

Ryder QFT ゼミ資料

Max Miyazaki

April 13, 2025

5 章 経路積分

5.5 経路積分のさらなる特性

我々は、 q_i, t_i から q_f, t_f への遷移振幅が次式で与えられることを示した。

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = N \int \mathcal{D}q \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} L(q, \dot{q}) dt \right]$$

ここで $H = (p^2/2m) + V(q)$ は現在の目的に対して十分に一般的であり、境界条件は次のように与えられる。

$$q(t_f) = q_f, \quad q(t_i) = q_i.$$

この種の境界条件は、古典的な粒子の運動では適切かもしれないが、それは場の理論では用いられない。その類似物は、例えば $\psi(t_i) = \psi_i, \psi(t_f) = \psi_f$ である。しかし実際に起こるのは、粒子が生成され（例えば衝突によって）、それらが相互作用し、観測によって破壊される（すなわち、検出される）ことである。例えば、 πN 散乱の微分断面積 $d\sigma/d\Omega$ を測定するとき、パイ中間子は NN 衝突によって生成され、それが検出されたときに破壊される。

生成の作用は源として表現され、破壊の作用はシンクとして表現される。これはある意味で、源とは言え、シンクである。問題の境界条件は図 5.6 に示されるように表現される。時間 $t = -\infty$ で真空へと進化し、時間 $t = +\infty$ で再び真空へ進化する、つまり生成、相互作用、破壊のプロセスを通じて、源の作用によってである。我々は、この源の存在下での真空から真空への遷移振幅を知りたい。

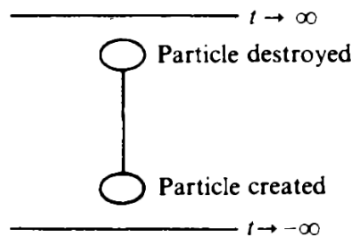


Fig. 5.6. Representation of the vacuum–vacuum transition amplitude in the presence of a source.

この表現は、シュウィンガー (1969 年) に由来し、源 $J(t)$ はラグランジアンを次のように修正することによって表される。

$$L \rightarrow L + \hbar J(t)q(t). \quad (5.60)$$

もし $|0, t\rangle$ が源の存在下での基底状態（運動する基準系）で、そのときシステムが式 (5.60) で記述されるとき、遷移振幅は

$$Z[J] \propto \langle 0, \infty | 0, -\infty \rangle^J \quad (5.61)$$

ここで比例定数は省略されている。源 $J(t)$ は電磁場の「源」として作用する電流と類似した役割を果たす。荷電スカラー場 ϕ は例えばラグランジアン (3.65) を持ち、それが電磁場 A^μ と相互作用する (A^μ はラグランジアン (3.73) で与えられ、その形は $J_\mu A^\mu$)。このアイデアはシュウィンガーによって一般化され、任意の場が J によって「生成」される。 $Z[J]$ は J の汎関数であり、我々は現在その表式を導き出す、すなわち、基底状態への振幅は比例定数を無視して次のようになる。本質的な特徴は基底状態の存在であり、それがどのように到達するかを説明する。

この状況は、図 5.7 に示される時間軸の回転により説明される。源 $J(t)$ は、 t と t' ($t' < t$) の間でゼロではなく、したがって、遷移振幅は次のようになる。

$$\langle QT' | QT \rangle^J = N \int \mathcal{D}q \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_T^T d\tau (L + \hbar Jq) \right]. \quad (5.62)$$

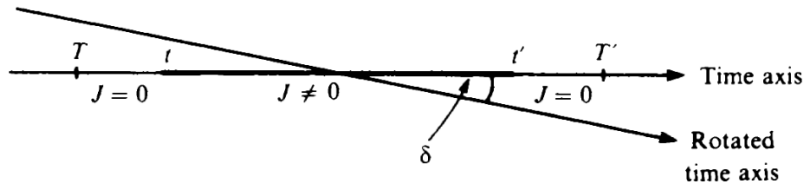


Fig. 5.7. Rotation of the time axis in calculating the vacuum–vacuum transition amplitude.

我々は

$$\langle Q'T' | QT \rangle^J = \int dq' dq \langle Q'T' | q't' \rangle \langle q't' | qt \rangle \langle qt | QT \rangle. \quad (5.63)$$

式 (5.3) を参照すると、次のようになる。

$$\langle Q'T' | q't' \rangle = \langle Q' | \exp \left(-\frac{i}{\hbar} HT' \right) \exp \left(\frac{i}{\hbar} Ht' \right) | q' \rangle = \sum_n \phi_n(q) \phi_n^*(Q) \exp \left[\frac{i}{\hbar} E_n(t' - T') \right] \quad (5.64)$$

ここで、 $\phi_n(q)$ はエネルギー固有状態の完全な集合である。同様に、

$$\langle qt | QT \rangle = \sum_n \phi_n(q) \phi_n^*(Q) \exp \left(-\frac{i}{\hbar} E_n(t - T') \right). \quad (5.65)$$

この文章結構かけてるので後で確認

これらの式を式 (5.63) に代入する。リミット $T' \rightarrow \infty e^{-i\delta}$, $T \rightarrow -\infty e^{-i\delta}$ を取ると、図 5.7 で示されるように、 $T = i|T| \sin \delta$ によって、 δ を任意の角度として表現する。このとき、 $(i/\hbar)E_n T'$ の項は実数部を持ち、 $-(1/\hbar)|T| \sin \delta$ の項は減衰因子を与えるため、

$\exp(-(1/\hbar)E_n|T|\sin\delta)$ として現れる. このとき, 和に現れる E_n が大きいほど, すべての項が減衰し, E_n が小さいほど減衰しにくくなる. 最も減衰が少ない項は, エネルギーが最も低い項, つまり基底状態, 真空である. このため, 和に残るのは基底状態 (真空) の寄与だけである. これが我々が欲しい特徴である. よって次のようになる.

$$\lim_{T' \rightarrow \infty e^{-i\delta}, T \rightarrow -\infty e^{-i\delta}} \langle Q'T'|QT \rangle^J = \phi_0(Q)\phi_0(Q') \exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_0(T'-T)\right) \times \int dq' dq \phi_0^*(q', t') \langle q't'|qt \rangle^J \phi_0(q, t).$$

または

$$\int dq' dq \phi_0^*(q', t') \langle q'|q \rangle \phi_0(q, t) = \lim_{T' \rightarrow \infty e^{-i\delta}, T \rightarrow -\infty e^{-i\delta}} \frac{\langle QT'|QT \rangle^J}{\phi_0(Q)\phi_0(Q') \exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_0(T'-T)\right)}. \quad (5.66)$$

左辺は基底状態の期待値, つまり遷移振幅の期待値を示している. T と T' の時間は任意に大きくすることができるので, 左辺は $\langle 0, \infty | 0, -\infty \rangle^J$ へと進む. 右辺の分母は, 小さい数に比例するため, 次のようになる.

こより以下酷いので再度確認して修正

$$\langle 0, 0, -\infty \rangle^J = N \int \mathcal{D}q \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_T^\infty d\tau (L + Hq + J)\right).$$

これを, 次の場の理論を考慮する際に改めて扱う. その間に, 我々は次の関係を証明する. これは $J(t)$ に関する汎関数の微分を含む関係である.

まず, $\langle q_i, t_i | q_f, t_f \rangle$ の代わりに, $\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle$ を考え, $q(t_n)$ は演算子であることを覚えておかなければならない. 次に式 (5.6) を考え, t_n を t_1, \dots, t_n の1つとする. このとき,

$$\langle q_f | q(t_n) | q_i \rangle = \int dq_1 \dots dq_n \langle q_f | q(t_n) | q_i \rangle \langle q_{n-1} | q(t_n - 1) | q_i \rangle \dots \langle q_1 | q_i \rangle.$$

式

$$\langle q_{n-1} | q_i \rangle = \int dq_1 dq_2 \dots dq_{n-1} \langle q_{n-1} | q_1 \rangle$$

は, 式 (5.13) で示された議論と類似している. よって最終的に, 次のようになる.

$$\langle q_f | q(t_n) | q_i \rangle = N \int \mathcal{D}q \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_T^\infty d\tau (L + H)\right). \quad (5.69)$$

次に, 我々が見つけたいものを考える. つまり,

$$\langle q_f | q(t_n) | q_i \rangle.$$

もし $t_n > t_m$ であれば,

$$\langle q_f | q(t_n) | q(t_m) | q_i \rangle = \int dq_1 \dots dq_n \langle q_f | q(t_n) | q(t_m) | q_i \rangle \dots \langle q_1 | q_i \rangle.$$

最後に,

$$\langle q_f | q(t_n) | q(t_2) | q_i \rangle = \int \mathcal{D}q \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_T^\infty d\tau (L + H)\right). \quad (5.70)$$