Ryder QFT ゼミ資料

Max Miyazaki

2024 年 11 月 23 日

5 章 経路積分

5.5 経路積分のさらなる特性

我々は、 q_i, t_i から q_f, t_f への遷移振幅が次式で与えられることを示した.

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = N \int \mathcal{D}q \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f} L(q, \dot{q})\, dt\right]$$

ここで $H = \left(p^2/2m\right) + V(q)$ は現在の目的に対して十分に一般的であり, 境界条件は次のように与えられる.

$$q(t_f) = q_f, \quad q(t_i) = q_i.$$

この種の境界条件は, 古典的な粒子の運動では適切かもしれないが, それは場の理論では用いられない. その類似物は, 例えば $\psi(t_i) = \psi_i, \psi(t_f) = \psi_f$ である. しかし実際に起こるのは, 粒子が生成され（例えば衝突によって）, それらが相互作用し, 観測によって破壊される（すなわち, 検出される）ことである. 例えば, πN 散乱の微分断面積 $d\sigma/d\Omega$ を測定するとき, パイ中間子は NN 衝突によって生成され, それが検出されたときに破壊される.

生成の作用は源として表現され, 破壊の作用はシンクとして表現される. これはある意味で, 源とは言え, シンクである. 問題の境界条件は図 5.6 に示されるように表現される. 時間 $t = -\infty$ で真空へと進化し, 時間 $t = +\infty$ で再び真空へ進化する, つまり生成, 相互作用, 破壊のプロセスを通じて, 源の作用によってである. 我々は, この源の存在下での真空から真空への遷移振幅を知りたい.

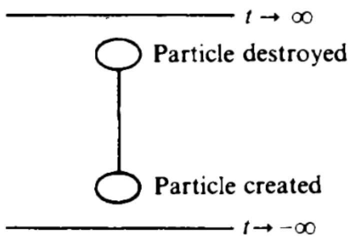

Fig. 5.6. Representation of the vacuum–vacuum transition amplitude in the presence of a source.

この表現は, シュウィンガー (1969 年) に由来し, 源 $J(t)$ はラグランジアンを次のように修正することによって表される.

$$L \to L + \hbar J(t)q(t). \tag{5.60}$$

もし $|0,t\rangle$ が源の存在下での基底状態（運動する基準系）で, そのときシステムが式 (5.60) で記述されるとき, 遷移振幅は

$$Z[J] \propto \langle 0,\infty|0,-\infty\rangle^J \tag{5.61}$$

ここで比例定数は省略されている. 源 $J(t)$ は電磁場の「源」として作用する電流と類似した役割を果たす. 荷電スカラー場 ϕ は例えばラグランジアン (3.65) を持ち, それが電磁場 A^μ と相互作用する (A^μ はラグランジアン (3.73) で与えられ, その形は $J_\mu A^\mu$). このアイデアはシュウィンガーによって一般化され, 任意の場が J によって「生成」される. $Z[J]$ は J の汎関数であり, 我々は現在その表式を導き出す, すなわち, 基底状態への振幅は比例定数を無視して次のようになる. 本質的な特徴は基底状態の存在であり, それがどのように到達するかを説明する.

この状況は, 図 5.7 に示される時間軸の回転により説明される. 源 $J(t)$ は, t と $t'(t' < t)$ の間でゼロではなく, したがって, 遷移振幅は次のようになる.

$$\langle QT'|QT\rangle^J = N\int \mathcal{D}q \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_T^T d\tau(L+\hbar Jq)\right]. \tag{5.62}$$

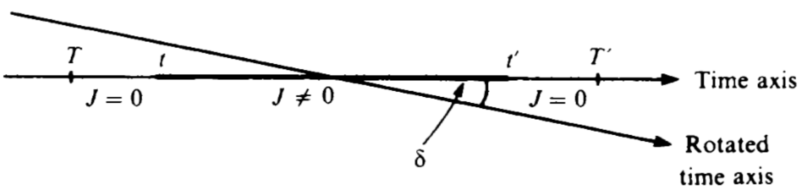

Fig. 5.7. Rotation of the time axis in calculating the vacuum–vacuum transition amplitude.

我々は

$$\langle Q'T'|QT\rangle^J = \int dq'dq \langle Q'T'|q't'\rangle\langle q't'|qt\rangle\langle qt|QT\rangle. \tag{5.63}$$

式 (5.3) を参照すると, 次のようになる.

$$\langle Q'T'|q't'\rangle = \langle Q'|\exp\left(-\frac{i}{\hbar}HT'\right)\exp\left(\frac{i}{\hbar}Ht'\right)|q'\rangle = \sum_n \phi_n(q)\phi*_n(Q)\exp\left[\frac{i}{\hbar}E_m(t'-T')\right] \tag{5.64}$$

ここで, $\phi_m(q)$ はエネルギー固有状態の完全な集合である. 同様に,

$$\langle qt|QT\rangle = \sum_n \phi_n(q)\phi_n^*(Q)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_n(t-T')\right). \tag{5.65}$$

ここの文章結構かけてるので後で確認

これらの式を式 (5.63) に代入する. リミット $T' \to \infty e^{-i\delta}, T \to -\infty e^{-i\delta}$ を取ると, 図 5.7 で示されるように, $T = i|T|\sin\delta$ によって, δ を任意の角度として表現する. このとき, $(i/\hbar)E_nT'$ の項は実数部を持ち, $-(1/\hbar)|T|\sin\delta$ の項は減衰因子を与えるため, $\exp(-(1/\hbar)E_n|T|\sin\delta)$ として現れる. このとき, 和に現れる E_n が大きいほど, すべての項が減衰し, E_n が小さいほど減衰しにくくなる. 最も減衰が少ない項は, エネルギーが最も低い項, つまり基底状態, 真空である. このため, 和に残るのは基底状態（真空）の寄与だけである. これが我々が欲しい特徴である. よって次のようになる.

$$\lim_{T'\to\infty e^{-i\delta}, T\to -\infty e^{-i\delta}} \langle Q'T'|QT\rangle^J = \phi*_0(Q)\phi_0(Q')\exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_0(T'-T)\right)\times\int dq'dq\phi_0^*(q',t')\langle q't'|qt\rangle^J\phi_0(q,t).$$

または

$$\int dq'dq\phi_0^*(q',t')\langle q'|q\rangle\phi_0(q,t) = \lim_{T'\to -\infty e^{-i\delta}, T\to -\infty e^{-i\delta}} \frac{\langle QT'|QT\rangle^J}{\phi*_0(Q)\phi_0(Q')\exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_0(T'-T)\right)}. \tag{5.66}$$

左辺は基底状態の期待値, つまり遷移振幅の期待値を示している. T と T' の時間は任意に大きくすることができるので, 左辺は $\langle 0,\infty|0,-\infty\rangle^J$ へと進む. 右辺の分母は, 小さい数に比例するため, 次のようになる.

こよより以下酷いので再度確認して修正

$$\langle 0,0,-\infty\rangle^J = N\int \mathcal{D}q\exp\left(\frac{i}{\hbar}\int_T^\infty d\tau\,(L+Hq+J)\right).$$

これを, 次の場の理論を考慮する際に改めて扱う. その間に, 我々は次の関係を証明する. これは $J(t)$ に関する汎関数の微分を含む関係である.

まず, $\langle q_i,t_i|q_f,t_f\rangle$ の代わりに, $\langle q_f,t_f|q_i,t_i\rangle$ を考え, $q(t_n)$ は演算子であることを覚えておかなければならない. 次に式 (5.6) を考え, t_n を $t_1,\cdots,t_n$ の 1 つとする. このとき,

$$\langle q_f|q(t_n)|q_i\rangle = \int dq_1\ldots dq_n\langle q_f|q(t_n)|q_i\rangle\langle q_{n-1}|q(t_n-1)|q_i\rangle\cdots\langle q_1|q_i\rangle.$$

式

$$\langle q_{n-1}|q_i\rangle = \int dq_1 dq_2 \cdots dq_{n-1}\langle q_{n-1}|q_1\rangle$$

は, 式 (5.13) で示された議論と類似している. よって最終的に, 次のようになる.

$$\langle q_f|q(t_n)|q_i\rangle = N\int \mathcal{D}q \exp\left(\frac{i}{\hbar}\int_T d\tau(L+H)\right). \tag{5.69}$$

次に, 我々が見つけたいものを考える. つまり,

$$\langle q_f|q(t_n)|q_i\rangle.$$

もし $t_n > t_m$ であれば,

$$\langle q_f|q(t_n)|q(t_m)|q_i\rangle = \int dq_1 \ldots dq_n \langle q_f|q(t_n)|q(t_m)|q_i\rangle \cdots \langle q_1|q_i\rangle.$$

最後に,

$$\langle q_f|q(t_n)|q(t_2)|q_i\rangle = \int \mathcal{D}q \exp\left(\frac{i}{\hbar}\int_T^\infty d\tau(L+H)\right). \tag{5.70}$$