Ryder QFT ゼミ資料

Max Miyazaki

April 13, 2025

6章 経路積分量子化とファインマンルール

6.4 相互作用する場の生成関数

ラグランジアンは自身と相互作用するスカラー場を記述する.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{g}{4!}\phi^4 = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{int}} \tag{6.65}$$

まず一般的な相互作用 $\mathcal{L}_{\text{int}}$ に対するグリーン関数の求め方を示し, 次節でその公式を ϕ^4 理論に適応させる.
正規化された生成関数は,

$$Z[J] = \frac{\displaystyle\int \mathcal{D}\phi \exp\left(iS + i\int J\phi dx\right)}{\displaystyle\int \mathcal{D}\phi e^{iS}} \tag{6.66}$$

$\mathcal{L}_{\text{int}} = 0$ のとき, これが式 (6.43) となり, 式 (6.44) と同じであることを示すことができたのは明らか. 式 (6.44) は J に対して汎関数微分するのに適した形であるのでグリーン関数を求めるのに適している. 相互作用する場での式 (6.44) に対応する式を求めたい. $Z[J]$ が満たす微分方程式を求めて, それを $Z_0[J]$ で解く.
まず式 (6.44) から

$$\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}Z_o[J] = -\int \Delta_{\text{F}}(x-y)J(y)dy \exp\left(-\frac{i}{2}\int J\Delta_{\text{F}}Jdxdy\right),$$

Δ_{F} は $\Box + m^2$ の逆数を引くので,

$$(\Box + m^2)\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}Z_0[J] = J(x)Z_0[J] \tag{6.67}$$

これは $Z_0[J]$ が満たす微分方程式である.
　ここで式 (6.66) から,

$$\frac{1}{i}\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} = \frac{\displaystyle\int \exp\left(iS + i\int J\phi dx\right)\phi(x)\mathcal{D}\phi}{\displaystyle\int e^{iS}\mathcal{D}\phi} \tag{6.68}$$

汎関数を以下で定義する.

$$\hat{Z}[\phi] = \frac{e^{iS}}{\displaystyle\int e^{iS}\mathcal{D}\phi} \tag{6.69}$$

すると,

$$Z[J] = \int \hat{Z}[\phi] \exp\left[i \int J(x)\phi(x)dx\right] \mathcal{D}\phi \tag{6.70}$$

これはフーリエ変換の汎関数的なアナロジーである. ここで

$$S = \int \left(\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{g}{4!}\phi^4 = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\mathrm{int}}\right) d^4x = -\int \left[\frac{1}{2}\phi(\Box + m^2)\phi - \mathcal{L}_{\mathrm{int}}\right] d^4x \tag{6.71}$$

に注意しながら $\hat{Z}[\phi]$ の汎関数微分を取ると, 次を得る.

$$\begin{aligned} i\frac{\delta\hat{Z}[\phi]}{\delta\phi(x)} &= i\frac{\delta}{\delta\phi}\left\{\exp\left[-i\int\left[\frac{1}{2}\phi(\Box + m^2)\phi - \mathcal{L}_{\mathrm{int}}\right]d^4x\right]\right\}\left[\int e^{iS}\mathcal{D}\phi\right]^{-1} \\ &= (\Box + m^2)\phi\hat{Z}[\phi] - \frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{int}}}{\partial\phi}\hat{Z}[\phi] \\ &= (\Box + m^2)\phi\hat{Z}[\phi] - \mathcal{L}'_{\mathrm{int}}\hat{Z}[\phi] \end{aligned} \tag{6.72}$$

ここで $\mathcal{L}'_{\mathrm{int}} = \dfrac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{int}}}{\partial\phi}$ である. 式 (6.72) の両辺に $\exp\left[i\int J(x)\phi(x)dx\right]$ をかけて ϕ で積分する. 右辺は式 (6.68) が使われていた

$$\begin{aligned} &\frac{\displaystyle\int(\Box + m^2)\phi\exp\left(iS + i\int J\phi dx\right)\mathcal{D}\phi}{\displaystyle\int e^{iS}\mathcal{D}\phi} - \frac{\displaystyle\int\mathcal{L}'_{\mathrm{int}}(\phi)\exp\left(iS + i\int J\phi dx\right)\mathcal{D}\phi}{\displaystyle\int e^{iS}\mathcal{D}\phi} \\ &\qquad = (\Box + m^2)\frac{1}{i}\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} - \mathcal{L}'_{\mathrm{int}}\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J}\right]Z[J] \end{aligned} \tag{6.73}$$

を与え, $\mathcal{L}'_{\mathrm{int}}$ の引数は ϕ から $\dfrac{1}{i}\dfrac{\delta}{\delta J}$ に変更されている. これは $Z[J]$ に作用するためである. 式 (6.72) の左辺は式 (6.70) から以下を与える.

$$(\Box + m^2)\frac{1}{i}\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} - \mathcal{L}'_{\mathrm{int}}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)Z[J] = J(x)Z[J] \tag{6.75}$$

我々は $Z[J]$ の方程式を解かなければならない.
$\mathcal{L}'_{\mathrm{int}} = 0$ の自由場では, 方程式は $Z[J]$ に対して式 (6.67) 式に帰着する. ここで式 (6.75) の解は

$$Z[J] = N\exp\left[i\int\mathcal{L}'_{\mathrm{int}}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J}\right)dx\right]Z_0[J] \tag{6.76}$$

N は正規化ファクターで, 証明は 2 つ段階がある.

証明

(a) 最初にこの恒等式を証明する.

$$\exp\left[-i\int\mathcal{L}_{\mathrm{int}}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)dy\right]J(x)\exp\left[i\int\mathcal{L}_{\mathrm{int}}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)dy\right] = J(x) - \mathcal{L}'_{\mathrm{int}}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right) \tag{6.77}$$

このことは,

$$\left[x_i, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}\right] = i\delta_{ij}$$

の汎関数的アナロジーが

$$\left[J(x), \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(y)}\right] = i\delta(x-y)$$

であることを観察することによって導かれる.
この式を繰り返し適応すると次のようになる.

$$\begin{aligned}
\left[J(x), \left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)^n\right] &= i\delta(x-y)\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)^{n-1} + \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(y)}\left[J(x), \left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)^{n-1}\right] \\
&\vdots \\
&= i\delta(x-y)n\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)^{n-1} \qquad (6.78)
\end{aligned}$$

関数を

$$F(\phi) = F(0) + \phi F'(0) + \frac{\phi^2}{2!}F''(0) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\phi^n}{n!}F^{(n)}(0)$$

と展開し, $\phi \to \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J}$ と置換することで式 (6.78) から以下が得られる.

$$\left[J(x), \int\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)dy\right] = iF'\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right) \qquad (6.79)$$

ここで A, B を演算子とし, $A = -i\int \mathcal{L}_{\mathrm{int}}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(y)}dy$, $B = J(x)$ とする Hausdorff の公式を使う.

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!}[A, [A, B]] + \cdots \qquad (6.80)$$

この場合, A は (式 (6.79) より) $[A, B]$ と交換するので, 式 (6.80) の右辺の最初の 2 項のみ現れて式 (6.77) が証明される.

(b) ここで式 (6.76) が式 (6.75) の解であることを示さないといけない. 式 (6.76), 式 (6.77) から

$$\begin{aligned}
J(x)Z[J] &= \exp\left[i\int \mathcal{L}_{\mathrm{int}}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)dy\right]Z_0[J] \\
&= N\exp\left[i\int \mathcal{L}_{\mathrm{int}}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)dy\right]\left[J(x) - \mathcal{L}_{\mathrm{int}}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right]Z_0[J]
\end{aligned}$$

これらの項と初項は式 (6.67) を使って変換され, 2 番目の項では $\exp\left[i\int \mathcal{L}_{\mathrm{int}}\right]$ と $\mathcal{L}'_{\mathrm{int}}$ の順序を入れ替えることで, 式 (6.76) を用いた以下の式を与えることができる.

$$\begin{aligned}
J(x)Z[J] &= N\exp\left[i\int \mathcal{L}_{\mathrm{int}}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)dy\right](\Box + m^2)\frac{1}{i}\frac{\delta Z_0}{\delta J(x)} - N\mathcal{L}'_{\mathrm{int}}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\exp\left[i\int \mathcal{L}_{\mathrm{int}}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(y
\end{aligned}$$

$$= (\Box + m^2)\frac{\delta Z_0[J]}{\delta J(x)} - \mathcal{L}'_{\mathrm{int}}\frac{1}{i}\left[\frac{\delta}{\delta J(x)}\right]Z[J]$$

これが式 (6.75) である．証明完了．

　これで相互作用する場でのグリーン関数を計算できるようになった．これは量子論で普通行われるように摂動論によって計算される．