Collection KORDIA

Club de l'Excellence

Mathématiques

Séries Scientifiques

SESSIONS NORMALES 2000 - 2011

S1

☞ S'entrainer avec les sessions normales entre 2000 et 2011
☞ Corrigés détaillés
☞ Conseils pratiques
☞ Sujets supplémentaires

Presentation
Thierno Korka DIALLO
Elève ingénieur à l'Ecole Polytechnique de Thiès

Avant-propos

Le troisième millénaire a correspondu à l'ère des nouvelles technologies de l'information et de la communication qui ont fini par réduire le monde en un grand village planétaire avec l'implantation de l'internet. Ainsi, est-il alors opportun pour tous ses habitants de s'approprier ces outils performants pour ne pas rater l'occasion de devenir un citoyen universel ; prompt à manipuler avec toute l'aisance qui sied ces nouvelles acquisitions pour participer positivement et activement à la mondialisation.

De ce fait, l'école dont le credo est de participer à la formation des citoyens se doit alors d'orienter ses objectifs en faveur et au service de cette nouvelle dynamique de globalisation. C'est pourquoi elle fait de l'enseignement des sciences et techniques un impératif susceptible de façonner l'élève pour faire de lui un citoyen de son temps.

Seulement une question essentielle mérite d'être posée : est-il possible de maitriser les sciences et techniques sans au préalable se préparer effectivement à associer certaines bases des Mathématiques? La réponse est bien sûr non, car qui parle de sciences et techniques comprend que les Mathématiques y occupent une place primordiale.

C'est exactement pour faire prendre conscience aux élèves de l'importance capitale des Mathématiques que Mr DIALLO, élève ingénieur en Génie électromécanique à l'Ecole Polytechnique de Thiès veut amener sa modeste contribution à l'avènement dudit citoyen en proposant ce document dont l'objectif essentiel est d'intéresser les élèves aux Maths.

Ce travail, par la clairvoyance de son auteur et la pertinence de son contenu, serait une aubaine par laquelle les utilisateurs briseraient le mythe dont on entoure les mathématiques à tort tout en constituant un excellent prétexte qui les familiariserait avec une discipline incontournable pour leur réussite.

L'orientation étant bien indiquée, il appartient à chaque bénéficiaire d'en tirer le plus de profit possible.

NB : Ce document est perfectible. Toutes remarques et suggestions pouvant contribuer à son amélioration seront les bienvenues et sur ce, je vous remercie d'avance.

A vos exercices, prêts, partez…

L'auteur

Contacts

Thierno Korka DIALLO *Tel: (+221) 77 465 32 33* *e-mail: korka1991@yahoo.com*

Au nom d'ALLAH, le Clément et le Miséricordieux

Je rends grâce à ALLAH le Tout – Puissant dont la main mystérieuse est en tout et partout dans les événements qui rythment notre vie d'êtres humains, à son Prophète Mohammad Paix et Salut sur Lui qui incarne et symbolise l'Humanité.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

À mon père et à ma mère sans qui je ne serai rien.

À mon ancien professeur de Mathématiques Monsieur DIAO

À mon ancien professeur de Mathématiques Monsieur FAYE

À mon ancien professeur des Sciences Physiques Mr Mafal FALL

À Mr SOW, professeur de Mathématiques au Lycée Djignabo de Ziguinchor

À Mr DIALLO, professeur de Mathématiques au Lycée Djignabo de Ziguinchor

À Mr FALL, professeur de Mathématiques au Lycée Elhadj Omar Lamine BADJI

À Mr TOP, professeur de Mathématiques au Lycée Elhadj Omar Lamine BADJI

À ma promotion de TS1 2009 – 2010 plus particulièrement à Khadim NDIAYE

À mon ami et frère polytechnicien Pathé NDOYE

À mon ami et frère polytechnicien Pape Ousmane NIASSE

À mon ami et frère polytechnicien Ameth NDIAYE

Aux élèves ingénieurs de l'Ecole Polytechnique de Thiès

Au président du Bureau Des Elèves de l'Ecole Polytechnique de Thiès Médoune TALL

Sommaire

CONSEILS PRATIQUES

Vous êtes élève en classe de terminale, vous préparez votre bac, alors n'hésitez pas à vous conformer aux règles ci-dessous qui sont indispensables pour votre bon déroulement du bac sans contraintes.

1. BACCALAUREAT

1. Veille du bac

1.1 Préparez votre convocation ainsi que votre pièce d'identité.

1.2 N'oubliez pas :

- *Vos stylos. Prenez-en au moins cinq (05).*
- *Vos crayons de couleurs, ainsi que votre crayon noir.*
- *Votre règle et vos matériels géométriques (compas, rapporteur, double décimètre, taille).*
- *Votre calculatrice avec des piles neuves. N'utilisez pas une machine calculatrice que vous ne maitrisez pas.*

2. Le jour J

Apres être entré en salle, le surveillant vous demandera de garder sur votre table, le strict nécessaire, tout le reste sera déposé le long du mur.

Le sujet est distribué :

2.1 Lisez le sujet en entier

2.2 Relevez les points attribués aux différents exercices. Déterminer alors le temps à passer sur chaque exercice.

- *Un exercice de 3 points doit être traité en 36 minutes*
- *Un exercice de 4 points doit être traité en 48 minutes*
- *Un exercice de 5 points doit être traité en 60 minutes*

2.3 L'épreuve dure 4 heures, essayez de vous laisser 15 minutes en fin d'épreuve pour la relecture.

2.4 Commencez par traiter les exercices qui vous semblent plus « faciles ».

2.5 Soyez rigoureux dans tout votre travail

2.6 Respectez la numérotation des questions

2.7 Séparez les réponses par une ligne.

2.8 Encadrez vos résultats

2.9 Si vous butez sur une question, n'y passez pas trop de temps, admettez le résultat et continuez votre travail.

2.10 Prenez plusieurs intercalaires

2.11 Contrôlez de temps en temps le temps qui vous reste.

2.12 Si possible, consacrez le dernier quart d'heure pour la relecture de la copie.

3. Rédaction

3.1 Le fond :

3.1.1 Enoncez complètement les théorèmes avant leur utilisation si nécessaire.

3.1.2 Attention, votre calculatrice peut vous induire en erreur.

3.2 La forme :

3.2.1 Est-il besoin de rappeler qu'une écriture lisible est indispensable car certaines écritures peuvent être mal lues par le correcteur :

Ainsi : x et n peuvent se confondre. Z et 2,

3.2.2 Attention aux indices et aux exposants

*3.2.3 N'abrégez **jamais***

3.2.4 Tout calcul doit être suivi d'une conclusion sous forme d'une phrase. Les mathématiques ne sont pas que des calculs

2. Concours à faire

- Concours d'Entrée à l'Ecole Polytechnique de Thiès (EPT)
- Concours d'Entrée à l'Ecole Supérieure Polytechnique (ESP)
- Concours d'Entrée à l'Ecole Supérieure Multinationale des Télécommunications
- Concours ITS (Ingénieur des Travaux Statistiques)
- Concours d'Entrée à l'Ecole Militaire de Santé (EMS)
- Concours ENSA (Ecole Nationale de la Science Agronome)
- Concours d'Entrée aux Grandes Ecoles

3. Concours Général Sénégalais

Le Concours Général sénégalais de Mathématiques est, comme son nom l'indique un concours. Il est donc beaucoup plus challengeant qu'une épreuve du BAC. Il est aussi plus long et dure 6 heures. Le concours vise à repérer les talents Mathématiques du futur.
Le Concours Général Sénégalais couvre l'ensemble du programme de Terminale S1 (TS1). Il n'est en général pas très adapté aux programmes des autres séries scientifiques. Il faut d'abord commencer par le plus simple, c'est à dire le BAC. L'idéal, c'est d'être capable de traiter les sujets de BAC au moins une bonne partie l'été qui précède la rentrée.
*Il faut beaucoup lire et faire des recherches à l'internet aussi il faut énormément s'exercer, disons il faut juste **être bon**. En dernier lieu, il faut surtout traiter les sujets, disons des 10-15 dernières années. Faute de temps, il est préférable d'essayer de les traiter dans les limites du temps, de vous rapprocher des professeurs.*

4. Bons documents indispensables pour les Concours

1. Maths pour les Cracks
2. Maths pour les Musculation
3. PROLIMATHS (Nouvelle collection K-DIALLO disponible au numéro 77 465 32 33)
4. Hachette (Analyse et Géométrie)

Histoire des Maths – Carl Friedrich GAUSS

Johann Carl Friedrich GAUSS, *né le 30 avril 1777 à Brunswick et mort le 23 février 1855 à Göttingen, est un mathématicien, astronome et physicien allemand. Doté d'un grand génie, il a apporté de très importantes contributions à ces trois sciences. Surnommé « le prince des mathématiciens », il est considéré comme l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps.*

La qualité extraordinaire de ses travaux scientifiques était déjà reconnue par ses contemporains. Dès 1856, le roi de Hanovre fit graver des pièces commémoratives avec l'image de Gauss et l'inscription Mathematicorum Principi (« au prince des mathématiciens » en latin). Gauss n'ayant publié qu'une partie infime de ses découvertes, la postérité découvrit la profondeur et l'étendue de son œuvre uniquement lorsque son journal intime, publié en 1898, fut découvert et exploité.

Considéré par beaucoup comme distant et austère, Gauss ne travailla jamais comme professeur de mathématiques, détestait enseigner et collabora rarement avec d'autres mathématiciens. Malgré cela, plusieurs de ses étudiants devinrent de grands mathématiciens, notamment Richard Dedekind et Bernhard Riemann.

Famille

Son grand-père paternel était un paysan pauvre, venu s'établir à Brunswick où il avait un modeste emploi de jardinier. Il eut 3 fils, dont Gerhard, père du mathématicien, fut le deuxième. Son autre grand-père maternel était tailleur de pierres, il mourut à 30 ans de la tuberculose. Il eut deux enfants : l'ainée Dorothea, la mère du mathématicien, et le cadet, Friedrich, tisserand.

Sa première épouse Johanna Osthoff (1780-1809), meurt très jeune, et tôt après, son fils Louis meurt. Gauss fait une dépression nerveuse dont il ne se remettra jamais complètement[réf. nécessaire]. Il se remarie le 4 août 1810 avec la meilleure amie de sa première épouse Friederica Wilhelmine Waldeck, connue sous le nom Mina. Sa deuxième femme meurt en 1831 après une longue maladie[1], sa fille Therese, a pris soins de la maison – et de son père jusqu'à la mort de celui-ci – puis elle se marie. Sa mère Dorothea Gauß, née Benze (née en 1742, morte le 19 avril 1839 à Göttingen), vint à Brunswick en 1769. Elle passa les vingt dernières années de sa vie dans la maison de son fils. Elle devint aveugle en 1835.

Gauss eut six enfants ; avec Johanna, il eut : Joseph (1806–1873), Wilhelmina (1808–1846) et Louis (1809–1810). Wilhelmina, de tous les enfants de Gauss, était la plus prédisposée à avoir du génie, mais mourut jeune. Elle avait épousé en 1830 le théologien et linguiste Heinrich Ewald. Avec Minna Waldeck, il eut aussi trois enfants : Eugene (1811–1896), Wilhelm (1813–1879) et Therese (1816–1864).

Gauss était en désaccord avec ses fils. Il ne voulait pas que l'un d'eux suive sa trace en étudiant les mathématiques. Il a voulu qu'Eugene devienne avocat, mais lui a voulu étudier les langues. Le fils Il émigra aux États-Unis en 1832 environ, pour se retrouver finalement à Saint-Charles, dans le Missouri, où il devint un membre respecté de la communauté. Wilhelm vint s'installer dans le

Missouri, commença comme fermier, se lança dans la vente de chaussures à Saint Louis et devint riche.

Biographie

Gauss naît en Principauté de Brunswick-Wolfenbüttel[2], dans une famille pauvre[3]. Sa mère, illettrée, n'a pas enregistré sa date de naissance. Elle s'est juste souvenue qu'il est né un mercredi, huit jours avant l'Ascension, qui se déroule 40 jours après la Pâques. Le petit Gauss avait réussi à résoudre ce puzzle de sa date de naissance, en calculant la date de Pâques[4]. Il a été baptisé et confirmé à une église près de son école[5].

En 1792, le duc de Brunswick remarque ses aptitudes et lui accorde une bourse afin de lui permettre de poursuivre son instruction. Il est ainsi envoyé à l'Université technique Carolo-Wilhelmina de Brunswick, entre 1792 et 1795, où il suit notamment les cours de l'entomologiste Johann Christian Ludwig Hellwig. Durant cette période, il formule la méthode des moindres carrés et une conjecture sur la répartition des nombres premiers, conjecture qui sera prouvée un siècle plus tard[6]. Gauss acquiert pendant toute sa scolarité une très grande érudition. Puis Gauss fait ses études supérieures à l'université de Göttingen entre 1795 et 1798.

En 1796, Gauss caractérise presque complètement tous les polygones réguliers constructibles à la règle et au compas uniquement (théorème de Gauss-Wantzel), complétant ainsi le travail commencé par les mathématiciens de l'Antiquité grecque. Satisfait de ce résultat, il demande qu'un polygone régulier de 17 côtés soit gravé sur son tombeau. En août 1799, il soutient son doctorat à l'université de Helmstedt, sur le théorème fondamental de l'algèbre[7,8].

L'année 1801 voit la publication de Disquisitiones arithmeticae, qui contient un exposé très clair sur l'arithmétique modulaire, et qui apporte d'importantes avancées en théorie des nombres, notamment la première preuve de la loi de réciprocité quadratique. Soutenu par des traites du Duc de Brunswick, il n'apprécie pas l'instabilité de cet arrangement, ne croyant pas que les mathématiques soient assez importantes pour mériter une telle aide.

Il est élu le 12 avril 1804 membre de la Royal Society. Le 9 octobre 1805, il célèbre son premier mariage, avec Johanna Osthoff. En 1807, il opte finalement pour une place dans l'astronomie. Il est nommé professeur d'astronomie et directeur de l'observatoire astronomique de Göttingen.

En 1809, il publie un travail d'une importance capitale sur le mouvement des corps célestes qui contient le développement de la méthode des moindres carrés, une procédure utilisée depuis, dans toutes les sciences, pour minimiser l'impact d'une erreur de mesure. Il prouve l'exactitude de la méthode dans l'hypothèse d'erreurs normalement distribuées[9]. Cette année 1809 est aussi marquée par la mort précoce de sa première femme qu'il aimait, Johanna Osthoff, suivie de près par la mort de l'un de ses enfants, Louis. Gauss plonge dans une dépression, dont il ne sortira jamais entièrement.

En 1810, il se remarie avec « Minna » Waldeck (4 août 1810). Il découvre aussi la possibilité de géométries non-euclidiennes mais ne publiera jamais ce travail[10]. Et puis en 1818, Gauss commence une étude géodésique de l'État de Hanovre, travail qui mènera au développement *des distributions normales pour décrire les erreurs de mesure et qui comporte un intérêt dans la géométrie différentielle. Son theorema egregium permit d'établir une propriété importante de la notion de courbure.*

Il mène en 1831 une collaboration fructueuse avec le professeur de physique Wilhelm Weberqui aboutit à des résultats sur le magnétisme, à l'origine de la découverte des lois de Kirchhoff en électricité. Il mène à la construction d'un télégraphe primitif. Il est également l'auteur de deux des quatre équations de Maxwell, qui constituent une théorie globale de l'électromagnétisme. La loi de Gauss pour les champs électriques exprime qu'une charge électrique crée un champ électrique divergent. Sa loi pour les champs magnétiques énonce qu'un champ magnétique divergent vaut 0, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de monopôle magnétique. Les lignes de champ sont donc obligatoirement fermées.

La même année, après une longue maladie, sa deuxième femme s'éteint. Sa fille Thérèse prend en main les tâches ménagères et s'occupera de son père jusqu'à la fin de sa vie. Le 23 février 1855, il meurt à Göttingen, dans le royaume de Hanovre[2]. Il est enterré au cimetière d'Albani.

Personnalité

Gauss était profondément pieux et conservateur. Il soutint la monarchie et s'opposa à Napoléon Bonaparte qu'il vit comme un semeur de révolution.

Il n'a jamais été un écrivain prolifique, refusant de publier un travail qu'il ne considérait pas comme complet et au-dessus de toute critique. Cela concordait avec son adage personnel pauca sed matura (« parcimonieux mais au point »). Son journal montre qu'il avait fait plusieurs importantes découvertes mathématiques des années, voire des décennies, avant qu'elles ne soient publiées par ses contemporains. L'historien des mathématiques Eric Temple Bell considère que si Gauss avait publié à temps toutes ses découvertes, il aurait fait gagner cinquante ans aux mathématiques.

Il rechignait à présenter l'intuition derrière ses très élégantes démonstrations. Il préférait qu'elles apparaissent comme sorties de nulle part et effaçait toute trace du processus de sa découverte. Il justifie ce choix (même de façon insatisfaisante) dans ses Disquisitiones Arithmeticae, où il affirme que toute l'analyse (c'est-à-dire les chemins qu'il emprunte pour atteindre la solution d'un problème) doit être supprimée par souci de concision.

Mythologie

Le caractère exceptionnel du talent mathématique de Gauss est à l'origine de nombreuses légendes autour de son enfance. Gauss étonnerait par sa précocité et par ses capacités. Son génie serait devenu apparent dès l'âge de trois ans quand il aurait corrigé une erreur de calcul que son père avait faite.

Plus connu est l'anecdote selon laquelle il avait trouvé seul la méthode de sommation des entiers ($1+2+...+n=n(n+1)/2$).L'origine de ce mythe est l'éloge funèbre de Wolfgang Sartorius. La citation exacte est la suivante : « Le jeune Gauss venait juste d'arriver dans cette classe quand Büttner donna en exercice la sommation d'une suite arithmétique. À peine avait-il donné l'énoncé que le *jeune Gauss jeta son ardoise sur la table en disant « la voici ». Tandis que les autres élèves continuaient à compter, multiplier et ajouter, Büttner, avec une dignité affectée, allait et venait, jetant de temps en temps un regard ironique et plein de pitié vers le plus jeune de ses élèves. Le garçon restait sagement assis, son travail terminé, aussi pleinement conscient qu'il devait toujours l'être une fois une tâche accomplie, que le problème avait été correctement résolu et qu'il ne pouvait y avoir d'autre réponses[11]. »*

Gauss était un perfectionniste et un travailleur acharné. D'après Isaac Asimov, il aurait été prévenu au milieu d'un problème que sa femme était en train de mourir et il aurait répondu : « Dites-lui d'attendre un moment que j'aie fini[12].»

Œuvres

Algèbre *Lemme • Élimination de Gauss-Jordan • Méthode de Gauss-Seidel • Somme de Gauss • Théorème de d'Alembert-Gauss*

Analyse *: Algorithme de Gauss-Newton • Théorème de Gauss-Lucas • Fonction gaussienne • Intégrale de Gauss • Méthodes de quadrature de Gauss*

Théorie des nombres *: Opérateur de Gauss-Kuzmin-Wirsing • Constante de Gauss • Lemme de Gauss • Entier de Gauss • Loi de réciprocité quadratique*

Statistique *: Théorème de Gauss-Markov • Fonction de Gauss*

Géométrie *: Formule de Gauss-Bonnet • Équations de Gauss-Codazzi • Courbure de Gauss*

Physique *: Théorème de Gauss • Théorème de Gauss en électromagnétisme • Faisceau gaussien*

Reconnaissance

Prix

- Prix Lalande, Académie des sciences, France, 1810,

- Médaille Copley, Société royale de Londres, 1838.

Première partie

Epreuves

UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

11 G 18bis A 01
Durée: 4 heures
Séries : S1-S3 - Coeff. 8

OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal: 628 05 59
Téléfax (221) 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

Epreuve du 1er groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

EXERCICE 1. (4 pts)

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par :

$$\begin{aligned} u_0 &= 27 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} &= 3u_n - 4 \end{aligned}$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.
Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de u_n?

2 × 0,25 pts

2. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+2} \equiv u_n$ [8].
En déduire que pour tout entier naturel n, $u_{2n} \equiv 3$ [8] et $u_{2n+1} \equiv 5$ [8].

0,25+0,5+0,5 pts

3. Pour tout entier naturel n on pose : $v_n = u_n - 2$.
Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.
En déduire que pour tout entier naturel n, $2u_n = 50 \times 3^n + 4$.

2 × 0,25 pt

4. Montrer que pour tout entier naturel n, $2u_n \equiv 54\,[100]$.
Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de u_n suivant les valeurs de n.

0,25 + 0,75 pt

5. Montrer que deux termes consécutifs de la suite (u_n) sont premiers entre eux.

0,75 pt

EXERCICE 2. (4 pts)

L'espace orienté $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit f l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui à tout point M de coordonnées (x, y, z) associe le point M' de coordonnées (x', y', z') tel que

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = z + 1 \\ z' = x - 1 \end{cases}$$

1. a) Montrer que f est une isométrie. (c'est à dire que f conserve la distance.)

0,5 pt

b) Montrer que l'ensemble des points invariants par f est la droite (Δ) passant par le point A de coordonnées $(0, 0, -1)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

0,5 pt

2. Soit P le plan perpendiculaire à (Δ) en A.

a) Montrer que le point I de coordonnées $(-1,0,0)$ appartient à P. **0,5 pt**

b) Prouver que $I' = f(I)$ appartient à P. **0,5 pt**

3. Déterminer la nature de f et ses éléments géométriques caractéristiques. **0,5 pt**

4. Déterminer l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ d'images M' tels que le milieu J de $[MM']$ appartient :

a) au plan Q d'équation cartésienne : $2x + y - z = 0$; **0,75 pt**

b) à la droite (D) dont un système d'équations cartésiennes est : $x = y = z$. **0,75 pt**

PROBLEME. (12 pts)

Partie A

Soit f une fonction numérique définie sur l'intervalle $I = [-1, 1]$ et admettant sur I une dérivée troisième f''' continue. Soit a un point de I, $a \neq 0$.

1. a) Dire pourquoi f''' est bornée (c'est à dire il existe deux réels m et M tels que pour tout $x \in I$, $m \leq f'''(x) \leq M$ ou il existe un réel $K > 0$ tel que pour tout $x \in I$, $|f'''(x)| \leq K$.)

En déduire $\lim\limits_{a \to 0} \dfrac{1}{a^2} \displaystyle\int_0^a (a-x)^2 f'''(x)\,dx$. **0,25+0,5 pt**

b) Soit g une fonction numérique définie sur I et admettant sur I une dérivée troisième g''' continue.

Quelle est la dérivée de $f''g' - f'g''$?

En déduire que

$$\int_0^a f'(x)g'''(x)\,dx = \Big[(f'g'' - f''g')(x)\Big]_0^a + \int_0^a f'''(x)g'(x)\,dx. \quad (0.1)$$

0,25+0,5 pt

2. On prend $g(x) = \dfrac{1}{6}(a-x)^3$.

a) Après avoir calculé $g'(x)$, $g''(x)$ et $g'''(x)$ pour $x \in I$, montrer en utilisant la relation (0.1) que

$$f(a) = f(0) + f'(0)a + \frac{1}{2}f''(0)a^2 + \frac{1}{2}\int_0^a (a-x)^2 f'''(x)\,dx.$$

0,5 pt

b) Application

En choisissant pour f la fonction $x \mapsto e^x$, calculer $\lim\limits_{a \to 0} \dfrac{e^a - a - 1}{a^2}$. **0,5 pt**

3. Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on considère la courbe $\mathcal{G}$ de système d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{e^t - 1} \\ y(t) = \dfrac{t}{e^t - 1}e^t \end{cases} \quad \text{si } t > 0 \quad \text{et} \quad x(0) = y(0) = 1.$$

a) Montrer que les fonctions x et y sont continues au point 0. **0,25+0,25 pt**

b) Vérifier qu'elles sont dérivables en 0. Quelle est la tangente T_B à $\mathcal{G}$ au point B de coordonnées $(1, 1)$? **3 × 0,25 pt**

Partie B

Pour tout entier naturel non nul n on considère la fonction numérique f_n définie sur $[0+\infty[$ par : $f_n(x) = e^{\sqrt{x}} - (e + \frac{1}{n})\sqrt{x}$. C_n est sa courbe représentative dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2 cm).

1. a) Justifier la dérivabilité de f_n sur $]0, +\infty[$ et calculer $f_n'(x)$ pour $x > 0$.
La fonction f_n est-elle dérivable au point 0 ? (On pourra utiliser 2.b de la partie A)

3 × 0,25 pt

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$ puis $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f_n(x)}{x}$ et dresser le tableau de variations de f_n.

3 × 0,25 pt

c) Construire dans le repère, la courbe C_1, sa demi-tangente au point d'abscisse 0 et sa tangente au point d'abscisse $\left[\ln(e+1)\right]^2$.

3 × 0,25 pt

2. a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet deux solutions α_n et β_n telles que

$$0 < \alpha_n < 1 < \beta_n.$$

2 × 0,25 pt

b) Soit b un réel positif ou nul. Montrer que $\int_0^b e^{\sqrt{x}}\,dx = 2 + 2(\sqrt{b}-1)e^{\sqrt{b}}$. Pour cela, on pourra utiliser la formule d'intégration par parties :

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$$

en prenant $u(x) = \sqrt{x}$. **0,5 pt**

c) Pour tout entier naturel n on pose : $I_n = \int_0^{\alpha_n} f_n(x)\,dx$.

Vérifier que $I_n = 2 + 2(e + \frac{1}{n})\sqrt{\alpha_n}\left(\sqrt{\alpha_n} - \frac{1}{3}\alpha_n - 1\right)$. **0,25 pt**

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose : $\varphi(x) = \frac{e^x}{x}$.

a) Démontrer que les restrictions h_1 et h_2 de φ respectivement à chacun des intervalles $V_1 =]0, 1]$ et $V_2 = [1, +\infty[$ sont des bijections de V_1 et V_2 respectivement sur des intervalles à déterminer.

0,5 pt

On pose $h = h_2^{-1} \circ h_1$ et on désigne par C_h la courbe de h dans le repère.
On ne cherchera pas l'expression de $h(x)$ en fonction x.

b) Vérifier que pour tout entier $n \geq 1$, $e + \frac{1}{n} = h_1(\sqrt{\alpha_n})$; en déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est convergente et calculer sa limite. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$. **3 × 0,25 pt**

c) Déterminer de même la limite de la suite $(\beta_n)_{n\geq 1}$. **0,25 pt**

4. Pour tout entier naturel non nul n, on note M_n le point du plan de coordonnées $(\sqrt{\alpha_n}, \sqrt{\beta_n})$.

a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, le point M_n appartient à C_h (c'est à dire $h(\sqrt{\alpha_n}) = \sqrt{\beta_n}$).

0,25 pt

b) Déterminer les limites de h aux bornes de son ensemble de définition.
Montrer que la fonction h est décroissante. **2 × 0,25 pt**

c) Démontrer que h est dérivable dans $]0, 1[$.

0,25 pt

En remarquant que

$$\varphi(x) = \varphi(h(x)), \tag{0.2}$$

pour tout x appartenant à V_1, établir que $\forall x \in]0, 1[,\ h'(x) = \dfrac{x-1}{x} \times \dfrac{h(x)}{h(x)-1}$.

0,25 pt

5. a) Soit $M(x, y)$ un point de C_h. On pose $t = \ln\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

En utilisant la relation (0.2), montrer que :

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x} & = & e^t \\ y - x & = & t \end{cases}$$

En déduire que M est le point de $\mathcal{G}$ de paramètre t.

0,5 + 0,25 pt

b) Réciproquement, vérifier que tout point de $\mathcal{G}$ appartient à C_h.

0,5 pt

c) Donner une équation de T_A, tangente à C_h au point A d'abscisse $0,4$ (On prendra 2 comme valeur approchée de $h(0,4)$).

Représenter la courbe C_h ainsi que les tangentes T_A et T_B.

0,25 + 0,5 pt

UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR 1/ 3

OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal: 628 05 59
Téléfax (221) 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

10 G 18bis A 01
Durée: 4 heures
Séries : S1-S3 - Coeff. 8

Epreuve du 1er groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n⁰ 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

EXERCICE 1 (4 points).

Dans le plan orienté, on considère deux points distincts A et B. Sur la figure, on prendra 8 cm comme longueur du segment $[AB]$.

1. Etudier et construire l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M du plan tels que $\dfrac{MA}{MB} = 4$.

0,5 pt +0,25 pt

2. Etudier et construire l'ensemble $\mathcal{F}$ des points M du plan tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$.

0,5 pt +0,25 pt

3. Soit C l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{3}{4}\pi$ et D l'image de B par l'homothétie de centre A et de rapport $\dfrac{3}{4}$. On désigne par s la similitude directe transformant A en B et C en D.

a) Déterminer le rapport et l'angle de s. **0,5 pt +0,5 pt**

b) On note I le centre de la similitude s. Exprimer IB en fonction de IA et donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB})$. En déduire la position du point I et le placer sur la figure.

0,25 pt x 4

c) Démontrer que I appartient au cercle circonscrit au triangle ACD. **0,5 pt**

EXERCICE 2 (4 points).

On rappelle la propriété connue sous le nom de petit théorème de Fermat : "Si p est un nombre premier et a un entier naturel premier avec p, alors $a^{p-1} \equiv 1[p]$."

1. a) Démontrer que 193 est un nombre premier. **0,75 pt**

b) Soit a un entier naturel inférieur à 192. Montrer que $a^{192} \equiv 1[193]$. **0,5 pt**

2. On considère l'équation

$$(E) : \quad 83x - 192y = 1 \quad \text{où } x \text{ et } y \text{ sont des entiers relatifs.}$$

a) Vérifier que le couple (155, 67) est solution de (E). **0,5 pt**

b) Résoudre l'équation (E). **0,75 pt**

3. On note A l'ensemble des 193 entiers naturels inférieurs ou égaux à 192 et on considère les deux fonctions f et g définies de la manière suivante :

à tout entier a de A, f associe le reste de la division euclidienne de a^{83} par 193;

à tout entier a de A, g associe le reste de la division euclidienne de a^{155} par 193.

a) Démontrer $g(f(a)) \equiv a^{83\times 155}[193]$. En déduire que pour tout $a \in A$ on a : $g\big(f(a)\big) = a$. **0,5 pt +0,5 pt**

b) Déterminer $f \circ g$. **0,5 pt**

PROBLEME (12 points).

Partie A

Soit a un réel non nul, u et v deux fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que :

$$(0.1) \qquad \begin{cases} u' &= v \\ v' &= au \end{cases}$$

1. a) Montrer que u et v vérifient l'équation différentielle

$$(0.2) \qquad y'' - ay = 0$$

0,25 pt + 0,25 pt

b) résoudre l'équation (0.2) selon les valeurs de a. **0,75 pt**

2. On suppose que $a = 1$. Déterminer u et v sachant que $u(0) = 3$ et $v(0) = 0$. **0,75 pt**

Partie B

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2 cm).

Soit (Γ) l'ensemble des points M de $\mathcal{P}$ dont les coordonnées (x, y) vérifient :

$$(0.3) \qquad \begin{cases} x(t) &= \dfrac{3}{2}(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}) \\ & \qquad\qquad\qquad t \geq 0 \\ y(t) &= \dfrac{3}{2}(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}) \end{cases}$$

L'objet de cette partie est de calculer l'aire du domaine plan délimité par (Γ) et les droites d'équation $y = 0$, $x = 3$ et $x = 5$.

1. a) Démontrer que (Γ) est une partie de la conique dont une équation est :

$$(0.4) \qquad x^2 - y^2 - 9 = 0$$

0,5 pt

b) Préciser la nature de cette conique ainsi que ses éléments géométriques caractéristiques. Construire (Γ). **0,5 pt + 0,5 pt**

2. Soit $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - \sqrt{x^2 - 9} \end{array}$ et $g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{2} + \dfrac{9}{2x} \end{array}$.

a) Etudier les variations de f. **0,75 pt**

b) Montrer que la restriction de f à l'intervalle $I = [3, +\infty[$ est une bijection de I sur un intervalle J à préciser. On note φ cette restriction. **0,25 pt**

c) Démontrer que pour tout x élément de J, on a : $\varphi^{-1}(x) = g(x)$. **0,5 pt**

d) Tracer C_φ, courbe représentative de φ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Expliquer comment obtenir $C_{\varphi^{-1}}$, courbe représentative de φ^{-1} dans ce repère, à partir de C_φ. Tracer $C_{\varphi^{-1}}$.

0,25 pt x 3

3. Soit β un élément de $]0, 3[$ et $\alpha = g(\beta)$.

a) Calculer $\displaystyle\int_\beta^3 g(x)\,dx$ et en déduire que $\displaystyle\int_3^\alpha f(x)\,dx = \frac{\beta^2}{4} - \frac{9}{4} - \frac{9}{2}\ln\frac{\beta}{3}$.

[Indication : On pourra interpréter ces deux intégrales comme des aires.]

0,25 pt+0,75 pt

b) En déduire l'aire du domaine plan délimité par (Γ) et les droites d'équation $y = 0$, $x = 3$ et $x = 5$. **0,75 pt**

Partie C

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$(0.5) \qquad \begin{cases} u_0 &= 5 \\ u_{n+1} &= g(u_n) \quad \text{si } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

On se propose de calculer de trois façons différentes la limite de la suite (u_n).

1. a) Etudier les variations de g puis montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 3 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{g(u_n) - g(u_{n-1})}{u_n - u_{n-1}} > 0.$$

0,5 pt + 0,25 pt + 0,25 pt

b) Déterminer le signe de $u_1 - u_0$ puis montrer que la suite (u_n) est monotone.

0,25 pt + 0,25 pt

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

0,25 pt + 0,25 pt

2. a) En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction g dans un intervalle approprié, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{g(u_n) - 3}{u_n - 3} < \frac{1}{2}$$

En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n - 3 < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

0,5 pt + 0,25 pt + 0,25 pt

b) Déterminer une valeur possible de n pour que $u_n - 3 \leq 10^{-3}$. **0,25 pt**

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n + 3}$.

a) Montrer que $(\ln v_n)$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison. **0,5 pt**

b) Exprimer alors u_n en fonction de n et calculer la limite de (u_n). **0,5 pt + 0,25 pt**

UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR 1/ 13
OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal: 628 05 59
Téléfax (221) 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

09 G 18bis A 01
Durée: 4 heures
Séries : S1-S3 - Coeff. 8

Epreuve du 1er groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrées unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n⁰ 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

EXERCICE 1 (4 pts).

Pendant l'année scolaire, la cantine d'un lycée propose souvent du riz.
Le premier jour de l'année, il y'a deux 2 chances sur 5 qu'elle propose du riz.
Si elle en propose un jour, il y a une chance sur 3 qu'elle en propose le lendemain.
Si elle n'en propose pas un jour, il y a une chance sur 3 qu'elle n'en propose pas le lendemain.

On appelle J_n l'événement "la cantine propose du riz le $n^{\text{ième}}$ jour" et K_n l'événement "la cantine n'en propose pas le $n^{\text{ième}}$ jour".

Soit p_n la probabilité de l'événement J_n.

1. Déterminer $p\left(J_2/J_1\right)$ et $p\left(J_2/K_1\right)$. En déduire p_2. **0,25+0,5+0,5=1,25 pt**

2. Montrer que $p_n = -\frac{1}{3}p_{n-1} + \frac{2}{3}$. **0,75 pt**

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = p_n - \frac{1}{2}$.

a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison. **0,5 pt**

b) Calculer u_n puis p_n en fonction de n. **0,5 +0,25= 0,75 pt**

c) Un élève de l'établissement, fin mathématicien, ne mange à la cantine que les jours pairs.

Montrer qu'à chaque fois qu'il se rend à la cantine la probabilité qu'il a de manger du riz est comprise entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{8}{15}$. **0,75 pt**

EXERCICE 2 (4 pts). Dans un système de numération de base a, on considère les nombres

$$A = \overline{211},\ B = \overline{312} \text{ et } C = \overline{133032}.$$

1. Expliquer pourquoi a doit être strictement supérieur à 3. **0,25 pt**

2. a) Sachant que $C = A \times B$, montrer que $a^3 - 3a^2 - 2a - 8 = 0$. **0,5 pt**

b) En déduire que a divise 8. **0,25 pt**

c) Déterminer alors a. **0,5 pt**

3. L'écriture d'un nombre dans le système décimal est 214, écrire ce nombre dans la base 4. **0,25 pt**

4. Dans cette question on suppose que $a = 4$.

a) Ecrire A, B et C dans le système décimal. **0,75 pt**

b) Montrer alors que $C = A \times B = \text{ppcm}\ (A,\ B)$.

En déduire que l'équation : $Ax + By = 1$ a des solutions dans $\mathbb{Z}^2$. **0,25+0,5=0,75 pt**

5. On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $37x + 54y = 1$.
 a) Vérifier que $(19, -13)$ est une solution de cette équation. **0,25 pt**
 b) Résoudre cette équation. **0,5 pt**

PROBLEME (12 points).

Le problème est composé de trois parties A, B et C.
Les parties B et C peuvent être traitées indépendamment de la partie A
Le plan euclidien (P) est muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$
On appelle f_a la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f_a(x) = \frac{x}{ax - a + 1},$$

où a est un réel différent de 0 et de 1.
On note C_a la courbe représentative de f_a dans le repère $\mathcal{R}$.

Partie A: (5,5 pts)

1. a) Montrer que l'application φ de (P) dans (P) définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = -y + 1 \\ y' = -x + 1 \end{cases}$$

est la composée d'une symétrie orthogonale et d'une translation que l'on précisera. **0,5 pt**

b) Déterminer l'ensemble de définition D_{f_a} de f_a et montrer que la courbe C_a est globalement invariante par φ. **0,5 pt**

2. a) Montrer que toutes les courbes C_a passent par deux points fixes indépendants de a. **0,25 pt**

b) Déterminer les points fixes de f_a, c'est à dire les réels ℓ tels que $f_a(\ell) = \ell$. **0,25 pt**

3. a) Etudier les variations de f_a ; on discutera suivant les valeurs de a. **0,5 pt**

b) Construire dans le repère $\mathcal{R}$ les courbes C_{-2}, $C_{0,5}$
(On prendra pour unité graphique 1 cm). **0,5+0,25=0,75 pt**

c) Construire dans un même repère orthonormé d' unité graphique 2 cm les courbes $C_{1,5}$ et C_2. **0,25+0,25=0,5 pt**

4. Soit F la fonction de $]-\infty, 1[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$F(a) = \int_0^1 f_a(x)\, dx \text{ et } F(0) = \int_0^1 x\, dx.$$

a) Montrer que pour tout $a < 1$ et $a \neq 0$, la fonction $x \mapsto ax - a + 1$ est strictement positive dans $[0, 1]$.
Etablir alors que la fonction F est définie sur $]-\infty, 1[$. **0,25+0,25=0,5 pt**

b) En faisant le changement de variable $t = ax - a + 1$, vérifier que pour tout a différent de 0 et strictement inférieur à 1 on a :

$$F(a) = \frac{1}{a} + \frac{1-a}{a^2}\ln(1-a).$$

Déterminer alors $\lim\limits_{a \to 1^-} F(a)$ et $\lim\limits_{a \to -\infty} F(a)$. **0,25 × 3=0,75 pt**

c) Démontrer que pour tout a différent de 0 et strictement inférieur à 1 on a :

$$\forall x \in [0, 1],\ f_a(x) \in [0, 1].$$

0,25 pt

d) En utilisant le résultat de la question c), montrer que pour tout a différent de 0 et strictement inférieur à 1 on a :

$$\forall x \in [0,1],\ |f_a(x) - x| \leq |a|.$$

Calculer alors $\lim\limits_{a\to 0}\Big|F(a) - F(0)\Big|$ puis $\lim\limits_{a\to 0} F(a)$.

La fonction F est-elle continue au point 0 ? **0,25 × 3=0,75 pt**

Partie B: (4 pts)

On note Ω_a le point de coordonnées $\left(1-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right)$ dans le repère $\mathcal{R}$ et on considère les vecteurs

$$\overrightarrow{e_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}) \text{ et } \overrightarrow{e_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$$

1. a) Montrer que $\mathcal{R}_a = (\Omega_a, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est un repère orthonormé du plan. **0,25 pt**

b) Soit M un point du plan de couple de coordonnées (x, y) dans le repère $\mathcal{R}$. Appelons (X, Y) son couple de coordonnées dans le repère $\mathcal{R}_a$. En utilisant la relation vectorielle : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega_a} + \overrightarrow{\Omega_a M}$, montrer que :

$$\begin{cases} x = 1 - \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}(X+Y) \\ y = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-X+Y) \end{cases}$$

0,5 pt

c) Vérifier que la courbe (C_a) a pour équation $Y^2 - X^2 = \dfrac{2(a-1)}{a^2}$ dans le repère $\mathcal{R}_a$. **0,5 pt**

d) Déterminer la nature de C_a; préciser ses sommets S_a et S_a' suivant les valeurs de a. **0,25+0,5=0,75 pt**

2. Soit (D) la droite d'équation $y = -x + 1$ dans le repère $\mathcal{R}$.

Montrer que (C_a) a ses sommets sur (D) si et seulement si $a < 1$. **0,5 pt**

3. On suppose que $a > 1$.

a) Calculer en fonction de a les distances $\Omega_a S_a$ et $\Omega_2 \Omega_a$.

Pour calculer $\Omega_a S_a$, on peut se placer dans le repère $\mathcal{R}_a$.

Pour calculer $\Omega_2\Omega_a$, on peut se placer dans le repère $\mathcal{R}$. **0,25 +0,25 =0,5 pt**

b) En appliquant le théorème de pythagore au triangle $\Omega_2\Omega_a S_a$, calculer $\Omega_2 S_a$; **0,5 pt**

c) En déduire que les sommets de C_a sont sur un cercle de centre Ω_2 dont on précisera le rayon. **0,5 pt**

Partie C: (2,5 pts)

Dans cette partie, a est un élément de l'intervalle $]0, 1[$.

Soit u_0 un élément de $[0; 1]$ et (u_n) la suite définie par son premier terme u_0 et par la relation de récurrence : $u_{n+1} = f_a(u_n)$.

1. a) Montrer que la fonction f_a est strictement croissante dans $[0, 1]$.

Quel est l'image de l'intervalle $[0, 1]$ par f_a ? **0,25 +0,25=0,5 pt**

b) Montrer que la suite (u_n) est partout définie et que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0, 1]$.

Que peut-on dire de la suite (u_n) si $u_0 = 0$? Si $u_0 = 1$? **0,5+0,25+0,25=1 pt**

2. On suppose que u_0 est différent de 0 et 1.

a) Vérifier que la suite (u_n) est strictement monotone. **0,5 pt**

b) En déduire qu'elle est convergente et calculer sa limite. **0,25 +0,25=0,5 pt**

UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR 1/ 12
OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal : 628 05 59
Téléfax (221) 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

08 G 18bis A 02
Durée : 4 heures
Séries : S1-S3 - Coeff. 8

Epreuve du 1er groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrées unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n⁰ 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

CORRECTION PROPOSEE PAR LES AUTEURS

EXERCICE 1 (04 points). Une variable aléatoire X prend les valeurs $1, -1$ et 2 avec les probabilités respectives e^a, e^b, e^c, où a, b, c sont en progression arithmétique.

On suppose que l'espérance mathématique $E(X)$ de X est égale à 1.

1. Calculer a, b, c et la variance $V(X)$ de X. **1 pt**

2. Soient A, B, C trois points d'abscisses respectives $1, -1$ et 2 d'une droite graduée (Δ).

a. Calculer l'abscisse du point G barycentre de $\{(A,1);(B,2);(C,4)\}$. **1 pt**

b. On pose : $\varphi(M) = \frac{1}{7}(MA^2 + 2MB^2 + 4MC^2)$, où M est un point de (Δ).

Montrer que $\varphi(G) = V(X)$. **1 pt**

c. Déterminer l'ensemble (Γ) des points M de (Δ) tels que $\varphi(M) - 3$. **1 pt**

EXERCICE 2 (04 points). Soit f la fonction définie sur $[1, +8[$ par : $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{\ln x + 1}{x}$.

En utilisant la fonction f, on se propose de déterminer la limite de la suite de terme général $Sn = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$.

1. Soit k un entier non nul. Etablir les relations suivantes :

a. $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\, dx \leq \frac{1}{k+1}$.

b. $\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\, dx = \frac{1}{k} - f(k)$.

2. a. Déterminer deux réels a et b tels que $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{1}{x+1}$ **0,25 pt**

b. Soit $U_n = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{2n(2n+1)} = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k(k+1)}$

Calculer U_n en fonction n et déterminer $\lim\limits_{\to+\infty} U_n$. **0,5+0,25=0,75 pt**

c. Déduire des résultats de la question (1) que : $0 \leq \sum_{k-n}^{2n} f(k) \leq U_n$.

Déterminer alors $\lim\limits_{\to+\infty} \sum_{k=n}^{2n} = f(k)$. **0,5+0,5=1 pt**

d. Montrer que

1

$f(k) = S_n - \ln \dfrac{2n+1}{n}$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$. **0,5+0,5=1 pt**

EXERCICE 3 (04 points). Le plan est orienté. PQR est un triangle équilatéral de sens direct du plan. I et J sont les milieux respectifs de $[QR]$ et $[RP]$. Q_1 est le symétrique de Q par rapport à J.

1. Soit t la translation transformant J en Q et r la rotation de centre P transformant Q en R. On pose $f = t \circ r$.

a. Faire une figure.
Définir et construire les points P' et Q' images respectives par f des points P et Q. **1 pt**

b. Déterminer la nature du triangle JIR et préciser l'image par f du point R. **0,25+0,25=0,5 pt**

c. Donner la nature de f et ses éléments géométriques caractéristiques. En deduire la nature du triangle IPP' . **0,25+0,25+0,5=1 pt**

2. Soit s la similitude directe telle $s(J) = P$ et $s(R) = I$.

a. Déterminer l'angle et le rapport de s. Montrer que $s(I) = P'$. **0,5 pt**

b. Soit Ω le centre de s. Montrer que les points Ω, I, R et P d'une part et les points Ω, P, J et Q_1 d'autre part sont cocycliques.
En déduire la position de Ω puis construire ce point. **0,25+0,25+0,5=1 pt**

PROBLEME (08 points).

1. Soit l'équation différentielle :
$(E_m) : my'' + 2y' + 2y = 0$; où m est un réel.

a. Déterminer suivant les valeurs de m l'ensemble des fonctions 2 fois dérivables sur $\mathbb{R}$ solutions de (E_m). **1 pt**

b. Déterminer la solution de (E_1) dont la courbe représentative passe par le point A de coordonn ées $(0; 1)$ et admet en ce point une tangente parallèle à la droite d'équation $y = -x$. **0,5 pt**

2. Soit f la fonction définie sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$ par $f(t) = e^{-t}\cos t$. Etudier les variations de f et construire sa courbe représentative dans un rep'ere orthogonal (Unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées). **1 pt**

3. Soit g le prolongement à $\mathbb{R}$ de f.

a. Comparer $g(t)$ et $g(t + 2\pi)$. Donner alors le sens de variation de g. **0,5 pt**

b. On pose $u(t) = e^{-t}$ et $v(t) = -e^{-t}$. On note (C_u) et (C_v) leurs courbes représentatives. respectives et (G) celle de g dans le même repère. Quels sont les points communs à (G) et (C_u) d'une part, à (G) et (C_v) d'autre part ?
0,25+0,25 =0,5 pt

c. Montrer qu'en chacun de ces points communs les deux courbes ont même tangente.
0,25+0,25 =0,5 pt

d. Démontrer que g admet une limite en $+\infty$. (On fait remarquer que : $-1 = \cos t = 1$). **0,25 pt**

4. Pour tout réel k on pose : $a_k = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}+k\pi}^{\frac{\pi}{2}+k\pi} g(t)\, dt$.

a. Calculer a_k. (On pourra faire deux fois une intégration par parties.) **0,5 pt**

b. Pour tout réel n on pose et $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} |ak|$.
Montrer que la suite (s_n) admet une limite.
Interpréter géométriquement ce résultat. **0,5+0,25 =0,75 pt**

5. Dans cette question, le plan est muni d'un repère orthonormé. On considère la courbe paramétrée. (Λ) définie par le système d'équations :

$$\begin{cases} x(t) = e^{-t}\cos t \\ y(t) = e^{-t}\sin t \end{cases} ; \text{pour } t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$$

a. Etudier les variations des fonctions x et y et dresser le tableau des variations conjointes.

0,75 pt

b. Soit M_t le point de (Λ) de paramètre t et $\vec{V}_t$ le vecteur dérivé lui correspondant.
Calculer la norme du vecteur $\overrightarrow{OM_t}$ et montrer que l'angle $(\overrightarrow{OM_t}, \vec{V}_t)$ est constant.

0,5+0,5 =1 pt

c. Représenter graphiquement (Λ). On précisera les tangentes aux points de paramètres $-\frac{\pi}{2}$ et 0

0,25+0,25+0,25 =0,75 pt

UNIVERSITÉ CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
OFFICE DU BACCALAUREAT
Téléfax (221) 824 65 81 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

1/ 4 07 G 18 bis A 01
Durée : 4 heures
Séries : S1-S3 - Coeff. 8
Epreuve du 1^er^ groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrées unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n°5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

EXERCICE 1 : (03,5 points). Soient α et β deux nombres complexes quelconques. On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et pour tout complexe z :

$$f(z) = z^3 + \alpha z^2 + \beta z$$

1. Montrer que $f(1) + f(j) + f(j^2) = 3$. (On notera que $1 + j + j^2 = 0$ et $j^3 = 1$).

2. **a.** En déduire que $|f(1)| + |f(j)| + |f(j^2)| \geq 3$.

b. En utilisant a), montrer que l'un au moins des nombres réels $|f(1)|; |f(j)|$ et $|f(j^2)|$ est supérieur ou égal à 1.

3. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. ABC est un triangle équilatéral direct de centre de gravité O et tel que l'affixe de A soit un réel r strictement positif fixé. I et J sont deux points quelconques du plan d'affixes respectives a et b.

Dans cette question on prend $\alpha = -\frac{a+b}{r}$ et $\beta = \frac{ab}{r^2}$.

a. Montrer que les affixes respectives de B et C sont rj et rj^2.

b. Montrer que $BO.BI.BJ = r^3|f(j)|$. Calculer de la même manière $CO.CI.CJ$ et $AO.AI.AJ$.

c. Montrer que le triangle ABC a au moins un sommet S vérifiant : $SO.SI.SJ \geq r^3$.

EXERCICE 2 : (04 points). Le plan (P) étant orienté ; on considère un triangle rectangle isocèle ABC tel que $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ ait pour mesure $\frac{\pi}{2}$. On note O l'intersection des bissectrices intérieures de ABC. Soit s_1 la similitude plane directe de centre A qui transforme B en O et s_2 la similitude plane directe de centre C qui transforme O en B. A tout point M du plan distinct de A et de B ; on associe le point $N = s_1(M)$ et le point $P = s_2^{-1}(M)$

1. **a.** Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AN})$.

b. On désigne par s' la similitude plane directe de centre A qui transforme B en M.

Montrer que $s' \circ s_1 = s_1 \circ s'$; en déduire l'image de O par s'. Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MN})$.

c. Proposer une construction géométrique de N, lorsque le point M est donné.

2. **a.** Quelle est la nature de $r = s_1 \circ s_2$? préciser ses éléments géométriques caractéristiques.

b. Déterminer r(P) et en déduire une construction géométrique de P à partir de N.

c. Lorsque $M = O$, montrer que le point N appartient à la demi-droite $[AC)$ et le point P à la demi-droite $[CA)$

1

3. Faire une figure comportant les points A, B, C, O, P et N avec $M = O$.

EXERCICE 3 : (3,5 points). On considère dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les trois points A, B et C de coordonnées respectives $(1,0)$, $(0,1)$ et $(1,1)$, puis à tout réel $t \in [0,1]$ on associe le point $M(t)$ barycentre du système $\left\{(B,(1-t)^2),(A,2t(1-t)),(C,t^2)\right\}$. On note $x(t)$ et $y(t)$ les coordonnées de $M(t)$ et (Γ) l'ensemble des points $M(t)$ lorsque t décrit $[0,1]$.

1. **a.** Exprimer en fonction de t les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ de $M(t)$.

b. Dresser le tableau de variations des fonctions x et y et tracer la courbe (Γ) ainsi que ses tangentes aux points B, C et $M\left(\frac{1}{2}\right)$.

2. Montrer que les tangentes à (Γ) en B et C se coupent en A.

3. Touver une relation entre $x(t)$ et $y(t)$ indépendante de t. On calculera y en fonction de x et on posera $y = f(x)$. La fonction f est-elle dérivable à gauche au point 1 ?

PROBLEME : (9 points)

PARTIE A :

Soit f une fonction définie sur $[1;+\infty[$, ayant une dérivée continue et croissante. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ on pose : $u_p = \sum_{n=1}^{p} f'(n)$.

1. Démontrer la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : f'(n) \leq f(n+1) - f(n) \leq f'(n+1) \quad (0.1)$$

a. En appliquant le théorème des accroissements finis à f dans un intervalle bien choisi.

b. En utilisant la valeur moyenne de f' sur $[n; n+1]$. [On rappelle que la valeur moyenne d'une fonction continue g sur un intervalle $[a;b]$ est : $\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx$].

2. En utilisant la relation (0.1), de la question **1.** démontrer que

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, u_p - f'(p) \leq f(p) - f(1) \leq u_p - f'(1) \quad (0.2)$$

3. Dans cette question on prend $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

a. Vérifier que la suite (u_p) est monotone.

b. En utilisant la relation (0.2), de la question **2.** montrer que la suite (u_p) est bornée.

c. En déduire que la suite (v_p) de terme général $v_p = \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n^3}$ est convergente et que sa limite appartient à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

4. Dans cette question on prend $f(x) = -\ln x$.

a. En utilisant la relation (0.2), montrer que $u_p \leq -\frac{1}{p} - \ln p$.

b. Montrer que $\lim\limits_{p\mapsto+\infty}\sum\limits_{n=1}^{p}\frac{1}{n}=+\infty$.

PARTIE B :

1. Calculer pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\sin t|dt$.

a. En effectuant le changement de variable $u=t-n\pi$ et en ramarquant que la fonction $u\mapsto|\sin u|$ est périodique de période π.

b. En utilisant le résultat admis suivant :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall t\in[n\pi,(n+1)\pi],|\sin t|=(-1)^n\sin t.$$

2. Pour tout réel $a>0$, on considère la fonction h_a définie sur $I=[0;+\infty[$ par :

$$h_a(t)=\left|\frac{\sin at}{t}\right|,\ \text{si } t\in]0;+\infty[,\ \text{et } h_a(0)=a.$$

a. Montrer que les fonctions h_a sont continues sur I.

b. Montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*:\ \frac{1}{(n+1)\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\sin t|dt\ \leq\ \int_{n\pi}^{(n+1)\pi}h_1(t)dt\ \leq\ \frac{1}{n\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\sin t|dt$$

et

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}|\sin t|dt\ \leq\ \int_0^{\pi}h_1(t)dt$$

c. En déduire que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*:\ \frac{2}{(n+1)\pi}\ \leq\ \int_{n\pi}^{(n+1)\pi}h_1(t)dt\ \leq\ \frac{2}{n\pi}$$

(0.3)

et

$$\frac{2}{\pi}\ \leq\ \int_0^{\pi}h_1(t)dt$$

3. On veut utiliser les résultats précédents pour calculer $\lim\limits_{a\mapsto+\infty}\displaystyle\int_0^{\pi}h_a(t)dt$.

a. En utilisant la relation (0.3) comparer $\displaystyle\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n}$ et $\displaystyle\int_0^{p\pi}h_1(t)dt$.

b. Déduire de la question 4)b) partie A $\lim\limits_{p\mapsto+\infty}\displaystyle\int_0^{p\pi}h_1(t)dt$

c. Calculer $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\displaystyle\int_0^{x}h_1(t)dt$ [On pourra introduire l'entier $p=E\left(\frac{x}{\pi}\right)$; où E désigne la fonction partie entière.]

4. Montrer que

$$\forall a\in\mathbb{R}_+^*:\ \int_0^{\pi}h_a(t)dt=\int_0^{a\pi}h_1(t)dt.$$

En déduire $\lim\limits_{a\mapsto+\infty}\displaystyle\int_0^{\pi}h_a(t)dt$

UNIVERSITÉ CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR 1/3
OFFICE DU BACCALAUREAT
Téléfax (221) 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

06 G 18 bis A 01
Durée : 4 heures
Séries : S1-S3 – Coeff. 8
Epreuve du 1er groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrées unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

Exercice 1 : (4 points)

1) On considère l'équation différentielle : $y' + y = \dfrac{e^{-x}\cos x}{2 + \sin x}$ (E).

f étant une fonction numérique dérivable sur ∇, on pose : $g(x) = e^{x} f(x)$.

a) Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $g'(x) = \dfrac{\cos x}{2 + \sin x}$.

b) Déterminer la solution générale de (E), en déduire la solution de (E) qui s'annule en 0.

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct, on considère la courbe (Γ) d'équations paramétriques : $\begin{cases} x(t) = \ln(2 + \sin t) \\ y(t) = \ln(2 + \cos t) \end{cases}$; t ∈ ∇.

a) Comparer $M(t)$ et $M(t + 2\pi)$ ainsi que $M(t)$ et $M(-t + \frac{\pi}{2})$.

b) En déduire que la symétrie orthogonale d'axe la première bissectrice conserve (Γ) et montrer que pour construire (Γ) , il suffit d'étudier x et y dans $\left[\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{4} + \pi\right]$.

c) Dresser le tableau de variations des fonctions x et y dans $\left[\frac{\pi}{4} ; \frac{5\pi}{4}\right]$ et tracer la courbe (Γ) .

Exercice 2: (4 points)

Une urne contient 6 boules indiscernables au toucher : 4 boules vertes et 2 boules jaunes.

1) On tire au hasard simultanément 2 boules de l'urne et on note X la variable aléatoire qui à chaque tirage de 2 boules, associe le nombre de boules vertes tirées. Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.

2) On tire au hasard deux fois de suite 2 boules simultanément, les boules tirées n'étant pas remises dans l'urne. On note A, B, C et D les événements suivants :

A : « Aucune boule verte n'est tirée au cours du premier tirage de 2 boules. »
B : « Une boule verte et une boule jaune sont tirées au cours du premier tirage de 2 boules. »
C : « Deux boules vertes sont tirées au cours du premier tirage de 2 boules. »
D : « Une boule verte et une boule jaune sont tirées au cours du deuxième tirage de 2 boules. »

a) Calculer $p(D/_A)$, $p(D/_B)$ et $p(D/_C)$.

b) En déduire la probabilité des événements D ∋ A, D ∋ B et D ∋ C.

Calculer p(D) [On remarquera que D = D ∋ (A (B (C)].

Exercice 3: (4 points)

Dans le plan euclidien orienté, on considère un rectangle direct ABCD de centre O tel que AB = 3 a et BC = $a\sqrt{3}$; où a est un réel strictement positif donné.

1) Déterminer la nature du triangle BCO .

…./2

2) Soit E le point du segment [BD] tel que $BE = \frac{3}{4} BD$. Donner une construction géométrique du centre Ω de la similitude directe s telle que s (B) = O et s (E) = C .

3) On suppose dans la suite que a = 1 et on pose : $\vec{u} = \frac{1}{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \frac{1}{AD} \cdot \overrightarrow{AD}$; on munit ensuite le plan du repère orthonormal direct $\left(A ; \vec{u} ; \vec{v} \right)$,

a) déterminer les affixes de B et de O.

b) En déduire l'écriture complexe de l'application s.

4) Déterminer l'affixe de Ω et celle du point A ' = s (A) .

5) On considère la suite de points M_n d'affixes z_n définie par $M_0 = A$ et pour tout $n \in |$, $M_{n+1} = s(M_n)$.

a) démontrer que la suite $(\alpha_n)_{n \in |}$ définie par : $\alpha_n = z_{n+1} - z_n$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme α_0 et la raison.

b) Exprimer en fonction de n la longueur de la ligne polygonale $M_0 M_1 M_2 \ldots M_{3n}$ et déterminer la limite de cette longueur quand n tend vers $+\infty$.

Problème :

Dans ce problème on calcule dans la partie A la valeur d'une intégrale et on étudie dans la partie B une suite numérique (I_n) et quelques unes de ses différentes propriétés.

Partie A : Calcul de $I = \int_0^{\ln\sqrt{2}} \sqrt{e^{2t} - 1}\, dt$.

Soit g et G les fonctions définies sur [0 ; + ∞ [par : $g(x) = \sqrt{e^{2x} - 1}$ et $G(x) = \int_0^x g(t)\, dt$.

1) Pour tout $x \in \nabla$, on pose : $H(x) = \int_0^x \frac{1}{1 + t^2}\, dt$.

a) Montrer que la fonction H est dérivable sur ∇ et déterminer sa dérivée.

b) Calculer (H o tan)'(x) pour tout $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$. En déduire que (H o tan) (x) = x pour tout $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$. Calculer alors H(1) .

2) Pour tout $x \in [\, 0 , +\infty\, [$, on pose : F (x) = g (x) – H o g (x),

a) Vérifier que F et G sont dérivables sur] 0 , + ∞ [et que pour tout x ∈] 0 , + ∞ [, F ' (x) = G ' (x).

b) En déduire que G (x) = F (x). Calculer alors I. [On remarquera que $I = G(\ln\sqrt{2})$].

…./3

Partie B : Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = e^{2x} - 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$I_n = \int_0^{\ln\sqrt{2}} [f(x)]^{\frac{n}{2}}\,dx \text{ puis } I_0 = \ln\sqrt{2}$$

1) a) Vérifier que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$f'(x) = 2[1 + f(x)] \qquad (1).$$

b) Montrer en utilisant la relation (1) que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+2} \qquad (2).$$

Vérifier que la relation (2) reste encore valable pour n = 0 .

c) En remarquant que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive, montrer que $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $U_n = I_{n+4} - I_n$.

a) En remplaçant n par n + 2 , dans la relation (2) , montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$U_n = \frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+2}$. En déduire l'expression de U_{4n+1} en fonction de n .

b) Calculer $\sum_{n=0}^{p} U_{4n+1}$ en fonction de I_{4p+5} et de I_1.

c) Calculer la limite lorsque p tend vers $+\infty$ de la somme

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{-1}{4p+3} + \frac{1}{4p+5} = \sum_{n=0}^{2p+2} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

BAREME

EX 1 : 04pts					EX 2 : 04 pts			EX 3 : 04 pts						
1		2			1	2		1	2	3		4	5	
a	b	a	b	c		a	b			a	b		a	b
1	1	0.5	0.5	1	1	1.5	1.5	0.25	1	0.25	0.5	0.5	0.5	1

PROBLEME : 08 pts									
A				B					
1		2		1			2		
a	b	a	b	a	b	c	a	b	C
1	1	1	1	0.5	1	0.5	0.75	0.75	0.5

…/Fin

UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
OFFICE DU BACCALAUREAT
Téléfax : (221) 824 65 81 – 824 95 - 92

Session normale 2005
Durée : 04 heures
Séries : S1 – S3
Coeff : 08

Epreuve du 1[er] groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées.
Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des traces de courbe sont interdites.
Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF. Circulaire n0 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

EXERCICE 1

Soit OABC un tétraèdre dont les arêtes contenant le point O sont deux à deux perpendiculaires. On dit que OABC est un tétraèdre trirectangle en O.

1. *Montre que les arêtes opposées du tétraèdre sont perpendiculaires.*

2. *Soit H le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).*

2.1. *Montrer que le plan (OCH) est perpendiculaire à la droite (AB).*

2.2. *Montrer que le point H est l'orthocentre du triangle ABC.*

2.3. *Soit K l'intersection de (CH) et (AB). Montrer que (OK) est une hauteur du triangle OAB. En déduire que* $\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$ *(On pourra exprimer de deux manières différentes l'aire du triangle OAB).*

EXERCICE 2

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$*la suite définie par* $u_0 = 1\ et u_n - 2u_{n-1} = 2n + 3$, *pour tout entier naturel n non nul.*

1. *Montrer qu'il existe un réel b indépendant de n tel que :* $v_n = u_n + 2n + b$ *soit le terme général d'une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.*

2. *En déduire que*$u_n = 2^{n+3} - 2n - 7$

3. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$. Calculer $S_n$en fonction de n ; déterminer$lim_{n\to+\infty} S_n$ et calculer la plus petite valeur de n pour laquelle $S_n$soit supérieure à 2005.

4. On pose $T_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Calculer $T_n$en fonction de n et $lim_{n\to+\infty} T_n$

EXERCICE 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé$(O, \vec{u}, \vec{v})$ (Unité graphique 2 cm).

1. *Etude d'une courbe paramétrée. On considère la courbe (C) définie paramétriquement par :*

$$\begin{cases} x = f(t) = -\frac{t^2}{2} + t \\ y = g(t) = \frac{t^2}{2} + t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

1.1. *Etudier conjointement les variations sur ℝ de f et g.*

1.2. *Préciser les points de (C) où la tangente est parallèle à l'un des axes de coordonnées.*

1.3. *Préciser les points d'intersection de (C) avec chacun des axes et donner un vecteur directeur de la tangente en ces points.*

2. *Nature de la courbe*

2.1. *Soit s l'application du plan complexe qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe Z telle que Z = (1 + i)z.*

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des.

2.2. *Déterminer l'affixe Z de M' sous la forme Z = X + iY lorsque M est un de(C).*

2.3. *Soit (L) l'image de (C) pars. Déterminer une équation cartésienne de(L).*

2.4. *Déterminer alors la nature et les éléments caractéristiques de (L). En déduire la nature et les éléments caractéristiques de(C). Construire géométriquement(C). On marquera les points identifiés dans les questions 1) b) et 1) c).*

PROBLEME *Dans tout ce problème a désigne un nombre réel donné.*

Partie A

1. *Déterminer la solution générale de l'équation différentielle (E) :* $y'' + 2ay' + a^2y = 0$

2. *Déterminer la solution g de (E) vérifiant g(0) et g'(O)= e*

Partie B

Dans la suite on note f_a *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f_a(x) = xe^{(-ax+1)}$*.Le plan étant muni d'un repère orthonormé* $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$*, on note* (C_a) *la courbe représentative de* f_a *dans ce repère.*

1. *Démontrer que pour tout réel x,* $f_a(-x) = -f_{-a}(x)$*. En déduire une transformation permettant d'obtenir* (C_{-a}) *à partir de* (C_a)

2. *Pour* $a \neq 0$*, montrer que pout réel x de* $\mathbb{R}$*,* $f_a(x) = \frac{1}{a}f_1(ax)$ *. En déduire une transformation permettant d'obtenir* (C_a) *à partir de* (C_1)*.*

3. *Etudier les variations de* f_0 *et* f_1*.*

4.1. *Montrer que toutes les courbes* (C_a) *passent par un point fixe qu'on précisera.*

4.2. *Soit (E) l'ensemble des points du plan dont les couples de coordonnées vérifient* $xy > 0$*. Démontrer que pour tout point de (E) il passe une courbe* (C_a) *et une seule.*

5. *Construire sur un même dessin les courbes permettant d'obtenir* $(C_0), (C_1), (C_{-1}) et \left(C_{\frac{1}{2}}\right)$*.*

PARTIE C

On pose $I_a = \int_0^1 f_a(x)\,dx$

1. *Donner une interprétation géométrique de* I_a*.*

2. *Calculer* I_a *en fonction de a.*

3. *Démontrer que pour tout* $a > 0, \frac{1}{2}e^{(1-a)} \leq I_a \leq \frac{1}{2}e$
En déduire la limite de I_a *quand a tend vers O par valeurs positives.*

UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
OFFICE DU BACCALAUREAT
Téléfax : (221) 824 65 81 – 824 95 - 92

Session normale 2004
Durée : 04 heures
Séries : S1 – S3
Coeff : 08

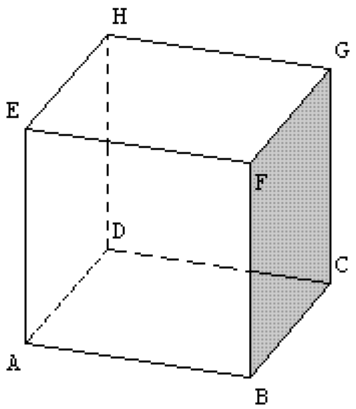
Epreuve du 1er groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées.
Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des traces de courbe sont interdites.
Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF. Circulaire n0 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

EXERCICE 1

On considère le cube ABCDEFGH d'arête 1 représenté ci-dessous,



__1.__ Soit L, le centre du carré ABFE et J le milieu de [AL]. Soit la similitude directe du plan (ABF) telle que f(A)=L et f(B)=J.

__1.1.__ Déterminer l'angle et le rapport de f.
__1.2.__ Construire E' = f(E). Montrer que f(F) est le milieu du segment [AB].
__1.3__ Soit Ω le centre de la similitude f. Montrer que les points Ω, A, L et E d'une part et les points Ω, A, B et J d'autre part sont cocycliques. En déduire une construction de Ω.
__1.4.__ Montrer que les droites (ΩA) et (ΩE) sont orthogonales.

__2.__ On désigne par I le milieu du segment [FG] et toujours par L le centre du carré ABFE.
__2.1.__ Vérifier que $\overrightarrow{CL} = \overrightarrow{IH}\overrightarrow{IB}$. En déduire l'aire du triangle IHB.
__2.2.__ Calculer le volume du tétraèdre BCIH et en déduire la distance du point C au plan BIH.

EXERCICE 2

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 ; L'urne U_1 contient 2 boules blanches et 4 boules vertes. L'urne U_2 contient 4 boules blanches et 2 boules vertes.

Dans chaque urne les tirages sont équiprobables et les urnes ont la même probabilité d'être choisies. On choisit au hasard l'une des urnes et l'on extrait une boule que l'on ne remet dans aucune urne ; si la boule est verte, on recommence le tirage dans la même urne ; si la boule est blanche, on recommence le tirage dans l'autre urne.

1. *Montrer que la probabilité de tirer deux boules blanches est $\frac{2}{9}$.*

2. *Soit X la variable aléatoire qui prend la valeur +1 si on obtient deux boules de la même couleur et -1 pour deux couleurs distinctes.*

Donner la loi de probabilité de X, son espérance mathématique E(X) et son écart-type $\sigma(X)$.

3. *On dit que l'on a obtenu un succès si les deux boules sont de même couleur. On répète l'expérience précédente 5 fois de suite.*

Y est la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de « succès » parmi ces 5 épreuves. Quelle est la probabilité p d'avoir 4 succès exactement ? Donner une valeur approchée de p à 10^{-1} prés par excès. Calculer $E(Y)$. et $\sigma(Y)$.

EXERCICE 3

Pour tout entier naturel $n > 1$ on pose : $u_n = 2 + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$

1. *Etablir que* $\left|u_n - 2\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}\right| \leq \frac{2}{2n+3}$

2. *soit* $J = \int_0^1 \varphi(x)dx \ avec \ \varphi(x) = \frac{1}{1+x^2}$. *On désigne par F la primitive de φ nulle en 0 et soit G la fonction numérique définie sur* $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\ par \ G(v) = F(tanv)$.

2.1. *Montre que G est dérivable et déterminer sa dérivée G'.Quelle est la valeur de G ?*

2.2. *En déduire la valeur de J puis montrer que la suite $u_n$est convergente et calculer sa limite.*

PROBLEME

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$; le point de coordonnées (x, y) est caractérisé par son affixe $z = x + iy$. Soit a un réel tel que $|a| > 1$.On désigne par A, B, I et J les points d'affixes respectives a, -a, 1 et -1. Soit F_a l'application de (P) privé de A dans (P) qui, au point M d'affixe z associe le point M'd'affixe, $Z = \frac{az-1}{a-z}$

Le problème est consacré à l'étude de l'application F_a et à la détermination d'ensembles images de configurations du plan par F_a.

1.1. *Montrer que F_a admet deux points invariants que l'on déterminera.*

1.2. *Montrer que F_a est est une bijection de (P) privé de A dans (P) privé de B et que la bijection réciproque notée F_a^{-1}est telle que $F_a^{-1} = F_{-a}$.*
Dans toute la suite du problème, on suppose que$a > 1$.

2. *Soit M un point de (P) d'affixe z non réelle et M' d'affixe Z, son image par* F_a.

2.1. *Vérifier que $(Z + a)(z - a) = 1 - a^2$*

2.2. *On considère le cercle (C) passant par M et I et dont le centre est situé sur l'axe des ordonnées ; (on remarquera que ce cercle contient aussi le point J). La droite (AM) coupe ce cercle en un point N d'affixe z' (qui peut être confondu avec M).*

Montrer que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AJ}.$

2.3. *Vérifier que deux vecteurs $\overrightarrow{U_1}$ et $\overrightarrow{U_2}$ d'affixes respectives z_1 et $z_2$sont colinéaires si et seulement si $\overrightarrow{U_1}.\overrightarrow{U_2} = z_1\overline{z_2}$. En déduire que $(z - a)(\overline{z'} - a) = a^2 - 1$ puis que M' est le symétrique de N par rapport à l'axe des ordonnées.*

3.1. *En utilisant les résultats de la question 2), donner une construction géométrique de M'.*

3.2. *Quelle est l'image par F_a d'un cercle contenant les points I et J ? (On pourra remarquer le centre d'un tel cercle appartient à l'axe des ordonnées).*

4.1. *On cherche l'image par F_a d'une droite passant par O.*

4.2. *Soit g la fonction définie pour tout réel x distinct a par : $g(x) = \frac{ax-1}{a-x}$. Etudier les variations de g (on rappelle que a>1)*

4.3. *En déduire :*

L'ensemble image par F_a du segment [JI]

L'ensemble image par F_a de l'axe des abscisses privé de A.

4.4. *On désigne par C le point de (P) d'affixe $-\frac{1}{a}$. Pour z distinct de 0 et de a, montrer que* $arg\left(\frac{Z+\frac{1}{a}}{Z+a}\right) = argz[2\pi]$

4.5. *En déduire que l'image par F_a d'une droite passant par O et distinct de l'axe des abscisses et un cercle passant par B et C, privé de B. Préciser le cas particulier de l'axe des ordonnées.*

5. *Soit r un réel strictement positif. On note (Γ_r) le cercle de centre O et de rayon r.*

5.1. *Montrer que si M est un point de (Γ_r), d'image M' par F_a, on a :* $\frac{M'C}{M'B} = \frac{r}{a}$.

5.2. *En déduire que pour r distinct de a, si M décrit (Γ_r), M'décrit un cercle que l'on précisera.*

5.3. *Déterminer l'image de cercle (Γ_a).*

UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
OFFICE DU BACCALAUREAT
Téléfax : (221) 824 65 81 – 824 95 - 92

Session normale 2003
Durée : 04 heures
Séries : S1 – S3
Coeff : 08

Epreuve du 1er groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des traces de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF. Circulaire n0 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

EXERCICE 1

Dans le plan orienté, (C) est le cercle trigonométrique. A tout point m de (C) on associe le point M symétrique du point A d'affixe 1 par rapport à la tangente en m au cercle (C). On cherche à construire l'ensemble (Γ) des points M lorsque m décrit (C).

1. *Montrer que l'axe des abscisses est un axe de symétrie de (Γ).*

2. *Pour un point m de (C), soit t une mesure de l'angle* $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{Om}}\right)$. *Montrer que les coordonnées x(t) et y(t) de M sont telles que :*

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos t - \cos 2t \\ y(t) = 2\sin t - \sin 2t \end{cases} \qquad (1)$$

3. *On doit donc construire la courbe paramétrée (Γ)*

dont (1) est système d'équations paramétriques le réel t parcourant $\mathbb{R}$.

3.1. *Etudier les variations de x(t) et de y(t), sur* $[0, \pi]$

3.2. *Montrer que pour tout* $t \neq 0$, *un vecteur directeur de la tangente en M à (Γ) est* $\vec{u}\left(\cos\frac{3t}{2}, \sin\frac{3t}{2}\right)$

3.3. *Soit Mun point de (Γ) de paramètre t; a(t) le coefficient directeur de la droite (AM). Déterminer la limite* a_0*de a(t) lorsque t tend vers 0. (On admettra que* a_0*est la pente de la tangente en A à (Γ))*

3.4. *Déterminer tous les points où la tangente est parallèle à un des axes du repère.*

4. *Tracer la courbe (Γ).*

EXERCICE 2

Soit ABCD un losange de centre Ω. Le cercle (Γ) de centre O circonscrit au triangle BCD recoupe (OC) en E. Soit G l'isobarycentre de chacun des systèmes $\{(\Omega, 4); (E, 1)\} et \{(J, 4); (A, 1)\}$.

1.1. *Soit f l'application du plan dans lui-même associant à tout point M le point M' défini par* $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME}.$

Déterminer la nature de f et préciser ses éléments caractéristiques. Quelles sont les images de E et de A par f ?

2. *Soit r la rotation de centre O et d'angle* $\theta = \left(\widehat{\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}}\right)$ *et s = rof.*

2.1. *Déterminer que s est une similitude directe plane. Préciser son angle et son rapport.*

2.2. *Construire H = s(G) et L = s(A.*

2.3. *Démontrer que le centre I de la similitude s appartient aux cercles circonscrits aux triangles OGH et OAL. Construire le point I.*

EXERCICE 3

Soit Δ une droite de l'espace, F un point n'appartenant pas à Δ, K le projeté orthogonal de F sur Δ et A un point de Δ tel que AK = 1.

On se propose d'étudier quelques propriétés de l'ensemble (Γ) des points M de l'espace tels :

$$\left\|\overrightarrow{MF}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{MK}\overrightarrow{MA}\right\|$$

1.1. *Montrer qu'un point de l'espace appartient à (Γ) si et seulement si*

$$\left\|\overrightarrow{MF}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{MK}\overrightarrow{MA}\right\|$$

1.2. *En déduire que M appartient à (Γ) si et seulement si* $\frac{MF}{d(M,\Delta)} = \frac{1}{2}$ *; où* $d(M, \Delta)$ *désigne la distance du point M à la droite Δ.*

2. *Déterminer l'ensemble des points du plan (P_1) de repère (K,$\overrightarrow{KA}$,$\overrightarrow{KF}$) tels que*

$$\|\overrightarrow{MF}\| = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{MK}\overrightarrow{MA}\|$$

3. *Soit (P_2) le plan passant par K et perpendiculaire à Δ.*

3.1. Montrer qu'un point M de *(Γ)* est un point de (P_2) si et seulement si :

$$\begin{cases} \overrightarrow{MK}.\overrightarrow{KA} = 0 \\ MF = \frac{1}{2}MK.\left|sin\left(\overrightarrow{MK},\overrightarrow{KA}\right)\right| \end{cases}$$

3.2. *En déduire que l'intersection de (Γ) et (P_2) est l'ensemble des points M de (P_2) tels que MK = 2 MF. Déterminer alors la nature de cette intersection.*

PROBLEME

1. *Soit φ la fonction numérique définie par :* $\begin{cases} \varphi(x) = exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) si x \neq 0 \\ \varphi(0) = 0 \end{cases}$

1.1. *Montrer que φ est une fonction continue et dérivable sur ℝ.*

1.2. *Etablir que pour tout réel x, on a : 2φ(x) = x^3φ'(x)* ***(1)***

1.3. *Etudier les variations de φ et tracer sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal*$(O, \vec{i}, \vec{j})$. *(Unité graphique 1 cm). On précisera les points d'inflexion éventuels.*

2. *Soit f la fonction définie sur ℝ par :* $f(x) = \frac{\int_0^x \varphi(t)dt}{\varphi(x)} six \neq 0\ etf(0) = 0$

Dans cette partie, on se propose d'étudier f et sa dérivée au voisinage de ℝ.*

2.1. *Etablir que f est impaire et dérivable sur ℝ **

2.2. *Montrer que pour tout réel strictement positif x on a :* $\int_0^x \varphi(t)dt \leq x\varphi(x)$.

2.3. *En déduire que f est continue en 0*

3. *Pour tout entier naturel n et tout réel x on pose* $J_n(k) = \int_0^x t^n \varphi(t)dt$ *pour non nul et* $J_0(k) = \int_0^x \varphi(t)dt$. *(On remarquera donc que* $f(x) = \frac{J_0(x)}{\varphi(x)}$ *pour tout x non nul.)*

3.1. *En utilisant la relation (1) et en intégrant par parties, montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *:* $2J_n(x) + (n+3)J_{n+2}(x) = x^{n+3}\varphi(x)$ (2)

3.2. *En déduire que pour tout entier naturel n et tout x* $x \in \mathbb{R}_+^*$ *on a :*

$$\begin{cases} J_n(x) \leq \dfrac{1}{2}x^{n+3}\varphi(x) \\ J_{n+2}(x) \leq \dfrac{1}{n+3}x^{n+3}\varphi(x) \end{cases}$$

3.3. *En déduire* $lim_{x\to 0+}\frac{f(x)}{x}$ *puis que f est dérivable à droite de 0.*

4.1. *En utilisant la relation (2), montrer que* $J_0(x) = \frac{15}{4}J_4(x) + \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^5\right)\varphi(x)$.

4.2. *En déduire que* $lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3} = \frac{1}{2}$.

4.3. *Montrer que pour tout x non nul :* $f'(x) = 1 - \frac{2}{x^3}f(x)$

En déduire que f ' est continue en 0.

UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

OFFICE DU BACCALAUREAT

Téléfax : (221) 824 65 81 – 824 95 - 92

Session normale 2002
Durée : 04 heures
Séries : S1 – S3
Coeff : 08

Epreuve du 1er groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées.
Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des traces de courbe sont interdites.
Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF. Circulaire n0 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

EXERCICE 1

On pose $Q(z) = z^3 - (i + 2icos\alpha)z^2 - (1 + cos\ \alpha)^2 z + i(1 + cos^2\alpha)$ *où z désigne un nombre complexe, i l'unité imaginaire pure,* α *un nombre réel tel que* $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. *Les trois racines de Q(z) sont désignées par a, b et c respectivement. On veut déterminer les racines Q(z) de deux façons différentes.*

Première façon :

1. *Sans calculer* $(a + b + c), (ab + ac + bc)\ et\ abc$.

2. *Sachant que la somme de deux de ces racines est égale à* $(2icos\alpha)$, *utiliser les résultats précédents pour résoudre l'équation Q(z)=0.*

Deuxième façon :

3. *montrer que Q(z) a une racine imaginaire pure que l'on déterminera.*

4. *En déduire les autres racines de Q(z).*

5. *a étant la racine de Q(z) dont la partie réelle est positive, donner son module en fonction de* α *et déterminer le cosinus et le sinus de son argument en fonction de* α.

6. *Le plan est rapporté à un repère orthonormé* $(O, \vec{u}, \vec{v})$; *soit la similitude directe de centre le point d'affixe c, c étant la racine imaginaire pure de Q(z) et qui transforme le point B d'affixe b en A d'affixe a. Donner l'écriture complexe de f. Déduire de cette écriture que f est une rotation de centre ω.*

Exercice 2

On dispose de deux dés tétraédriques notés A et B. Les quatre faces de chacun d'eux sont numérotées de 1 à 4. Lorsqu'on jette un dé, on note le numéro de la face cachée du dé (on suppose que le dé ne peut tomber que sur une face). Pour le dé A, les quatre numéros ont tous la même probabilité d'être cachée. Pour le dé B, la probabilité de noter le numér° i est proportionnelle à i.

1. *Calculer les probabilités P_1, P_2, P_3, P_4 pour les quatre faces du dé B.*

2. *On lance les deux dés. On note i le numéro caché du dé A et j le numér° caché du dé B. on suppose les lancers indépendants ; on note P(i,j) la probabilité de noter i pour le dé A et j pour le dé B.*

2.1. *Montrer que* $P(1{,}1) = P(2{,}1) = P(3{,}1) = \frac{1}{40}$

2.2. *Déterminer les probabilités P(i,j) pour tous les nombres entiers i et j compris entre 1 et 4.*

3.*On appelle Z la variable aléatoire définie par : Z(i,j) est le plus grand des nombres i et j.*

Exemple : Z(1,2) = 2, Z(2,1) = 2, Z(1,1) = 1.

3.1. *Quelle sont les valeurs prises par Z ?*

3.2. *Déterminer la loi de probabilité de Z et son espérance mathématique E(Z).*

EXERCICE 3

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. *On considère la courbe (H) d'équation $x^2 - 2y^2 = 1$.*

Justifier que (H) est une conique dont on donnera un foyer, la directrice associée et l'excentricité. Construire (H)

2. *on étudie en fonction du temps t le mouvement du point* $M\binom{x}{y}$ *du plan tel que* $\begin{cases} x = \frac{1}{cos2t} \text{ où } t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right[\\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} tan2t \end{cases}$. *Montrer que la trajectoire (Γ) de M est une partie de (H) que l'on précisera*

2.1. *Déterminer les coordonnées du vecteur vitesse* $\vec{V}$ *et en déduire la tangente à (Γ) au point d'abscisse 2.*

2.3. *Déterminer les coordonnées du vecteur accélérateur et vérifier que le mouvement est accéléré.*

PROBLEME

I. *Soit la fonction définie sur*$\mathbb{R}_+ - \{1\}$*par :* $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{lnx} \ si \ x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1. *Montrer que f est continue sur*$\mathbb{R}_+ - \{1\}$*. Etudier la dérivabilité en 1.*

2. *Etudier les variations de f.*

3. *Construire la courbe (C) représentant la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal. On fera figurer la demi-tangente en l'origine du repère.*

II. *Dans cette partie, on étudie la fonction H définie par une intégrale qu'on ne cherchera pas à calculer.*

On donne $H(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x} f(t)dt$ *pour tout x de*$\mathbb{R}_+ - \{1\}$*.*

1.1 *Justifier l'existence de H(x) pour tout x de* $\mathbb{R}_+ - \{1\}$*.*

1.2. *Etudier la signe de H(x) sur*$\mathbb{R}_+ - \{1\}$*.*

2. *Déterminer H'(x) pour tout réel x de* $\mathbb{R}_+ - \{1\}$

3. *Montrer qu'il existe un réel L tel que pour tout x de* $\left[0, \frac{1}{2}\right]$*, on ait* $|f(x)| \leq M$*. En déduire la limite de H à droite en zéro.*

4. *On donne* $K(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{dt}{tlnt}$ *Montrer que K est une fonction constante.*

4.1. *Montrer que la fonction* $g(x) = \frac{x-1}{xlnx}$ *telle que admet un prolongement* φ *par continuité en1. Montrer que et en déduire la limite en 1 de la fonction (H – K) puis de celle de H.*

4.2. *Montrer que pour tout* $x > 0 \ etx \neq 1$*on a :* $\frac{x-\sqrt{x}}{lnx} \leq H(x) \leq \frac{2(x-\sqrt{x})}{lnx}$

En déduire la limite en $+\infty$ *de H puis la limite en* $+\infty$ *de la fonction* $\left[x \mapsto \frac{H(x)}{x}\right]$

Interpréter graphiquement ces résultats.

4.3. *Dresser le tableau de variations de H.*

UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

OFFICE DU BACCALAUREAT

Téléfax : (221) 824 65 81 – 824 95 92

Session normale 2001
Durée : 04 heures
Séries : S1 – S3
Coeff : 08

Epreuve du 1er groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées.
Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des traces de courbe sont interdites.
Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF. Circulaire n0 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

EXERCICE 1

Dans l'espace rapporté au repère orthonormal $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ *on donne les points* $C\left(-\frac{1}{2}, 0{,}0\right)$; $D\left(\frac{1}{2}, 0{,}0\right)$; $E(0{,}1{,}0)$.

1.1. *Déterminer l'ensemble (T) des points M(x, y, z) tels que :*

$$\|\overrightarrow{ME}\| = \|\overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MD}\|$$

1.2. *Déterminer l'intersection (∆) de (T) avec le plan* $(O, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$.

2.1. *Montrer que les points de (T) sont à égale distance de E et de la droite (CD).*

2.2. *Montrer que l'intersection de (T) et du plan d'équation : z = 0 est la parabole de foyer E et de directrice (CD).*

EXERCICE 2

Dans un plan orienté, on considère un carré direct (MNPQ) de centre O.

Soit un point de [NP] distinct de N.

On note J le point d'intersection de (MN) et de (PQ). La perpendiculaire (∆) à (MI) passant par M coupe (NP) en K et (PQ) en L.

1. *Faire une figure avec NP = 5 cm ; NI = 2 cm (on placera (NP) verticalement c'est-à-dire parallèlement au grand coté de la feuille).*

2. *Soit R de tour direct de centre M.*

2.1. *Préciser l'image de la droite (NP) par R*

2.2. *Déterminer les images de K et I par R.*

2.3. *Quelle est la nature des triangle KMJ et IML.*

3. *On note E le milieu du segment [IL], F celui de [JK] soit s la similitude direct de centre M d'angle* $\frac{\pi}{4}$ *et de rapport* $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

3.1. *Préciser les images de K, et de I par s.*

3.2. *Quel est le lieu géométrique du point E quand I décrit [NP] privé de N.*

3.3. *Déduire de ce précède que les points O, N, E et Q sont alignés.*

EXERCICE 3

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ *direct.*

1. *On considère les points* $A\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ *et* $I\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$. *Soit (E) l'ellipse de centre I dont A est un sommet de 0 un foyer.*

1.1. *Déterminer les trois autres sommets de (E)*

1.2. *Calculer l'excentricité de (E) et donne une équation de sa directrice associée au foyer O dans* $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1.3. *Donner une équation de (E) dans le repère* $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1.4. *Tracer (E) ; préciser les points d'intersections de (E) et de la droite* $(O, \vec{v})$.

2. *Soit l'équation d'inconnue Z :* $Z^2 - 2(4 + 5\cos\theta)Z + (4\cos\theta + 5)^2 = 0$, θ *est un paramètre réel.*

2.1. *Résoudre cette équation pour* $\theta \in [0, \pi]$.

2.2. *Lorsque* $\theta \in [0, \pi]$, *on note* Z_1 *la solution dont la partie imaginaire est strictement positive, et* Z_2 *l'autre solution.*

Soit M_1 *et* M_2 *les points d'affixes respectives* Z_1 *et* Z_2.

Déterminer les coordonnées de M_1 *en fonction de* θ *dans un repère* $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

En déduire l'ensemble des points M_1 *puis celui des points* M_2 *lorsque* θ *varie dans* $[0, \pi]$.

PROBLEME

Partie I

On considère pour tout entier naturel n non nul la fonction $g_n$définie sur $]0,+\infty[$par :$g_n(x) = \frac{lnx}{x^n}$.

1. Déterminer les limites de $g_n$aux bornes de l'intervalle $g_n(x) = \frac{lnx}{x^n}$

Etudier les variations de g_n.

2. Construire la courbe C_1, représentative de la fonction g_1 dans le plan rapporté à un repère orthonormal, on précisera ses asymptotes.

3. Pour tout réel $\lambda \geq 1$, on pose : $I_n(\lambda) = \int_1^\lambda g_x(t)dt$

3.1. Calculer $I_1(\lambda)$

3.2. Calculer $I_n(\lambda)$en fonction de n et de λ pour $n \geq 2$

Déduire de ce résultat la valeur de : $A = \int_2^\lambda g_2(t)dt$

3.3. Soit n un entier naturel non nul fixé.

3.4. Calculer $lim_{\lambda \to +\infty} I_n(\lambda)$.

Partie II

On considère la fonction telle que : $g_2(x) = \frac{lnx}{x^2}$.

1. Montrer que pour tout entier naturel p, $p \geq 2$:$g_2(p+1) \leq \int_p^{p+1} g_2(t)dt \leq g_2(p)$

2. On considère la suite $(S_k)_{k\geq2}$ définie par son terme général : $S_k = \sum_{i=2}^{k} \frac{lni}{i^2}$.

2.1. Montrer que la suite $(S_k)_{k\geq2}$est croissante.

2.2. Montrer que $S_{2k}(p+1) \leq \int_p^{p+1} g_2(t)dt \leq g_2(p)$puis $S_k - \frac{ln2}{2^2} \leq \int_2^k g_2(t)dt \leq S_k - \frac{lnk}{k^2}$.

En déduire un encadrement de S_k.

2.3. *En utilisant la valeur de A, montrer que la suite S_k est majorée.*

2.4. *Montrer que la suite (S_k) est convergente et que sa limite vérifie :* $\frac{1}{2} + \frac{ln2}{2} \leq \ell \leq \frac{1}{2} + \frac{3ln2}{4}$

Partie III

On considère la courbe (T) définie paramétriquement par :
$$\begin{cases} x(t) = g_1(t) \\ y(t) = g_2(t), t est un réel \in [1; 10] \end{cases}$$

1. *Représenter dans un même tableau les variations des deux fonctions x et y qui à t associent respectivement x(t) et y(t).*

2. *Représentez la courbe (G) dans un repère orthonormal* $(O, \vec{u}, \vec{v})$ *unité 2cm.*

Préciser les points de (G) en lesquels les tangentes sont parallèles à l'un ou l'autre des axes de coordonnées.

UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
OFFICE DU BACCALAUREAT
Téléfax : (221) 824 65 81 – 824 95 - 92

Session normale 2000
Durée : 04 heures
Séries : S1 – S3
Coeff : 08

Epreuve du 1er groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées.
Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des traces de courbe sont interdites.
Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF. Circulaire n0 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

EXERCICE 1 :

1. *Déterminer l'ensemble des solutions définies sur IR de l'équation différentielle :* $y'' + y = 0 \quad (1)$

2. *Etant donnée une fonction numérique de variable réelle, g deux fois dérivable sur* $\mathbb{R}^*$*; on définit la fonction f de* $\mathbb{R}^*$ *vers IR par :* $\forall\ x \in \mathbb{R}^*$

$f(x) = xg\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exprimer $f''(x)$ *à l'aide de* $g'\left(\frac{1}{x}\right)$ *et de x .*

3.On considère l'équation différentielle $y'' = \frac{1}{x^2}y \quad (2)$

3.1. *Démontrer que la fonction g deux fois dérivable sur* $\forall\ x \in \mathbb{R}^*$ *est solution de (2) si et seulement si la fonction f définie par :*$\forall\ x \in \mathbb{R}^*$*;* $f(x) = xg\left(\frac{1}{x}\right)$ *est solution de (1).*

3.2. *En déduire l'ensemble des solutions de (2) définies sur chacun des intervalles* $]-\infty; 0[\ et\ ]0; +\infty[$.

3.3. *Soit g une solution de l'équation (2) définie sur* $]0; +\infty[$. *Déduire de ce qui précède une primitive de la fonction :* $x \mapsto \frac{1}{x^2}g(x)$.

EXERCICE 2 :

Soit u la fonction définie par $u(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$

1. *Prouver que u est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et calculer u'(x).*

2. *On pose pour tout réel x de* $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$: $f(x) = u(tanx)$

2.1. *montrer que f est dérivable et calculer* $f'(x)$ *pour* $\in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

2.2. *En déduire que f(x) = x pour tout x de* $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

2.3. *Calculer* $I_0 = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$

3. *Soit la suite* I_n *définie par* $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx$

3.1. *Montrer que* $I_{2p} + I_{2p+2} = \frac{1}{2p+1}$. *Calculer alors* I_2, I_4, I_6.

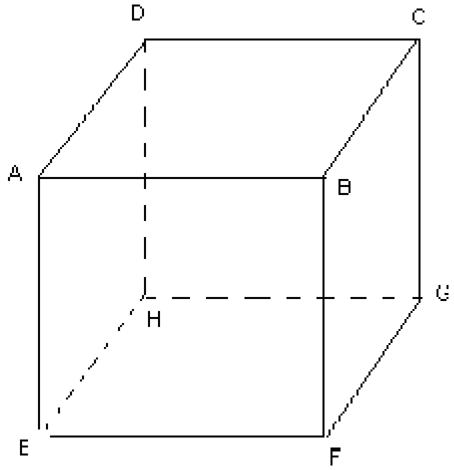
3.2. *Montrer que pour tout entier p :* $0 \leq I_{2p} \leq \frac{1}{2p+1}$

En déduire la limite de I_{2p} *lorsque p tend vers* $+\infty$.

EXERCICE 3

ABCDEFGH *est le cube ci-dessous représenté*

O *est son centre I est le milieu J le centre de gravité de la face* DCGH.



1.1. *Montrer que* (ABG) *est plan médiateur des segments.*

1.2. *On note les réflexions dont les plans respectifs sont (ABG), (BCH) et (IOJ). Vérifier que ces réflexions laissent invariant le cube ABCDEFGH.*

2. *on considère l'application* f *telle que :*

2.1. *Prouver que* f *est une rotation d'axe(BH).*

2.2. *En orientant le plan (ACF) par déterminer la restriction de* f *à ce plan.*

En déduire l'angle de f.

3. *Soit r le demi-tour d'axe(OI) et g l'application* rof.

3.1. *En écrivant r comme la composée de 2 réflexions judicieusement choisies déterminer la nature de g.*

3.2. *Déterminer les éléments caractéristiques de g.*

PROBLEME

Le plan affine (P) est muni d'un repère orthonormal direct ; on note$(O, \vec{u}, \vec{v})$

L'ensemble des nombres complexes non nuls ; (P) le plan (P) privé de 0.*

Soit l'application f de $\mathbb{C}$ *dans* $\mathbb{C}$ *définie par* $f(z) = \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)$

On note F l'application de P dans P qui à tout point m de P* d'affixe z fait correspondre le point M d'affixe : Z = f(z).*

1.1. *Déterminer l'ensemble des points invariants par F .*

1.2. *Soit M(Z) un point de P* non invariant par F. Montrer que M est l'image par F de deux points de P*.*

Vérifier que M est le milieu de$[m_1, m_2]$.

1.3. *On note A (1+i) , placer A et* $B\left(\frac{-1}{1+i}\right)$, *en déduire la construction de l'image par F .*

2. *Dans cette question on cherche l'image de l'axe privé de 0.Soit g la fonction numérique définie par* $g(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$

2.1. *Etudier les variations de g.*

2.2. *En déduire l'image par F de l'ensemble des points de l'axe réel de P*.*

3. *Recherche de l'image du cercle de centre 0 de rayon 1.*

3.1. *Soit z un nombre complexe non nul distinct de i et –i d'image Z par f. Exprimer* $\frac{z+i}{z-i}$ *en fonction de* $\frac{z-i}{z+i}$*. En déduire une relation entre* $\left(\overrightarrow{mU},\overrightarrow{mU'}\right)$ *et* $\left(\overrightarrow{MU},\overrightarrow{MU'}\right)$*, où U et U' sont respectivement U(i) et U'(-i)*

3.2. *Soit (G) le cercle de diamètre* $[UU']$.

Montrer que l'image M de tout point m de (G) est un point de $[UU']$*.Soit M un point de* $[UU']$*, vérifier que M est l' image de deux points de (G) .Quelle est donc l'image par f de (G) ?*

4. *Recherche de l'image d'un cercle (G') de centre o et rayon* $r \neq 1$*.Soit m un point de (G') d'affixe z.*

4.1. *Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z en fonction du module r et d'un argument de z.*

4.2. *En déduire que m est un point d'une conique E, dont on donnera la nature.*

4.3*. Donner les éléments géométriques de* E_1 *et construire* E_2*.*

5. *Image de* $D^* = D - \{O\}$ où $D : y = x$.

5.1. *Ecrire une équation paramétrique de D*.En déduire les coordonnées X et Y du point M image de m par F.*

5.2. *Montrer que M appartient à une hyperbole dont on précisera une équation cartésienne.*

Deuxième partie

Corrigés

Né en 1991, Thierno Korka DIALLO est élève ingénieur originaire de la région de Ziguinchor où il fit ses études moyenne et secondaire. Après avoir décroché son Bac en série S1, il est admis à l'Ecole Polytechnique de Thiès. Soucieux de la réussite des élèves, il s'est engagé dans l'élaboration de documents pouvant leur être utiles. Ainsi, son objectif dans cet ouvrage est de briser le mythe dont on entoure à tort les Mathématiques. Il garde encore dans son agenda de nombreux recueils qu'il espère publier dans les années à venir.
Pour plus d'informations, Visitez : **http://document1991.skyrock.com**

La sortie de l'Afrique de sa marginalité sur la scène scientifique mondiale passe d'abord par l'accès à la culture scientifique qui n'a pas nécessairement pour but de former de futurs scientifiques mais d'aider le plus grand nombre à comprendre le monde et permettre à tous de porter un regard critique sur les enjeux des avancées des sciences (risques, utilisation).
A l'école et plus particulièrement au lycée, l'enseignement scientifique est presque essentiellement une acquisition de savoirs. Pour motiver les élèves à l'apprentissage de ces savoirs souvent complexes, peut-être faudrait- il commencer par former les élèves à une démarche scientifique en les mettant dans une véritable situation de recherche ? Entrer dans une démarche de recherche, c'est apprendre la rigueur, se poser des questions, avoir un regard critique à la fois sur les contenus et les méthodes.
Parallèlement, il faudrait former les enseignants, souvent déstabilisés, quand il s'agit d'aider les élèves en situation de recherche. Il n'est pas nécessaire de connaître la réponse à toutes les questions des élèves, mais il s'agit bien de les aider à trouver eux mêmes les réponses.
L'enseignement scientifique attire et fait peur. La démarche scientifique permet de développer, entre autres, l'esprit critique, la créativité, une attitude citoyenne… En ce sens l'apprentissage de cette démarche n'est-elle pas un moyen de contribuer à la réussite du plus grand nombre.
Le savoir est dans la nature, et pour le trouver il faut se détacher des mœurs de la société, c'est comme le disait Rémy de Gourmont "Savoir ce que tout le monde sait, c'est ne rien savoir. Le savoir commence là où commence ce que le monde ignore"; bref, il faut être anticonformiste pour être un bon scientifique.

Thierno Korka DIALLO

Du même auteur, découvrez (pour les élèves de S1) ou visiter le site :
http://document1991.skyrock.com/profil/photos/10