

Chapter 2. The Klein-Gordon Field

2-3. The Klein-Gordon Field as Harmonic Oscillators

Max Miyazaki

各種 SNS

X (旧 Twitter): [@miya_max_study](#)

Instagram : [@daily_life_of_miya](#)

YouTube : [@miya-max-active](#)

Abstract

このノートは Peskin&Schroeder の “An Introduction to Quantum Field Theory” の第 2 章の 3 節をまとめたものである。要点や個人的な追記, 計算ノートのなまとめを行っているが, それらはすべて原書の内容を出発点としている。参考程度に使っていただきたいが, このノートは私の勉強ノートであり, そのままの内容をそのまま鵜呑みにすると間違った理解を招く可能性があることをご了承ください。ぜひ原著を手に取り, その内容をご自身で確認していただくことを推奨します。てへぺろ $v(\hat{\partial})v$

2-3. The Klein-Gordon Field as Harmonic Oscillators

これから場の量子論の議論を単純な場である Klein-Gordon 場から形式的に始める。

概要

- 古典スカラー場の理論を量子化することで、量子スカラー場の理論を得る。
- 量子化：力学変数を演算子に置き換えて正準交換関係を課す。
- この理論を解くために Hamiltonian の固有値と固有状態を求める。
- その際に調和振動子のアナロジーを用いる。

実 Klein-Gordon 場の古典理論は前節で十分議論した。関連する式は以下の通りである。

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2, \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2.\end{aligned}\tag{2-6}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2\right)\phi = 0 \quad \text{or} \quad (\partial^\mu\partial_\mu + m^2)\phi = 0\tag{2-7}$$

$$H = \int d^3x \mathcal{H} = \int d^3x \left(\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2\right)\tag{2-8}$$

量子化するために、力学変数 ϕ と π を演算子に置き換え、交換関係を課す。離散的な粒子系については、正準交換関係は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}[q_i, p_j] &= i\hbar\delta_{ij}; \\ [q_i, q_j] &= [p_i, p_j] = 0.\end{aligned}$$

連続系に対しては $\pi(\mathbf{x})$ が運動量密度であるので、Kronecker delta の代わりに Dirac delta が出てくる。

$$\begin{aligned}[\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] &= i\hbar\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}); \\ [\phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{y})] &= [\pi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] = 0.\end{aligned}\tag{2-20}$$

(※時間に依存しない Schrödinger 描像で議論している。次節で Heisenberg 描像に移行するときも、両方の演算子が同時刻に評価される限り、同時刻交換関係は保持される。)

Hamiltonian は、 ϕ と π の関数なので、それ自体も演算子となる。よって、次の仕事は Hamiltonian からスペクトル（固有値群）を見つけることである。

これを直接的に行う明らかな方法はないので、フーリエ空間で Klein-Gordon 方程式を書くことでヒントを得ることにします。

古典的な Klein-Gordon 場をフーリエ展開すると：

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \phi(\mathbf{p}, t)\tag{1}$$

ここで、 $\phi^*(\mathbf{p}) = \phi(-\mathbf{p})$ とすることで、 $\phi(\mathbf{x})$ が実数になることを保証します。このとき、Klein-Gordon 方程式 (2.7) は次のようになります：

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + (|\mathbf{p}|^2 + m^2)\right]\phi(\mathbf{p}, t) = 0\tag{2}$$

これは、単純な調和振動子 (simple harmonic oscillator) の運動方程式と同じ形をしており、対応する周波数は

$$\omega_{\mathbf{p}} = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2} \quad (3)$$

となります。

今度は、Klein-Gordon ハミルトニアンの特クトルを見つけるために、同じ手法を使います。

ただし今回は、場の各フーリエモードが、それぞれ独立した調和振動子として振る舞うことになります。それぞれ独自の a と a^\dagger を持つ、というわけです。

式 (2.23) を参考にして、次のように書きます：

$$\phi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}) \quad (2.25)$$

$$\pi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (-i) \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}} (a_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} - a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}) \quad (2.26)$$

$a_{\mathbf{p}}$ と $a_{\mathbf{p}}^\dagger$ を ϕ と π を使って逆に表す式も簡単に導出できますが、実際の計算ではほとんど必要になりません。

以下の計算では、(2.25) と (2.26) を次のように並び替えた形が役に立ちます：

$$\phi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p}} + a_{-\mathbf{p}}^\dagger) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \quad (2.27)$$

$$\pi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (-i) \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}} (a_{\mathbf{p}} - a_{-\mathbf{p}}^\dagger) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \quad (2.28)$$