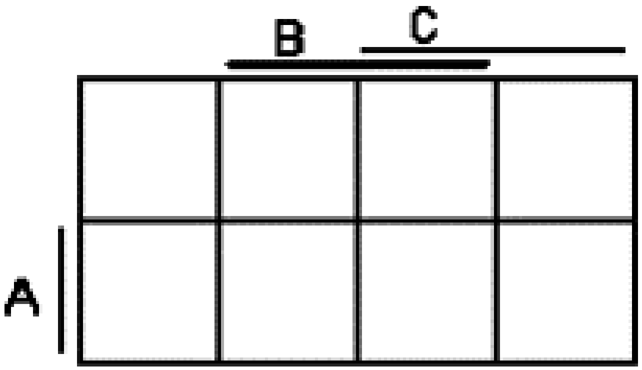
3 premenné 8 štvorčekov v mape

# PPI 2. Logická úroveň a stavba počítačových systémov

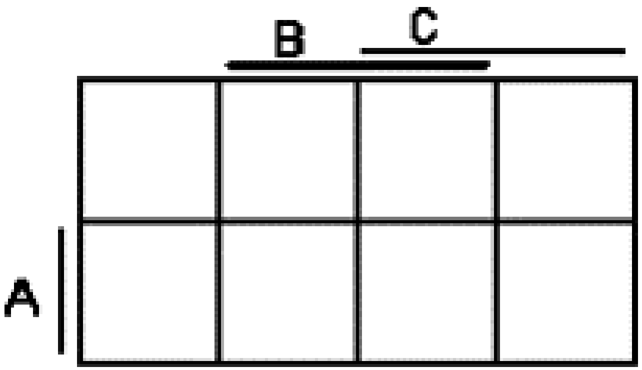
d/ mapový zápis



3 premenné 8 štvorčekov v mape



- -

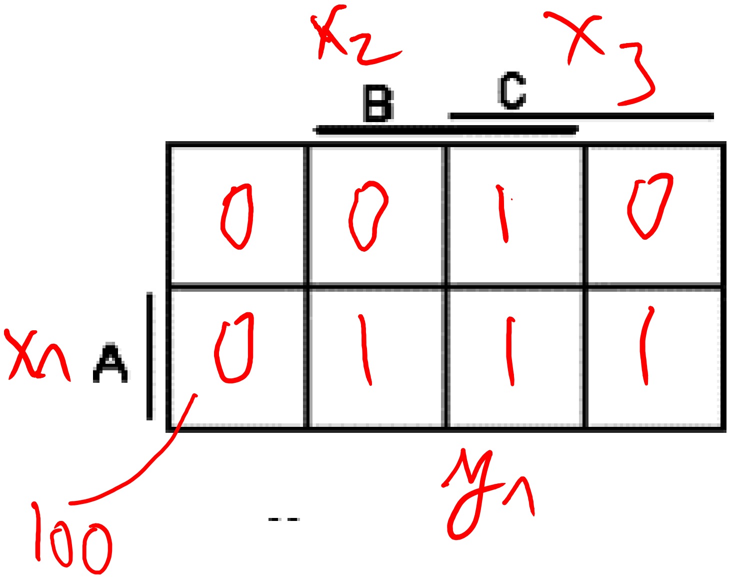


- -

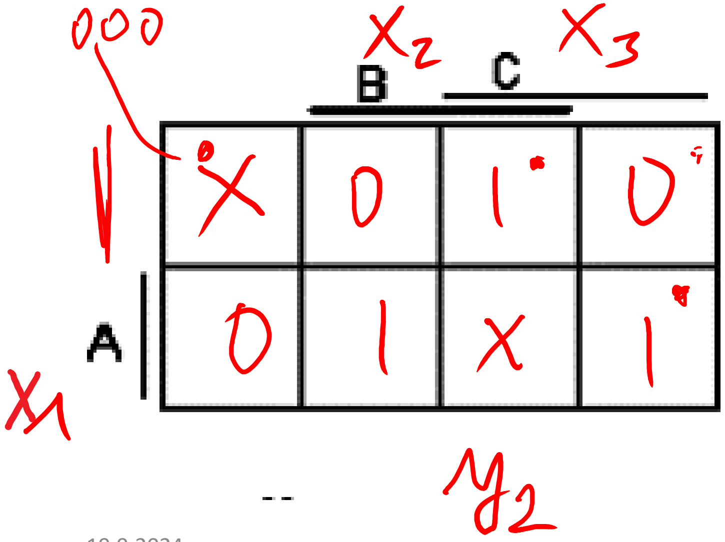
| DE | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $y_1$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 6 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 1 |

# PPI 2. Logická úroveň a stavba počítačových systémov

## d/ mapový zápis



|  |  |  |  |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |



|  |  |  |  |
|---|---|---|---|
| X | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | X | 1 |

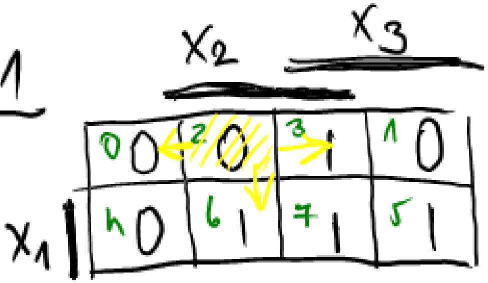
| DE | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $y_1$ |  |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | X |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |  |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 |  |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 1 |  |
| 4 | 1 | 0 | 0 | 0 |  |
| 5 | 1 | 0 | 1 | 1 |  |
| 6 | 1 | 1 | 0 | 1 |  |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 1 | X |

## d/ mapový zápis

KARNAUGHOVÉ MAPY (Grayov cyklický kód)

mapa pre funkciu s n premennými má $2^n$ štvorčekov

Pr. 1

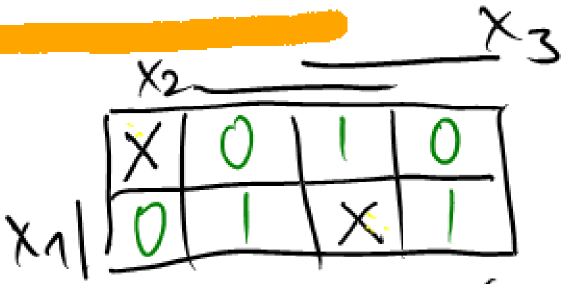


| | | | |
|---|---|---|---|
| $^{0}0$ | $^{2}0$ | $^{3}1$ | $^{1}0$ |
| $^{4}0$ | $^{6}1$ | $^{7}1$ | $^{5}1$ |

hodnota funkcie $y_1 = f_1(x_1, x_2, x_3)$

$$\left( X \begin{matrix} \to 0 \\ \to 1 \end{matrix} \right)$$

Pr. 2



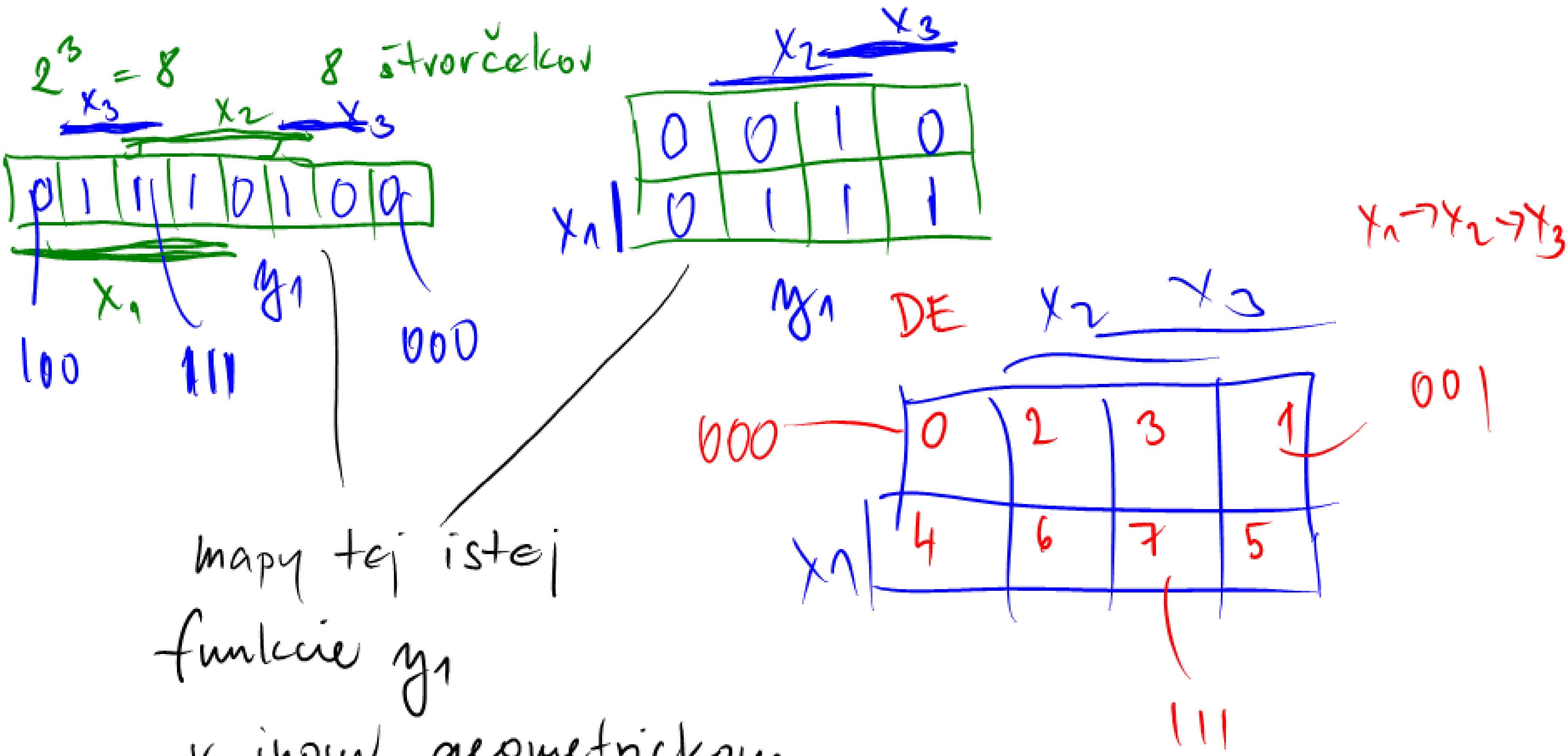
| | | | |
|---|---|---|---|
| X | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | X | 1 |

$y_2 = f_2(x_1, x_2, x_3)$

4 rôzne (ekvivalentné funkcie)

- mapa funkcie s **n** premennými má **2$^{n}$** štvorčekov
- každý štvorček v mape pre **n** premenných má práve **n** susedných štvorčekov

# PPI 2. Logická úroveň a stavba počítačových systémov



|  |  |  |  |  |  |  |  |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |

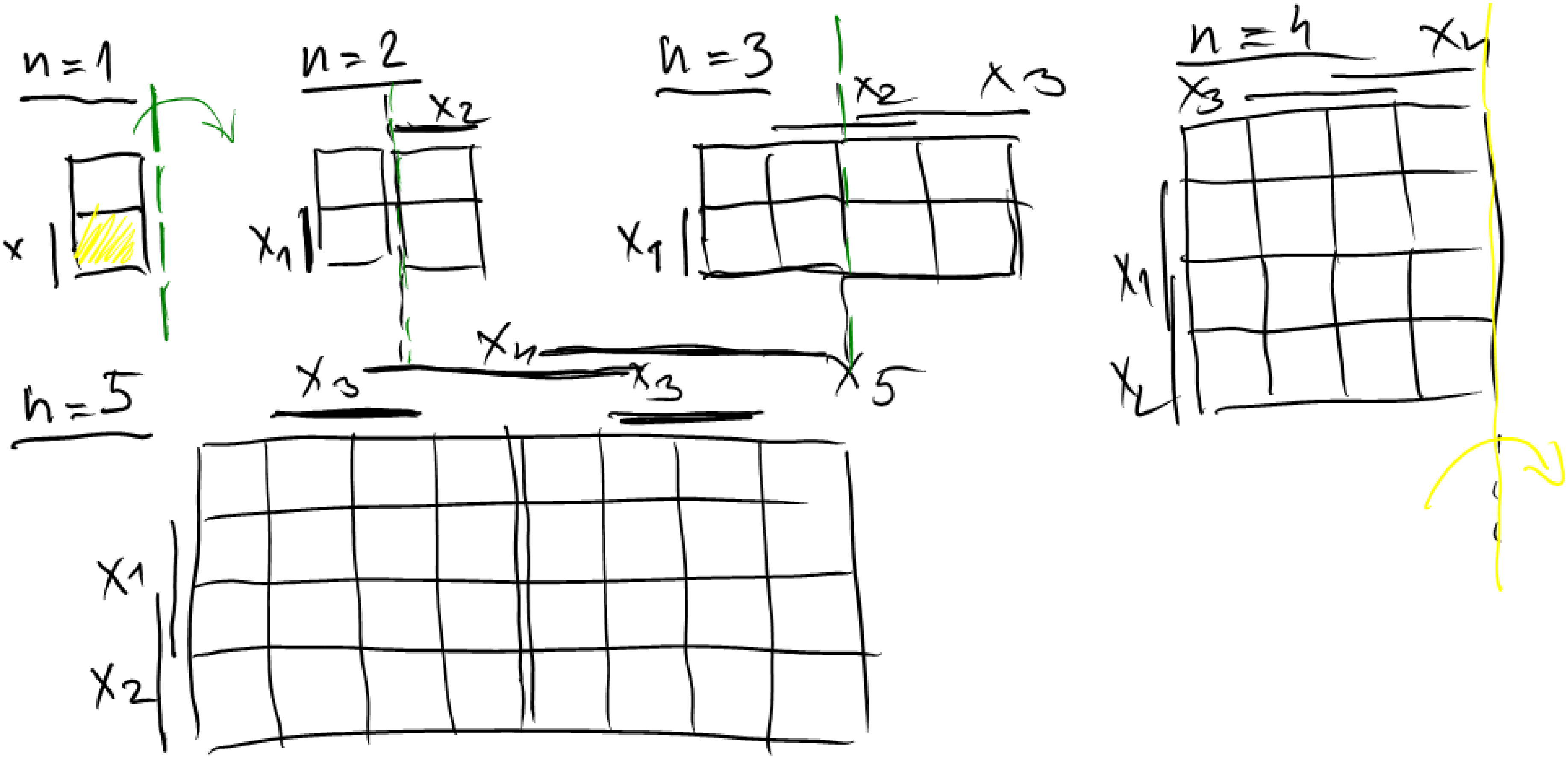
|  |  |  |  |  |
|---|---|---|---|---|
|  | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $x_1$ | 0 | 1 | 1 | 1 |

|  |  |  |  |  |
|---|---|---|---|---|
|  | 0 | 2 | 3 | 1 |
| $x_1$ | 4 | 6 | 7 | 5 |

mapy tej istej funkcie $y_1$ v inom geometrickom usporiadaní

# 2. Logická úroveň a stavba počítačových systémov

vytváranie máp pre viac vstupných premenných

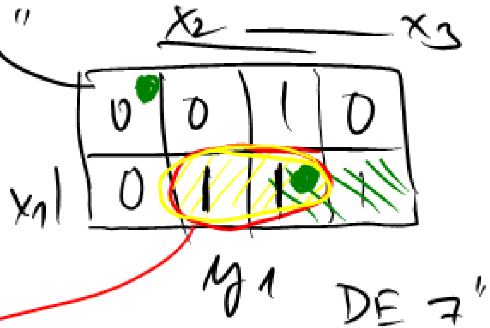


# *PPI 2. Logická úroveň a stavba počítačových systémov*

e/ zápis pomocou výrazu

$y_1 = f_1(x_1, x_2, x_3) = \underline{x_1x_2} + \underline{x_1x_3} + x_2x_3$ $\cancel{+x_1x_2x_3}$

DE „0"



|  |  |  |  |  |
|---|---|---|---|---|
|  |  | $x_2$ | $x_2$ |  |
|  |  |  | $x_3$ | $x_3$ |
|  | 0 ● | 0 | 1 | 0 |
| $x_1$ | 0 | 1 | 1 ● | 1 |

$y_1$

DE „7"

$y_2 = f_2(x_1, x_2, x_3)$ ● X

1. „0" → 0, „7" → 1 → pr. 1 (úplne def. funkcia) $y_1$

|  |  |  |  |
|---|---|---|---|
| X | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | X | 1 |

2. „0" → 0, „7" → 0

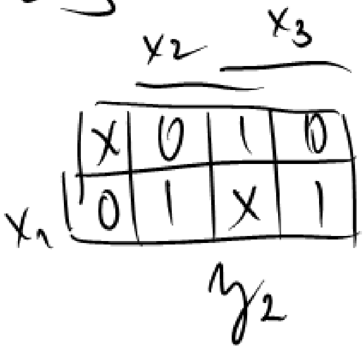
$y_2 = \bar{x}_1x_2x_3 + x_1x_2\bar{x}_3 + x_1\bar{x}_2x_3$

3. „0" → 1, „7" → 0

$y_2 = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + x_1x_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1x_2x_3 + x_1\bar{x}_2x_3$

4. „0" → 1, „7" → 1

$y_2 = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$



|  |  |  |  |  |
|---|---|---|---|---|
|  |  | $x_2$ | $x_2$ |  |
|  |  |  | $x_3$ | $x_3$ |
|  | X | 0 | 1 | 0 |
| $x_1$ | 0 | 1 | X | 1 |

$y_2$

4 ekvivalentné funkcie

(neúplne určená funkcia)

# *PPI 2. Logická úroveň a stavba počítačových systémov*

e/ zápis pomocou výrazu

Výraz vyjadruje, kedy (za akých hodnôt vstupných premenných) funkcia nadobúda hodnotu 1

# PPI 2. Logická úroveň a stavba počítačových systémov

## 2.1.1.2. B-FUNKCIE S JEDNOU PREMENNOU

a/ $n=1$ počet funkcií $N = 2^{2^n} = 2^{2^1} = 4$

| x | $f_0$ |
|---|---|
|  | 0 |
|  | 0 |

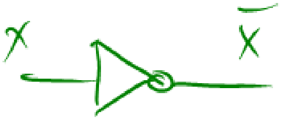
$f_0 = 0$ – nulová funkcia

| x | $f_1$ |
|---|---|
|  | 1 |
|  | 1 |

$f_1 = 1$ – jednotková funkcia

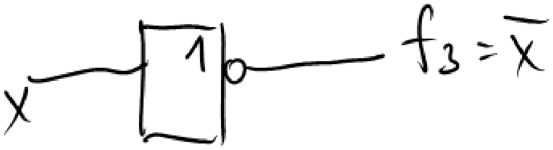
| x | $f_2$ |
|---|---|
|  | 0 |
|  | 1 |

$f_2 = x$ – opakovanie



| x | $f_3$ |
|---|---|
|  | 1 |
|  | 0 |

$f_3 = \bar{x}$ – NEGÁCIA, INVERZIA



logický člen (negátor, invertor NOT)

## 2.1.1.3. B-FUNKCIE S DVOMI PREMENNÝMI

$n=2$

$N = 2^{2^n}$

$2^{2^2} = 2^4 = 16$

| | | $x_2$ |
|---|---|---|
| | 0 | 0 |
| $x_1$ | 0 | 0 |

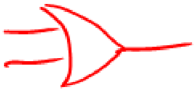
$f_0$

$f_0 = 0$ nulová funkcia

| | | $x_2$ |
|---|---|---|
| | 1 | 1 |
| $x_1$ | 1 | 1 |

$f_1$

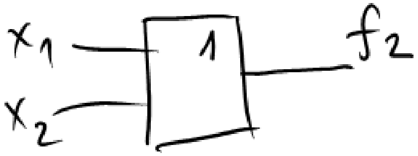
$f_1 = 1$ jednotková funkcia



| | | $x_2$ |
|---|---|---|
| | 0 | 1 |
| $x_1$ | 1 | 1 |

$f_2$

$f_2 = x_1 + x_2$ logický súčet



logický člen OR
ALEBO

| | | $x_2$ |
|---|---|---|
| | 1 | 0 |
| $x_1$ | 0 | 0 |

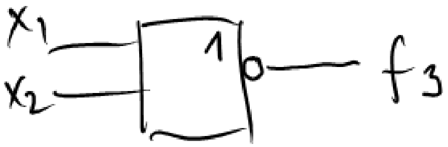
$f_3$

$f_3 = \overline{x_1 + x_2} = x_1 \downarrow x_2$

negácia logického súčtu – ANI

(↓) PEIRCEOVA FUNKCIA

$(x_1 + x_2) |$



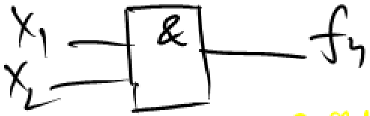
logický člen NOR
(not or)

## 2.1.1.3. B-FUNKCIE S DVOMI PREMENNÝMI

|  |  | $x_2$ |
|---|---|---|
|  | 0 | 0 |
| $x_1$ | 0 | 1 |

$f_1$

$f_1 = x_1 . x_2$ logický súčin AND



logický člen AND

|  |  | $x_2$ |
|---|---|---|
|  | 1 | 1 |
| $x_1$ | 1 | 0 |

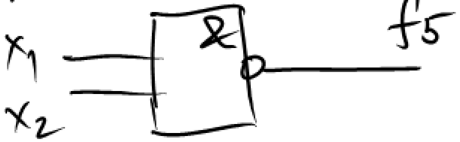
$f_5$

$f_5 = \overline{x_1 \cdot x_2} = x_1 \uparrow x_2$

operátor S-funkcie

negácia logického súčinu

SHEFFEROVA FUNKCIA (↑)



$f_5$ logický člen NAND (not and)

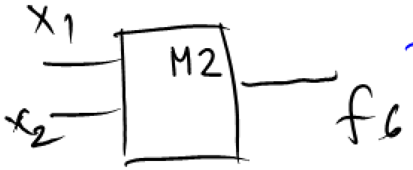
|  |  | $x_2$ |
|---|---|---|
|  | 0 | 1 |
| $x_1$ | 1 | 0 |

$f_6$

$$f_6 = x_1 \bar{x}_2 + \bar{x}_1 x_2 = x_1 \oplus x_2$$

$$= x_1 \neq x_2$$

nerovnoznačnosť, neekvivalencia, súčet modulo 2, exkluzívne ALEBO, exclusive OR XOR



logický člen XOR (exclusive or)

# *PPI 2. Logická úroveň a stavba počítačových systémov*

## 2.1.1.3. B-FUNKCIE S DVOMI PREMENNÝMI

| | | |
|---|---|---|
| | | $x_2$ |
| | 1 | 0 |
| $x_1$ | 0 | 1 |

$f_7$

$$f_7 = x_1 x_2 + \overline{x_1}\,\overline{x_2} = x_1 \equiv x_2 = \overline{x_1 \oplus x_2}$$

– rovnoznačnosť, ekvivalencia

logický člen XNOR (NXOR)

(exclusive not or)

| | | |
|---|---|---|
| | | $x_2$ |
| | 0 | 1 |
| $x_1$ | 0 | 0 |

$f_8$

$$f_8 = \overline{x_1} \cdot x_2 = x_1 \nrightarrow x_2$$

zábrana, inhibícia

logický člen zábrana

| | | |
|---|---|---|
| | | $x_2$ |
| | 0 | 0 |
| $x_1$ | 1 | 0 |

$f_9$

$$f_9 = x_1 \cdot \overline{x_2} = x_2 \nrightarrow x_1$$

zábrana, inhibícia

## 2.1.1.3. B-FUNKCIE S DVOMI PREMENNÝMI

| | | $x_2$ |
|---|---|---|
| | 1 | 0 |
| $x_1$ | 1 | 1 |

$f_{10}$

$f_{10} = x_1 + \overline{x_2} = x_2 \rightarrow x_1$ implikácia

logický člen implikácia

| | | $x_2$ |
|---|---|---|
| | 1 | 1 |
| $x_1$ | 0 | 1 |

$f_{11}$

$f_{11} = \overline{x_1} + x_2 \rightarrow x_1 \longrightarrow x_2$

implikácia

| | | $x_2$ |
|---|---|---|
| | 1 | 1 |
| $x_1$ | 0 | 0 |

$f_{12}$

| | | $x_2$ |
|---|---|---|
| | 1 | 0 |
| $x_1$ | 1 | 0 |

$f_{13}$

– negácia $x_1$ , negácia $x_2$

$f_{12}$ $f_{13}$

| | | $x_2$ |
|---|---|---|
| | 0 | 0 |
| $x_1$ | 1 | 1 |

$f_{14}$

| | | $x_2$ |
|---|---|---|
| | 0 | 1 |
| $x_1$ | 0 | 1 |

$f_{15}$

opakovanie $x_1$

$f_{14}$

opakovanie $x_2$

$f_{15}$

## PPI 2. Logická úroveň a stavba počítačových systémov

### 2.1.1.3. B-FUNKCIE S VIAC PREMENNÝMI

- FUNKCIE OR, AND, NOR, NAND možno rozšíriť aj pre n premenných

$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n$

$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n$

$x_1 \downarrow x_2 \downarrow x_3 \downarrow \ldots \downarrow x_n$ P_funkcia

$x_1 \uparrow x_2 \uparrow x_3 \uparrow \ldots \uparrow x_n$ S- funkcia

- rozšíriť možno aj XOR

$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus \ldots \oplus x_n$ ( = I , ak nepárny počet premenných má hodnotu I )

# ***PPI 2. Logická úroveň a stavba počítačových systémov***

## 2.1.1.4. BOOLOVSKÉ VÝRAZY (B-VÝRAZY)

DEF.

B-VÝRAZ JE REŤAZEC OBSAHUJÚCI PREMENNÉ, LOGICKÉ OPERÁTORY B-ALGEBRY A ZÁTVORKY.

- logické výrazy

$$(a \oplus \bar{b}) \leftarrow + (x_1 \bar{x}_2 + x_3)$$

- boolovské výrazy

$$a + [b.\bar{c}\,\overline{(\bar{a} + c.d)} + a.\bar{c}]$$

## 2.1.1.5. BOOLOVSKÁ ALGEBRA (B-ALGEBRA)

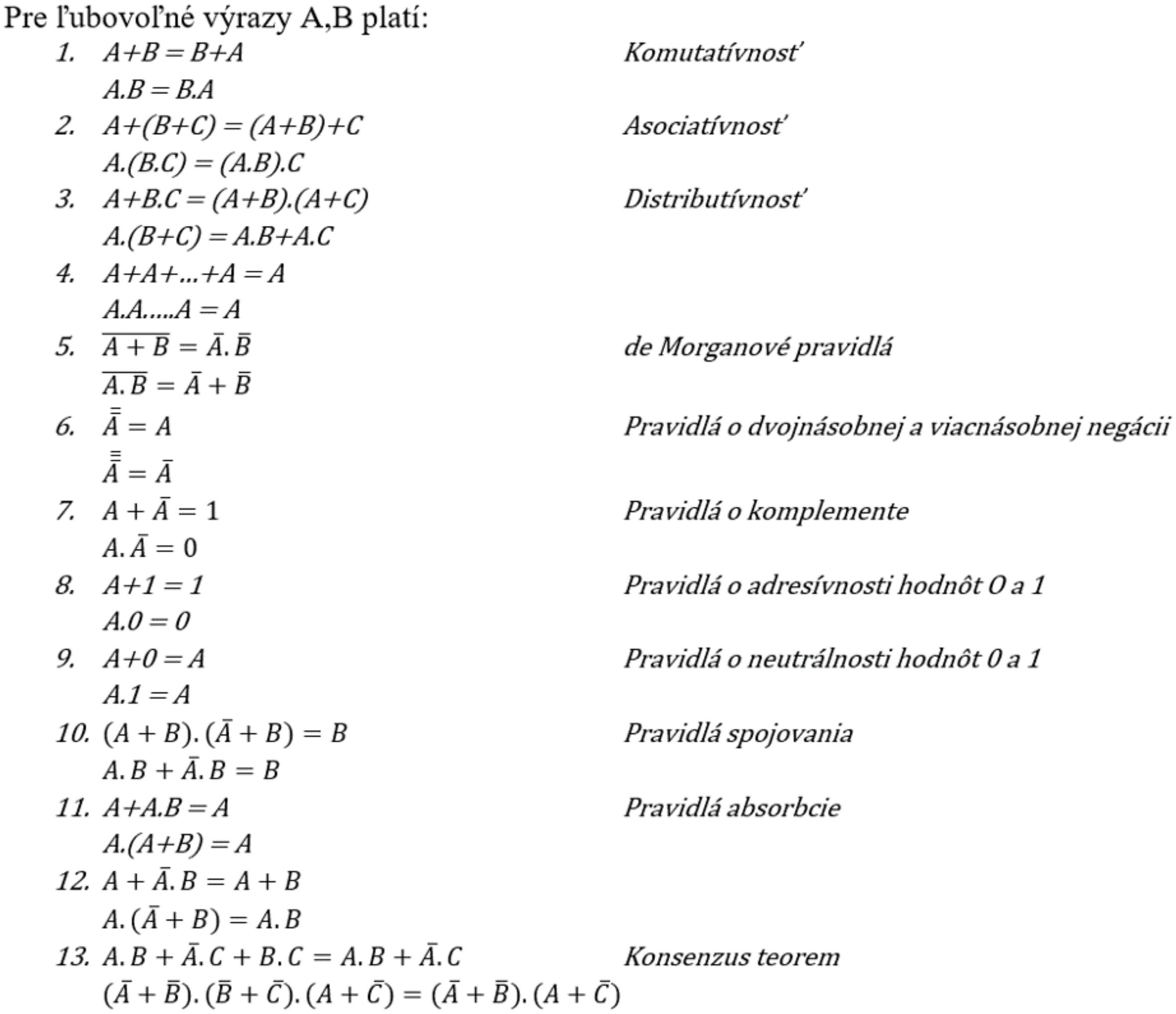
Definícia: B-algebra je šestica ($B^{(n)}$, +, **.** , ¯, 0, 1), kde

| | |
|---|---|
| $B^{(n)}$ | je množina všetkých B-výrazov |
| +, **.** , ¯ | sú boolovské operátory |
| 0, 1 | sú logické hodnoty 0 a 1 |

# ***PPI 2. Logická úroveň a stavba počítačových systémov***

## 2.1.1.5. BOOLOVSKÁ ALGEBRA (B - ALGEBRA)

Pre B – algebru platia tieto ekvivalencie -



Pre ľubovoľné výrazy A,B platí:

| | | |
|---|---|---|
| *1.* | $A+B = B+A$<br>$A.B = B.A$ | *Komutatívnosť* |
| *2.* | $A+(B+C) = (A+B)+C$<br>$A.(B.C) = (A.B).C$ | *Asociatívnosť* |
| *3.* | $A+B.C = (A+B).(A+C)$<br>$A.(B+C) = A.B+A.C$ | *Distributívnosť* |
| *4.* | $A+A+...+A = A$<br>$A.A.....A = A$ | |
| *5.* | $\overline{A+B} = \bar{A}.\bar{B}$<br>$\overline{A.B} = \bar{A}+\bar{B}$ | *de Morganové pravidlá* |
| *6.* | $\bar{\bar{A}} = A$<br>$\bar{\bar{\bar{A}}} = \bar{A}$ | *Pravidlá o dvojnásobnej a viacnásobnej negácii* |
| *7.* | $A+\bar{A} = 1$<br>$A.\bar{A} = 0$ | *Pravidlá o komplemente* |
| *8.* | $A+1 = 1$<br>$A.0 = 0$ | *Pravidlá o adresívnosti hodnôt O a 1* |
| *9.* | $A+0 = A$<br>$A.1 = A$ | *Pravidlá o neutrálnosti hodnôt 0 a 1* |
| *10.* | $(A+B).(\bar{A}+B) = B$<br>$A.B+\bar{A}.B = B$ | *Pravidlá spojovania* |
| *11.* | $A+A.B = A$<br>$A.(A+B) = A$ | *Pravidlá absorbcie* |
| *12.* | $A+\bar{A}.B = A+B$<br>$A.(\bar{A}+B) = A.B$ | |
| *13.* | $A.B+\bar{A}.C+B.C = A.B+\bar{A}.C$<br>$(\bar{A}+\bar{B}).(\bar{B}+\bar{C}).(A+\bar{C}) = (\bar{A}+\bar{B}).(A+\bar{C})$ | *Konsenzus teorem* |

## 2.1.1.5. BOOLOVSKÁ ALGEBRA (B - ALGEBRA)

Príklad: Minimalizácia počtu premenných vo výraze

$$f = xy + \bar{x}y\bar{z} + yz = y(\overset{a2}{x + \bar{x}\bar{z}} + z) \quad ③ \qquad \text{distr. zákon}$$

$$= y(x + \underbrace{\bar{z} + z}) \quad ⑫$$

$$= y(x + 1) \quad ⑦$$

$$= y \cdot 1 \quad ⑧$$

$$= y \quad ⑨$$

$$f = y$$

## 2.1.1.6. NORMÁLNE FORMY B- VÝRAZOV

- elementárny súčin $\underbrace{x_1\bar{x}_2x_3}_{\text{term}}$ rád $r=3$

$\underbrace{x_1\bar{x}_1}\bar{x}_2x_3$ $a\cdot b\cdot \underbrace{c\cdot c}\cdot\bar{d}$

jednopísmenový súčin = elementárny súčin $x_1$ $x_1\cdot 1$

- elementárny súčet $(x_1+\bar{x}_2+x_3)$ $r=3$ rád súčtu

- jednopísmenový súčet

1. DISJUNKTÍVNA NORMÁLNA FORMA - DNF (SÚČTOVÁ)

$$f=\sum_i g_i$$

$g_i$ - elementárne súčiny

$\Sigma$ - symbol pre log. súčet

## 2.1.1.6. NORMÁLNE FORMY B- VÝRAZOV

**Príklad:**

$$f = \underbrace{x_1\bar{x}_2x_3}_{g_1} + \underbrace{\bar{x}_1\bar{x}_3}_{g_2} + \underbrace{x_4}_{g_3} = g_1 + g_2 + g_3$$

$r=3 \quad r=2 \quad r=1$

### 2. KONJUNKTÍVNA NORMÁLNA FORMA – KNF

(SÚČINOVÁ)

$$f = \prod_{j} h_j$$

$\prod$ – symbol pre logický súčin

$h_j$ – elementárne súčty

**Príklad:**

$$f = \underbrace{\bar{x}_1}_{h_1}\underbrace{(\bar{x}_2+x_3)}_{h_2}\underbrace{(\bar{x}_3+x_4+x_5)}_{h_3} = h_1 \cdot h_2 \cdot h_3$$

$h_1 \sim r=1$

$h_2 \sim r=2$

$h_3 \sim r=3$

**DNF** – používajú sa:

- a/ ÚDNF – úplná DNF
- b/ SDNF – skrátená DNF
- c/ BDNF – bezhazardná DNF
- d/ IDNF – iredundantná DNF
- e/ MDNF = minimálna DNF

# PPI 2. Logická úroveň a stavba počítačových systémov

## 2.1.1.6. NORMÁLNE FORMY B- VÝRAZOV

a/ ÚPLNÁ DNF – pre danú funkciu je jediná

$f = \sum_i g_i$

obsahuje – MINTERMY

– iba elementárne súčiny rádu $r = n$

– počet premenných funkcie

Príklad:

|  |  |  |  |  |
|---|---|---|---|---|
|  |  | $x_2$ | $x_2$ |  |
|  |  |  | $x_3$ | $x_3$ |
|  | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $x_1$ | 1 | 1 | 0 | 0 |

f

ÚDNF

$$f = x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + x_1x_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1\bar{x}_2x_3$$

$n = 3 \Rightarrow r = 3$

b/ SKRÁTENÁ DNF – vzniká z ÚDNF použitím pravidiel spájania a pohltenia na elem. súčiny

Príklad:

$$f = x_2\bar{x}_3\underbrace{(x_1 + \bar{x}_1)}_{1} + x_1\bar{x}_3\underbrace{(\bar{x}_2 + x_2)}_{1} + \bar{x}_1\bar{x}_2x_3$$

$$= x_2\bar{x}_3 + x_1\bar{x}_3 + \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \Rightarrow \text{SDNF}$$

c/ BEZHAZARDNÁ DNF – dynamická dokonalosť log. obvodov

= SDNF

# *PPI 2. Logická úroveň a stavba počítačových systémov*

## 2.1.1.6. NORMÁLNE FORMY B- VÝRAZOV

d/ **IREDUNDANTNÁ DNF** – DNF, z ktorej nemožno vynechať ani jedno písmeno, aby zodpovedala danej funkcii

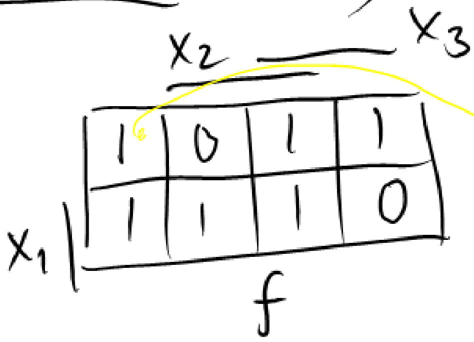
– nemožno výraz redukovať

e/ **MINIMÁLNA DNF** – DNF, kt. obsahuje minimálny počet písmen zo všetkých DNF.

**DÔSLEDKY:**

- MDNF ≈ IDNF
- SDNF ≈ BDNF

**PRÍKLAD:** (DNF)



| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

**ÚDNF:**

$$f = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1 x_2 x_3 + \bar{x}_1\bar{x}_2 x_3 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + x_1 x_2 \bar{x}_3 + x_1 x_2 x_3$$

**SDNF:**

$$f = \underset{1}{\bar{x}_1 x_3} + \underset{2}{\bar{x}_1\bar{x}_2} + \underset{3}{x_1\bar{x}_3} + \underset{4}{x_1 x_2} + \underset{5}{\bar{x}_2\bar{x}_3} + \underset{6}{x_2 x_3}$$

# PPI 2. Logická úroveň a stavba počítačových systémov

## 2.1.1.6. NORMÁLNE FORMY B- VÝRAZOV

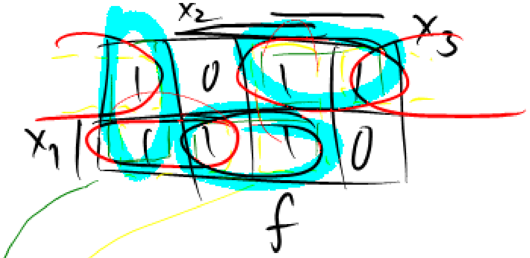
IDNF :

4 súčiny

$f = \bar{x}_1 x_3 + \bar{x}_1\bar{x}_2 + x_1\bar{x}_3 + x_1 x_2$

$f = \bar{x}_2\bar{x}_3 + x_2 x_3 + \bar{x}_1 x_3 + x_1\bar{x}_3$

$f = \bar{x}_2\bar{x}_3 + x_2 x_3 + x_1 x_2 + \bar{x}_1\bar{x}_2$



3 ekvivalentné IDNF

MDNF :

$f = \bar{x}_2\bar{x}_3 + x_1 x_2 + \bar{x}_1 x_3$

$f = x_2 x_3 + x_1\bar{x}_3 + \bar{x}_1\bar{x}_2$

3 súčiny

2 ekvivalentné MDNF

KNF – používajú sa:

- a/ ÚKNF – úplná KNF
- b/ SKNF – skrátená KNF
- c/ BKNF – bezhazardná KNF
- d/ IKNF – iredundantná KNF
- e/ MKNF – minimálna KNF

## 2.1.1.6. NORMÁLNE FORMY B- VÝRAZOV

a/ ÚPLNÁ KNF – pre danú funkciu jediná

– obsahuje iba elementárne súčty rádu $r = n$ └> počet prem- f.

- HĽADANIE ÚKNF:

1. nájde sa ÚDNF funkcie $\bar f$
2. pre nájdenie f použijeme deMorganove pravidlá

PRÍKLAD:

$x_2$ $x_3$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $x_1$ | 1 | 1 | 0 | 0 |

$f$

①

$x_2$ $x_3$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | 1 | 0 |
| $x_1$ | 0 | 0 | 1 | 1 |

$\bar f$

ÚDNF $\bar f$: $\bar f = \bar x_1 \bar x_2 \bar x_3 + \bar x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_3 + x_1 \bar x_2 x_3$

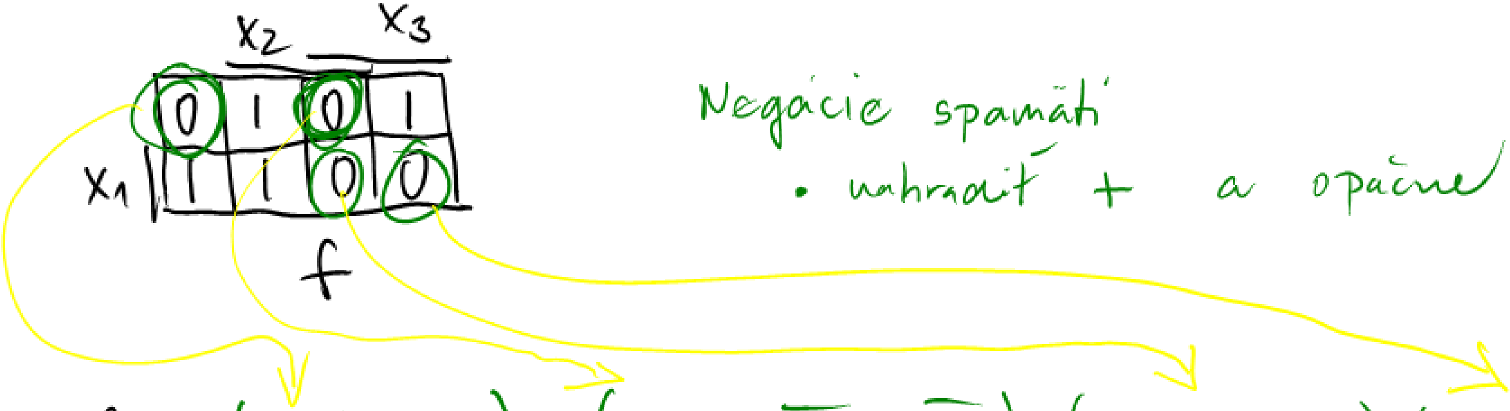
② $f = (\bar{\bar f}) = \overline{\underbrace{\bar x_1 \bar x_2 \bar x_3}_{a} + \underbrace{\bar x_1 x_2 x_3}_{b} + \underbrace{x_1 x_2 x_3}_{c} + \underbrace{x_1 \bar x_2 x_3}_{d}} = \overline{(a+b+c+d)}$

$= \overline{\bar x_1 \bar x_2 \bar x_3} \cdot \overline{\bar x_1 x_2 x_3} \cdot \overline{x_1 x_2 x_3} \cdot \overline{x_1 \bar x_2 x_3} =$ De Morgan

ÚKNF $f = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + \bar x_2 + \bar x_3)(\bar x_1 + \bar x_2 + \bar x_3)(\bar x_1 + x_2 + \bar x_3)$

## 2.1.1.6. NORMÁLNE FORMY B- VÝRAZOV

Ako vypísať (Ú)KNF priamo z mapy:



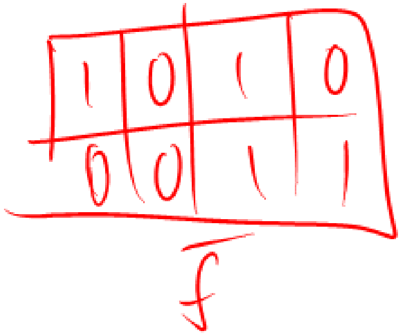
|  |  |  |  |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |

Negácie spamätí

- $\cdot$ nahradiť $+$ a opačne

$$f = (x_1+x_2+x_3)\cdot(x_1+\overline{x_2}+\overline{x_3})\cdot(\overline{x_1}+\overline{x_2}+\overline{x_3})\cdot(\overline{x_1}+x_2+\overline{x_3})$$

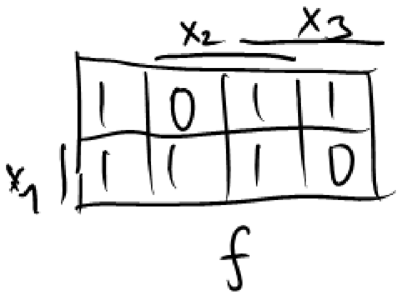
$=$ ÚKNF



|  |  |  |  |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |

## 2.1.1.6. NORMÁLNE FORMY B- VÝRAZOV

PRÍKLAD: (KNF)



|  |  | $x_2$ | $x_2$ $x_3$ | $x_3$ |
|---|---|---|---|---|
|  | 1 | 0 | 1 | 1 |
| $x_1$ | 1 | 1 | 1 | 0 |

$f$

ÚKNF:

$$f = (x_1 + \overline{x_2} + x_3) \cdot (\overline{x_1} + x_2 + \overline{x_3})$$

SKNF: SKNF = ÚKNF

IKNF: IKNF = SKNF = ÚKNF

MKNF: MKNF = IKNF = SKNF = ÚKNF

### INÉ NORMÁLNE FORMY

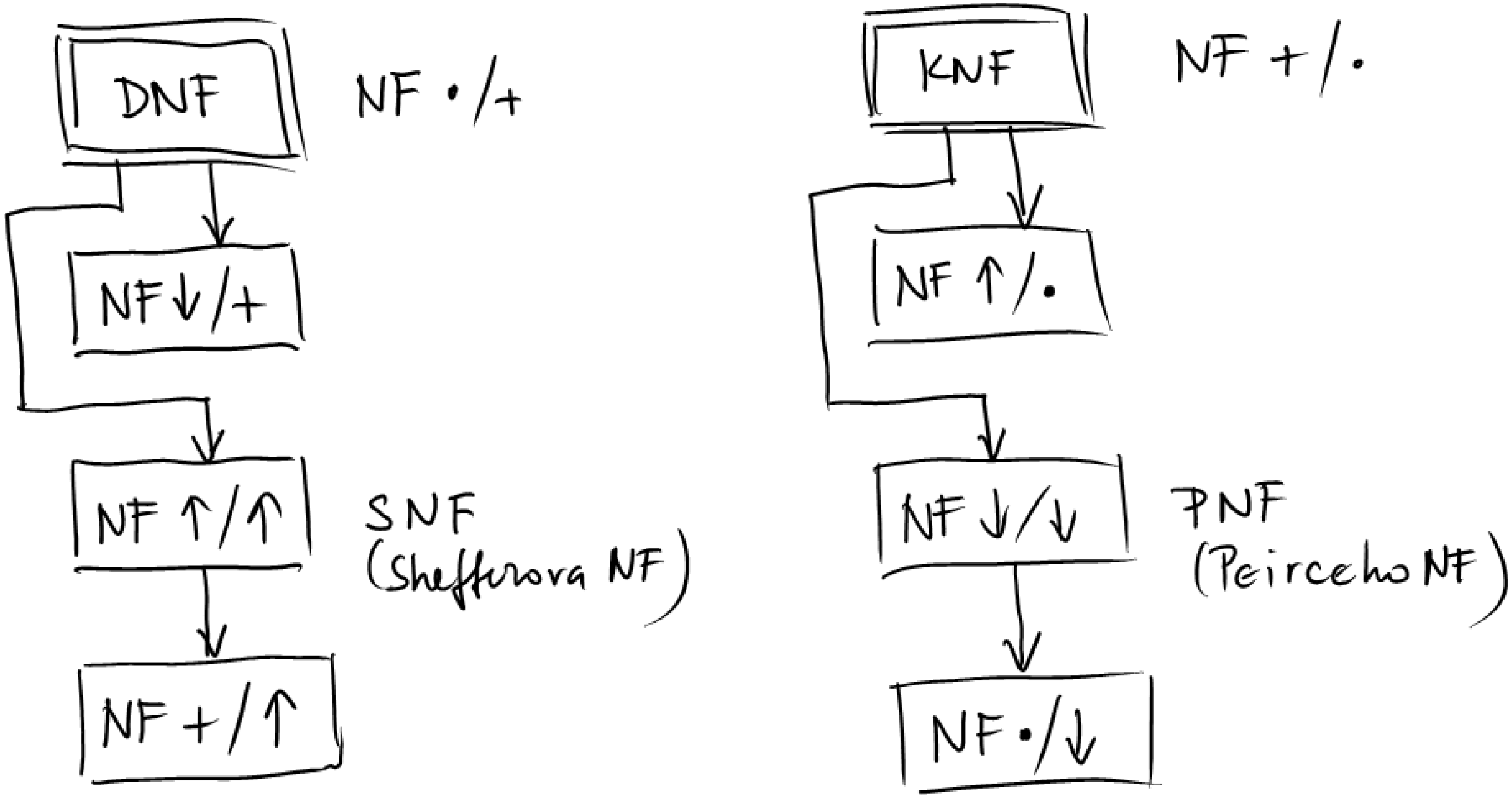
- okrem DNF a KNF (obsahujú iba boolovské operátory $(+, \cdot, \overline{\ })$) existujú další NF, v kt. sú operátory $\underline{\underline{\{+, \cdot, \downarrow, \uparrow\}}}$

- najväčší výrazov má 8 NF $g_1/g_2$:

## 2.1.1.6. NORMÁLNE FORMY B- VÝRAZOV

1. NF •/+ (NF AND/OR, DNF)
2. NF +/• (NF OR/AND, KNF)

ĎALŠIE NF sú odvodené z DNF a KNF (podradené NF)



## 2.1.1.6. NORMÁLNE FORMY B- VÝRAZOV

PRÍKLAD: /Odvodenie iných NF/

Použité ekvivalencie

$\Downarrow$

a/ DNF $f = \bar{a}b + a\bar{c} + d$

$\Rightarrow$ NF $\downarrow$/+ (NF NOR/OR)

$\| \quad A.B = \bar{A} \downarrow \bar{B}$

$$f = (a \downarrow \bar{b}) + (\bar{a} \downarrow c) + \bar{d}$$

$$\left( f = [a \downarrow (b \downarrow)] + [(a \downarrow) \downarrow c] + [d \downarrow] \right)$$

$\Rightarrow$ NF $\uparrow$/$\uparrow$ (NF NAND/NAND)

$\| \quad A+B = \bar{A} \uparrow \bar{B}$

$\overline{A.B} = A \uparrow B$

$$f = \bar{a}b + a\bar{c} + d = \overline{\bar{a}b} \uparrow \overline{a\bar{c}} \uparrow \bar{d}$$

$$= (\bar{a} \uparrow b) \uparrow (a \uparrow \bar{c}) \uparrow \bar{d}$$

S-termy

SNF

$d = d.d$

$= d \uparrow d$

$\Rightarrow$ NF +/$\uparrow$ (NF OR/NAND)

$$f = \bar{a}b + a\bar{c} + d = \overline{\bar{a}b} \uparrow \overline{a\bar{c}} \uparrow \bar{d}$$

$$= (a + \bar{b}) \uparrow (\bar{a} + c) \uparrow \bar{d}$$

$\| \quad A+B = \bar{A} \uparrow \bar{B}$

$\overline{A.B} = \bar{A} + \bar{B}$

**PPI 2. Logická úroveň a stavba počítačových systémov**

## 2.1.1.6. NORMÁLNE FORMY B- VÝRAZOV

b/ KNF : $f = (a+b+\bar c)(\bar a+\bar b+c)\,d$

⇒ NF ↑/. (NF NAND/AND)

$$f = (\bar a \uparrow \bar b \uparrow c) . (a \uparrow b \uparrow \bar c) . \bar d$$

$A + B = \bar A \uparrow \bar B$

⇒ NF ↓/↓ (NF NOR/NOR)

$$f = (a+b+\bar c)(\bar a+\bar b+c)\,d = (\overline{a+b+\bar c}) \downarrow (\overline{\bar a+\bar b+c}) \downarrow \bar d$$

$$= (a \downarrow b \downarrow \bar c) \downarrow (\bar a \downarrow \bar b \downarrow c) \downarrow \bar d$$

P-termy

$A . B = \bar A \downarrow \bar B$

$\overline{A+B} = A \downarrow B$

⇒ NF •/↓ (NF AND/NOR)

$$f = (a+b+\bar c)(\bar a+\bar b+c)\,d =$$

$$= (\overline{a+b+\bar c}) \downarrow (\overline{\bar a+\bar b+c}) \downarrow \bar d$$

$$= (\bar a \cdot \bar b \cdot c) \downarrow (a \cdot b \cdot \bar c) \downarrow \bar d$$

$A \cdot B = \bar A \downarrow \bar B$

$\overline{A+B} = \bar A . \bar B$

## 2.1.1.6. NORMÁLNE FORMY B- VÝRAZOV

Dôsledky:

1. **Ak pre danú funkciu sú známe výrazy typu DNF a KNF, tak k nim možno zostaviť ľubovolnú NF typu  g1/g2.**
2. **Celkový počet písmen (znakov premenných) v normálnej forme zodpovedá celkovému počtu písmen v DNF a KNF, ktorej je táto odvodená normálna forma podradená.**
3. **Pre každú B – funkciu  (okrem „0“ a „1“) existuje aspoň jedna NF každého typu  g1/g2.**

## 2.1. LOGICKÉ OBVODY

### 2.1.2. ANALÝZA LOGICKÝCH KOMBINAČNÝCH OBVODOV

**Je to riešenie tejto úlohy:**

*Je známa štruktúra logického obvodu a je potrebné nájsť a opísať jeho správanie (musí byť známe správanie sa prvkov, ktoré obsahuje štruktúra logického obvodu).*

- *úloha má **vždy jednoznačné** riešenie*
- *správanie obvodu možno zapísať niektorým spôsobom uvedeným v predchádzajúcej kapitole ( v 2.1.1.1)*