

# 1 Vorbereitung

## 1.1 Theoretischer Hintergrund

Die Kapitel über den theoretischen Hintergrund, die Aufgaben und die Durchführung sind größtenteils übernommen und zusammengefasst aus der Staatsexamensarbeit "Der Quanten-Hall-Effekt im Fortgeschrittenenpraktikum" von Bianca Müller, welche im Dezember 1997 am Physikalischen Institut der Universität Karlsruhe (TH) angefertigt wurde. Hiervon abweichende Quellen sind im Text als Fußnote gekennzeichnet.

### 1.1.1 Klassischer Halleffekt

In einem stromdurchflossenen Leiter bewegen sich Elektronen. Legt man senkrecht dazu ein B-Feld an, so erfahren diese eine Lorentz-Kraft senkrecht dazu. Im Gleichgewicht kompensieren sich die Lorentz-Kraft und das durch die Ablenkung entstehende E-Feld. Dann gilt:

$$\vec{F}_L = -\vec{F}_E$$

Der Hallkoeffizient ist definiert als:

$$R_H = \frac{E_y}{j_x \cdot B} = \frac{1}{ne}$$

Bei endlicher Temperatur sind in Halbleitern nicht nur Elektronen sondern auch Defektelektronen, sog. Löcher, Ladungsträger. Für die Leitfähigkeit und den Hallkoeffizient gelten dann:

$$\sigma = ne\mu_n + pe\mu_p$$
$$R_H = \frac{p\mu_p^2 - n\mu_n^2}{e(p\mu_p + n\mu_n)^2}$$

Hier sind  $n, p$  die Ladungsträgerkonzentrationen und  $\mu$  die jeweilige Beweglichkeiten.

### 1.1.2 Verwendete Proben

Die verwendeten Proben müssen ein 2D-Elektronengas bereitstellen. Das wird zum einen durch ein Silizium-MOSFET und zum anderen durch eine GaAs-GaAlAs-Heterostruktur realisiert.

Das Silizium-MOSFET besteht aus einem Block p-dotierten Siliziums mit einer Isolationsschicht darüber. Die Gate-Spannung  $V_G$  wird angelegt an eine auf der anderen Seite befindlichen Aluminium-Schicht, sodass sich am Rand des Silizium-Blockes eine Inversionsschicht bildet, in der sich Elektronen in zwei Dimensionen bewegen können. Die Dichte der Ladungsträger kann hierbei gut über die Gate-Spannung eingestellt werden. Durch recht starke Streuung an

Störstellen ist die Beweglichkeit der Elektronen jedoch gering.

In der GaAs-GaAlAs-Heterostruktur übernimmt die leicht p-dotierte GaAs-Schicht die Rolle des Silizium-Blockes. Durch Diffusion der überschüssigen Elektronen mit den Löchern an der Grenzfläche, werden erstere räumlich von den zugehörigen Störstellen getrennt, jedoch noch angezogen<sup>1</sup>. Dadurch können diese sich in der Grenzfläche bewegen.

### 1.1.3 2DEG

In einem 2D-Elektronengas, das wie oben beschrieben realisiert werden kann, ist eine Koordinate festgehalten. Legt man ein B-Feld senkrecht zur Stromflussrichtung an, so kommt es zum Quantenhalleffekt. Die Elektronen bewegen sich auf einer Spiralbahn senkrecht zur Oberfläche und bilden Landau-Niveaus. Diese sind entartet, sodass die Fermienergie sprunghaft steigt, wenn ein Niveau vollständig besetzt ist. Dadurch sind in der Hallspannung Plateaus mit steigendem B-Feld zu beobachten.

Die Leitfähigkeit längs einer Bewegungsrichtung des 2D-Elektronengases oszilliert mit steigendem B-Feld, da das oberste Energieband zum Teil höher als die Fermienergie liegt und dadurch geleert wird. Die abgegebene Energie erhöht die Streuung der Elektronen an Störstellen, was zu einer Änderung der Leitfähigkeit führt.

### 1.1.4 Änderung der Temperatur und des Probenstromes

Wird die Temperatur zu stark erhöht, so ist kein Quantenhalleffekt mehr erkennbar, da die Struktur des 2DEG nicht mehr gilt und höhere Landau-Niveaus nicht besetzt werden. Die Temperatur von flüssigem Stickstoff reicht hierzu nicht aus.

Bei Änderung des Probenstroms treten oben beschriebene Oszillationen der Leitfähigkeit auf.

### 1.1.5 Zeeman-Aufspaltung

Energieniveaus von Atomen spalten sich auf in einem Magnetfeld. Dieser Effekt ist bekannt als Zeeman-Effekt. In diesem Versuch spielt er keine Rolle.

---

<sup>1</sup>R.E.Prange, S.M. Girvin, eds: The Quantum Hall Effect, Springer Verlag, New York, 1990

## 1.2 Durchführung

Zunächst wird der Kryostat abgekühlt. Davor wird allerdings geprüft, ob die Probe korrekt eingebaut ist, da später nicht nachjustiert werden kann.

Dann werden die einzelnen Kammern in der Versuchsanordnung mit Helium gespült, bevor flüssiger Stickstoff eingefüllt wird. Der Widerstand der Spule und des Thermometers werden gemessen.

Dann wird der flüssige Stickstoff entfernt und das Dewar sowie der Probenraum wieder mit Helium gefüllt. Anschließend wird der Probenraum auf ca. 2 mbar evakuiert und das Dewar erneut gespült. Danach wird der Kryostat mit Helium gefüllt. Das geschieht wieder bei einem Druck von 2,0 mbar. Die Füllhöhe wird über Schwingungen eines Messstabes ermittelt. Erreicht dieser die Oberfläche des Bades, so steigt die Frequenz.

Abschließend werden der Widerstand der Spule und die Temperatur ermittelt. Die Spule sollte supraleitend sein, die Temperatur sollte unter 4,2 K sein. Dann können die Messungen durchgeführt werden.

## 1.3 Aufgaben

Bei 4 K wird die Längs- und die Querspannung gemessen.

Durch verdampfen von flüssigem Helium wird die Probe auf 1,8 K abgekühlt. Bei einem Probenstrom von  $10\mu A$  wird das B-Feld auf 6 T hochgefahren und dabei die Längsspannung in 0.5 T schritten gemessen. Beim Herunterfahren des B-Feldes wird die Querspannung gemessen. Anschließend werden beide Spannungen bei einem Strom von  $100\mu A$  gemessen. Dann wird die Messapparatur ausgeschaltet.

Zur Auswertung werden die Extrema der Längsspannung bestimmt mit den dazugehörigen Magnetfeldstärken.

Die Quer- oder Hallspannung der Plateaus wird bestimmt und diese auch identifiziert.

Damit wird dann über den Hallkoeffizienten die Ladungsträgerkonzentration bestimmt, sowie die Feinstrukturkonstante  $\alpha$ . Hierfür gilt<sup>2</sup>:

$$R_H = \alpha^{-1} \mu_0 c / 2i$$

Hier ist  $i$  die Nummer des besetzten Energieniveaus. Abschließend wird noch mit Literaturwerten verglichen.

---

<sup>2</sup>K. von Klitzing, G.Dorda, M.Pepper: New Method for High-Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance, Phys. Rev. Lett., Vol. 45, No.6, 1980, p.494

## 2 Auswertung

### 2.1 Kurvenauswertung

Es wurden sieben Magnetfeld-Spannungs Paare von uns aufgenommen, drei für die Längsspannung und vier für die Querspannung. Für die Längsspannung  $U_{26}$  bei  $I = 20 \mu A$  und  $T = 2.8$  K wurden die Daten einer anderen Gruppen verwendet, womit acht Wertepaare vorliegen.

Weiterhin kam es zum Quenchen bei der letzten Messung. Das betrifft die Längsspannung  $U_{26}$  bei  $I = 100 \mu A$  und  $T = 2.95$  K. In dem korrespondierenden Graphen ist das durch eine senkrechte grüne Linie gekennzeichnet. Ab einem Wert von  $B = 4.75$  T wurde das Magnetfeld runtergefahren. Die danach folgenden Werte sind nicht zu beachten.

Die Längsspannung wurde jeweils an den Stellen 2 und 6 abgegriffen, die Querspannung zwischen 3 und 4.

#### 2.1.1 Längsspannung

Für die Längsspannung wurden die Kurven, die in Abb.2-5 zu sehen sind, aufgenommen. Zur Bestimmung der Extrema, Maxima und Minima, wurden Fits einer Gauß-Kurve in einem begrenzten Wertebereich gefittet. Die so bestimmten Werte sind in Abb.1 tabellarisch dargestellt.

Abbildung 1: Spannungswerte und Magnetfeldstärken an den Maxima und Minima. Die Extremstellen wechseln sich ab, beginnend mit einem Maximum. Die Bestimmung des B-Feldes wurde mittels Gauß-Fit durchgeführt.

Stromstärke in $\mu\text{A}$	Temperatur in K	$B$ in T	$U$ in V
20	2.8	$1.297 \pm 0.006$	0.017
		$1.518 \pm 0.004$	0.009
		$1.830 \pm 0.005$	0.022
		$2.294 \pm 0.003$	0.002
		$3.272 \pm 0.004$	0.052
		$4.642 \pm 0.013$	-0.0003
20	4.4	$1.831 \pm 0.004$	0.021
		$2.287 \pm 0.004$	0.005
		$3.292 \pm 0.004$	0.048
		$4.629 \pm 0.004$	-0.004
100	2.95	$2.369 \pm 0.007$	0.095
		$2.890 \pm 0.004$	0.024
		$4.406 \pm 0.006$	0.202
100	4.4	$1.855 \pm 0.004$	0.094
		$2.267 \pm 0.002$	0.056
		$3.455 \pm 0.003$	0.195
		$4.618 \pm 0.007$	-0.002

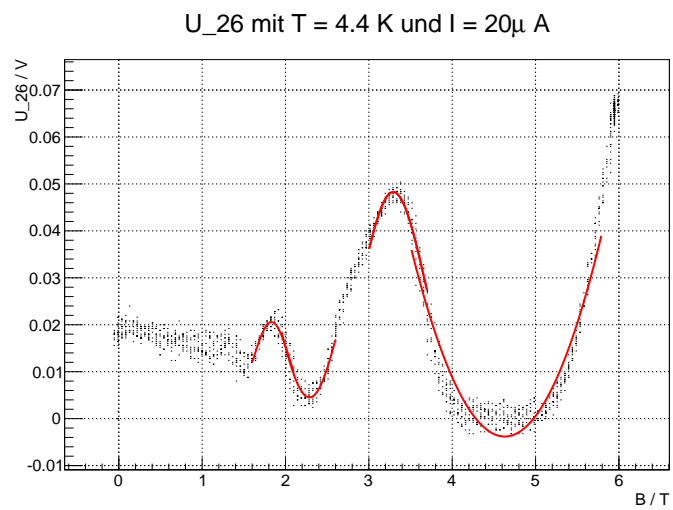


Abbildung 2: Längsspannung  $U_{26}$  für  $I=20 \mu\text{A}$  und  $T=4.4 \text{ K}$ .

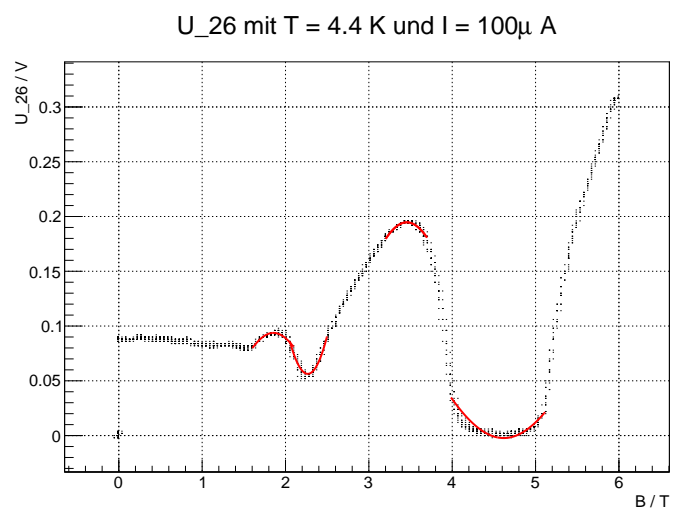


Abbildung 3: Längsspannung  $U_{26}$  für  $I=100 \mu\text{A}$  und  $T=4.4 \text{ K}$ .

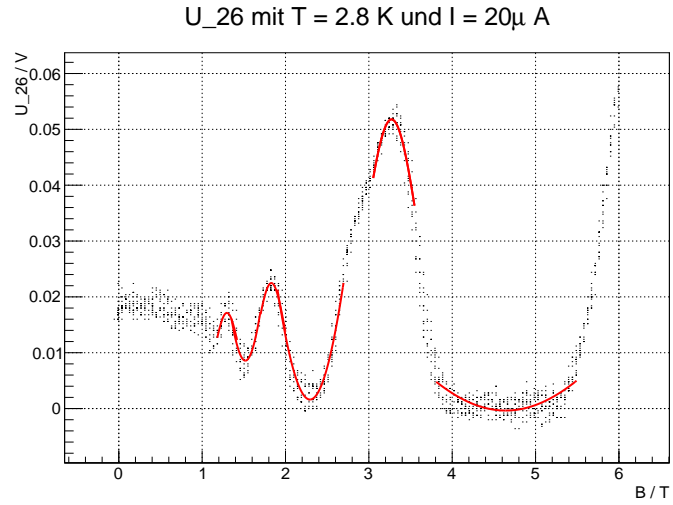


Abbildung 4: Längsspannung  $U_{26}$  für  $I=20 \mu\text{A}$  und  $T=2.8 \text{ K}$ . Die Daten für diesen Plot stammen von einer anderen Gruppe.

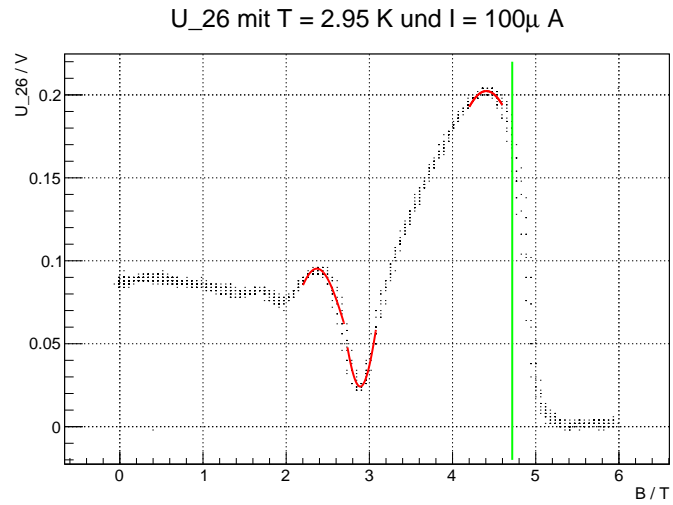


Abbildung 5: Längsspannung  $U_{26}$  für  $I=100 \mu\text{A}$  und  $T=2.95 \text{ K}$ . Die grüne senkrechte Linie gibt an, wann es zum Quenchen kam. Die Werte danach können nicht mehr verwendet werden, da das Magnetfeld herunter gefahren wurde. Aus rechnerischen Gründen wurde die Magnetfeldskala dennoch weitergeführt.

### 2.1.2 Hall-Plateaus

Wie in der Vorbereitung beschrieben, sind in der Hallspannung Plateaus zu sehen. Um diese genauer zu bestimmen, wurden horizontale Geraden in den jeweiligen Wertebereichen an die Spannungswerte gefittet. Dadurch wird der Spannungswert genauer bestimmt. Abb.7-10 zeigen die vier aufgenommenen Kurven, Abb.6 zeigt die Ergebnisse der Fits und die zugehörigen Bereiche des Magnetfeldes.

### 2.1.3 Identifikation der Plateaus

Es gilt die Gleichung<sup>3</sup>:

$$\frac{U_H}{I} = \frac{h}{i \cdot e^2}$$

mit der Hallspannung  $U_H$ , dem angelegten Strom  $I$  und dem Füllfaktor  $i$ . In obiger Tabelle, Abb.6, ist dieser Füllfaktor für jedes Plateau mit angegeben. Dabei wurde die Bedingung ausgenutzt, dass  $i$  eine ganze Zahl sein muss; bei der Berechnung lag diese Zahl aber nie weiter als eine Standardabweichung von dem ungerundeten Wert entfernt.

Abbildung 6: Spannungswerte und Magnetfeldstärken an den Maxima.

Stromstärke in $\mu\text{A}$	Temperatur in K	B in T	$U_H$ in V	Füllfaktor $i$
20	2.73	1.4 ... 1.6	$(8.418 \pm 0.026) \cdot 10^{-2}$	6
		2.3 ... 2.7	$(1.369 \pm 0.002) \cdot 10^{-1}$	4
		3.7 ... 5.5	$(2.584 \pm 0.0008) \cdot 10^{-1}$	2
20	4.1	2.0 ... 2.7	$(1.315 \pm 0.003) \cdot 10^{-1}$	4
		4.0 ... 5.3	$(2.636 \pm 0.002) \cdot 10^{-1}$	2
100	2.83	2.1 ... 2.3	$(6.459 \pm 0.009) \cdot 10^{-1}$	4
		4.0 ... 5.3	$1.306 \pm 0.0003$	2
100	4.4	2.2 ... 2.4	$(6.565 \pm 0.012) \cdot 10^{-1}$	4
		4.0 ... 5.2	$1.303 \pm 0.0003$	2

<sup>3</sup>Bianca Müller: Staatsexamensarbeit: Der Quanten-Hall-Effekt im Fortgeschrittenenpraktikum, Physikalisches Institut der Universität Karlsruhe (TH), Dezember 1997



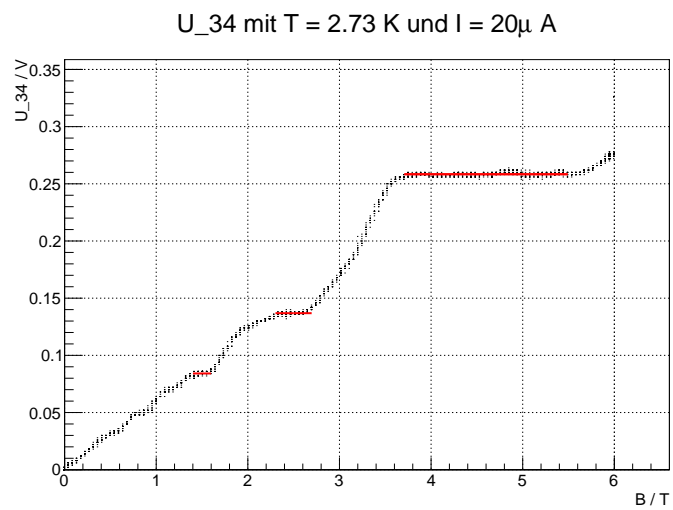


Abbildung 7: Hallspannung  $U_{34}$  für  $I=20 \mu\text{A}$  und  $T=2.73 \text{ K}$

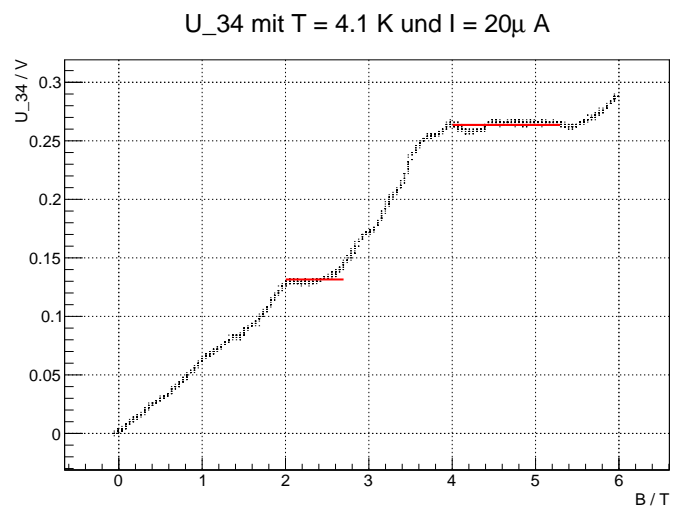


Abbildung 8: Hallspannung  $U_{34}$  für  $I=20 \mu\text{A}$  und  $T=4.1 \text{ K}$

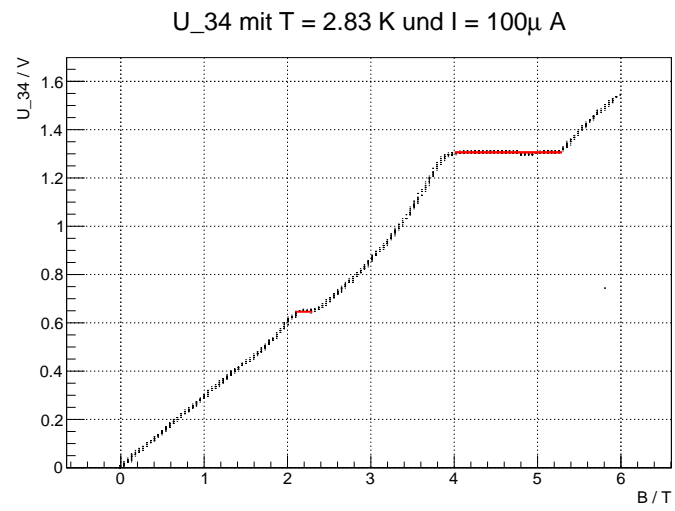


Abbildung 9: Hallspannung  $U_{34}$  für  $I = 100 \mu\text{A}$  und  $T=2.83 \text{ K}$

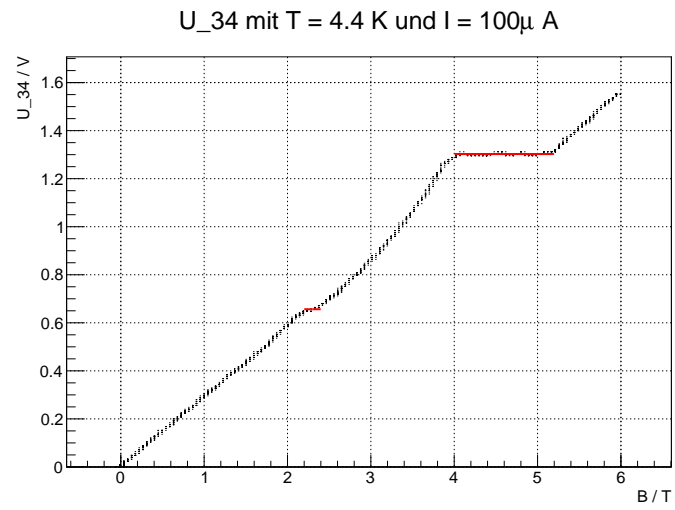


Abbildung 10: Hallspannung  $U_{34}$  für  $I=100 \mu\text{A}$  und  $T=4.4 \text{ K}$

### 2.1.4 Ladungsträgerkonzentration

Die Flächenladungsträgerdichte  $n_s$  eines 2DEG wird berechnet aus

$$n_s = \frac{B}{U_H \cdot e} \cdot I$$

Sie ist quantisiert und abhängig von dem jeweiligen Hall-Plateau. Zur Berechnung wird jeweils das Magnetfeld am Maximum in der Längsspannung genommen. Mit dem Entartungsgrad  $N$  hängt sie über  $n_s = i \cdot N$  zusammen.

Für  $I = 20 \mu\text{A}$  bei  $T = 2.73 \text{ K}$  werden wie bereits erwähnt die Daten einer anderen Gruppe verwendet. In Abb.1 sind diese auch eingetragen.

In Abb.11 ist  $n_s$  für jedes Plateau aufgelistet. Die Reihenfolge ist dieselbe wie in Abb.6.

**Fehlerrechnung** Für die Fehlerrechnung wird die Gauß'sche Fehlerfortpflanzung verwendet. Da in obiger Gleichung  $B$ ,  $U_H$  systematische sowie statistische Unsicherheiten haben und  $I$  eine systematische Unsicherheit hat, folgt für die jeweiligen Fehler

$$\sigma_{n_s, stat.}^2 = \left( \frac{B}{U_H e} \cdot \sigma_{I, stat.} \right)^2 + \left( \frac{B \cdot I}{U_H^2 e} \cdot \sigma_{U_H, stat.} \right)^2$$

$$\sigma_{n_s, sys.}^2 = \left( \frac{I}{U_H e} \cdot \sigma_{B, sys.} \right)^2 + \left( \frac{B}{U_H e} \cdot \sigma_{I, sys.} \right)^2 + \left( \frac{B \cdot I}{U_H^2 e} \cdot \sigma_{U_H, sys.} \right)^2$$

Die statistischen Unsicherheiten folgen aus den entsprechenden Funktionsanpassungen. Die systematischen werden wie folgt abgeschätzt:

Die Stromstärke kann durch das Messgerät in dem verwendeten Bereich recht gut eingestellt werden, wie in dem zugehörigen Datenblatt steht. Hierfür nehmen wir einen systematischen Fehler von  $\sigma_{I, sys.} = 0.01 \mu\text{A}$  an. Für  $U_H$  und  $B$  dient die Auflösung des jeweiligen Messbereiches des Oszilloskops als Anhaltspunkt. Hier nehmen wir  $\sigma_{U_H, sys.} = 0.004 \text{ V}$  und  $\sigma_{B, sys.} = 0.004 \text{ T}$ .

In unten stehender Tabelle sind beide Unsicherheiten mit eingetragen, wobei durchgehend zuerst der systematische, dann der statistische Fehler angegeben wird.

Abbildung 11: Flächenladungsträgerdichte  $n_s$  für jedes Hall-Plateau mit Messunsicherheiten. Es wird immer zuerst der systematische, dann der statistische Fehler angegeben.

$I$ in $\mu\text{A}$	$T$ in K	$B$ in T	$U_H$ in V	$n_s$ in $10^{11} \text{ cm}^{-2}$
20	2.73	$1.297 \pm 0.006$	$(8.418 \pm 0.026) \cdot 10^{-2}$	$1.923 \pm 0.092 \pm 0.011$
		$1.830 \pm 0.005$	$(1.369 \pm 0.002) \cdot 10^{-1}$	$1.669 \pm 0.049 \pm 0.005$
		$3.272 \pm 0.004$	$(2.584 \pm 0.0008) \cdot 10^{-1}$	$1.581 \pm 0.025 \pm 0.002$
20	4.1	$1.831 \pm 0.004$	$(1.315 \pm 0.003) \cdot 10^{-1}$	$1.738 \pm 0.053 \pm 0.005$
		$3.292 \pm 0.004$	$(2.636 \pm 0.002) \cdot 10^{-1}$	$1.559 \pm 0.024 \pm 0.002$
100	2.83	$2.369 \pm 0.007$	$(6.459 \pm 0.009) \cdot 10^{-1}$	$2.289 \pm 0.015 \pm 0.007$
		$4.406 \pm 0.006$	$1.306 \pm 0.0003$	$2.106 \pm 0.007 \pm 0.003$
100	4.4	$1.855 \pm 0.004$	$(6.565 \pm 0.012) \cdot 10^{-1}$	$1.764 \pm 0.011 \pm 0.005$
		$3.455 \pm 0.003$	$1.303 \pm 0.0003$	$1.655 \pm 0.005 \pm 0.001$

## 2.2 Feinstrukturkonstante

Die Feinstrukturkonstante wird wie in der Vorbereitung erwähnt berechnet durch folgende Gleichung:

$$\frac{U_H}{I} = \alpha^{-1} \cdot \mu_0 c / (2 \cdot i)$$

Für die magnetische Feldkonstante und die Lichtgeschwindigkeit werden die Werte aus der Vorbereitungsmappe Anhang 4 <sup>4</sup> verwendet:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^7 \frac{\text{N}}{\text{A}^2}$$

$$c = 299792458 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Damit wird  $\alpha$  berechnet. Der Füllfaktor  $i$  wird der Tabelle in Abb.6 entnommen.

**Fehlerrechnung** Die Hallspannung  $U_H$  hat sowohl eine statistische, als auch eine systematische Unsicherheit. Als weitere fehlerbehaftete Größe gibt es noch die Stromstärke mit einem systematischen Fehler. Die Gauß'sche Fehlerfortpflanzung liefert in diesem Fall:

$$\sigma_{\alpha,sys.}^2 = \left(\frac{\mu_0 c}{2 \cdot i}\right)^2 \cdot \left(\left(\frac{\sigma_{I,sys.}}{U_H}\right)^2 + \left(\frac{I \cdot \sigma_{U_H,sys.}}{U_H^2}\right)^2\right)$$

$$\sigma_{\alpha,stat.}^2 = \left(\frac{\mu_0 c}{2 \cdot i}\right)^2 \cdot \left(\frac{I \cdot \sigma_{U_H,stat.}}{U_H^2}\right)^2$$

<sup>4</sup>Tabelle der empfohlenen konsistenten Werte der Naturkonstanten (CODATA 1986)

Zur Bestimmung der systematischen Messunsicherheit wird wie bei der Bestimmung der Flächenladungsträgerdichte diskutiert  $\sigma_{U_H,sys.} = 0.004$  V und  $\sigma_{I,sys.} = 0.01$   $\mu$ A abgeschätzt.

Die statistische Unsicherheit folgt aus den oben durchgeführten Fits. Zusätzlich werden die für die jeweiligen Füllfaktoren berechneten Werte in einen Graphen aufgetragen und mit einer horizontalen Ausgleichsgeraden gefittet. Das ergibt die endgültige statistische Unsicherheit, die systematische ist davon unabhängig und muss quadratisch addiert werden. Das ist in Abb.12 zu sehen. Es wurde noch der Literaturwert nach Anhang 4 der Literaturmappe<sup>5</sup> von  $\alpha_{theo} = \frac{1}{137.0359895} = 7.29735308 \cdot 10^{-3}$  eingezeichnet.

Die Feinstrukturkonstante haben wir somit bestimmt zu:

$$\alpha = (7.228 \pm 0.493 \text{ (} \textit{sys.} \text{)} \pm 0.001 \text{ (} \textit{stat.} \text{)}) \cdot 10^{-3}$$

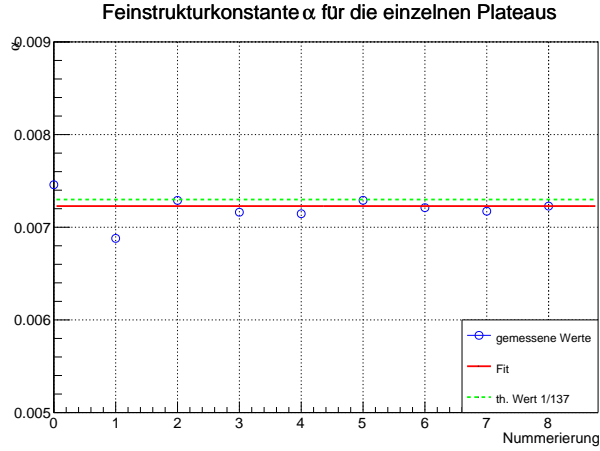


Abbildung 12: Feinstrukturkonstante  $\alpha$  für jedes Plateau und horizontaler Fit. Gestrichelt ist der im Text erwähnte Literaturwert eingezeichnet. Die Nummerierung ist analog zu Abb.6. Oberster Eintrag in der Tabelle entspricht dem Wert mit der kleinsten Nummerierung.

### 2.3 Literaturvergleich

Der oben angegebene Literaturwert der Feinstrukturkonstanten liegt innerhalb einer Standardabweichung von unserem Ergebnis. Von daher ist das Ergebnis zufriedenstellend. Allerdings ist der systematische Fehler sehr groß im Vergleich zum statistischen. Das lässt vermuten, dass er eventuell etwas zu groß abgeschätzt wurde. Eine genauere Kenntnis der verwendeten Messapparaturen und tiefgehendere Untersuchungen könnten zu einer besseren Abschätzung führen.

<sup>5</sup>Tabelle der empfohlenen konsistenten Werte der Naturkonstanten (CODATA 1986)