Ryder QFTゼミ資料

Max Miyazaki

April 13, 2025

5章　経路積分

5.4 汎関数微分

プロパゲータ

$$\langle x_f t_f | x_i t_i \rangle = \int \mathcal{D}x \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f} L(x, \dot{x})dt\right]$$

のような量は関数積分であり, 積分はすべての関数 $x(t)$ に対して行われる. 左辺は数値なので積分は各関数 $x(t)$ に数値を関連付ける. この積分は汎関数と呼ばれ, すべての点のおける関数 $x(t)$ の値に依存することは明らかである. これを短く書くと以下のようになる.

$$\text{関数} : \text{数} \to \text{数} \tag{5.50}$$

関数 $f(t) = t^2 + 2t$ のように, 各独立変数に対して値（つまり数値）を返すものを関数と呼ぶ. t に値を与えると, f の値を計算できる. 略記法として次のように書ける.

$$\text{function: number} \to \text{number}. \tag{5.51}$$

数学的な記法では数値は実数空間 $\mathbb{R}$ に属するので, 関数は次の写像を定義する.

$$\text{function: } \mathbb{R} \to \mathbb{R}. \tag{5.52}$$

場合によっては関数がベクトル量であることもある. 例えば電場 $\mathbf{E}$ は $\mathbb{R}^3$ に属し, 空間の 3 次元の各点に電場を割り当てる. したがって, 次の写像を定義する.

$$\text{function: } \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3.$$

一方で, スカラー関数 $\phi(x)$ は次の写像を定義する.

$$\text{function: } \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}.$$

一般的に次の定義を持つ.

$$\text{function: } \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m. \tag{5.53}$$

関数は連続であり, 正確には n 回微分可能である. 物理では通常, 無限回微分可能な関数に着目する. 基礎となる座標空間は多様体 M です（例えば $\mathbb{R}$ や 3 次元ユークリッド空間の $\mathbb{R}^3$）. 関数は $C^n(M)$ と記され、無限回微分可能な関数の場合, $C^\infty(M)$ と記される. したがって, 式 (5.50) に従うと関数汎関数は次の写像を定義する.

$$\text{functional: } C^\infty(M) \to \mathbb{R}. \tag{5.54}$$

ここで明確にしておくべきだが, 汎関数は関数の関数ではない. これはもちろん関数そのものである. 汎関数 F は、関数 f の関数として角括弧で記されることが一般的で, つまり $F[f]$ と表記される.

次に汎関数微分を定義する. 通常の微分に類推して関数 $f(y)$ に対する汎関数 $F[f]$ の微分は次のように定義される.

$$\frac{\delta F[f(x)]}{\delta f(y)} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{F[f(x)+\epsilon\delta(x-y)] - F[f(x)]}{\epsilon}. \tag{5.55}$$

具体的な例として次の汎関数を考えてみる.

$$F[f] = \int f(x)\, dx. \tag{5.56}$$

そのとき, 次のようになる.

$$\frac{\delta F[f]}{\delta f(y)} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\left(\int (f(x)+\epsilon\delta(x-y))\, dx\right) - \int f(x)dx}{\epsilon} = \int \delta(x-y)dx = 1. \tag{5.57}$$

もう一つの例として次の汎関数を考える.

$$F_x[f] = \int G(x,y)f(y)dy. \tag{5.58}$$

ここで, 左辺の x はパラメータとして扱われる. そのとき,

$$\begin{aligned}\frac{\delta F[f]}{\delta f(z)} &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\int (G(x,y)f(y) + \epsilon G(x,y)\delta(y-z))\, dy - \int G(x,y)f(y)dy}{\epsilon} \\ &= \int G(x,y)\delta(y-z)dy \\ &= G(x,z). \end{aligned} \tag{5.59}$$