PREPA BAC: MATHEMATIQUES

HELOU Komlan Mawulé

5 avril 2023

Table des matières

Première partie

RECCUEILS D'EXERCICES

Chapitre 1

Nombres complexes et transformations du plan

EXERCICE 1

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, le polynôme P définie par : $P(z) = z^3 + (-7+2i)z^2 + (15-4i)z - 25 + 10i$.

1. (a) Vérifier que : $P(5-2i) = 0$
   (b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
2. Soit S la similitude plane directe de centre I d'affixe $z_1 = -3-2i$ et qui transforme le point A d'affixe $z_A = 1+2i$ en B d'affixe $z_B = 5-2i$.
   Déterminer f, l'application complexe associée à S
   ii. Déterminer les éléments caractéristiques de S.

EXERCICE 2

On considère l'équation : $(E) : z^3 - 9z^2 + (22+12i)z - 12 - 36i = 0$

1. Démontrer que l'équation (E) admet une solution réelle z_1 et une solution imaginaire pure z_2.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)
3. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(o, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 3$, $z_B = 2i$ et $z_C = 6-2i$.
   (a) Placer les points A, B et C dan le plan complexe.
   (b) Montrer que : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est réel. Que peut-on en déduire ?
   (c) Soit S la similitude directe plane d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$ transformant A en B.
   Donner l'écriture complexe de S et préciser son centre Ω

EXERCICE 3

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On considère l'application f définie sur $\mathbb{C}^*$ par : $f(z) = \frac{1}{3}(z + \frac{1}{Z})$.

1. On désigne par K le point d'affixe $f(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$. Déterminer les coordonnées de K.
2. Soit α un nombre réel. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : f(z) = \frac{2}{3}\cos\alpha$.
3. (a) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(E') : z^4 - 2(\cos\alpha)z^2 + 1 = 0$ (On donnera les solutions sous forme exponentielle)
   (b) Vérifier que les solutions de (E') sont deux à deux conjugués.
   (c) Décomposer le polynôme à variable réelle x définie par : $P(x) = x^4 - 2(\cos\alpha)x^2 + 1$ en un produit de deux polynômes de second degré à coefficients réels.
4. On considère l'application$h$ du plan complexe dans lui-même qui a tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe telle z' telle que : $2(z - \frac{1}{3}) = (1+i)(z' - \frac{1}{3})$.
   (a) Démontrer que h est une similitude plane directe dont on précisera les éléments caractéristiques.
   (b) Démontrer que h est une composée d'une rotation et d'une homothétie dont on donnera les éléments caractéristiques.

EXERCICE 4

1. (a) Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe $(1+i\sqrt{3})^2$.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2+2z+19-18i\sqrt{3}=0$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ le système suivant : $\left\{\begin{array}{l} z_1+z_2=-2 \\ z_1^2-z_2^2=-4+i\frac{4\sqrt{3}}{3} \end{array}\right.$
3. Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal $(O,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$, on désigne par A, B, C et D les points d'affixes respectives a, b, c et d telle que $a=2+3i\sqrt{3}$; $b=\frac{1}{9}(\overline{a}-2)$; $c=-a-2$ et $d=a-b-c$ (où $\overline{a}$ est le conjugué de a).
   (a) Déterminer les nombres complexes b, c et d puis placer les points A, B, C et D dans le plan complexe. (Unité graphique : 2cm et $\sqrt{3}\cong 1,7$)
   (b) Comparer $a+b$ et $b+d$. En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.
   (c) Calculer et interpréter géométriquement un argument du nombre complexe $Z=\frac{c-a}{d-b}$. Préciser la nature exacte de $ABCD$.

EXERCICE 5

1. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : $z_A=-i$, $z_B=1+i$, $z_C=-1+2i$ et $z_D=-2$.
   (a) Placer sur une figure les points A, B, C et D.
   (b) i. Interpréter géométriquement le module et l'argument du nombre complexe $z=\frac{z_A-z_C}{z_B-z_D}$.
       ii. Calculer le nombre complexe z.
   (c) Déterminer le module et l'argument de z puis en déduire la nature du quadrilatère $ABCD$
2. Soit λ un nombre complexe de module 1 différent de 1. On définit, pour tout entier naturel n la suite (z_n) de nombres complexes par : $\left\{\begin{array}{l} z_0=0 \\ z_{n+1}=\lambda z_n-i \end{array}\right.$ On note M_n le point d'affixe z_n.
   (a) i. Calculer z_1, z_2 et z_3
       ii. Démontrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad z_n=-(\lambda^{n-1}+\lambda^{n-2}+\cdots+\lambda+1)i$
       iii. En déduire que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad z_n=\frac{1-\lambda^n}{\lambda-1}i$
   (b) On suppose que pour tout entier naturel k tel que $\lambda^k=1$. Démontrer que pour tout entier naturel, $z_{n+k}=z_k$.
   (c) Etude du cas $\lambda=i$
       i. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N},\forall k\in\mathbb{N}, z_k=z_{n+k}$.
       ii. Montrer que M_{n+1} est l'image de M_n par la rotation φ dont on précisera le centre et l'angle.
       iii. Déterminer les images de A, B, C et D par φ et placer dans le repère précédent ces images.
       iv. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}, z_{4n+1}=i$

Chapitre 2

Dénombrement et probabilité

EXERCICE 1

Une société "Gnamienlait" de Gnamien produit des sachets de lait caillé. Soit X la variable aléatoire qui associe chaque sachet de lait caillé produit, sa masses en gramme (g). La loi de probabilité de X est définie par le tableau ci-dessous :

x(g)	220	230	240	250	260	270	280
p_i	0,08	0,10	a	b	0,16	0,15	0,04

a et b sont deux nombres réels. w_i représente la masse du sachet de lait caillé ; p_i la probabilité qu'un sachet de lait ait la masse$x$.

1. (a) Calculer $\mathbb{E}(X)$ l'espérance mathématique de X en fonction de a et b
   (b) Sachant que $\mathbb{E}(X) = 250$, justifie que $a = 0,14$ et $b = 0,33$.
   Dans la suite de l'exercice, on considère les valeurs de a et b données ci-dessus.
2. Gnamien prend au hasard un sachet de lait caillé de sa société. Calculer la probabilité pour que la masse de ce sachet de lait caillé soit au moins 250
   Tiéplé, la fille de Gnamien, prend au hasard de façon indépendante cins sachets de lait caillé.
   Calculer la probabilité qu'elle ait choisi exactement trois sachets de lait caillé de 220g.
   On prendra l'arrondi d'ordre 3 du résultat.
3. Cette machine est réglée pour éliminer en principe les sachets de lait de masse inférieur à 250g.
   - Si un sachet de lait caillé à 240g, la probabilité qu'il soit éliminé est de 0,7.
   - Si un sachet de lait caillé à 230g, la probabilité qu'il soit éliminé est de 0,8.
   - Si un sachet de lait caillé à 220g, il est systématiquement éliminé.
   - Si un sachet de lait caillé à une masse supérieur ou égale à 250g, il est systématiquement accepté.

   (a) Justifier que la probabilité qu'un sachet de lait de 240g soit éliminé est de 0,098.
   (b) Calculer la probabilité pour qu'un sachet de lait caillé de cette société soit éliminé.

EXERCICE 2

On teste un médicament sur un ensemble d'individus ayant un taux de glycémie anormalement élevé. Pour cela, 60% des individus prennent le médicament, les autres recevant une substance neutre et l'on étudie à l'aide d'un test la baisse du taux de glycémie.
Chez les individus ayant pris le médicament, on constate une baisse de taux avec une probabilité de 0,8. On ne constate aucune baisse de ce taux pour 90% des personnes ayant reçu la substance neutre.

1. Calculer la probabilité d'avoir une baisse de taux de glycémie sachant qu'on a pris le médicament.
2. Démontrer que la probabilité d'avoir une baisse de taux de glycémie est 0,52.
3. On soumet au test un individu pris au hasard. Quelle est la probabilité qu'il ait pris le médicament sachant que l'on constate une baisse de taux de glycémie ?
4. On contrôle 5 individus au hasard.
   (a) Quelle est la probabilité d'avoir exactement deux personnes dont le taux de glycémie a baissé ?
   (b) Quelle est la probabilité d'avoir au moins un individu dont le taux de glycémie a baissé ?
5. On contrôle n individus pris au hasard. (n est un nombre entier naturel non nul)
   Déterminer n pour que la probabilité d'avoir au moins un individus dont le taux de glycémie a baissé soit supérieur à 0,98.

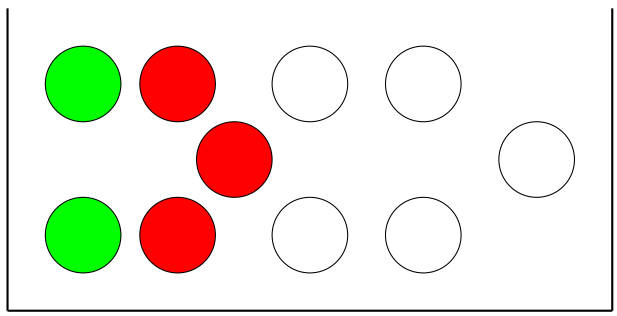
EXERCICE 3

Une urne contient une boule rouge, deux boules blanches et trois boules noires indiscernables au toucher.
On tire au hasard successivement et avec remise trois boules de l'urne.
Soit les événement suivantes :
A : "les trois boules tirées sont de même couleur"
B : "Il n'y a aucune boule blanche parmi les boules tirées.
C : "Il y a exactement deux boules blanches parmi les boules tirées."

1. Monter que $p(A) = \frac{1}{6}$ et $p(B)\frac{8}{27}$
2. Calculer $p(C)$

EXERCICE 4

Une urne contient huit boules indiscernables au toucher : cinq boules blanches, trois boules rouges et deux boules vertes (Voir la figure ci-dessous)



On tire au hasard et simultanément quatre boules de l'urne.

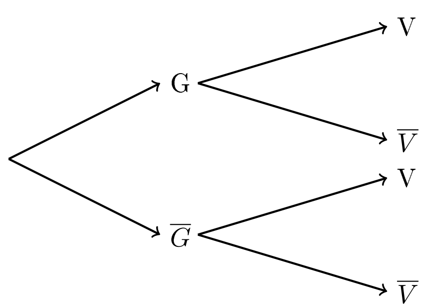
1. Soit A l'événement "Parmi les quatre boules tirées il y a une seule boule verte" et B l'événement "Parmi les quatre boules tirées, il y a exactement trois boules de même couleur". Montrons que $p(A) = \frac{8}{15}$ et $p(B) = \frac{19}{70}$
2. Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules vertes tirées.
   (a) Montrer que $p(X = 2) = \frac{2}{15}$
   (b) Déterminer la loi de probabilité de la variable X et montrer que l'espérance mathématique est égale à $\frac{4}{5}$.

EXERCICE 5

Une étude statistique montre que dans une ville donnée ; 15% des individus âgés de moins de 60 ans et 80% des individus âgés de plus 60 ans ont été vaccinés contre la grippe.
Les individus âgés de plus de 60 ans représentent 30% de la population. On choisit au hasard, une personne de cette population et on considère les événements suivants :

- G : »la personne est âgés de plus de 60 ans« .
- V : »La personne est vaccinée« .

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous :



2. Montrer que la probabilité pour qu'une personne soit vacciné est égale à 0,345.
3. La personne choisie étant vaccinée, quelle est la probabilité pour qu'elle soit âgée de moins de 60 ans.
4. On choisit au hasard 10 personnes âgées de plus de 60ans. Calculer la probabilité pour que deux exactement d'entre elles soient vaccinées.
5. On choisit, au hasard, n personnes âgées de plus de 60 ans.
   (a) Quelle est la probabilité pour qu'aucune d'entre elles ne soit vaccinée ?
   (b) Déterminer la probabilité p_n pour que l'une au moins d'entre elle soit vaccinée.
   (c) Déterminer la plus petite valeur de n pour que $p_n \geq 0,9$

Chapitre 3

Suite numérique

EXERCICE 1

Soit la suite (U_n) définie pour tout entier n appartenant à $\mathbb{N}^*$ par : $U_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$.

1. (a) Démontrer que pour tout n appartenant à $\mathbb{N}^*$: $U_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$.
   (b) En déduire que pour tout n appartenant à $\mathbb{N}^*$, on a : $0 \leq U_n \leq 1$.
   (c) Etudier le sens de variation de la suite (U_n)
2. (a) Soit (W_n) la suite définie pour tout n appartenant à $\mathbb{N}^*$ par : $W_n = U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n$.
   Démontrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $W_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$.
   (b) Déterminer la limite de la suite (W_n).
3. On pose : $V_n = \ln(U_n)$.
   (a) Justifier que la suite (V_n) est définie pour tout entier naturel non nul.
   (b) Démontrer que la suite (V_n) est croissante.
   (c) Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\ln(\frac{3}{4}) \leq V_n \leq 0$
   (d) En déduire que la suite (V_n) est convergente, puis calculer sa limite.
4. On pose : $X_n = V_1 + V_2 + \cdots + V_n$
   (a) Exprimer X_n en fonction de W_n
   (b) Déterminer la limite de X_n

EXERCICE 2

1. Pour chaque entier naturel k, on pose $U_k = \int_0^1 \frac{x^k}{4x^2+2x+1} dx$
   (a) Montrer que l'on a ainsi définie une suite (U_k) dont chaque terme est positif ou nul.
   (b) Etudier le sens de variation de la suite (U_k). En déduire qu'elle converge.
   (c) Montrer que $\frac{1}{4x^2+2x+1} \leq \frac{4}{3}$ pour $x \in [0;1]$.En déduire la limite de la suite (U_k).
2. (a) Justifier, pour tout entier naturel k, l'existence de l'intégrale $\int_0^1 \frac{x^{2k+1}}{x^2+1} dx$. On pose alors $V_n = 2\int_0^1 \frac{x^{2k+1}}{x^2+1} dx$. *On ne cherchera pas à calculer* V_k
   (b) démontrer que, pour tout entier naturel k, on a : $0 \leq V_k$ et $V_{k+1} + V_k = \frac{1}{k+1}$.
   (c) Calculer V_0, En déduire la valeur de V_1, puis celle de v_2.
   (d) Etudier les variations de la suite $(V_k)_{k \in \mathbb{N}}$.
   (e) Démontrer que pour tout entier naturel k, on a : $0 < V_k < \frac{1}{k+1}$
   (f) En déduire que $(V_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est convergente et préciser sa limite.

EXERCICE 3

On considère les suites$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 4$ et $v_0 = 9$ et pour nombre tout entier naturel n : $u_{n+1=\frac{2u_nv_n}{u_n+v_n}}$ et $v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n)$.

1. Démontrer par récurrence que pour tout nombre entier naturel n, $u_n > 0$ et $v_n > 0$
2. (a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{(v_n-u_n)^2}{2(u_n+v_n)}$
   (b) Déduis-en que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$et que$v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$
   (c) Déduis-en par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n - u_n \leq \frac{5}{2^n}$
3. (a) Démontre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   (b) Déduis-en que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent ?
   (c) Démontre que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont la même limite l.
4. (a) Démontre que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \times v_{n+1} = u_n \times v_n$.
   (b) Déduis-en la valeur exacte de l.

EXERCICE 4

1. (a) Etudier les variations de la fonction f définie sur $]-1;+\infty[$ par : $f(x) = 2\ln(x+1)$. Tracer sa courbe représentative dans le repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, unité $2cm$
   (b) Démontrer que sur $[2;+\infty[$, la fonction l définie par $l(x) = f(x) - x$ est bijective et que l'équation $l(x) = 0$ admet une unique solution λ.
2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} U_0 = 5 \\ U_{n+1} = 2\ln(1 + U_n) \end{cases}$
   (a) Sans faire de calcul, représenter les quatre premiers termes de la suite sur le graphique.
   (b) Démontrer par récurrence que pour tout n, $U_n \geq 2$
   (c) Montrer que, pour tout x de l'intervalle $[2;+\infty[$, $|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$
   (d) En déduire que pour tout n, on a : $|U_{n+1} - \lambda| \leq \frac{2}{3}|U_n - \lambda|$, que $|U_{n+1} - \lambda| \leq 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$ et que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers λ.
   (e) Déterminer le plus petit entier naturel p tel que $|U_p - \lambda| \leq 10^{-2}$. Que représente U_p pour λ ?

EXERCICE 5

Soit f la fonction définie sur $[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}]$ par : $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$

1. Calculer $f'(x)$ et étudier le signe de $f'(x)$ sur $[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}]$.
2. On pose pour tout entier naturel non nul : $I_n = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\cos x)^n}{\sin^2 x} dx$ et $I_0 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^2 x} dx$.
   (a) Calculer I_0 et I_1
   (b) Montrer que pour tout entier naturel non nul et pour tout réel x de l'intervalle $[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}]$ on a : $0 \leq \frac{\cos^n x}{\sin^2 x} \leq \frac{3}{4}\frac{1}{2^n}$
   (c) Montrer que : $0 \leq I_n \leq \frac{n}{9.2^{n-1}}$
   (d) En déduire la limite de I_n.

Chapitre 4

Statistiques