Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

М. Я. Бартіш, І. М. Дудзяний

Дослідження операцій

Частина 1. Лінійні моделі

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
як підручник
для студентів вищих навчальних закладів

Львів
Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка
2007

УДК 519.8
Б 26
ББК 22.183

Рецензенти:

д-р фіз.-мат. наук, проф. *В.А. Кривень*
(Тернопільський державний технологічний університет імені Івана Пулюя)
д-р фіз.-мат. наук, проф. *І.В. Огірко*
(Українська академія друкарства, м. Львів)
д-р фіз.-мат. наук, проф. *Р.В. Слоньовський*
(Національний університет "Львівська політехніка")

Рекомендовано до друку Міністерством освіти і науки України як підручник для студентів вищих навчальних закладів (*лист заступника Міністра В.О. Огнев*'*юка за № 14/18–Г–609 від 01.08.06 р.*)

Бартіш М. Я., Дудзяний І. М.

Б 26 Дослідження операцій. Частина 1. Лінійні моделі: Підручник. - Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2007. - 168 с.

ISBN
ISBN Ч. 1

Дослідження операцій (ДО) акумулює математичні методи, які використовують для прийняття керівних рішень у різних сферах людської діяльності. У підручнику визначається предмет та об'єкти ДО, сфери та особливості застосування методів ДО, наводиться класифікація задач ДО.

У підручнику висвітлені теоретичні основи лінійного програмування (ЛП), симплексний та двоїстий симплексний методи розв'язування задач ЛП, метод штучного базису знаходження опорного розв'язку задач ЛП. Детально розглянута теорія двоїстості у лінійному програмуванні та її економічний зміст. Розглянуто транспортну задачу ЛП, а також задачу цілочисельного лінійного програмування.

Зміст підручника відповідає програмі обов'язкового курсу "Дослідження операцій" для базового напряму "Прикладна математика". Розрахований на бакалаврів, спеціалістів і магістрів. Ним можуть скористатися аспіранти та викладачі ВЗО, де викладаються предмети "Дослідження операцій", "Математичне програмування", "Математичні методи в економіці" тощо.

УДК 519.8
ББК 22.183

ISBN
ISBN Ч.1

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА ………………………………………….………………….. 5
СПИСОК СКОРОЧЕНЬ І ПОЗНАЧЕНЬ…………………… 6
1. ВСТУП У ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ……….…………… 7
1.1. Плануванняціленаправлених дій та ухвалення рішень .. 7
1.2. Людський чинник у процесі ухвалення рішень………… 9
1.3. Задачі ухвалення рішень…………………………..…… 10
1.3.1. Постановка задачі ухвалення рішення………... 10
1.3.2. Теорія ухвалення рішень і ДО………………..…….. 14
1.3.3. Логістика і дослідження операцій……….…… 18
1.4. Головні етапи та принципи операційних досліджень ….. 20
1.5. Приклади математичних моделей задач ДО…………….… 23
1.6. Основи математичного моделювання задач ДО………... 27
1.7. Класифікація задач ДО…………………………………… 31
1.8. Математичні методи дослідження операцій………..….. 34
Запитання для самоперевірки…………………….………… 36
Завдання для самостійної роботи ……………………….... 37
2. ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ …………………………….... 41
2.1. Форми запису задачі лінійного програмування….…….. 41
2.2. Властивості багатогранних множин…………………… 46
2.3. Графічна інтерпретація ЗЛП………………………………... 50
2.4. Властивості розв'язків задачі лінійного програмування.. 54
2.5. Симплексний метод розв'язування задачі ЛП…………... 60
2.6. Алгоритм симплексного методу…..……………………... 65
2.7. Визначення опорних планів…………………..……….. 75
2.8. Двоїстість у лінійному програмуванні ………………… 85
2.9. Двоїстий симплексний метод розв'язування задачі ЛП .. 95
Запитання для самоперевірки…………………………… 98
Завдання для самостійної роботи ……………..……….. 99

3. **ЦІЛОЧИСЕЛЬНЕ ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ** . 103
3.1. Постановка задачі ……………………………………….. 103
3.2. Методи розв'язування задач цілочисельного лінійного програмування ……………………………………………. 105
3.3. Метод Гоморі розв'язування задач ЦЛП ………………… 107
3.4. Метод гілок і меж розв'язування задач ЦЛП …………... 111
3.5. Задача комівояжера ………..…………….……………... 116
3.6. Метод гілок і меж розв'язування задачі комівояжера …. 118
Запитання для самоперевірки …………………………… 128
Завдання для самостійної роботи ………………………. 129

4. **ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА**…………………………………….. 131
4.1. Постановка транспортної задачі ……………..………. 131
4.2. Властивості закритої транспортної задачі ……………... 133
4.3. Властивості опорних планів транспортної задачі ……... 136
4.4. Алгоритми побудови опорних планів транспортної задачі ……………………………………………………… 143
4.4.1. Побудова опорного плану ТЗ методом північно-західного кута ……………………………….......... 143
4.4.2. Побудова опорного плану ТЗ методом мінімального елемента ………………..…………..….. 146
4.4.3. Побудова опорного плану ТЗ методом Фоґеля .. 147
4.5. Критерій оптимальності плану перевезень ……………. 148
4.6. Алгоритм методу потенціалів ……………………….. 149
4.7. Приклади задач, які зводяться до транспортної задачі … 155
4.7.1. Задача про розподіл площ під посіви сільськогосподарських культур ……………………....... 155
4.7.2. Задача оптимізації сезонних запасів ……………. 157
4.8. Задача про призначення …………………………….. 158
4.9. Транспортна задача за критерієм часу ………………….. 162
Запитання для самоперевірки…………………………… 165
Завдання для самостійної роботи ………………………. 165

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ ……………………………….……... 167

ПЕРЕДМОВА

Дослідження операцій (ДО) акумулює математичні методи, які використовують для прийняття керівних рішень у різних сферах людської діяльності. Керування будь-якою системою реалізується як процес, підпорядкований певним законам. Знання цих законів допомагає визначити умови, необхідні та достатні для здійснення такого процесу. Отож *метою* дослідження операцій є кількісне обґрунтування керівних рішень.

Предметом дослідження операцій, здебільшого, є задачі на знаходження екстремумів однієї чи декількох функцій за певних умов. *Об'єктами* ДО є різні сфери людської діяльності, де необхідно здійснювати вибір найкращого з можливих варіантів дій.

Частина 1 підручника ("Лінійні моделі") складається з чотирьох розділів. У *першому розділі* визначено предмет та об'єкти ДО, сфери та особливості застосування методів ДО, наведено класифікацію задач ДО.

У *другому розділі* розглянуто моделі лінійного програмування (ЛП) – постановку і приклади типових задач, теоретичні основи ЛП, теорію двоїстості, симплексний та двоїстий симплексний методи розв'язування задач ЛП, метод штучного базису знаходження опорного розв'язку задач ЛП.

У *третьому розділі* розглянуто моделі цілочисельного лінійного програмування (ЦЛП) – постановку і приклади типових задач, загальну методику розв'язування задач ЦЛП, теоретичні основи та алгоритми реалізації методу Гоморі та методу гілок і меж, застосування методу гілок і меж до розв'язування задачі комівояжера.

Важливим частковим випадком задачі ЛП є транспортна задача (ТЗ), якій присв'ячено *четвертий розділ* підручника. Специфіка цієї задачі дає змогу застосовувати спеціальні методи відшукання оптимального розв'язку, простіші за симплексний метод. Конкретний зміст таких задач може стосуватися різноманітних проблем, які не зв'язані з перевезенням вантажів.

У кожному розділі підручника наведено приклади, а також список запитань для самоперевірки і низку задач для самостійної роботи студентів.

Підручник “Дослідження операцій” увібрав багаторічний досвід викладання цієї дисципліни на факультеті прикладної математики та інформатики Львівського національного університету імені Івана Франка.

Зміст підручника відповідає програмі обов’язкового курсу ”Дослідження операцій” для базового напряму ”Прикладна математика”. Розрахований на бакалаврів, спеціалістів і магістрів. Ним можуть скористатися аспіранти та викладачі ВЗО, де викладаються предмети ”Дослідження операцій”, ”Математичне програмування”, ”Математичні методи в економіці” тощо.

СПИСОК СКОРОЧЕНЬ І ПОЗНАЧЕНЬ

ДО – дослідження операцій

ЗЛП – задача лінійного програмування

ЗУР – задача ухвалення рішень

ЛМП – людино-машинна процедура

ЛП – лінійне програмування

МВ – модель вибору

МЗ – метод заокруглення

ОДР – область допустимих розв’язків

ОП – опорний план

ОУР – особа, яка ухвалює рішення

ПКМ – планування і керування у мережах

УР – ухвалення рішень

СМО – система масового обслуговування

СОК – система організаційного керування

ТЗ – транспортна задача

ЦЛП – цілочисельне лінійне програмування

➢ – *початок* доведення теореми/розв’язування прикладу

⮘ – *закінчення* доведення теореми/розв’язування прикладу

$\alpha \Rightarrow \beta$ – з твердження α випливає твердження β (якщо α, то β)

$\alpha \Leftrightarrow \beta$ – твердження α рівносильне твердженню β (α тоді і лише тоді, коли β)

$a := b$ – присвоєння значень (змінна a отримує значення змінної b)

1. ВСТУП У ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

🖹 **План викладу матеріалу**:

1. Планування цілеспрямованих дій та ухвалення рішень.
2. Людський чинник у процесі ухвалення рішень.
3. Задачі ухвалення рішень.
4. Головні етапи та принципи операційних досліджень.
5. Приклади математичних моделей задач дослідження операцій.
6. Основи математичного моделювання задач дослідження операцій.
7. Класифікація задач дослідження операцій.
8. Математичні методи дослідження операцій.

Ключові терміни розділу

- *Ухвалення рішень*
- *Операції*, *адміністративні операції*
- *Задача ухвалення рішення* (*ЗУР*)
- *Критеріальна функція*
- *Структуризованість ЗУР*
- *Керовані та вихідні змінні*
- *Цільова функція та обмеження*
- *Ризик і невизначеність*
- *Класифікація задач дослідження операцій*
- *Дослідження операцій*
- *Особа, яка ухвалює рішення* (*ОУР*), *власник проблеми*
- *Альтернативи та наслідки*
- *Багатокритеріальні оцінки*
- *Математичні моделі ЗУР*
- *Параметри системи*; *збурення*
- *Допустимі та оптимальні плани*
- *Невизначеність при конфліктах*
- *Методи математичного програмування*

1.1. Планування цілеспрямованих дій та ухвалення рішень

Сьогодні наука приділяє значну увагу питанням організації та керування. Підстав щодо цього є безліч. Швидкий розвиток та ускладнення техніки, розширення масштабів здійснюваних заходів і спектра їхніх можливих наслідків, впровадження автоматизованих систем керування в усі області виробництва й людської діяльності – все це зумовлює до необхідності аналізу складних *цілеспрямованих процесів* під кутом зору їхньої структури та організації. Від науки чекають рекомендацій щодо розумного (*оптимального*) керування цими процесами.

Функціонування будь-якої системи полягає у тому, що вона сприймає зовнішню ситуацію і певним чином реагує на неї. Аналізуючи ситуацію, системі необхідно *ухвалити рішення* щодо вибору певної дії, виходячи з власної *мети* (або *цілі*).

Однак таке рішення – це завершальний етап процесу планування *цілеспрямованих дій*, який полягає в аналізі можливих дій системи та наслідків цих дій. Аналізуючи можливі наслідки, система оцінює один з них як найсприятливіший для себе й обирає ту дію, яка спричинить до цього наслідку.

Операція – загальний термін, який означає будь-яку цілеспрямовану дію. Кажучи про операцію, ми асоціюємо з нею деякого *суб'єкта*, який формулює ціль операції. Заради досягнення певної цілі й здійснюють операцію (цілеспрямовану дію).

Ухвалення рішення – це особливий процес людської діяльності, спрямований на вибір найкращого варіанта дій. Людина обирає професію, друзів, партнера у шлюбі, роботу і безліч іншого, отож історія її життя є послідовністю вдалих чи невдалих рішень.

Правителі країн вирішують, з ким співпрацювати і з ким воювати, забороняти чи дозволяти, страчувати чи дарувати життя. Ці рішення становлять основний зміст підручників з історії.

Здебільшого, такі рішення не можна передбачити й оцінити їхні наслідки. Можна лише припускати, що визначений варіант рішення матиме найкращий результат. Однак таке припущення може виявитися помилковим, адже неможливо передбачити майбутнє.

Питання ухвалення рішень у різних областях людської діяльності вивчаються у рамках декількох наукових дисциплін: теорії ухвалення рішень, системного аналізу, дослідженні операцій (ДО), економіки, логістики, когнітивної психології, штучного інтелекту тощо.

Дослідження операцій –математична дисципліна, яка займається застосуванням кількісних (математичних) методів для ухвалення рішень у різних областях цілеспрямованої людської діяльності [3].

Таке визначення ДО потребує деталізації. Подальший виклад матеріалу першого розділу присвячено цьому питанню.

1.2. Людський чинник у процесі ухвалення рішень

У процесі ухвалення рішень беруть участь різні люди з різними повноваженнями та інтересами (тобто люди у процесі ухвалення рішень мають певні *ролі*).

Називатимемо людину, яка *фактично* здійснює вибір найкращого варіанта дій, *особою*, що *ухвалює рішення* (ОУР).

Поряд із ОУР варто виокремити *власника проблеми* – особу, яка, на думку навколишніх, має її вирішувати і несе відповідальність за ухвалені рішення. Проте власник проблеми не завжди є особою, яка ухвалює рішення. Зазвичай, він може бути таким, історія щодо цього дає нам численні приклади. Однак трапляються ситуації, за яких власник проблеми є лише одним з кількох осіб, що беруть участь у її вирішенні. Він може бути головою колективного органу, що ухвалює рішення, змушеним йти на компроміси, щоб дійти згоди.

Третю роль, яку може відігравати людина у процесі ухвалення рішень, є роль керівника чи учасника *активної групи* – групи осіб, які мають власні інтереси і намагаються вплинути на процес вибору рішення та його результат. Наприклад, намагаючись вплинути на економічну політику країни, одні активні групи організовують страйки, інші – кампанію підтримки уряду в пресі тощо.

Ще одна роль – роль *виборця*, якому доводиться вирішувати, за яку особистість чи за яку політичну партію голосувати. У цьому випадку виборець є одним з багатьох учасників процесу ухвалення *колективного* рішення.

Якщо рішення затверджують малою групою, члени якої формально мають рівні права (журі, комісія), то окрема особа є *членом групи*, що ухвалює рішення. Головне у діяльності такої групи – досягнення згоди під час вироблення спільних рішень.

У процесі ухвалення рішень окрема особа може слугувати *експертом* (професіоналом у тій чи іншій області знань), до якого звертаються за оцінками і рекомендаціями люди, долучені до цього процесу.

При ухваленні складних (зазвичай, стратегічних) рішень у їхній підготовці іноді бере участь *консультант* з ухвалення рішень.

Його роль зводиться до розумної організації процесу ухвалення рішень: допомоги ОУР і власнику проблеми у правильній постановці задачі, виявленні позицій активних груп, організації роботи з експертами. Консультант (чи *аналітик*), зазвичай, не оцінює ухвалені рішення, він тільки допомагає іншим зважити усі “за” і “проти”, виробити розумний компроміс.

Окрім того, в ухваленні рішень неявно бере участь *оточення* ОУР, співробітники тієї організації, від імені якої ОУР затверджує рішення. Зазвичай, ця група людей має загальні погляди, загальні ціннісні установки. Саме цій групі ОУР, передусім, пояснює логічність, розумність, обґрунтованість свого рішення. У зв’язку з цим, хоча ОУР затверджує *індивідуальні рішення*, він враховує політику і переваги цієї групи людей.

1.3. Задачі ухвалення рішень

1.3.1. Постановка задачі ухвалення рішення

Формалізуємо *задачу ухвалення рішення* (ЗУР), яка полягає у виборі найоптимальнішого варіанта дії з певної множини можливих варіантів. Така формалізація даватиме змогу класифікувати ЗУР і виокремити ті з них, які слугують об’єктом вивчення дослідження операцій.

Нехай маємо множину можливих варіантів дій X (скінченну або нескінченну). Вибір деякого з варіантів $x_i \in X$ передбачає певний *наслідок* (результат, вихід) $y_i \in Y$, де Y – множина можливих наслідків (тобто між варіантом дії x_i та наслідком y_i існує причинно-наслідковий зв’язок). Окрім того, вважають, що існує певний *механізм оцінки якості* такого *вибору*, який відображає систему переваг ОУР у затвердженні рішень. Зазвичай, оцінюють якість наслідку. На рис. 1.1 проілюстровані головні елементи ЗУР.

Варіанти дій прийнято називати *альтернативами*. Альтернативи – невід’ємна частина проблеми ухвалення рішень: якщо немає з чого вибирати, то немає і вибору. Отже, для постановки задачі ухвалення рішень необхідно мати хоча б дві альтернативи. З них необхідно обрати *найкращу* (зазвичай, таку, яка забезпечить найвищу якість наслідку).

Рис. 1.1. Задача ухвалення рішення

Перейдемо до аналізу сформульованої задачі ухвалення рішень. Перший важливий момент стосується *характеру зв'язку* між альтернативами та наслідками.

У багатьох випадках такий зв'язок є *детермінованим*, тобто існує однозначне відображення $X \underset{\varphi}{\rightarrow} Y$, або реалізується функція $y = \varphi(x)$, $x \in X$, $y \in Y$ (рис. 1.2).

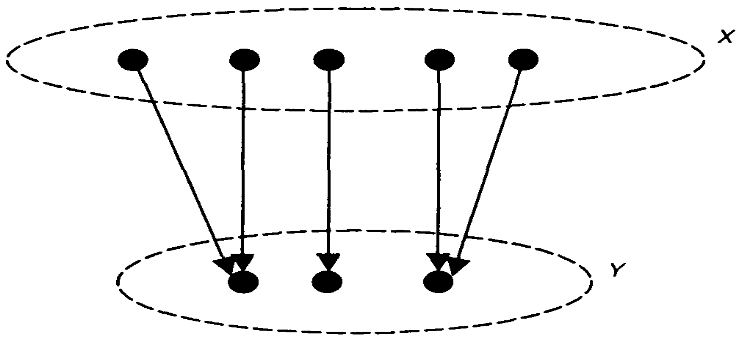


Рис. 1.2. Детермінований зв'язок

Цей же зв'язок може бути *випадковим*, коли вибір x_i визначає деяку *густину розподілу* ймовірностей на множині Y (іноді кажуть, що з кожним x_i зв'язана деяка лотерея). У цьому випадку вибір x_i уже не гарантує настання конкретного результату y_i, а саму задачу називають *задачею ухвалення рішень в умовах ризику* (рис. 1.3).

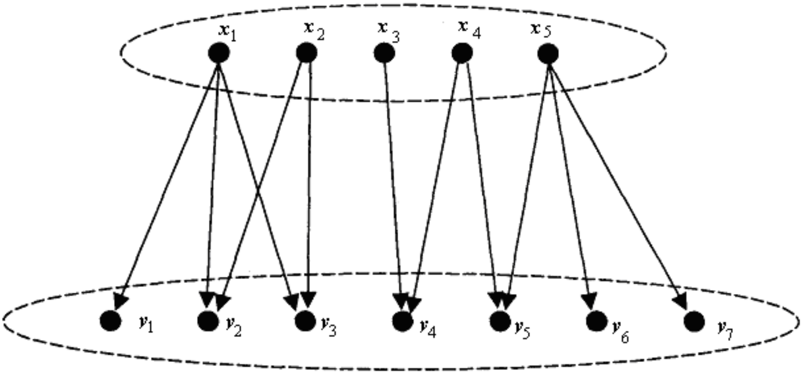


Рис. 1.3. Випадковий зв'язок

Якщо кожній стрілці орграфа на рис. 1.3 можна приписати *вагу* – ймовірність p_{ij} настання наслідку y_j за вибору альтернативи x_i, то цей орграф ілюструватиме тип випадкового зв'язку між альтернативами та наслідками у задачі ухвалення рішень в умовах ризику. Очевидно, що $\forall i: \sum_j p_{ij} = 1$.

На рис. 1.3 проілюстровано і третій вид зв'язку альтернатив з наслідками, який реалізується у задачах ухвалення рішень в умовах *цілковитої невизначеності*. Щодо цього передбачають, що *немає* інформації про ймовірності зв'язків альтернатив з наслідками (стрілки на орграфі не мають ваг).

Невизначеність при виборі та реалізації зв'язку альтернатив з наслідками може мати й інший, дещо складніший характер (див. "дилему в'язня" у *теорії ігор* тощо), проте ми обмежимося зазначеними трьома випадками.

Другий важливий момент у загальній ЗУР полягає у вивченні (заданні) *системи переваг* особи, що ухвалює рішення (ОУР). Зауважимо, що другий момент ніяк не взаємозв'язаний з першим, і різні способи задання системи переваг можуть бути реалізовані для кожного виду зв'язку альтернатив з наслідками.

У деякому розумінні найпростіша ситуація виникає, коли кожен наслідок y можна оцінити конкретним дійсним числом відповідно до деякого відображення $f: Y \to R$.

У цьому випадку порівняння наслідків зводиться до порівняння відповідних щодо них чисел, наприклад, результат y_i вважається кращим, ніж y_j (позначення $y_i \succ y_j$), якщо $f(y_i) > f(y_j)$ (задача максимізації). Наслідки еквівалентні (позначення $y_i \sim y_j$), якщо $f(y_i) = f(y_j)$.

Таку функцію f називають *цільовою функцією*, *критеріальною функцією*, *функцією критерію оптимальності* або ж *критерієм оптимальності*. Остання назва не цілком коректна, оскільки критерій оптимальності – це деяке правило, що дає змогу порівнювати наслідки між собою та відрізняти "*оптимальні*" наслідки від "*неоптимальних*".

У нашому випадку це правило стосується задання цільової функції. Як відомо, однозначне відображення довільної множини на множину дійсних чисел називають *функціоналом*. Тому цільові функції ми часто називатимемо *цільовими функціоналами*.

Якщо припустити, що зв'язок між множиною альтернатив X і множиною наслідків Y є детермінованим ($y = \varphi(x)$, $x \in X$, $y \in Y$), то функція f, задана на множині Y, трансформується у деяку функцію J, задану на множині X, яка є суперпозицією φ і f:

$$J : X \to R,\ J = f \cdot \varphi.$$

У цьому випадку задача вибору оптимального результату зводиться до задачі вибору оптимальної альтернативи на множині X і реалізується безпосередньо методами *дослідження операцій*.

Дещо реалістичнішою є ситуація, коли на відміну від попереднього випадку "якість" чи "корисність" результату y оцінюється не одним числом $f(y)$, а декількома, тобто існує декілька показників якості рішення (критеріїв), які описуються функціями

$$f_k\colon Y \to R,\ k = 1, 2, \ldots, m,$$

причому кожну з часткових цільових функцій f_k, необхідно максимізувати.

Зрозуміло, що у випадку багатокритеріальних оцінок наслідків виникають значно складніші математичні моделі ситуацій вибору, ніж в однокритеріальному випадку. Критерії, здебільшого, суперечливі і, зазвичай, досягають максимумів у різних точках $y \in Y$. Отже, виникають не тільки алгоритмічні труднощі отримання рішень, але й власне концептуальні труднощі. Що розуміти під оптимальним рішенням у цьому випадку?

Концептуальні труднощі розв'язують у рамках *теорії ухвалення рішень*. У наступному пункті розглянемо питання взаємозв'язку дослідження операцій з теорією ухвалення рішень.

1.3.2. Теорія ухвалення рішень і ДО

Необхідність розгляду процесів і проблем ухвалення рішень у різних наукових дисциплінах є цілком виправданою. Визначальним щодо цих проблем є власне акт вибору ОУР одного з варіантів рішень. У теорії ухвалення рішень головним предметом дослідження є процес вибору рішення (або *вивчення системи переваг* ОУР).

Створення *методів ухвалення рішень* у рамках цієї дисципліни вимагає розгляду математичних, психологічних і комп'ютерних проблем. Отож у розвитку теорії ухвалення рішень як наукового напряму беруть участь математики, психологи, політологи, фахівці зі штучного інтелекту, теорії організацій, інформатики та обчислювальної техніки.

Варіанти рішень визначаються різними показниками їхньої привабливості для ОУР (*критеріями*). У професійній діяльності вибір критеріїв, здебільшого, визначається багаторічною практикою, досвідом. Зазвичай, задачі ухвалення рішень налічують декілька критеріїв оцінок варіантів рішень.

Використання критеріїв для оцінки альтернатив вимагає визначення градацій якості: кращих, гірших і проміжних оцінок. Іншими словами, існують *шкали оцінок за критеріями*. В ухваленні рішень прийнято розрізняти: шкали неперервних і дискретних оцінок; шкали кількісних та якісних оцінок; шкали упорядкування; шкали рівних інтервалів.

Не варто вважати, що ухвалення рішень є одномоментним актом. Здебільшого, це досить тривалий і болісний процес, який налічує [19] три етапи:

- пошук інформації (збір даних, думки експертів, соціологічні опитування, погляди на проблему з боку активних груп тощо);

- пошук альтернатив (визначення того, що можна, а чого не можна робити в існуючій ситуації);
- порівняння альтернатив і вибір найкращого варіанта.

Значної уваги потребує третій етап, оскільки перші два етапи не піддаються формалізації. Науковий аналіз проблем ухвалення рішень розпочинається з того моменту, коли хоча б частина альтернатив і критеріїв є відомою. У теорії ухвалення рішень провідне місце займають багатокритеріальні задачі, оскільки вони наближають постановку ЗУР до реальності.

Підходи дослідження операцій і теорії ухвалення рішень істотно розрізняються, оскільки вони спрямовані на принципово різні проблеми ухвалення рішень, що існують у навколишньому світі.

Ці принципові розбіжності прагнули підкреслити автори багатьох класифікацій проблем ухвалення рішень. Наприклад, у відомій класифікації Г. Саймона й А. Ньюелла [11] розрізняються *добре* і *слабо структуровані* проблеми.

Добре структуровані (чи кількісно сформульовані) проблеми – це ті, у яких істотні *залежності* з’ясовані настільки добре, що можуть бути виражені у числах чи символах. Іншими словами, для об’єкта дослідження можна побудувати *математичну модель* (спрощений образ реальності, поданий сукупністю математичних співвідношень).

Зауважимо, що у типових задачах дослідження операцій об’єктивно існує реальність, яка припускає строгий *кількісний опис* і визначає існування *єдиного критерію оптимальності*. Вивчення реальної ситуації може вимагати чимало праці й часу. Потрібна інформація може коштувати надто дорого (наприклад, необхідні спеціальні дослідження, щоб визначити значення окремих параметрів).

Однак за наявності засобів і доброї кваліфікації аналітиків є всі можливості знайти адекватний кількісний опис проблеми, кількісні зв’язки між змінними та критерій оптимальності. Отже, типові задачі ухвалення рішень, які вивчають у ДО, зазвичай, є добре структурованими.

Слабо структуровані (змішані) проблеми – це ті, які містять як кількісні, так якісні елементи. Причому якісні, маловідомі і невизначені сторони проблем мають тенденцію домінувати.

Окрім того, існують проблеми, у яких відомий тільки перелік базових параметрів, а кількісні зв'язки між ними визначити неможливо (необхідна інформація відсутня). Відомо тільки, що зміна параметра у визначених межах позначається на рішенні. У таких випадках структура (тобто сукупність зв'язків між параметрами) *не визначена*, і проблему називають *неструктурованою*.

Слабо структуровані і неструктуровані проблеми досліджують у рамках *теорії ухвалення рішень*. Попередниками методів ух–валення рішень у багатьох випадках є методи ДО.

Існує особливий клас задач ухвалення рішень, у яких об'єкт дослідження описується математичною моделлю (як у задачах дослідження операцій), але якість рішень оцінюється за багатьма критеріями. Ці задачі називають *багатокритеріальними задачами оптимізації*.

Тут частина інформації, необхідна для цілковитого й однозначного визначення вимог до рішення, принципово відсутня. Дослідникові часто вдається визначити основні змінні, установити зв'язки між ними, тобто побудувати математичну модель, що адекватно відображає ситуацію. Але залежності між критеріями загалом неможливо визначити на основі об'єктивної інформації, яка є у дослідника. Компроміс між критеріями може бути знайдений тільки на основі переваг ОУР.

Багатокритеріальні задачі оптимізації вивчаються як у дослідженні операцій, так і в теорії ухвалення рішень. Засобом розв'язування багатокритеріальних задач оптимізації є *людиномашинні процедури* (ЛМП), у яких реалізується циклічний процес взаємодії ОУР з комп'ютером. Кожен крок ЛМП складається з *фази аналізу*, яку виконує ОУР, і *фази розрахунків*, яку виконує комп'ютер.

На межі між дослідженням операцій та теорією ухвалення рішень простежуються також і проблеми ухвалення рішень в *умовах невизначеності* та ухвалення рішень в *умовах конфлікту* (теорія ігор).

Одним з найважливіших класів систем керування є *системи організаційного керування* (СОК), або організаційні системи: підприємства, фірми, галузі економіки тощо. СОК – це системи, сформовані зі значної кількості взаємодіючих між собою підсистем, інтереси яких не збігаються, а вступають у протиріччя, отож необхідно відшукати деякий компроміс між ними.

Наприклад, *виробничий відділ* підприємства ставить за мету випускати широкий асортимент продукції та мати великий обсяг запасів сировини і деталей на складах для забезпечення безперебійної роботи у випадку зриву поставок у визначені терміни.

Відділ матеріально-технічного постачання обмежений розмірами складів, наявними коштами та умовами поставок. *Фінансовий відділ* намагається скоротити запаси на складах, оскільки це "заморожений" капітал, який не дає прибутку.

Функція *загального керівництва* полягає у тому, щоб роботу всіх відділів підпорядкувати *головній меті*: досягненню максимуму прибутку від реалізації продукції за мінімальних затрат.

Такий приклад демонструє, що виконання частини роботи окремими підрозділами (відділами, групами), спрямоване на досягнення своєї мети, може конфліктувати з головною метою.

Виникає необхідність у розв'язуванні задач ухвалення рішень, які забезпечували б досягнення головної мети. А це зумовлює потребу в *консультантах* при адміністрації, які володіють певними навичками, методами розв'язування таких задач, вмінням їх моделювати, аналізувати і передбачати наслідки.

Під час виконання операційних досліджень намагаються відшукати найкраще (*оптимальне*) рішення для найбільшої частини організації. Метою операційних досліджень є забезпечення керівництва науковою основою для розв'язування задач, що пов'язані з питаннями взаємодії різних підрозділів в інтересах загальної мети всієї організації.

Розв'язок, який є найвигіднішим для всієї організації, називають *оптимальним*. А розв'язок, найвигідніший для окремих підрозділів організації, називавають *субоптимальним*.

У зв'язку зі зростанням інтересу до вивчення глобальних світових процесів з'явилося розуміння принципової розбіжності між мікро- і макрорівнями. Якщо нещодавно вважали, що *оптимізація* вирішує всі питання, то сьогодні розуміють: ця вимога тільки *для мікрорівня*. Для процесів у глобальному масштабі вимоги до організації змінюються – на *макрорівні* критерієм ефективності є досягнення *стану рівноваги* [12].

1.3.3. Логістика і дослідження операцій

Поставимо запитання: які задачі розв'язує дослідження операцій для економіки? Для відповіді на це запитання звернемося до такого поняття, як виробнича *логістика*, концепція якої в економіці останніми роками одержала широкий розвиток.

Як термін *логістика* не є новим поняттям. Історія його виникнення сягає далекого минулого, а походить він від грецького *логос* чи *логікос* (мистецтво рахування, правильно мислячий, розважливий) або ж від французького *logis* (квартира, розквартирування).

На перше з цих слів посилався візантійський цар Леонтос IV, який на початку X ст. написав грецькою мовою працю під назвою "Сумарний виклад військового мистецтва", у котрій, окрім стратегії і тактики, вирізнив третю військову науку – логістику, яка займалася обчисленнями, що стосувалися переміщення військ.

У французькому джерелі терміна "Замальовки про військове мистецтво" барона де Жоміньї, опублікованому 1837 року, йдеться про місце розташування і постачання складів, планування і реалізацію походів, підготовку транспортних засобів, обладнання комунікацій, постачання військових загонів. Перекладена англійською мовою, ця праця стає основою для вивчення у Військово-морській школі США з 1885 року. Поняття логістики стало загальновживаним у військовій мові, а згодом його почали застосовувати в економіці.

Щодо сучасних виробничих завдань, то найрозгорнутіше визначення логістики дала Рада логістичного менеджменту США:

"Логістика – це широкий діапазон діяльності, пов'язаної з ефективним рухом кінцевих продуктів від кінця виробничої лінії до покупця, що у деяких випадках включає рух сировини від джерела постачання до початку виробничої лінії. Ця діяльність охоплює транспортування, складування, обробку матеріалів, захисне упакування, контроль запасів, вибір місця перебування виробництва і складів, прогнозування попиту, маркетинг і обслуговування споживачів” [12, с. 12].

Отже, *логістика* — це наука про планування, організацію, управління, контроль і регулювання рухом матеріальних та інформаційних потоків у просторі й часі від їхнього первинного джерела до кінцевого споживача.

Інтереси логістики охоплюють сервіс клієнта, прогнозування попиту, надходження інформації, управління запасами, розміщення виробничих підприємств і складів, процеси постачання, упакування, обслуговування повернень, утилізацію відходів та інші, взаємопов’язані з цими, завдання.

Головна ідея логістики полягає у тому, щоб усі стадії виробництва (видобуток сировини, одержання матеріалів, виготовлення кінцевої продукції), транспортування і збуту розглядати як єдиний і безупинний процес трансформації та руху продукту праці й пов’язаної з ним інформації.

Мета логістики полягає у раціональному управлінні матеріальними й інформаційними потоками для задоволення попиту, постачання вантажів у чітко визначені терміни.

Важливо наголосити на основній концепції логістики, що полягає у системному підході до виробничих процесів, який визначає формалізацію задачі і застосування строгих математичних методів. Як бачимо, на це спрямовані і визначення, і мета, й ідея логістики.

Математичний апарат логістики охоплює вже розглянута нами з концептуального погляду теорія дослідження операцій. Отож, логістика і дослідження операцій нероздільні і взаємодоповнювальні. Логістика постачає дослідженню операцій формулювання задач, ідеологію й економічне обгрунтування (хоча, звісно, не одна тільки логістика постачає задачі економічного змісту для дослідження операцій).

Дослідження операцій, у свою чергу, дає інструмент для розв’язання задач логістики та їхнього кількісного обґрунтування.

1.4. Головні етапи та принципи операційних досліджень

Історичні корені дослідження операцій досить глибокі. У математичному плані деякі оптимізаційні задачі були відомі ще в Стародавній Греції. Потреби у спеціалістах дослідження операцій виникли ще в XIX ст., коли доводилося розв'язувати військові задачі: військова техніка зросла, а техніка бою не змінилася.

Проте свою назву ця дисципліна одержала тільки в 40-х роках минулого століття. Перші публікації з дослідження операцій датовані 1939-1940 рр. У них вирішувалися військові задачі, зокрема задачі аналізу і дослідження воєнних *операцій*. Звідси і виникла назва нової дисципліни.

Перелічимо головні *етапи* операційних досліджень:

– постановка задачі та розроблення концептуальної моделі;
– побудова математичної моделі;
– вибір (розроблення) методу та алгоритму розв'язання;
– перевірка адекватності та корегування моделі;
– пошук розв'язку на моделі;
– реалізація розв'язку на практиці.

Зупинимося коротко на характеристиці цих етапів. Спочатку мету та задачу операційного дослідження формулює ОУР у загальній формі, наприклад: дослідити систему постачання, скласти список недоліків і розробити рекомендації щодо їхнього усунення.

Після цього для виконання дослідження системи формують *операційну групу*, до якої належать фахівці різних областей: системні аналітики, інженери, математики, економісти, соціологи, психологи та інші.

Операційна група повинна *дослідити*:

– матеріальні та інформаційні потоки всередині системи;
– зв'язки системи із зовнішнім середовищем;
– організацію підсистеми керування базової системи;
– критерії ефективності функціонування системи;
– зовнішні чинники, що впливають на показники якості.

Після збору результатів обстеження системи провадять їхній докладний *аналіз*, метою якого є:

– виявлення суттєвих внутрішніх і зовнішніх чинників (змінних);
– обґрунтування вибору показників якості;
– виявлення структури системи.

В процесі аналізу провадять консультації з ОУР, під час яких уточнюють постановку задачі. За необхідності здійснюють додаткове обстеження організаційної системи з метою виявлення неврахованих чинників та їхніх взаємозв'язків.

Результатом цього етапу є *концептуальна модель* системи (задачі), у якій в словесній формі *описують*:

– структуру системи (елементи системи та зв'язки між ними);
– перелік базових показників якості;
– перелік внутрішніх і зовнішніх чинників та їхній вплив на показники якості;
– перелік *керівних рішень* (або *стратегій керування*), які необхідно ухвалити у результаті розв'язання поставленої задачі.

Після одержання концептуальної моделі системи (змістовна постановка *задачі ухвалення рішень*) будують її математичну модель (при дослідженні економічних систем часто вживають термін "*економіко-математична модель*"). Цей процес називають *формалізацією* задачі ухвалення рішень.

Наступний етап операційних досліджень полягає у *виборі* (або *розробленні*) *методу та алгоритму розв'язання* задачі ухвалення рішення, яку представлено математичною моделлю. Для визначення оптимального розв'язку задачі ухвалення рішень найчастіше використовують *методи математичного програмування*. Існують також класи задач, щодо яких побудовано спеціальні методи розв'язування (п. 1.6).

Модель лише частково відображає дійсність. Її можна вважати хорошою, якщо вона точно (або достатньо точно) передбачає вплив внутрішніх змін у системі та зовнішніх збурень на її загальну ефективність. Якщо цього немає, то модель доводиться *корегувати* (у цьому випадку може виникнути необхідність у додаткових обстеженнях системи).

Після досягнення задовільного рівня адекватності моделі застосовують відповідний метод визначення оптимального (або субоптимального) розв'язку задачі ухвалення рішень. Розв'язок може мати різні форми: аналітичну, числову або алгоритмічну (процедури, правила тощо).

Реалізація розв'язку на практиці – один з найважливіших етапів, які завершують дослідження. Його можна розглядати як самостійну задачу, що вимагає застосування до неї системного підходу. Отриманій оптимальній стратегії необхідно надати відповідну змістовну форму у вигляді інструкцій та правил.

Перелічимо базові *принципи* операційних досліджень.

- *Принцип системного підходу* є головним принципом операційних досліджень. Тут будь-яку задачу розглядають з погляду її впливу на критерій функціонування всієї *системи* як взаємозв'язаного комплексу функціональних компонентів.
- *Принцип наступності* в переході від однієї задачі до іншої. Операційні дослідження відзначаються тим, що при розв'язуванні кожної проблеми виникають все нові та нові задачі. Якщо спочатку ставлять вузькі цілі, то застосування операційних методів неефективне. Найбільшого ефекту досягають тільки за безперервного дослідження, що забезпечує наступність в переході від однієї задачі до іншої.
- *Принцип оптимальності.* Однією з притаманних особливостей операційних досліджень є намагання знайти оптимальний розв'язок поставленої задачі. Однак такий розв'язок виявляється, здебільшого, недосяжним унаслідок обмежень, які накладаються існуючими ресурсами або рівнем сучасної науки. Наприклад, для задачі календарного планування за кількості верстатів понад 4 оптимальний розв'язок за сучасного рівня розвитку математики можна знайти лише простим перебором варіантів. Однак навіть за незначних n кількість можливих варіантів є настільки великою, що їх усіх практично неможливо розглянути. Доводиться обмежуватися пошуком досить хорошого або субоптимального розв'язку. Отож у багатьох випадках необхідно шукати компроміс між оптимальністю розв'язку та затратами на його пошук. ДО надає інструменти для пошуку

такого компромісу. Один із засновників дослідження операцій Т. Сааті визначив цю науку як “мистецтво” давати погані відповіді на такі практичні запитання, на які інші методи дають ще гірші відповіді.

- *Принцип комплексності* операційних досліджень полягає в тому, що їх здійснюють у багатьох напрямах (комплексно). Для виконання операційного дослідження створюють операційну групу, до якої зачислюють фахівців різних областей: інженерів, математиків, економістів, соціологів, психологів та інших.

1.5. Приклади математичних моделей задач ДО

Побудова математичної моделі більшості задач ДО полягає в описі *множини допустимих розв'язків* (множини альтернатив X) і *критеріїв оптимальності* (одна чи декілька кількісних ознак, на підставі яких провадять порівняльну оцінку допустимих розв’язків і вибір найоптимальнішого з них). Вважаємо, що кожен наслідок $y \in Y$ отримує числові оцінки, отож $J = f$, $Y = R$.

Приклад 1.1. Нехай є чотири види продуктів Π_j ($j = \overline{1,4}$), з яких необхідно скласти пайок, що задовольнятиме такі вимоги:

1) пайок налічуватиме усі види продуктів;
2) вміст білків, жирів і вуглеводів у пайку становитиме не менше, ніж b_1, b_2 і b_3 одиниць, відповідно;
3) вартість пайка не повинна перевищувати c грошових одиниць;
4) вага пайка не перевищуватиме заданої величини p;
5) пайок матиме *мінімальний* об’єм;
6) пайок матиме *максимальну* калорійність.

Вважатимемо, що одиниця продукту Π_j ($j = \overline{1,4}$) містить a_{1j} одиниць білків, a_{2j} одиниць жирів, a_{3j} одиниць вуглеводів; коштує c_j грошових одиниць; має вагу p_j, калорійність q_j і об’єм v_j.

Побудуємо математичну модель задачі формування харчового набору. Нехай x_j – кількість одиниць j-го продукту ($j = \overline{1,4}$) у пайку, тоді вектор-стовпець $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ цілковито визначає вміст пайка. Вимоги 1 – 4 накладають обмеження на x_j, а вимоги 5 і 6 задають *ознаки-критерії* (об'єм і калорійність).

Опис *множини допустимих розв'язків* (позначатимемо G) задається системою нерівностей, яка задовольняє вимоги 1 – 4:

$$\begin{cases} x_j > 0,\ j = \overline{1,4}; \\ \sum\limits_{j=1}^{4} a_{ij} x_j \geq b_i,\ i = \overline{1,3}; \\ \sum\limits_{j=1}^{4} c_j x_j \leq c; \\ \sum\limits_{j=1}^{4} p_j x_j \leq p. \end{cases} \tag{1.1}$$

Отже, *допустимим розв'язком* є довільний чотиривимірний вектор-стовпець $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$, що належить множині G. Запишемо *критерії оптимальності*:

$$\sum_{j=1}^{4} v_j x_j \to \min_{\bar{x} \in G}, \quad \sum_{j=1}^{4} q_j x_j \to \max_{\bar{x} \in G}. \tag{1.2}$$

Вектор $\bar{x}^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*)^T$, щодо якого виконуються умови (1.1) і (1.2), називатимемо *оптимальним розв'язком*. Для окремих задач оптимальних розв'язків може бути декілька (можливо, безліч).

Задача формування харчового набору є як задачею теорії ухвалення рішень, так і задачею ДО (тобто є багатокритеріальною задачею оптимізації).

Математичну модель задачі формування харчового пайка формулює *дослідник* операцій. На наступному етапі операційних досліджень за допомогою ЛМП він визначає певний набір "добрих" рішень. Остаточне рішення (*керівне*) затверджує ОУР.

Будь-яке керівне рішення завжди ухвалюють відповідно до *інформаційного стану* ОУР (змістовних представлень щодо можливих і доцільних дій в розглянутих умовах). Перевірка адекватності змістовних представлень ОУР виходить за рамки ДО.

Приклад 1.2. Повернемося до задачі щодо складання харчового пайка, розглянутої у прикладі 1.1. Припустимо, що в ОУР змінився інформаційний стан. Відповідно до нових змістовних представлень ОУР необхідно скласти пайок, що задовольнятиме такі вимоги:

1) пайок налічуватиме усі види продуктів;
2) вміст білків, жирів і вуглеводів у пайку становитиме не менше, ніж b_1, b_2 і b_3 одиниць, відповідно;
3) вартість пайка буде *мінімальною*;
4) вага пайка не перевищуватиме заданої величини p;
5) об'єм пайка не перевищуватиме заданої величини v;
6) калорійність пайка буде не меншою за задану величину q.

Скористаємося позначеннями прикладу 1.1. Множину G задамо системою нерівностей:

$$\begin{cases} x_j > 0,\ j = \overline{1,4}; \\ \sum\limits_{j=1}^{4} a_{ij} x_j \ge b_i,\ i = \overline{1,3}; \\ \sum\limits_{j=1}^{4} p_j x_j \le p; \\ \sum\limits_{j=1}^{4} v_j x_j \le v; \\ \sum\limits_{j=1}^{4} q_j x_j \ge q. \end{cases} \tag{1.3}$$

Запишемо *критерій оптимальності*:

$$\sum_{j=1}^{4} c_j x_j \to \min_{\overline{x} \in G}. \tag{1.4}$$

Приклад 1.3. Задача про *використання ресурсів*. Нехай деяка фірма виготовляє n виробів B_j ($j = \overline{1, n}$) і використовує для цього m ресурсів P_i ($i = \overline{1, m}$) у вигляді сировини, енергії, робочої сили, обладнання тощо. Можливий об’єм споживання i-го ресурсу обмежений невід’ємною величиною b_i, а його витрати для виготовлення одиниці виробу B_j ($j=\overline{1, n}$) дорівнюють a_{ij}, де $i=\overline{1, m}$. У свою чергу, одиниця виробу B_j ($j=\overline{1, n}$) визначається величиною c_j, яку називають питомим *прибутком* (виражається в грошових одиницях). Необхідно визначити такі об’єми x_j ($j=\overline{1, n}$) виготовлення виробів B_j, які забезпечать фірмі максимальний сумарний дохід від їхньої реалізації. Математична модель цієї задачі набуде вигляду:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max_{\bar{x}\in G}, \tag{1.5}$$

де множину допустимих розв’язків G задано системою нерівностей:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \ i=\overline{1, m}; \\ \quad x_j \ge 0, \ j=\overline{1, n}. \end{cases} \tag{1.6}$$

Символ G надалі використовуватимемо для позначення *множини допустимих розв’язків* у задачах узагальненої постановки. Математичну постановку задачі щодо використання ресурсів можна ще сформулювати так: знайти n-вимірний вектор-стовпець $\bar{x}=(x_1, x_2, ..., x_n)^T$, за якого

$$\bar{c}\cdot\bar{x} \to \max_{\bar{x}\in G} \tag{1.7}$$

за умови виконання обмежень (1.6), де $\bar{c}=(c_1, c_2, ..., c_n)$.

Приклад 1.4. Задача про *терміни профілактичного ремонту верстатів*. Маємо n однотипних верстатів B_j ($j=\overline{1, n}$). Кожен верстат ремонтують індивідуально, якщо він зупинився унаслідок поломки, а через T інтервалів часу виконують профілактичний ремонт усіх n верстатів. З попередніх спостережень за роботою верстатів відомо, що верстат у момент інтервалу часу i ($i=\overline{1, T}$) з імовірністю p_i вийде з ладу. Необхідно визначити значення T, за якого *мінімізуються* загальні витрати на ремонт несправних верстатів і виконання профілактичного ремонту в розрахунку на один інтервал часу.

Приклад 1.5. При роботі комп'ютерів необхідно періодично припиняти обробку інформації і перевіряти комп'ютери на наявність у них вірусів. Припинення обробки інформації спричинює до певних економічних збитків. Якщо віруси вчасно не виявити, то можна втратити деяку частину інформації, яка спричинить до ще більших збитків. Варіанти допустимих рішень такі:

– E_1 – цілковита перевірка;
– E_2 – мінімальна перевірка;
– E_3 – відмова від перевірки.

Комп'ютери можуть перебувати у такому стані, за якого:

– F_1 – віруси відсутні;
– F_2 – віруси є, проте вони не встигли пошкодити інформацію;
– F_3 – є файли, які потребують відновлення.

Нехай відомі витрати на пошук вірусів і відновлення інформації для всеможливих комбінацій станів комп'ютерів і варіантів керівних рішень. Необхідно обґрунтувати вибір керівного рішення, що мінімізує такі витрати.

1.6. Основи математичного моделювання задач ДО

На базі прикладів, розглянутих у попередньому параграфі, зробимо певні узагальнення, що стосуються математичного моделювання задач ухвалення рішень, які розв'язують у ДО. Зосередимося, передусім, на *економіко-математичних моделях*.

У науковій та навчальній літературі з ДО під час опису ідентичних термінів і понять використовують різні словоформи та словосполучення (*синоніми*). Ми намагатимемося подати найвичерпніший перелік *синонімів* при введенні конкретного терміна чи поняття.

В узагальненому випадку економіко-математична модель має такі елементи:

– *допустимі розв'язки* (*альтернативи*, *керовані змінні* або *стратегії*) – множина X, що містить вектори $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$;
– *вихідні змінні* – змінна або множина змінних Y, значення яких залежать від вибору стратегій;

– *параметри системи* – множина внутрішніх змінних A, значення яких не регулюються ОУР;
– *збурення* (*некеровані змінні*) – множина зовнішніх змінних U, значення яких не регулюються ОУР.

Параметри системи a_k ($k = \overline{1, l}$) є кількісними характеристиками системи, що не залежать від ОУР. У таблиці 1.1 наведено параметри систем прикладів 1.1 – 1.5.

Таблиця 1.1. Параметри системи прикладів 1.1 – 1.5

Приклад	Параметри
1.1./1.2	Вміст білків, жирів і вуглеводів в одиниці продукту; вага, об'єм і калорійність одиниці продукту
1.3	Витрати ресурсів на виготовлення одиниці виробу; питомий прибуток одиниці виробу
1.4	Витрати на ремонт несправних верстатів і виконання профілактичного ремонту
1.5	Витрати на пошук вірусів і відновлення інформації

Якщо йдеться про таку економічну систему, як *сільськогосподарське підприємство*, то його параметрами є наявні ресурси (земельні угіддя, робоча сила, сільськогосподарська техніка, тваринницькі та складські приміщення), рівень урожайності сільськогосподарських культур, продуктивності тварин, норми витрат ресурсів, ціни та собівартість проміжної і кінцевої продукції, норми податків, відсотки за кредит, ціни на придбані ресурси тощо.

Деякі параметри a_k для певної системи можуть бути *сталими* величинами (наприклад, норми висіву насіння, норми споживання тваринами кормів тощо), а деякі – *змінними*, тобто залежитимуть від певних умов, скажімо, урожайності сільськогосподарських культур, собівартості продукції, ціни на продукцію, витрат на ремонт несправних верстатів чи пошук вірусів.

Збурення – це некеровані змінні (або чинники), значення яких не залежать від волі людей і визначаються *зовнішнім середовищем*. Наприклад, обсяг придбаного пального – керована змінна, а температура повітря – некерована. Залежно від реальної ситуації керовані змінні можуть переходити у групу некерованих, і навпаки. Наприклад, у разі насиченого ринку обсяги придбання дизельного палива є керованою змінною величиною, а за умов дефіциту цього ресурсу – некерованою.

За наявності збурень вибір керівних рішень здійснюють в умовах *часткової* (умови *ризику*) чи *цілковитої невизначеності*.

За часткової невизначеності (“*доброї невизначеності*”) збурення підпорядковуються певним законам розподілу теорії ймовірностей (ймовірність поломки верстата у визначений інтервал часу в прикладі 1.4).

За цілковитої невизначеності (“*поганої невизначеності*”) збурення не підпорядковуються законам розподілу або параметри цих законів невідомі (чи недосліджені). У прикладі 1.5 ймовірності перебування комп’ютерів у певному стані є невідомими.

Кожна економічна система має певну *мету* свого функціонування. Це може бути, наприклад, отримання максимуму чистого прибутку. Ступінь досягнення мети, здебільшого, має *кількісну* міру, тобто можна описати математично.

Критерій ефективності зображають як *цільову функцію* (або *функцію мети*), яка задає залежність розв’язків задачі від стратегій, параметрів системи та збурень, тобто:

$$f\colon X \times A \times U \to Y. \tag{1.8}$$

Цей критерій може бути як скалярним, так і векторним (багатокритеріальна задача оптимізації). *Математична модель* задачі ухвалення рішень для скалярної функції f полягає у визначенні максимуму/мінімуму цієї функції на множині X за заданих *обмежень* на стратегії та вихідні змінні. Найчастіше обмеження набувають такого вигляду:

$$g_i(X, A, U) \quad \{\le, =, \ge\} \quad b_i; \quad i = \overline{1, m}, \tag{1.9}$$

де g_i– функція витрат i-го ресурсу, b_i– наявна величина i-го ресурсу в системі. Тут набір символів $\{\le, =, \ge\}$ означає, що для деяких значень поточного індексу i виконуються нерівності типу “$\le$”, для інших – рівності “=”, а для решти – нерівності типу “$\ge$”.

Систему (1.9) називають системою *обмежень* задачі (системою *умов* задачі або системою, що визначає *множину допустимих* *розв'язків*). Вона описує внутрішні технологічні та економічні процеси функціонування й розвитку виробничо-економічної системи, а також процеси зовнішнього середовища, які впливають на результат діяльності системи. Для економічних систем:

$$x_j \geq 0 \qquad (j = \overline{1, n}). \tag{1.10}$$

Залежності (1.8) – (1.10) утворюють економіко-математичну модель економічної системи. Розробляючи таку модель, необхідно дотримуватись певних правил:

- Модель має адекватно описувати реальні процеси.
- У моделі необхідно враховувати все істотне, нехтуючи всім другорядним. Математичне моделювання — це мистецтво, вузька стежка між переспрощенням та переускладненням. Справді, прості моделі не забезпечують відповідної точності, а переускладнені моделі важко реалізувати на комп'ютері як з огляду на неможливість їхнього інформаційного забезпечення, так і внаслідок відсутності відповідного математичного апарату.
- Модель має бути зрозумілою для користувача, зручною для реалізації на комп'ютері.
- Необхідно, щоб множина змінних x_j $(j = \overline{1, n})$ була непорожньою. З цією метою в економіко-математичних моделях за змоги слід уникати обмежень типу "=", а також суперечливих обмежень.

Будь-який набір змінних x_j $(j = \overline{1, n})$, що задовольняє умови (1.9) і (1.10), називають *допустимим розв'язком* (або *допустимим планом*). Очевидно, що кожен допустимий *розв'язок* є відповідною стратегією економічної системи, програмою дій. Кожному допустимому розв'язку відповідає певне значення цільової функції, яке обчислюють за формулою (1.8).

Сукупність усіх розв'язків системи обмежень (1.9) і (1.10) утворює *множину* (*область*) *допустимих розв'язків.* Розв'язок, за якого цільова функція набуває екстремального значення, називають *оптимальним* розв'язком задачі ДО (1.8) – (1.10).

1.7. Класифікація задач ДО

Зупинимось на *класифікації* можливих постановок задач ДО, яку можна виконувати за різними ознаками.

1. *Класифікація задач ДО за зміною в часі інформаційного стану ОУР*. Якщо ухвалення рішення відбувається у наперед відомому і незмінюваному в часі інформаційному стані ОУР, то задачу ДО називають *статичною*, а процедуру ухвалення рішення загалом можна реалізувати за один етап (крок). Поняття статичної задачі дослідження операцій проілюстровано прикладами 1.1 – 1.5.

Якщо в процесі ухвалення рішення інформаційний стан ОУР змінюється в часі, то задачу ДО називають *динамічною*. У цьому випадку найчастіше використовують поетапну (багатокрокову) процедуру ухвалення рішення.

Прикладом динамічної задачі ДО може слугувати класична навігаційна задача, у якій необхідно знайти програму керування рулями корабля для досягнення деякої точки із заданої початкової точки за *мінімальний* час.

2. *Класифікація задач ДО за структурою інформаційного стану ОУР*. Інформаційний стан ОУР може відповідати одному фізичному стану об’єкта досліджень або множині фізичних станів. У першому випадку задачу ДО називають *детермінованою*, у другому – *стохастичною* (ЗУР в умовах ризику), якщо відомі апріорні ймовірності перебування об’єкта досліджень у кожному зі станів, або *невизначеною* (ЗУР в умовах невизначеності), якщо інформація щодо апріорних ймовірностей відсутня.

Головною умовою побудови та використання детермінованих моделей слугує припущення, що на етапі постановки задачі абсолютно точною є інформація стосовно усіх початкових параметрів та некерованих змінних моделі. Типову задачу ДО в детермінованій постановці формулюють так: визначити вектор $\overline{x}\,(x_1, x_2, ..., x_n)$, для компонент якого

$$y = f(\overline{x}) \to \max/\min, \tag{1.11}$$

$$g_i(\overline{a}, \overline{x})\{\le,=,\ge\} b_i; \quad (i = \overline{1, m}), \tag{1.12}$$

$$x_j \ge 0; \; (j = \overline{1, n}). \tag{1.13}$$

Однак економічні системи функціонують і розвиваються за умов невизначеності, тобто досить важко, а іноді і неможливо, мати точні значення деяких параметрів математичної моделі, передусім коли прогнозується розвиток процесів у майбутньому (тобто параметри системи стають *збуреннями*). Це і знайшло відображення у постановці задачі (1.8) – (1.10).

Невизначеність може бути різного ступеня залежно від того, яку інформацію ми маємо про досліджуваний процес чи явище. Обмеженість або неточність інформації щодо моделі зумовлює до трьох нових типів задачі ухвалення рішень:

- ухвалення рішень в *умовах ризику* (степінь неповноти даних виражається через функцію розподілу ймовірностей);
- ухвалення рішень в *умовах невизначеності* (інформація щодо апріорних ймовірностей відсутня);
- ухвалення рішень в *умовах конфлікту* або *протидії* активного суперника.

Іншими словами, *визначеність* і *невизначеність* є крайніми випадками вичерпності даних, а *ризик* займає проміжне становище. І в умовах ризику, і в умовах невизначеності не передбачають, що сама система намагається “нашкодити” ОУР (природа нейтральна).

У задачах ухвалення рішень в умовах невизначеності існують ситуації конкуренції, коли два (або більше) учасники перебувають у конфлікті й кожен намагається якомога більше виграти в іншого (інших). Ця ситуація відрізняється від *звичайних* задач ухвалення рішень в умовах невизначеності (протилежним учасником є зовнішнє середовище – природа) тим, що ОУР протистоїть *розумний* суперник.

3. *Класифікація задач ДО за виглядом критерія оптимальності*. Критерієм оптимальності найчастіше слугує вимога максимізації/мінімізації значень деякої скалярної функції (функції мети), визначеної на деякій множині допустимих розв’язків (приклади 1.2– 1.3). У цьому випадку задачу ДО називають задачею *математичного програмування*. Якщо ж критерієм оптимальності є вимога максимізації/мінімізації декількох скалярних функцій, то відповід-

ну задачу ДО називають задачею *багатокритеріальної* (векторної) *оптимізації* (приклад 1.1).

Історія розвитку дослідження операцій на початкових етапах формування дисципліни дещо збігається з історією розвитку математичного програмування. Однак зводити ДО до матпрограмування не можна, адже теорія математичного програмування виникла і розвинулася завдяки потребам ДО. Математичне програмування слугує *базовим апаратом* ДО. Проте сама теорія ДО не зводиться тільки до розв'язування екстремальних задач.

Візьмемо приклад задачі складання розкладу робіт. Кількість можливих варіантів є скінченою. З погляду математики задача не містить принципових труднощів, її можна розв'язати простим перебором. Якщо ж кількість робіт є достатньо великою, то перебір вимагає астрономічного часу (при 1000 робіт – час існування Галактики). Отож в задачах складання розкладу неможливо обійтися без неформальних (евристичних) методів.

Критерій оптимальності може набувати довільного вигляду, у тім числі і *неформалізованого* (функцію *мети* не задано). У прикладах 1.4 – 1.5 ставиться вимога оптимізації певного критерія-ознаки (*мінімізація* витрат на ремонт верстатів чи пошук вірусів). Керівне рішення при цьому отримується за певним алгоритмом (приклад 1.4) чи визначається за певними принципами (приклад 1.5).

4. *Класифікація задач ДО за змістовною постановкою*. Деякі параметричні задачі ДО, які вирізняються специфічними змістовними інтерпретаціями, проблематикою і термінологією, мають назву *моделей* ДО. Зазвичай, кожна модель налічує власні методи розв'язування. Діапазон моделей дуже широкий. Передусім, виокремлюють *конкретні задачі*, які відрізняються лише числовими значеннями параметрів:

– задачі розподілу ресурсів;
– транспортні задачі (вибір маршрутів);
– задачі про призначення;
– задачі розміщення об'єктів;
– задачі планування та керування на мережах;
– задачі про розкрій матеріалу тощо.

Окремі моделі є доволі розгалуженими дисциплінами:

- моделі складання розкладу робіт (або календарне планування);
- моделі керування запасами;
- теорія надійності (задачі ремонту та заміни обладнання);
- моделі теорії ігор;
- моделі систем масового обслуговування.

1.8. Математичні методи дослідження операцій

Під математичними методами ДО, зазвичай, розуміють математичний апарат (спеціально розроблений чи адаптований), який призначено для розв'язування задач ДО. Розробленість математичних методів для різних класів задач ДО є далеко не однаковою. Найбільш розроблена теорія лінійного й опуклого програмування.

У матемачному програмуванні найчастіше розглядають задачі, у яких множина допустимих розв'язків G є підмножиною R^n, що задовольняє системі лінійних нерівностей

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i = \overline{1,m}.$$

Таку множину, якщо вона непорожня й обмежена, називають *опуклим багатогранником*.

Якщо множина допустимих розв'язків G є опуклим багатогранником, а цільова функція f – *лінійна*, то задачу ДО називають задачею *лінійного програмування*. Якщо множина допустимих розв'язків G є опуклим багатогранником, а цільова функція f – *квадратична*, то задачу ДО називають задачею *квадратичного програмування*. Якщо $G \subset R^n$ – опукла множина, а f – *опукла* функція, то задачу ДО називають задачею *опуклого програмування*.

В інших задачах математичного програмування множина G може бути скінченною множиною. Такі задачі належать до *дискретного програмування*. У них допустимі рішення можуть бути точками цілочислової ґратки Z^n (*цілочислове програмування*) чи векторами, кожна координата яких може набувати лише двох значень (*булеве програмування*). В окремих задачах елементи множини допустимих розв’язків можуть бути *перестановками* скінченного числа символів і т.д.

Множина допустимих розв’язків G може бути підмножиною деякого функціонального простору. У цьому випадку одержуємо задачу *варіаційного числення* або задачу *оптимального керування*.

Задачі ухвалення рішень в *умовах ризику* моделюються умовними екстремальними задачами, в яких параметри умов або складові розв’язку – *випадкові величини*. Умовні екстремальні задачі з випадковими величинами є предметом *стохастичного програмування*. У стохастичному програмуванні частіше, ніж в інших розділах математичного програмування, значні труднощі виникають не лише у розробленні методів розв’язування задач, а також під час їхньої постановки. Адже у постановці задачі необхідно відобразити *особливості* ухвалення рішень за умов невизначеності. Постановка задачі стохастичного програмування залежить, передусім, від її мети та інформаційної структури. Ухвалення рішень в умовах конфлікту вивчає *теорія ігор*.

Методи *евристичного програмування* використовують у тих задачах, в яких визначити оптимум неможливо унаслідок великої кількості варіантів. Використовуючи спеціальні прийоми (“евристики”), відшукують задовільний розв’язок з погляду ОУР.

Існують два методи наближення оптимального розв’язку: *аналітичний* і *числовий*. Аналітичний розв’язок одержують абстрактно, використовуючи різні розділи математики. Числові процедури полягають у підбиранні різних значень керованих змінних. Такі процедури можуть реалізовуватися як метод спроб і помилок або як складні ітераційні методи, що володіють певним набором правил для визначення наближеного оптимального розв’язку.

Справжнім початком математичного програмування вважають праці радянського вченого Л. В. Канторовича. Наприкінці 30-х років ним уперше сформульовано та досліджено основні задачі, критерії оптимальності, економічну інтерпретацію, методи розв’язання та геометричну інтерпретацію результатів розв’язання задач лінійного програмування (1939 р. вийшла його монографія “Математичні методи організації і планування виробництва”). Термін *лінійне програмування* введено у 1951 році американськими вченими Дж. Данцігом та Г. Кумпансом.

У 1947 році Дж. Данцігом розроблено також основний метод розв'язування задач лінійного програмування – симплексний метод, що вважається початком формування лінійного програмування як самостійного напряму математичного програмування. Наступним кроком стали праці Дж. Неймана (1947) щодо розвитку концепції двоїстості.

Періодом найінтенсивнішого розвитку математичного програмування є п'ятдесяті роки минулого століття. У цей час з'являються розробки нових алгоритмів, теоретичні дослідження з різних напрямів математичного програмування: 1951 року – праця Г. Куна і А. Таккера, в якій наведено необхідні та достатні умови оптимальності нелінійних задач; 1954 року – Чарнес і Лемке розглянули наближений метод розв'язання задач з сепарабельним опуклим функціоналом та лінійними обмеженнями; 1955 року – кілька робіт, присвячених квадратичному програмуванню. У п'ятдесятих роках сформувався метод динамічного програмування, значний вклад у розвиток якого вніс американський математик Р. Беллман.

? Запитання для самоперевірки

1. Дайте визначення ДО.
2. Сформулюйте задачу ухвалення рішень в узагальненому вигляді.
3. Охарактеризуйте предмет і мету ДО.
4. Перелічіть базові принципи ДО.
5. Коротко охарактеризуйте принцип оптимальності.
6. Перелічіть головні етапи ДО.
7. Коротко охарактеризуйте етап постановки задачі та розроблення концептуальної моделі.
8. Що таке керовані/вихідні змінні у задачі ухвалення рішення?
9. Що таке параметри/збурення у задачі ухвалення рішення?
10. Що таке цільова функція у задачі ухвалення рішення?
11. Сформулюйте математичну модель задачі ухвалення рішення.
12. Наведіть класифікацію задач ДО за зміною в часі інформаційного стану ОУР.
13. Наведіть класифікацію задач ДО за структурою інформаційного стану ОУР.

14. Наведіть класифікацію задач ДО за критерієм оптимальності.
15. Наведіть класифікацію задач ДО за змістовною постановкою.
16. Перерахуйте основні класи методів математичного програмування.
17. У чому полягає особливість стохастичного програмування?
18. Що вивчає теорія ігор?

🕮 Завдання для самостійної роботи

Завдання 1.1. Розробити математичну модель задачі ДО. У наведених нижче задачах (якщо не вказано інше):

- одиниці вимірювання ресурсів і норм витрат вважати однаковими, отож розмірність не вказують;
- норми витрат зачислюють до одного виробу;
- під трудовими ресурсами розуміють витрати часу на виробництво продукції і вимірюють у людино-годинах (л.г.);
- прибуток і гроші вимірюють в умовних одиницях.

1. Знайти максимальний прибуток цеху від продажу виробів *A* та *B*, якщо запаси ресурсів, норми витрат і прибуток від одного виробу становлять:

Вид ресурсу	Запаси ресурсів	Норми витрат	
		Виріб *A*	Виріб *B*
Лист металу	16	0,074	0,100
Пластмаса	28	0,089	0,350
Деревина	10	0,050	0,040
Гроші	32	0,440	0,083
Трудові ресурси	16	0,100	0,130
Прибуток з 1 виробу		2,4	3,2

2. Знайти максимальний прибуток кафе від продажу смаженини та котлет, якщо запаси ресурсів, норми витрат і прибуток від однієї порції страви становлять:

Вид ресурсу	Запаси ресурсів	Норми витрат	
		Смаженина	Котлети
М’ясо	20	0,40	0,15
Крупа	24	0,20	0,30
Картопля	16	0,25	0,20
Гроші	12	0,17	0,22
Трудові ресурси	4	0,06	0,04
Прибуток від 1 порції страви		4,0	5,4

3. Розрахувати максимальний прибуток ковбасного цеху від продажу ковбас *A* та *B*, якщо запаси ресурсів, норми витрат і прибуток в розрахунку на 1 кг ковбаси становлять:

Вид ресурсу	Запаси ресурсів	Норми витрат	
		Ковбаса *A*	Ковбаса *B*
М'ясо	40	0,700	1,300
Сало	20	0,550	0,300
Спеції	2	0,025	0,100
Гроші	4	0,023	0,040
Трудові ресурси	8	0,203	0,500
Прибуток від 1кг ковбаси		3,2	4,8

4. Розрахувати максимальний прибуток бару від продажу бутербродів *A* та *B*, якщо запаси ресурсів, норми витрат і прибуток від продажу одного бутерброда становлять:

Вид ресурсу	Запаси ресурсів	Норми витрат	
		Бутерброд *A*	Бутерброд *B*
Хліб	8	0,050	0,100
М'ясо	24	0,150	0,600
Гроші	4	0,062	0,042
Трудові ресурси	12	0,140	0,140
Прибуток від 1 бутерброда		6	12

5. Розрахувати максимальний прибуток цеху від продажу іграшок *A* та *B*, якщо дано запаси ресурсів, норми витрат і прибуток від однієї іграшки:

Вид ресурсу	Запаси ресурсів	Норми витрат	
		Іграшка *A*	Іграшка *B*
Шкіра	40	0,13	0,22
Вата	32	0,43	0,78
Фарба	8	0,08	0,03
Гроші	12	0,80	0,35
Трудові ресурси	20	0,15	0,07
Прибуток від 1 іграшки		2	3

6. Комерційна фірма рекламує свою продукцію, використовуючи місцеві радіо- та телемережі. Витрати на рекламу в бюджеті фірми становлять 10 000 грн протягом місяця. Одна хвилина радіореклами коштує фірмі 5 грн, а телереклами – 90 грн. Фірма має намір використовувати радіорекламу принаймні вдвічі частіше, ніж рекламу на телебаченні. Досвід засвідчує, що обсяг збуту, який забезпечує 1 хв телереклами, у 10 разів перевищує обсяг збуту, що забезпечує 1 хв радіореклами. Визначити оптималь-

ний розподіл коштів, які щомісяця доводиться витрачати на рекламу, внаслідок чого обсяг збуту продукції фірми буде найбільшим.

7. Сільськогосподарське підприємство спеціалізується на вирощуванні капусти та томатів, використовуючи для підвищення їхньої урожайності мінеральні добрива (фосфорні та калійні). Норми внесення мінеральних добрив під кожну культуру та їхні запаси у господарстві становлять:

Мінеральні добрива	Норма внесення добрива (кг діючої речовини / га)		Запас добрив, кг
	капуста	томати	
Фосфорні	150	400	6000
Калійні	500	300	9000

Для вирощування овочів відведено земельну ділянку площею 20 га. Очікуваний прибуток господарства від реалізації 1 ц капусти становить 10 у.о., а томатів – 20 у.о. Середня врожайність капусти в господарстві дорівнює 300 ц/га, а томатів – 200 ц/га. Визначити такий варіант розміщення культур на земельній ділянці, який максимізуватиме прибуток господарства за умови, що витрати мінеральних добрив не перевищуватимуть їхніх запасів.

8. Фірма виготовляє продукцію *A* та *B*, використовуючи для цього два види сировини, добові запаси якої не повинні перевищувати, відповідно, 210 та 240 кг. Для виготовлення одиниці продукції *A* необхідно 2 кг першої сировини і 3 кг другої сировини. Для виготовлення одиниці продукції *B* необхідно 5 кг першої сировини і 4 кг другої сировини. Відділ збуту рекомендує, щоб виробництво продукції *B* становило не більше, ніж 65% загального обсягу реалізації продукції обох видів. Ціни одиниці продукції *A* та *B* дорівнюють, відповідно, 10 та 40 грн. Визначити оптимальний план виробництва продукції, за якого максимізується дохід фірми.

9. Фірма виготовляє деталі видів *A* та *B*, ринок збуту яких практично необмежений. Будь-яка деталь має пройти послідовну обробку на трьох верстатах, тривалість використання кожного з яких становить 10 год./добу. Тривалість обробки однієї деталі на кожному верстаті становить:

Деталь	Тривалість обробки деталі на верстатах, хв.		
	1	2	3
A	10	6	8
B	5	20	15

Прибуток від оптової реалізації однієї деталі видів *A* та *B* становить, відповідно, 20 та 30 грн. Визначити оптимальні добові обсяги виробництва деталей кожного виду, що максимізують прибуток фірми.

10. Підприємство виготовляє письмові столи типів *A* та *B*. Для одного столу типу *A* необхідно 2 м^2 деревини, а для столу типу *B* – 3 м^2. Підприємство може отримувати до 1200 м^2 деревини на тиждень. Для виготовлення одного столу типу *A* необхідно 12 хв роботи обладнання, а для моделі *B* – 30 хв. Обладнання можна використовувати 160 годин на тиждень. Оцінено, що за тиждень можна реалізувати не більше 550 столів. Прибуток від реалізації одного письмового столу типу *A* становить 130 грн, а типу *B* – 140 грн. Скільки столів кожного типу необхідно виготовляти за тиждень, щоб прибуток підприємства був максимальним?

11. Знайти максимальний прибуток цеху від продажу виробів *A* та *B*, якщо запаси ресурсів, норми витрат і прибуток від одного виробу становлять:

Вид ресурсу	Запаси ресурсів	Норми витрат	
		Виріб *A*	Виріб *B*
Лист металу	36	0,05	0,10
Пластмаса	63	0,07	0,35
Деревина	23	0,05	0,18
Трудові ресурси	36	0, 10	0,13
Прибуток з 1 виробу		3,6	4,8

12. Розрахувати максимальний прибуток ковбасного цеху від продажу ковбас *A* та *B*, якщо запаси ресурсів, норми витрат і прибуток в розрахунку на 1 кг ковбаси становлять:

Вид ресурсу	Запаси ресурсів	Норми витрат	
		Ковбаса *A*	Ковбаса *B*
М’ясо	90	0,700	1,300
Сало	45	0,550	0,300
Спеції	4,5	0,025	0,100
Гроші	9	0,034	0,040
Трудові ресурси	18	0,290	0,500
Прибуток від 1кг ковбаси		7,2	10,8

13. Знайти максимальний прибуток підприємства від продажу пального *A* і *B*, якщо дано запаси ресурсів, норми витрат, прибуток від 1 кг пального:

Вид ресурсу	Запаси ресурсів	Норми витрат	
		Пальне *A*	Пальне *B*
Бензин	70	0,1	0,3
Гас	300	0,5	0,7
Дизельне пальне	200	0,4	–
Трудові ресурси	16	0,04	0,02
Прибуток від 1 кг пального		2,4	3,2

2. ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

План викладу матеріалу:

1. Форми запису задачі лінійного програмування (ЗЛП).
2. Властивості багатогранних множин.
3. Графічна інтерпретація задач у лінійному програмуванні (ЛП).
4. Властивості розв'язків задачі лінійного програмування.
5. Симплексний метод розв'язування задачі ЛП.
6. Алгоритм симплексного методу.
7. Знаходження опорних планів.
8. Двоїстість у лінійному програмуванні.
9. Двоїстий симплексний метод розв'язування задачі ЛП.

Ключові терміни розділу

- *Стандартні форми запису ЗЛП*
- *Канонічна форма запису ЗЛП*
- *Зведення до стандартної форми*
- *Зведення ЗЛП до канонічної форми*
- *Багатогранна множина*
- *Опуклий багатогранник*
- *Кутові точки*
- *Кутовий напрям множини*
- *Базис кутової точки*
- *Базисні координати*
- *Невироджена кутова точка*
- *Вироджена кутова точка*
- *Допустимі та опорні плани*
- *Оптимальний план*
- *Сиплексний метод*
- *Симплекс-різниці*
- *Симплекс-таблиця*
- *Перетворення у таблицях*
- *Допоміжні задачі*
- *Виродженість опорного плану*
- *Антициклін*
- *Двоїсті задачі*

2.1. Форми запису задачі лінійного програмування

Відповідно до класифікації задач ДО (див. 1.7, 1.8), якщо множина (область) допустимих розв'язків $G \subset R^n$ – *опуклий багатогранник*, а цільова функція f – *лінійна*, то задачу ДО називають *задачею лінійного програмування* (ЗЛП). Теорія розв'язування таких задач є предметом дослідження лінійного програмування.

Задачі прикладів 1.2 і 1.3 – це задачі лінійного програмування. До цільових функцій цих задач ставлять різні вимоги: у задачі про пайок (1.2) необхідно визначити *мінімум* цільової функції, а у задачі про розподіл (приклад 1.3) – *максимум*. У задачі про пайок обмеження, здебільшого, мали вигляд “не менше (≥)”, а у задачі про ресурси – “не більше (≤)”.

Такий різнобій є незручним при розробленні алгоритмів розв’язування таких задач. Отож існують *стандартні форми* задачі лінійного програмування, які надалі (здебільшого) подаватимемо у векторній або векторно-матричній формі.

Векторами надалі вважатимемо *вектори-стовпці* відповідної розмірності. Якщо $\overline{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)^T$ і $\overline{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)^T$, то $\overline{u} \le \overline{v}$ означатиме, що $\forall\, j = \overline{1,n}: u_j \le v_j$. Аналогічно $\overline{u} = \overline{v}$ означає, що $\forall\, j = \overline{1,n}: u_j = v_j$ і т.д.

Перша стандартна форма задачі лінійного програмування:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \tag{2.1}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i = \overline{1,m}; \\ \quad x_j \ge 0,\ j = \overline{1,\,n}. \end{cases} \tag{2.2}$$

У *векторному* вигляді задачу (2.1), (2.2) зображають так:

$$f(\overline{x}) = (\overline{c}, \overline{x}) \to \max, \tag{2.3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{A}_j x_j \le \overline{b}; \tag{2.4}$$

$$\overline{x} \ge \overline{0}_n, \tag{2.5}$$

де

$f(\overline{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – цільова функція (лінійний *функціонал* або лінійна *форма*);

$\overline{A}_j = (a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{mj})^T$ – j-й ($j = \overline{1,\,n}$) вектор-стовпець *умов*;

$\overline{b} = (b_1, b_2, ..., b_m)^T$ – вектор *обмежень*;

$\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ – вектор *невідомих* (змінних);

$\overline{c} = (c_1, c_2, ..., c_n)^T$ – вектор *коефіцієнтів* лінійної форми;

$(\overline{c}, \overline{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ – скалярний добуток;

$\overline{0}_n = (0, 0, ..., 0)^T$ – нуль-вектор розмірності n;

(2.4) – *головні обмеження*, (2.5) – *обмеження на знак*.

У *векторно-матричному* вигляді задачу (2.1), (2.2) зображають так:

$$f(\overline{x}) = \overline{c}^T \,\overline{x} \to \max, \tag{2.6}$$

$$\begin{cases} A\overline{x} \le \overline{b}, \\ \overline{x} \ge \overline{0}_n, \end{cases} \tag{2.7}$$

де матрицю $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ називають *матрицею умов*.

Друга стандартна форма задачі ЛП має вигляд:

$$f(\overline{x}) = \overline{c}^T \,\overline{x} \to \min, \tag{2.8}$$

$$\begin{cases} A\overline{x} \ge \overline{b}, \\ \overline{x} \ge \overline{0}_n . \end{cases} \tag{2.9}$$

Канонічна форма задачі ЛП має вигляд:

$$f(\overline{x}) = \overline{c}^T \,\overline{x} \to \min, \tag{2.10}$$

$$\begin{cases} A\overline{x} = \overline{b}, \\ \overline{x} \ge \overline{0}_n. \end{cases} \tag{2.11}$$

Будь-який набір змінних x_j ($j = \overline{1, n}$), що задовольняє *обмеження* задач ЛП (умови 2.2, 2.4-2.5, 2.7 чи 2.11), називають *допустимим розв'язком* (або *планом*) ЗЛП, а множину усіх таких *розв'язків* – *областю допустимих розв'язків* (ОДР). Розв'язок, за якого цільова функція набуває екстремального значення, – *оптимальний*.

Розглянемо тепер ті прийоми, за яких довільні форми ЗЛП зводять до зазначених вище форм:

1. *Перетворення* **min** (функціонала) на **max**, і *навпаки*. Якщо цільову функцію задано у вигляді

$$f(\bar{x}) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \to \min,$$

то домножуючи її на (–1), отримаємо

$$-f(\bar{x}) = (-c_1)x_1 + (-c_2)x_2 + \ldots + (-c_n)x_n \to \max.$$

Очевидно, що $\min f(\bar{x}) = -\max(-f(\bar{x}))$.

Аналогічно можна замінити **max** (функціонала) на **min**.

2. *Зміна знака нерівності*. Якщо обмеження має вигляд

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i, \quad i = \overline{1,m},$$

то, домножуючи його на (–1), отримаємо

$$(-a_{i1})x_1 + (-a_{i2})x_2 + \ldots + (-a_{in})x_n \ge -b_i.$$

Аналогічно, нерівність вигляду *більше* або *дорівнює* можна перетворити у нерівність вигляду *менше* або *дорівнює*.

3. *Перетворення рівності у систему нерівностей.* Якщо обмеження має вигляд

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i, \quad i = \overline{1,m},$$

то його можна замінити еквівалентною системою нерівностей

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i,$$
$$(-a_{i1})x_1 + (-a_{i2})x_2 + \ldots + (-a_{in})x_n \le -b_i,$$

чи такою ж системою нерівностей зі знаками *більше* або *дорівнює*.

Прийоми 1 – 3 дають змогу зводити ЗЛП до потрібної *стандартної* форми.

4. *Перетворення нерівностей у рівності*. Нехай вихідна форма задачі лінійного програмування має *загальний* вигляд:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \min,$$
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i,\ i = \overline{1,r},$$
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \ge b_i,\ i = \overline{r+1,p},$$
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i,\ i = \overline{p+1,m},\quad x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}.$$

Для зведення задачі до канонічної форми вводять *допоміжні* змінні $x_{n+k} \geq 0,\ k = \overline{1,\ p}.$ Тоді вихідну ЗЛП записують так

$$c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n + 0 \cdot x_{n+1} + ... + 0 \cdot x_{n+p} \to \min,$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n + x_{n+i} = b_i,\ i = \overline{1, r},$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n - x_{n+i} = b_i,\ i = \overline{r+1, p},$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = b_i,\ i = \overline{p+1, m};\ \ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,\ n+p}.$$

Отримуючи розв’язок ЗЛП у канонічній формі, відкидають з цього розв’язку допоміжні змінні.

5. *Обмеження на невід’ємність змінних.* В усіх формах ЗЛП потрібно, щоб змінні були *невід’ємними*. У реальних задачах часто на змінні накладають двосторонні обмеження вигляду $\alpha_i \leq x_i \leq \beta_i$, або ж умови невід’ємності для деякої змінної може не існувати. Вважаємо, що для зведення початкової ЗЛП до канонічного вигляду треба тільки усунути одну із названих причин.

- У випадку *двостороннього обмеження* вводимо допоміжні змінні $x_i' = x_i - \alpha_i \geq 0;\ x_i'' = \beta_i - x_i \geq 0.$ Після цього двостороннє обмеження набуде *модифікованого* вигляду:

  $$x_i' + x'' = \beta_i - \alpha_i,$$
  $$x_i' \geq 0, \quad x'' \geq 0.$$

  Після підстановки у початкову ЗЛП $x_i = x_i' + \alpha_i$ і додавання обмеження модифікованого вигляду ця задача отримає канонічний вигляд.
- Якщо для деякої змінної відсутня умова *невід’ємності*, то вводимо дві допоміжні змінні $x_i' \geq 0,\ \ x_i'' \geq 0$ та у початковій ЗЛП робимо заміну $x_i = x_i' - x_i''.$ Після цього отримаємо канонічну форму ЗЛП.

2.2. Властивості багатогранних множин

Нагадаємо деякі поняття з теорії множин і лінійної алгебри.

Точку множини називають *граничною*, якщо будь-яка куля як завгодно малого радіуса з центром у цій точці містить точки, які і належать множині, і їй не належать. Множину називають *замкнутою*, якщо вона містить усі свої граничні точки.

Множину називають *обмеженою*, якщо існує куля з радіусом скінченної довжини і центром у будь-якій точці множини, яка цілковито містить у собі цю множину. У протилежному випадку множина буде *необмеженою*.

Означення 2.1. *Опуклою комбінацією точок* (векторів) $\bar{x}_1,...,\bar{x}_l$ множини $X \subset R^n$ називають точку $\bar{x} \in X$, для якої справджується співвідношення $\bar{x} = \sum\limits_{i=1}^{l} \alpha_i \bar{x}_i$, де $\alpha_i \geq 0$, $i = \overline{1,l}$; $\sum\limits_{i=1}^{l} \alpha_i = 1$.

Означення 2.2. Множину точок (векторів) $X \subset R^n$ називають *опуклою*, якщо для будь-якої пари точок $\bar{x}_1 \in X$ і $\bar{x}_2 \in X$ точка $\bar{x} = \lambda \bar{x}_1 + (1-\lambda)\bar{x}_2$, де $\lambda \in (0,1)$, також належить множині *X*.

Геометрично це означає: якщо множина $X \subset R^n$ – *опукла*, то відрізок, який з'єднує довільну пару точок $\bar{x}_1 \in X$ і $\bar{x}_2 \in X$, цілковито належить множині *X*.

Лема 2.1. Переріз довільної кількості опуклих множин є опуклою множиною.

➢ Нехай точки $\bar{x}_1$ і $\bar{x}_2$ належать перерізу. Тоді ці точки належать і кожній множині, що утворює цей переріз. Оскільки ці множини опуклі, то *відрізок*, який з'єднує точки $\bar{x}_1$ і $\bar{x}_2$, належить кожній з них, а, отже, належить і їхньому перерізу. А це означає, що переріз також опуклий. ≺

Для аналізу опуклих множин важливе значення мають їхні *кутові* (або *крайні*) точки.

Означення 2.3. Нехай $X \subset R^n$ непорожня опукла множина. Точку $\bar{x} \in X$ називають *кутовою точкою* множини *X*, якщо представлення $\bar{x} = \lambda \bar{x}_1 + (1-\lambda)\bar{x}_2$, де $\bar{x}_1 \in X$, $\bar{x}_2 \in X$, $\lambda \in (0, 1)$, можливе тільки при $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \bar{x}$.

Отож, кутові точки трикутника – його вершини, круга – точки кола, яке його обмежує. Пряма, півплощина, площина, півпростір чи простір не мають кутових точок.

Приклади (рис. 2.1) *множин кутових точок* (позначення S):

1. $X = \left\{ (x_1, x_2)^T : x_1^2 + x_2^2 \le 1 \right\}$, $S = \left\{ (x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 = 1 \right\}$.
2. $X = \left\{ (x_1, x_2)^T : x_1 + x_2 \le 2; -x_1 + 2x_2 \le 2,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \right\}$,

$$S = \left\{ (0,0)^T; (0,1)^T; \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3} \right)^T; (2,0)^T \right\}.$$

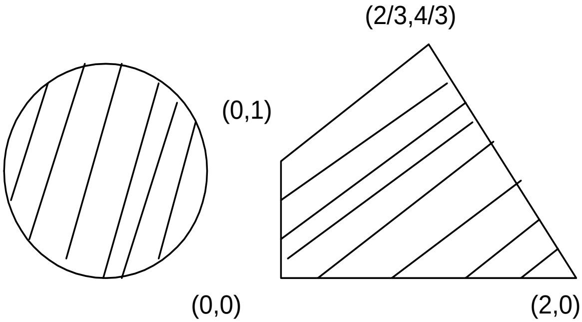


Рис.2.1. Множини кутових точок

Означення 2.4. Півпростором $X_i \subset R^n$ називають множину, яка визначається умовою $X_i = \left\{ \bar{x} \in R^n : \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ b_i \in R \right\}$.

Оскільки рівняння межі

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \tag{2.12}$$

визначає гіперплощину в просторі R^n, то півпростір – це частина простору R^n, межею якого є *гіперплощина*, що задається (2.12). Легко довести, що півпростір є *опуклою* множиною.

Означення 2.5. Непорожню множину $X \subset R^n$ називають *багатогранною*, якщо вона є перерізом скінченної кількості замкнутих півпросторів, тобто

$$X = \left\{ \overline{x} \in R^n : \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i,\ i = \overline{1,m} \right\}.$$

Очевидно, що багатогранна множина – *замкнута* й *опукла*. Якщо багатогранна множина *обмежена*, то її називають *опуклим багатогранником*.

Оскільки рівність можна замінити парою нерівностей, то багатогранну множину можна зобразити за допомогою скінченної кількості рівностей та нерівностей. Типовими прикладами багатогранних множин є такі:

$$X = \left\{\overline{x} \in R^n : A\overline{x} \le \overline{b}\right\}; \qquad X = \left\{\overline{x} \in R^n : A\overline{x} = \overline{b},\ \overline{x} \ge \overline{0}\right\};$$

$$X = \left\{\overline{x} \in R^n : A\overline{x} \ge \overline{b},\ \overline{x} \ge \overline{0}\right\}; \quad X = \left\{\overline{x} \in R^n : A\overline{x} = \overline{b_1},\ A\overline{x} \le \overline{b_2},\ \overline{x} \ge \overline{0}\right\}.$$

Опуклі багатогранники мають фундаментальну властивість, яку широко використовують у лінійному програмуванні. Її сформульовано у лемі [7]:

Лема 2.2. Нехай $X \subset R^n$ – опуклий багатогранник з кутовими точками $\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_p$. Тоді будь-яку точку $\overline{x}_0 \in X$ можна зобразити опуклою комбінацією кутових точок, тобто

$$\overline{x}_0 = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \overline{x}_i, \text{ де } \alpha_i \ge 0,\ i = \overline{1,p};\ \sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1. \tag{2.13}$$

➢ Доведення цієї леми подано у [7, 10]. ≺

У випадку *необмежених* багатогранних множин вести мову про опуклу комбінацію не можна. Наприклад, багатогранна множина $X = \{(x_1, x_2) \in R^2 : x_2 \geq |x_1|\}$ (рис. 2.2) має лише одну кутову точку. Для таких множин вводять поняття *кутового напряму множини* (або напрямного вектора необмеженого ребра множини).

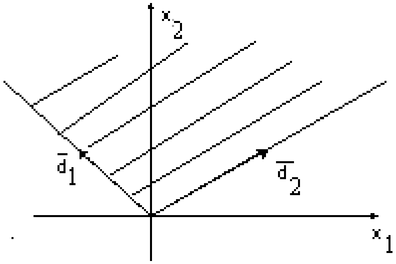


Рис. 2.2. Кутові напрями множини

Означення 2.6. Нехай $X \subset R^n$ – багатогранна множина. Тоді:

Точку $\bar{d} \neq \bar{0}$, $\bar{d} \in R^n$ називають *напрямом множини X*, якщо для будь-якої точки $\bar{x} \in X$ точка $\bar{x} + \lambda\bar{d} \in X$ для $\lambda \geq 0$.

Два напрями $\bar{d}_1, \bar{d}_2$ є однаковими, якщо $\bar{d}_1 = \alpha\bar{d}_2, \alpha > 0$.

Напрям $\bar{d}$ множини *X* є *кутовим*, якщо його не можна зобразити у вигляді додатної лінійної комбінації двох різних напрямів множини *X*.

Якщо $\bar{d}$ – кутовий напрям і $\bar{d} = \lambda_1\bar{d}_1 + \lambda_2\bar{d}_2$, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, то $\bar{d}_1 = \alpha\bar{d}_2$ при деякому $\alpha > 0$ (з означення 2.7). Для множини *X*, зображеної на рис. 2.2, кутовими є напрями $\bar{d}_1$ і $\bar{d}_2$.

Лема 2.3. Вектор $\bar{d} \neq 0$ є *кутовим напрямом* множини $X = \{\bar{x} \in R^n : A\bar{x} = \bar{b}, \bar{x} \geq \bar{0}\}$ тоді і тільки тоді, коли $A\bar{d} = \bar{0}$, $\bar{d} \geq \bar{0}$.

➢ Справді, для $\bar{x} \in X$, $\bar{x} + \lambda\bar{d} \in X$ маємо $A(\bar{x} + \lambda\bar{d}) = \bar{b}$, $A\bar{x} = \bar{b}$, тоді $\lambda A\bar{d} = \bar{0}$. А при $\bar{x} + \lambda\bar{d} \geq \bar{0}, \lambda \to \infty$: $\bar{d} \geq -\dfrac{\bar{x}}{\lambda} = \bar{0}$. ≺

Лема 2.4. Нехай $X \subset R^n$ – багатогранна множина з кутовими точками $\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_p$ і кутовими напрямами $\bar{d}_1,...,\bar{d}_e$. Тоді будь-яку точку $\bar{x}_0 \in X$ можна зобразити у вигляді

$$\bar{x}_0 = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \bar{x}_j + \sum_{j=1}^{e} \mu_j \bar{d}_j, \tag{2.14}$$

де

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j = 1, \ \ \lambda_j \geq 0, \ \ j = \overline{1,p}; \ \mu_j \geq 0, \ \ j = \overline{1,e}.$$

➢ Доведення цієї леми наведено у [7, 10, 14]. ≺

2.3. Графічна інтерпретація ЗЛП

Опуклу замкнуту обмежену множину, яка має скінченну кількість кутових точок, на площині називають *опуклим багатокутником*, а у тривимірному просторі – *опуклим багатогранником*.

Пряма на площині поділяє останню на дві півплощини, площина у тривимірному просторі поділяє його на два півпростори; за аналогією вважатимемо, що гіперплощина теж поділяє n-вимірний простір R^n на два півпростори.

Оскільки півпростір є опуклою множиною, то перетин півпросторів, заданих системою обмежень (2.2), якщо вона не суперечлива, буде опуклим багатогранником, що утворить *область допустимих розв'язків* (ОДР) цієї системи обмежень.

За аналогією з тривимірним простором вважатимемо, що *кутовими точками* опуклого багатогранника у просторі R^n є його вершини, утворені *перетином гіперплощин*.

Будь-яка внутрішня і гранична точка області допустимих розв'язків є розв'язком системи обмежень (2.2). Прирівняємо функцію (2.1) до нуля, тоді рівняння $Z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i = 0$ зображає у R^n гіперплощину, яка проходить через початок координат перпендикулярно до вектора-градієнта $\overline{c} = \left(c_1, c_2, ..., c_n\right)^T$, що показує напрям зростання функції.

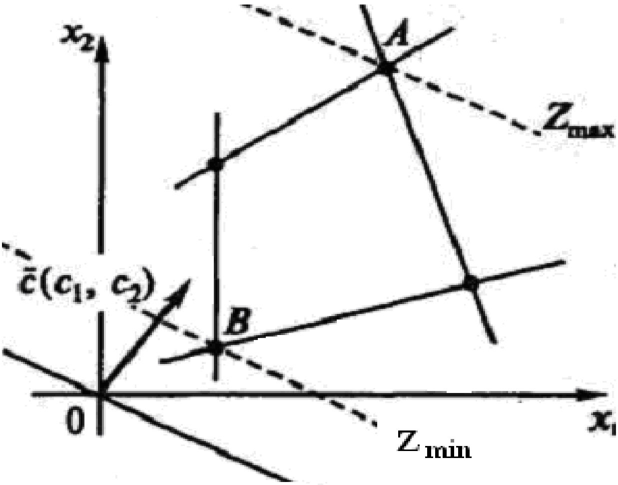


Рис.2.3. Визначення точок екстремумів на площині

Щоб визначити максимум функціонала $Z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$, необхідно пересувати гіперплощину в напрямі вектора $\overline{c}$ якнайдалі від початку координат, однак так, щоб вона мала з ОДР хоча б одну спільну точку. Щоб визначити мінімум функціонала, необхідно визначити найближчу точку в ОДР від початку координат. Випадок $n = 2$ розглянуто на рис.2.3.

Для площини на рис. 2.3 показано, що у кутовій точці A функціонал досягає максимального значення, а в кутовій точці B – мінімального. Рис. 2.4 відображає випадок, коли пряма функціонала паралельна відрізку AB, що належить ОДР. Максимум функціонала досягається у точці A і в точці В, і в будь-якій точці відрізка AB, оскільки ці точки можна зобразити лінійною комбінацією кутових точок A і B.

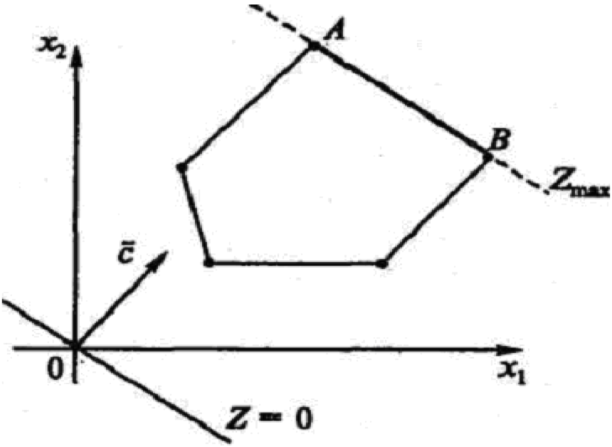
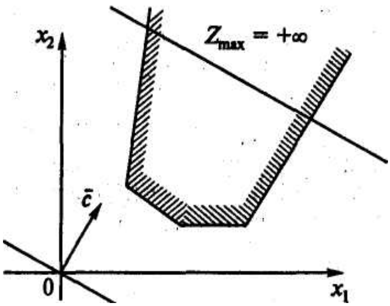


Рис.2.4. Нескінченна кількість точок екстремумів на площині

На рис. 2.5 зображено варіант, коли система обмежень утворює необмежену зверху множину. Функціонал Z при цьому прямує до нескінченності, оскільки відповідну пряму можна пересувати у напрямі вектора градієнта якнайдалі. На рис. 2.6 представлено випадок суперечливої системи обмежень (ОДР – порожня).



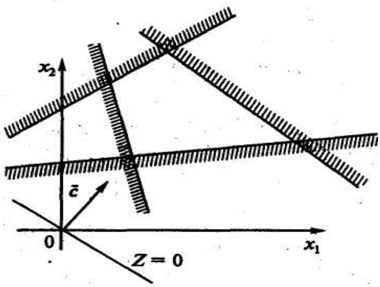


Рис. 2.5. Необмежена зверху ОДР Рис. 2.6. Суперечлива ОДР

Приклад 2.1. Розв’язування задачі лінійного програмування ($n = 2$) графічним способом. Нехай необхідно розв’язати задачу:

$$f(x_1, x_2) = 5x_1 + 6x_2 \to \max,$$

$$\begin{aligned} 0{,}2x_1 + 0{,}3x_2 &\le 1{,}8; \\ 0{,}2x_1 + 0{,}1x_2 &\le 1{,}2; \\ 0{,}3x_1 + 0{,}3x_2 &\le 2{,}4; \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 &\ge 0. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Область допустимих розв'язків (2.15) зображено на рис. 2.7. Кожна пряма $A_i B_i \quad i = 1, 2, 3$, яка відповідає конкретному обмеженню (2.15), поділяє площину на дві півплощини. Для виділення півплощини, що задовольняє обмеження, зручно підставляти в обмеження точку (0; 0).

Кожна із паралельних прямих (рис. 2.8) відповідає комбінаціям значень x_1 і x_2, для яких значення функції $y = 5x_1 + 6x_2$ є стале. Графік цієї функції пересуваємо вздовж градієнта (5, 6).

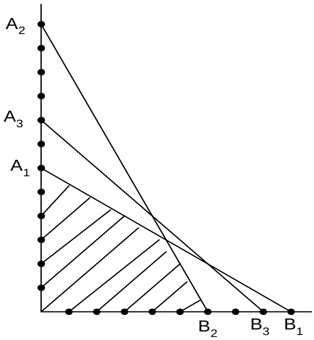


Рис. 2.7. Визначення ОДР

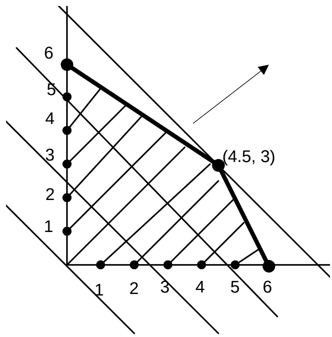


Рис. 2.8. Визначення екстремуму

Верхня пряма лінія, яка ще містить точку ОДР, визначає максимальне значення функції мети. Точка, через яку простягається ця лінія, є розв'язком поставленої задачі. Легко переконатись графічно, що оптимальний розв'язок задачі, яку розглядаємо, є єдиним і перебуває на перетині прямих, визначених першими двома умовами (2.15). Отже, оптимальний розв'язок можна визначити , розв'язавши систему рівнянь $\begin{cases} 0{,}2x_1 + 0{,}3x_2 = 1{,}8; \\ 0{,}2x_1 + 0{,}1x_2 = 1{,}2. \end{cases}$

Звідси отримаємо $x_1 = 4{,}5; \quad x_2 = 3; \quad f(x_1, x_2) = 40{,}5.$

2.4. Властивості розв'язків задачі лінійного програмування

Розглядаємо канонічну форму задачі лінійного програмування (2.10), (2.11). Система обмежень (2.11) задає множину

$$X = \left\{ \overline{x} \in R^n : A\overline{x} = \overline{b},\ \ \overline{x} \geq \overline{0}_n \right\},\ \ A \neq 0, \tag{2.16}$$

де A – матриця розмірності $m \times n$ і $\operatorname{rang} A = m$.

Припущення про те, що $\operatorname{rang} A = m$, означає вилучення лінійно залежних рівнянь з (2.11), у цьому випадку $m < n$. Якщо $m = n$, тоді у кращому випадку X містить лише одну точку і задача стає нецікавою. Систему рівнянь $A\overline{x} = \overline{b}$, згідно з (2.4) і (2.11), можна записати так:

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{A}_j x_j = \overline{b}. \tag{2.17}$$

Означення 2.7. Будь-які m невідомих (змінних) системи рівнянь (2.17) називають *базисними*, якщо визначник матриці коефіцієнтів при них (*базисний мінор* матриці) не дорівнює нулеві. Решта $n - m$ змінних називають *небазисними* (або *вільними*).

Означення 2.8. Будь-який набір змінних x_j^* $(j = \overline{1, n})$, що задовольняє систему рівнянь (2.17), називають *розв'язком* цієї системи. Розв'язок системи (2.17) називають *допустимим*, ящо усі його компоненти є невід'ємними (тобто допустимі розв'язки задовольняють систему обмежень (2.16) канонічної ЗЛП).

Означення 2.9. *Базисним розв'язком* системи рівнянь (2.17) називають розв'язок, у якого усі $n - m$ вільних змінних дорівнюють нулю.

Максимально можлива кількість різних комінацій m невідомих з усіх n невідомих дорівнює $\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$, отож кількість базисних розв'язків є скінченною.

Означення 2.10. Базисний розв'язок, у якого хоча б одне з основних невідомих дорівнює нулю, називають *виродженим*.

Означення 2.11. Базисний допустимий розв'язок називають *опорним* розв'язком ЗЛП.

Не втрачаючи загальності, вважатимемо, що перші m невідомих ($x_1,...,x_m$) системи рівнянь (2.17) є *базисними* (тобто вектори $\overline{A}_1,...,\overline{A}_m$ є лінійно незалежними). Якщо ввести позначення:

$$A_b = \left(\overline{A}_1,...,\overline{A}_m\right);\ A_s = \left(\overline{A}_{m+1},...,\overline{A}_n\right);$$

$$\overline{x}_b = \left(x_1,...,x_m\right)^T;\ \overline{x}_s = \left(x_{m+1},...,x_n\right)^T,$$

то систему рівнянь (2.17) можна записати ще так:

$$A_b\overline{x}_b + A_s\overline{x}_s = \overline{b}. \tag{2.18}$$

Між опорними розв'язками (або *опорними планами*) ЗЛП і кутовими точками області допустимих розв'язків існує взаємно-однозначна відповідність, яку сформульовано такою теоремою.

Теорема 2.1. Нехай непорожня множина $X \subset R^n$ визначена згідно (2.16). Для того, щоб точка $\overline{x} \in X$ була кутовою, необхідно і достатньо, щоб існували номери $j_{1,..,}j_m$ $\left(1 \le j_e \le n,\quad e = 1,...,m\right)$ такі, що

$$\overline{A}_{j_1}x_{j_1} + ... + \overline{A}_{j_m}x_{j_m} = \overline{b};\quad x_j = 0,\quad j \ne j_e, \tag{2.19}$$

причому стовпці $\overline{A}_{j_e}$ лінійно незалежні.

➢ ***Необхідність***. Нехай $\overline{x} \in X$ кутова точка множини *X*. Не зменшуючи загальності, вважатимемо, що $\overline{x} = (x_1,...,x_k,0,...0)$, де $x_j > 0,\ j = \overline{1,k}.$ Доведемо (від супротивного), що $\overline{A}_1,...,\overline{A}_k$ – *лінійно незалежні*. Нехай це не так, тоді $\exists\ \lambda_j\ \left(j = \overline{1,k}\right)$, які не всі дорівнюють нулю й такі, що $\sum\limits_{j=1}^{k}\lambda_j\overline{A}_j = 0$. Позначимо $\overline{\lambda} = \left(\lambda_1,...,\lambda_k,0,...,0\right)^T$.

Нехай $\overline{x}_1 = \overline{x} + \alpha\overline{\lambda},\ \overline{x}_2 = \overline{x} - \alpha\overline{\lambda},$ де $\alpha > 0,\quad \overline{x}_1 \ge \overline{0}$ і $\overline{x}_2 \ge \overline{0}$. Визначимо $A\overline{x}_1 = \sum\limits_{j=1}^{k}\left(x_j + \alpha\lambda_j\right)\overline{A}_j = \sum\limits_{j=1}^{k}x_j\overline{A}_j + \alpha\sum\limits_{j=1}^{k}\lambda_j\overline{A}_j = \overline{b}.$ Аналогічно отримаємо $A\overline{x}_2 = \overline{b}.$ Отже, $\overline{x}_1 \in X$ і $\overline{x}_2 \in X$.

Оскільки $\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$ і $\bar{x} = 0{,}5 \cdot (\bar{x}_1 + \bar{x}_2)$, то це *суперечить* тому, що $\bar{x}$ – кутова точка. Отже, $\overline{A}_1,...,\overline{A}_k$ – лінійно незалежні, а це означає, що $k \leq m$. Із решти n–k стовпців оберемо m–k так, щоб вони разом з першими стовпцями $\overline{A}_i$ утворювали m лінійно незалежних векторів. Отже, запис вигляду (2.19) правильний.

Достатність. Нехай деяка точка $\bar{x} \in X$ задовольняє умову (2.19). Не втрачаючи загальності, вважатимемо, що $j_i = i,\ i = \overline{1,m}$ (тобто вектори $\overline{A}_1,...,\overline{A}_m$ – лінійно незалежні і $\det A_b \neq 0$). Оскільки $\bar{x}_s = \bar{0}_{n-m};\ \bar{x} \in X$, то $\bar{x}_b = A_b^{-1}\bar{b}$; $\bar{x} = \begin{pmatrix} A_b^{-1}\bar{b} \\ \bar{0}_{n-m} \end{pmatrix} \geq \bar{0}_n$ (тобто $\bar{x}$ – опорний розв'язок ЗЛП).

Доведемо, що $\bar{x} \in X$ – кутова точка множини X. Припустимо, що $\bar{x} = \lambda\bar{x}_1 + (1-\lambda)\bar{x}_2$, де $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in X$, $\lambda \in (0,1)$. Запишемо так:

$$\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} \bar{x}_{11} \\ \bar{x}_{12} \end{pmatrix},\quad \bar{x}_2 = \begin{pmatrix} \bar{x}_{21} \\ \bar{x}_{22} \end{pmatrix},\ \text{де } \bar{x}_{11}, \bar{x}_{21} \in R^m,\ \bar{x}_{12},\ \bar{x}_{22} \in R^{n-m}.$$

Тоді $\begin{pmatrix} A_b^{-1}\bar{b} \\ \bar{0}_{n-m} \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} \bar{x}_{11} \\ \bar{x}_{12} \end{pmatrix} + (1-\lambda)\begin{pmatrix} \bar{x}_{21} \\ \bar{x}_{22} \end{pmatrix}$. Оскільки $\bar{x}_1 \geq \bar{0},\ \bar{x}_2 \geq \bar{0}$, то $\bar{x}_{12} = \bar{x}_{22} = \bar{0}_{n-m}$ і $A_b^{-1}\bar{b} = \lambda\bar{x}_{11} + (1-\lambda)\bar{x}_{21}$. Звідси отримуємо: $\bar{b} = \lambda(A_b\bar{x}_{11}) + (1-\lambda)(A_b\bar{x}_{21})$. Оскільки $A_b\bar{x}_{11} = A_b\bar{x}_{21} = \bar{b}$, то $\bar{x}_{11} = \bar{x}_{21} = A_b^{-1}\bar{b}$ і $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \bar{x}$. Отже, $\bar{x}$ – кутова точка. ◄

З ***необхідної умови*** теореми 2.1 випливає таке:
якщо $(x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$ – *кутова точка* множини X ($x_i \geq 0,\ i = \overline{1,m}$), то вектори $\overline{A}_1, \overline{A}_2, ... \overline{A}_m$ – лінійно незалежні і справджується умова (2.19), а це означає, що $(x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$ – *опорний* розв'язок ЗЛП.

З ***достатньої умови*** теореми 2.1 випливає таке:
якщо $(x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$ – опорний розв'язок задачі ЛП, то $(x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$ – *кутова точка* множини X.

Означення 2.12. Систему векторів $\overline{A}_1,...,\overline{A}_m$, які задовольняють теорему 2.1, називають *базисом кутової точки*, а відповідні щодо них координати кутової точки – *базисними*. Якщо усі базисні координати додатні, то таку точку називають *невиродженою*; якщо серед базисних координат є хоча б одна, що дорівнює нулю, то таку точку називають *виродженою*.

З теореми 2.1 випливають такі очевидні наслідки:

1. Кількість кутових точок множини X не більша $\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.
2. Кутова точка множини X має не більше m додатних координат.
3. Невироджена кутова точка має *єдиний* базис, який утворюють стовпці з тими номерами, які відповідають додатним координатам кутової точки.
4. Вироджена кутова точка може мати декілька базисів.
5. Множина допустимих розв'язків ЗЛП є *опуклою* множиною.
6. Опорний план ЗЛП має не більше m ненульових (додатних) змінних.
7. Кількість опорних планів ЗЛП є скінченною.

Теорема 2.2. Якщо множина допустимих розв'язків ЗЛП – *непорожня*, то вона має хоча б один опорний розв'язок (план).

➢ Фактично необхідно довести, що існує такий допустимий розв'язок, який має не більше m ненульових змінних. Нехай множина допустимих розв'язків $X \subset R^n$, визначена згідно з (2.16), є непорожньою і $\overline{x} = (x_1,...,x_k,0,...0)$ – допустимий розв'язок. Якщо відповідні стовпці $\overline{A}_1,...,\overline{A}_k$ – лінійно незалежні, то $k \le m$ (теорему у цьому випадку доведено).

Нехай стовпці $\overline{A}_1,...,\overline{A}_k$ – лінійно залежні, тоді $\exists \alpha_j \; \left(j = \overline{1,k}\right)$:

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \overline{A}_j = \overline{0}_m, \quad \sum_{j=1}^{k} \left|\alpha_j\right| > 0.$$

Серед коефіцієнтів α_j виділимо довільний $\alpha_p \ne 0 \; (1 \le p \le k)$, тоді

$\overline{A}_p = \sum\limits_{j=1\ (j \neq p)}^{k} \left(-\dfrac{\alpha_j}{\alpha_p} \right) \overline{A}_j$. Після цього систему рівнянь (2.17) можна записати так: $\sum\limits_{j=1\ (j \neq p)}^{k} \left(x_j - \dfrac{\alpha_j}{\alpha_p} \cdot x_p \right) \overline{A}_j = \overline{b}$. Значення

$$x'_j = \begin{cases} x_j - \dfrac{\alpha_j}{\alpha_p} \cdot x_p, & j = \overline{1, k}, j \neq p; \\ 0, & j = \overline{k+1, n},\ j = p \end{cases} \tag{2.20}$$

формують новий розв'язок $\overline{x}'$ системи рівнянь (2.17), у якого кількість ненульових координат принаймні на одиницю менша за кількість ненульових координат $\overline{x}$. Продовжуючи міркувати подібним чином, зрештою приходимо до розв'язку, який матиме не більше m ненульових кординат.

Коефіцієнт $\alpha_p \neq 0$ $(1 \leq p \leq k)$ можна вибрати так, що у (2.20) усі значення x'_j будуть *невід'ємними* (тобто розв'язок $\overline{x}'$ буде *допустимим*). Серед дійсних чисел α_j $\left(j = \overline{1, k}\right)$ є хоча б одне додатне число, оскільки співвідношення $\sum\limits_{j=1}^{k} \alpha_j \overline{A}_j = \overline{0}_m$ і $\sum\limits_{j=1}^{k} (-\alpha_j) \overline{A}_j = \overline{0}_m$ еквівалентні**.** Нехай $J \subset \{1, 2, ..., k\}$ – множина індексів j, для яких $\alpha_j > 0$. Якщо номер p обрати так, що $\dfrac{x_p}{\alpha_p} = \min\limits_{j \in J} \dfrac{x_j}{\alpha_j}$, то усі значення x'_j у (2.20) будуть *невід'ємними*. ∢

Теорема 2.3. Якщо ЗЛП має оптимальний план, то екстремального значення цільова функція набуває хоча б в одній кутовій точці багатогранної множини $X \subset R^n$, визначеної згідно з (2.18). Якщо цільова функція набуває екстремального значення у декількох кутових точках цієї множини, то вона досягає його і в будь-якій точці, яка є опуклою комбінацією таких точок.

➢ Припустимо спочатку, що множина допустимих розв’язків задачі лінійного програмування $X \subset R^n$ є *опуклим багатогранником* з кутовими точками $\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_p$. Нехай у деякій точці $\bar{x}_0 \in X$ цільова функція (2.10) досягає мінімуму, тобто $\forall \bar{x} \in X: \ f(\bar{x}_0) \le f(\bar{x})$. Якщо $\bar{x}_0$ – кутова точка, то першу частину теореми доведено.

Нехай $\bar{x}_0$ не є кутовою точкою, тоді, згідно з лемою 2.2, її можна зобразити у вигляді (2.13). Оскільки функція (2.10) лінійна, то

$$f(\bar{x}_0) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i f(\bar{x}_i). \tag{2.21}$$

У розкладі (2.21) серед значень $f(\bar{x}_i)$ $\left(i = \overline{1, p}\right)$ обираємо найменше. Припускаємо, що воно відповідає кутовій точці $\bar{x}_k$ $(1 \le k \le p)$ і позначимо його q, тобто $f(\bar{x}_k) = q$. Замінимо у (2.21) кожне значення $f(\bar{x}_i)$ $\left(i = \overline{1, p}\right)$ значенням q, тоді $f(\bar{x}_0) \ge q \cdot \sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_j = q \cdot 1 = q$.

Однак, згідно з припущенням, $f(\bar{x}_0) \le f(\bar{x}_k) = q$. Отож $f(\bar{x}_0) = f(\bar{x}_k)$ (існує принаймні одна кутова точка, у якій цільова функція набуває екстремального значення, що і треба було довести).

Нехай тепер функціонал (2.10) набуває свого найменшого значення q у декількох кутових точках $\bar{x}_i$ $\left(i = \overline{1, l}\right)$: $f(\bar{x}_i) = q$. Будь-яка їхня опукла комбінація $\tilde{x} = \sum\limits_{i=1}^{l} \alpha_i \bar{x}_i$, де $\alpha_i \ge 0,\ i = \overline{1, l};\ \sum\limits_{i=1}^{l} \alpha_i = 1$,

надає (2.10) значення $f(\tilde{x}) = \sum\limits_{i=1}^{l} \alpha_i f(\bar{x}_i) = q \sum\limits_{i=1}^{l} \alpha_i = q \cdot 1 = q$.

Доведення теореми для *опуклого багатогранника* завершено.

Нехай множина допустимих розв’язків задачі лінійного програмування $X \subset R^n$ є *необмеженою*. Оскільки існує оптимальний план $\bar{x}_0$, то до обмежень ЗЛП можна додати обмеження $\bar{x} \le \bar{x}_0$, яке не вплине на значення (2.10), однак перетворить X в опуклий багатогранник (цей випадок ми уже довели). ➢

Отже, нами продемонстровано, що для канонічної задачі існує хоча б одна кутова точка множини X, якщо $X \neq \varnothing$. Отож, на перший погляд, можна визначити усі кутові точки, обчислити значення функції $(\bar{c}, \bar{x})$ у цих точках й обрати найменше, тобто використати метод звичайного перебирання. Такий підхід до розв'язування задачі ЛП, навіть за сучасної обчислювальної техніки, може виявитися неможливим за розумний проміжок часу.

Ідея *симплексного методу* полягає у послідовному переході від одного опорного плану до іншого так, щоб значення функціонала (2.10) зменшувалося. Оскільки кількість опорних планів є скінченною, то за скінченну кількість кроків такий метод дає змогу відшукати оптимальний план, або переконатися у тому, що функціонал (2.10) на множині планів є необмеженим (оптимального плану не існує). Для застосування симплексного методу необхідно мати довільний *початковий* опорний план.

2.5. Симплексний метод розв'язування задачі ЛП

Розглядаємо канонічну форму задачі лінійного програмування (2.10), (2.11). Система обмежень (2.11) задає множину X, яка визначається згідно з (2.16). *Головні* обмеження цієї ЗЛП описує система рівнянь (2.17).

Не втрачаючи загальності, вважатимемо, що перші m невідомих ($x_1, ..., x_m$) системи рівнянь (2.17) є *базисними* (тобто вектори $\bar{A}_1, ..., \bar{A}_m$ є лінійно незалежними). Тоді систему рівнянь (2.17) можна записати у вигляді (2.18). Вектори $\bar{A}_1, ..., \bar{A}_m$ формують квадратну матрицю A_b розмірності m, причому $\det A_b \neq 0$.

Кожен з векторів $\bar{A}_j$ $(j = \overline{1, n})$ єдиним способом можна розкласти за векторами базису: $\sum_{i=1}^{m} \gamma_{ij} \bar{A}_i = \bar{A}_j$ (або $A_b \bar{\gamma}_j = \bar{A}_j$), де вектор $\bar{\gamma}_j = (\gamma_{1j}, \gamma_{2j}, ..., \gamma_{mj})^T$ задає коефіцієнти такого розкладу. Оскільки $\det A_b \neq 0$, то існує A_b^{-1} і $\bar{\gamma}_j = A_b^{-1} \bar{A}_j$. Вектори $\bar{\gamma}_1, ..., \bar{\gamma}_m$ формують одиничну матрицю розмірності m (доведіть самостійно).

Виокремимо коефіцієнти лінійної форми (2.10), які відповідають базисним змінним, увівши позначення $\overline{c}_b = (c_1,...,c_m)^T$. Для наступного аналізу важливими є значення

$$\Delta_j = \left(\overline{c}_b, A_b^{-1}\overline{A}_j\right) - c_j = \overline{c}_b^T \overline{\gamma}_j - c_j,\ j = \overline{1,n}, \tag{2.22}$$

які називають *симплекс-різницями* (або оцінками відповідних векторів плану). Зауважимо, що $\Delta_j = 0$ для індексів $j = \overline{1,m}$, які відповідають векторам базису (*доведіть самостійно*).

Перемножуючи обидві частини (2.18) на A_b^{-1}, отримаємо $\overline{x}_b + A_b^{-1}A_s\overline{x}_s = A_b^{-1}\overline{b}$. Звідси визначаємо $\overline{x}_b = A_b^{-1}\left(\overline{b} - A_s\overline{x}_s\right)$. Якщо вільним невідомим (тобто компонентам $\overline{x}_s$) надавати довільних числових значень, то отримуватимемо відповідні значення базисних невідомих. Отже, для довільного вектора $\overline{x}_s \in R^{n-m}$ вектор

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} A_b^{-1}\left(\overline{b} - A_s\overline{x}_s\right) \\ \overline{x}_s \end{pmatrix} \in R^n \tag{2.23}$$

є *загальним* розв’язком системи рівнянь (2.17). Якщо цей розв’язок підставити у цільову функцію (2.10), то

$$f(\overline{x}) = (\overline{c}, \overline{x}) = (\overline{c}_b, \overline{x}_b) + \sum_{j=m+1}^{n} c_j x_j = \left(\overline{c}_b,\ A_b^{-1}\overline{b} - \sum_{j=m+1}^{n} A_b^{-1}\overline{A}_j x_j\right) +$$

$$+ \sum_{j=m+1}^{n} c_j x_j = \left(\overline{c}_b,\ A_b^{-1}\overline{b}\right) - \sum_{j=m+1}^{n} \left(\left(\overline{c}_b, A_b^{-1}\overline{A}_j\right) - c_j\right) x_j,$$

або

$$f(\overline{x}) = \left(\overline{c}_b,\ A_b^{-1}\overline{b}\right) - \sum_{j=m+1}^{n} \Delta_j\, x_j. \tag{2.24}$$

Нехай $\overline{x}_s = \overline{0}_{n-m}$. З (2.23) та означення 2.11 випливає, що

$$\overline{v} = \begin{pmatrix} A_b^{-1}\overline{b} \\ \overline{0}_{n-m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{v}_b \\ \overline{0}_{n-m} \end{pmatrix} \tag{2.25}$$

буде *опорним розв'язком* ЗЛП (2.10), (2.11), якщо $\bar{v}_b \geq \bar{0}_m$. Надалі вважатимемо $\bar{v}$ опорним розв'язком. Для опорного розв'язку $\bar{v}$ цільова функція має значення:

$$f(\bar{v}) = \left(\bar{c}_b,\, A_b^{-1}\bar{b}\right) = \bar{c}_b^T A_b^{-1}\bar{b} = \bar{c}_b^T \bar{v}_b. \qquad (2.26)$$

Враховуючи (2.26), отримаємо:

$$f(\bar{x}) = f(\bar{v}) - \sum_{j=m+1}^{n} \Delta_j x_j. \qquad (2.27)$$

Ідея *симплексного методу* полягає в тому, щоб, виходячи з початкового опорного розв'язку $\bar{v}$, визначеного згідно з (2.25), відшукати новий опорний розв'язок $\bar{v}'$, вилучаючи для цього деякий стовпець $\bar{A}_l$ $(l = \overline{1,m})$ з початкового базису A_b і замінюючи його деяким небазисним стовпцем $\bar{A}_k$ $(k = \overline{m+1,n})$. Умови такої заміни полягають у тому, щоб долучення стовпця $\bar{A}_k$ не погіршило значення функціонала (2.27), а вилучення $\bar{A}_l$ забезпечило отримання нового *опорного* розв'язку. Враховуючи (2.23) і (2.25), отримаємо:

$$\bar{x}_b = A_b^{-1}\bar{b} - \sum_{j=m+1}^{n} A_b^{-1}\bar{A}_j x_j = \bar{v}_b - \sum_{j=m+1}^{n} \bar{\gamma}_j x_j,$$

або в покоординатному вигляді:

$$x_i = \nu_i - \sum_{j=m+1}^{n} \gamma_{ij} x_j, \quad \gamma_{ij} = \left(\bar{\gamma}_j\right)_i;\ i = \overline{1,m}. \qquad (2.28)$$

Тепер канонічну задачу (2.10), (2.11) можна сформулювати так: мінімізувати функцію (2.27) за умови (2.28) і $\bar{x} \geq \bar{0}$.

Ця задача не стала легшою, проте ми перейшли до *небазисних* змінних і тепер легко простежити за тим, як змінюється $f(\bar{x})$ внаслідок переходу від одного опорного розв'язку до іншого.

Ми намагатимемося змінити лише одну із небазисних змінних x_k $(m < k \leq n)$, а інші небазисні змінні залишимо нульовими. Тоді зі співвідношення (2.28) отримаємо:

$$x_1 = \nu_1 - \gamma_{1k} x_k, \ldots, x_m = \nu_m - \gamma_{mk} x_k. \qquad (2.29)$$

Функціонал $f(\bar{x})$ набуде вигляду:

$$f(\bar{x}) = f(\bar{v}) - \Delta_k x_k. \tag{2.30}$$

Необхідно обрати небазисну змінну $x_k \geq 0$ $(m < k \leq n)$ так, щоб новий розв'язок $\bar{v}' = (v_1', ..., v_m', v_{m+1}', ..., v_k', ..., v_n')^T$, у якого $v_k' = x_k$, $\nu_i' = \nu_i - \gamma_{ik} x_k$ $(i = \overline{1,m})$; $v_j' = 0,\ m < j \leq n$ $(j \neq k)$, задовольняв вимоги $A\bar{v}' = \bar{b}$, $\bar{v}' \geq \bar{0}$, $f(\bar{v}') \leq f(\bar{v})$ (бажано, щоб $f(\bar{v}') < f(\bar{v})$).

Умова $A\bar{v}' = \bar{b}$ виконуватиметься згідно (2.29) за довільного вибору $x_k \geq 0$. Аналізуючи, згідно з (2.29) і (2.30), Δ_k і $\bar{\gamma}_k$, можна задовольнити інші умови ($\bar{v}' \geq \bar{0}$, $f(\bar{v}') \leq f(\bar{v})$) і вказати правило вибору потрібного $x_k \geq 0$. Розглянемо три можливі випадки.

Випадок 1. Нехай виконуються нерівності

$$\Delta_j \leq 0, \quad j = \overline{m+1, n}. \tag{2.31}$$

Теорема 2.4. Виконання умов (2.31) є ознакою того, що опорний розв'язок $\bar{v}$ є *оптимальним* розв'язком ЗЛП (2.10), (2.11).

➢ Згідно з (2.27) $f(\bar{x}) = f(\bar{v}) + \sum\limits_{j=m+1}^{n} (-\Delta_j) x_j = f(\bar{v}) + E,$ де $E \geq 0$.

Отже, $f(\bar{x}) \geq f(\bar{v})$ для $\forall \bar{x} \in X$. А це означає, що умова (2.31) є ознакою знайденого *оптимального* розв'язку (тобто опорний розв'язок $\bar{v}$ є оптимальним розв'язком ЗЛП). ≺

Випадок 2. Існує такий номер $m < k \leq n$, що

$$\Delta_k > 0, \ \gamma_{ik} \leq 0, \quad i = \overline{1,m}. \tag{2.32}$$

Теорема 2.5. Виконання умов (2.32) є ознакою того, що ЗЛП *не має* розв'язків.

➢ У цьому випадку $\bar{x}_b = \bar{v}_b - \left(A_b^{-1}\overline{A}_k\right)x_k \geq \bar{0}_m$ для всіх $x_k \geq 0$ і, крім цього, $f(\bar{x}) = f(\bar{v}) - \Delta_k x_k \to -\infty$ при $x_k \to +\infty$ Тобто існує кутовий напрям, уздовж якого значення функції мети нескінченно спадає (тобто, $\inf(\bar{c}, \bar{x}) = -\infty$). Задача ЛП *не має* розв'язків. ≺

Випадок 3. Існують номери k та l ($m < k \le n$, $1 \le l \le m$) такі, що

$$\Delta_k > 0,\ \gamma_{lk} > 0. \qquad (2.33)$$

Теорема 2.6. Виконання умов (2.33) дає змогу перейти від опорного розв'язку $\bar{v}$ до іншого опорного розв'язку.

➢ Визначимо множину індексів $I_k = \{i : 1 \le i \le m,\ \gamma_{ik} > 0\} \ne \varnothing$.

Для точки $\bar{x}$, координати якої визначають з (2.29), за довільного $x_k \ge 0$, згідно з (2.30), матимемо $f(\bar{x}) = f(\bar{v}) - \Delta_k x_k \le f(\bar{v})$. Якщо ж $x_k > 0$, то $f(\bar{x}) = f(\bar{v}) - \Delta_k x_k < f(\bar{v})$.

Окрім цього, необхідною є умова $x_i \ge 0$ $(i = \overline{1,m})$. Як бачимо з (2.29), для $\gamma_{ik} \le 0$: $x_i = v_i - \gamma_{ik} x_k \ge v_i \ge 0$ за довільного $x_k \ge 0$.

Якщо $\gamma_{ik} > 0$, то при $x_k > \min\limits_{i \in I_k} \dfrac{v_i}{\gamma_{ik}}$, величина $x_i = v_i - \gamma_{ik} x_k$ стане від'ємною хоча б для одного номера $i \in I_k$. Отож x_k необхідно обирати з умови $0 \le x_k \le \min\limits_{i \in I_k} \dfrac{v_i}{\gamma_{ik}}$.

Оскільки $I_k \ne \varnothing$, то існує хоча б один номер $l \in I_k$, щодо якого ця умова виконується. Оберемо $x_k = \dfrac{v_l}{\gamma_{lk}} = \min\limits_{i \in I_k} \dfrac{v_i}{\gamma_{ik}}$. Отже, нами доведено, що точка $\bar{v}' = (v_1', \ldots, v_m', v_{m+1}', \ldots, v_k', \ldots, v_n')^T$, у якої

$$v_k' = \frac{v_l}{\gamma_{lk}},\ v_i' = v_i - \gamma_{ik} \cdot \frac{v_l}{\gamma_{lk}}\ \ (i = \overline{1,m}),\ \ v_j' = 0,\ \ m < j \le n\ (j \ne k), \qquad (2.34)$$

є новим опорним розв'язком, для якого $f(\bar{v}') \le f(\bar{v})$. У цьому випадку $v_l' = 0$ (змінна x_l з базисних переходить у небазисні, а x_k – з небазисних у базисні). ≺

Формули (2.34) задають правила одержання нового опорного розв'язку $\bar{v}'$ з базисними змінними $v_1', \ldots,\ v_{l-1}', v_{l+1}', \ldots,\ v_m', v_k'$. Відшукання нових опорних розв'язків продовжуємо доти, доки не дійдемо випадку 1 чи 2.

2.6. Алгоритм симплексного методу

На основі матеріалу попереднього параграфа сформулюємо *алгоритм симплексного методу* (або *симплекс-методу*) розв'язування ЗЛП у канонічній формі (2.10), (2.11), який складається з початкової ітерації та декількох базових ітерацій.

Початкова ітерація

У матриці умов A відшуковують m лінійно незалежних стовпців $\overline{A}_{j_e}$ $\left(1 \le j_e \le n, \quad e = 1,\dots,m\right)$. Формують матрицю A_b, вектор $\overline{c}_b$ і визначають матрицю A_b^{-1}. Згідно з (2.25) обчислюють $\overline{v}_b$ і формують вектор $\overline{v}$ – початковий опорний розв'язок ЗЛП.

Обчислюють $\overline{\gamma}_j = A_b^{-1}\overline{A}_j$ $\left(j = \overline{1,n}\right)$, вектор симплекс-різниць $\left(\Delta_1,\dots,\Delta_n\right)$ згідно з (2.22) і значення функції $f(\overline{v})$ згідно з (2.26).

Вважатимемо, що базисом кутової точки є *орти* простору R^m. Тоді $A_b = A_b^{-1} = I_m$, де I_m – одинична матриця розмірності m. Не втрачаючи загальності, вважатимемо також, що $\overline{b} \ge 0$ (якщо існує $b_i < 0$ $\left(i = \overline{1,m}\right)$, то відповідне i-те рівняння системи (2.11) множимо на –1). За цих умов отримуємо:

$$\overline{v}_b = \overline{b},\ \ \overline{v} = (\overline{v}_b, \overline{0}_{n-m})^T,\ \ \overline{\gamma}_j = \overline{A}_j,\ \Delta_j = \overline{c}_b^T\overline{\gamma}_j - c_j,\ \ f(\overline{v}) = \overline{c}_b^T\overline{v}_b,$$

де $j = \overline{1,n}$.

Процедуру розв'язування задачі лінійного програмування симплекс-методом зручно зображати *симплекс-таблицями*, основою яких є рівняння (2.28) та зображення симплекс-різниць формулами (2.22). Крім цього, симплекс-таблиці відображають інформацію про базисні/небазисні змінні, поточний опорний розв'язок $\overline{v}$ і значення цільової функції $f(\overline{v})$.

Симплекс-таблиця відображає одну чи декілька ітерацій симплекс-методу. Початкову симплекс-таблицю наведено у табл. 2.1 (позначення: I – номер ітерації симплекс-методу; БЗ – базисні змінні).

Таблиця 2.1. Початкова ітерація симплекс-таблиці ЗЛП

I	БЗ	x_1	x_2	...	x_m	x_{m+1}	...	x_n	$\overline{v}_b=\overline{b}$
0	x_1	1	0	...	0	$\gamma_{1,m+1}$	...	γ_{1n}	$v_1=b_1$
	x_2	0	1	...	0	$\gamma_{2,m+1}$	...	γ_{2n}	$v_2=b_2$
	…	...	...	...	...	...	...	...	...
	x_m	0	0	...	1	$\gamma_{m,m+1}$	...	γ_{mn}	$v_m=b_m$
		0	0	...	0	Δ_{m+1}	...	Δ_n	$f(\overline{v})$

Приклад 2.2. Розв'язати задачу ЛП:

$$-x_1-x_2\to\min;$$
$$\begin{cases} x_1-x_2-x_3=1, \\ x_2+x_4=2, \\ x_j\ge 0,\ j=\overline{1,4}\,. \end{cases}$$

➢ Визначимо $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $\overline{b}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\overline{c}=(-1,\,-1,\,0,\,0)^T$. Стовпці $\overline{A}_1$ і $\overline{A}_4$ – лінійно незалежні, отже x_1, x_2 – базисні змінні. Тоді

$$A_b=A_b^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ \overline{v}_b=A_b^{-1}\overline{b}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\ \overline{c}_b=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix},\ \ \overline{v}=(1,\,0,\,0,\,2)^T\ ,$$

$$f(\overline{v})=\overline{c}_b^T\overline{v}_b=(-1,0)\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=-1,\ \ (\Delta_2,\Delta_3)=\left(\overline{c}_b^T\overline{A}_2-c_2,\,\overline{c}_b^T\overline{A}_3\right)=$$

$$\left((-1,0)\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}+1,\ (-1,0)\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\right)=(2,\,1),\ \gamma_{ij}=\left(\overline{A}_j\right)_i;\ i=1,\,4;\ j=2,3.$$

Отримуємо початкову ітерацію симплекс-таблиці:

I	БЗ	x_1	x_2	x_3	x_4	$\overline{v}_b=\overline{b}$
0	x_1	1	$\gamma_{12}=-1$	$\gamma_{13}=-1$	0	1
	x_4	0	$\gamma_{42}=\ 1$	$\gamma_{43}=\ 0$	1	2
		0	$\Delta_2=\ 2$	$\Delta_3=\ 1$	0	$f(\overline{v})=-1$

Оскільки $\Delta_3=1>0$ і $\gamma_{i3}\le 0$ $(i=1,4)$, то ЗЛП *не має* розв'язків.≺

Базова ітерація

Крок 1. Аналізують симплекс-різниці $(\Delta_1,..., \Delta_n)$. Якщо усі симплекс-різниці є *недодатними*, то опорний розв'язок $\bar{v}$ є *оптимальним* розв'язком (*закінчують обчислення*).

Інакше визначають індекс k $(m < k \le n)$, для якого $\Delta_k > 0$. Якщо таких індексів є декілька, то обирають індекс з найбільшим значенням Δ_k.

Крок 2. Якщо усі елементи вектора $\bar{\gamma}_k$ є *від'ємними*, то ЗЛП *не має* розв'язків (*закінчують обчислення*).

У протилежному випадку визначають індекс l $(1 \le l \le m)$, для якого $\dfrac{\nu_l}{\gamma_{lk}} = \min\limits_{i \in I_k} \dfrac{\nu_i}{\gamma_{ik}}$, де $I_k = \{i : \gamma_{ik} > 0\}$.

Крок 3. Згідно з формулами (2.34) визначають новий опорний розв'язок $\bar{v}'$. У базис вводять стовпець $\bar{A}_k$ замість стовпця $\bar{A}_l$. У новому базисі визначають $f(\bar{v}')$, $\bar{\gamma}'_j$, Δ'_j ($j = \overline{1,n}$). Перереприсвоюють значення $\bar{v} := \bar{v}'$, $f(\bar{v}) := f(\bar{v}')$, $\bar{\gamma}_j := \bar{\gamma}'_j$, $\Delta_j := \Delta'_j$ і переходять на крок 1.

Реалізацію третього кроку базової ітерації розглянемо детальніше. Вектор $\bar{A}_k$ у розкладі за початковим базисом має вигляд:

$$\bar{A}_k = \gamma_{1k}\bar{A}_1 + ... + \gamma_{lk}\bar{A}_l + ... \gamma_{mk}\bar{A}_m. \tag{2.35}$$

Розклад вектора $\bar{A}_l$ за новим базисом отримують з (2.35):

$$\bar{A}_l = \frac{1}{\gamma_{lk}} \cdot \left(\bar{A}_k - \gamma_{1k}\bar{A}_1 - ... - \gamma_{mk}\bar{A}_m\right). \tag{2.36}$$

Розклад довільного вектора $\bar{A}_j$ $(j = \overline{1,n})$ за новим базисом:

$$\bar{A}_j = \sum_{i=1}^{m} \gamma_{ij}\bar{A}_i = \gamma_{1j}\bar{A}_1 + ... + \frac{\gamma_{lj}}{\gamma_{lk}} \cdot \left(\bar{A}_k - \gamma_{1k}\bar{A}_1 - ... - \gamma_{mk}\bar{A}_m\right) + \gamma_{mj}\bar{A}_m =$$

$$= \left(\gamma_{1j} - \frac{\gamma_{lj}}{\gamma_{lk}} \cdot \gamma_{1k}\right) \cdot \bar{A}_1 + ... + \frac{\gamma_{lj}}{\gamma_{lk}} \cdot \bar{A}_k + ... + \left(\gamma_{mj} - \frac{\gamma_{lj}}{\gamma_{lk}} \cdot \gamma_{mk}\right) \cdot \bar{A}_m.$$

Отримуємо такі значення:

$$\gamma'_{kj} = \frac{\gamma_{lj}}{\gamma_{lk}},\ \gamma'_{ij} = \gamma_{ij} - \gamma_{ik} \cdot \frac{\gamma_{lj}}{\gamma_{lk}} \quad \left(i = 1,...,l-1, l+1,...,m;\ j = \overline{1,n}\right). \qquad (2.37)$$

Визначимо нові значення симплекс-різниць $\Delta'_j \quad (j = \overline{1,n})$:

$$\Delta'_j = \gamma'_{1j}c_1 + ... + \gamma'_{kj}c_k + ... + \gamma'_{mj}c_m - c_j =$$

$$= \left(\gamma_{1j} - \gamma_{1k} \cdot \frac{\gamma_{lj}}{\gamma_{lk}}\right) \cdot c_1 + ... + \frac{\gamma_{lj}}{\gamma_{lk}} \cdot c_k + ... \left(\gamma_{mj} - \gamma_{mk} \cdot \frac{\gamma_{lj}}{\gamma_{lk}}\right) \cdot c_m - c_j =$$

$$= \left(\gamma_{1j}c_1 + ... + \gamma_{l-1,j}c_{l-1} + \gamma_{l+1,j}c_{l+1} + ... + \gamma_{mj}c_m\right) - c_j -$$

$$- \frac{\gamma_{lj}}{\gamma_{lk}}\left(\gamma_{1k}c_1 + ... + \gamma_{l-1,k}c_{l-1} + \gamma_{l+1,k}c_{l+1} + ... + \gamma_{mk}c_m - c_k\right).$$

Додамо до виразу в перших дужках значення $\gamma_{lj} \cdot c_l$, а від виразу в других дужках це значення віднімемо. Матимемо

$$\Delta'_j = \left(\gamma_{1j}c_1 + ... + \gamma_{l-1,j}c_{l-1} + \gamma_{lj}c_l + \gamma_{l+1,j}c_{l+1} + ... + \gamma_{mj}c_m\right) - c_j -$$

$$- \frac{\gamma_{lj}}{\gamma_{lk}}\left(\gamma_{1k}c_1 + ... + \gamma_{l-1,k}c_{l-1} + \gamma_{lk}c_l + \gamma_{l+1,k}c_{l+1} + ... + \gamma_{mk}c_m - c_k\right).$$

Отримуємо такі значення нових симплекс-різниць:

$$\Delta'_j = \Delta_j - \frac{\gamma_{lj}}{\gamma_{lk}} \cdot \Delta_k \quad (j = \overline{1,n}). \qquad (2.38)$$

Використовуючи (2.34), визначимо

$$f(\bar{v}') = \bar{c}_b^T \bar{v}'_b = v'_1c_1 + ... + v'_kc_k + ... + v'_mc_m = \left(\nu_1 - \gamma_{1k} \cdot \frac{v_l}{\gamma_{lk}}\right) \cdot c_1 + ... +$$

$$+ \left(\nu_{l-1} - \gamma_{l-1,k} \cdot \frac{v_l}{\gamma_{lk}}\right) \cdot c_{l-1} + \frac{v_l}{\gamma_{lk}} \cdot c_k + \left(\nu_{l+1} - \gamma_{l+1,k} \cdot \frac{v_l}{\gamma_{lk}}\right) \cdot c_{l+1} + ... +$$

$$+ \left(\nu_m - \gamma_{mk} \cdot \frac{v_l}{\gamma_{lk}}\right) \cdot c_m = v_1c_1 + ... + v_{l-1}c_{l-1} + v_{l+1}c_{l+1} ... + v_mc_m + v_lc_l -$$

$$- \frac{v_l}{\gamma_{lk}}\left(\gamma_{1k}c_1 + ... + \gamma_{l-1,k}c_{l-1} + \gamma_{lk}c_l + \gamma_{l+1,k}c_{l+1} + ... + \gamma_{mk}c_m + \gamma_{lk}c_l - c_k\right).$$

Отож значення цільової функції для $\bar{v}'$ таке:

$$f(\bar{\mathrm{v}}') = f(\bar{\mathrm{v}}) - \frac{\nu_l}{\gamma_{lk}} \cdot \Delta_k. \tag{2.39}$$

Стовпець k, який відповідає змінній x_k, називають *ведучим стовпцем*. Рядок l, який відповідає змінній x_l, називають *ведучим рядком*. Елемент таблиці γ_{lk}, який стоїть на перетині ведучого стовпця і ведучого рядка, називають *ведучим елементом*.

Після виконання третього кроку базової ітерації ведучий стовпець попередньої ітерації в новій ітерації стає *базисним*, оскільки, згідно з формулами (2.37) і (2.38), маємо $\gamma'_{kk} = 1$, $\gamma'_{ik} = 0$ $(i = 1,\ldots,l-1,l+1,\ldots,m)$ і $\Delta'_k = 0$.

Проаналізувавши формули (2.34), (2.39), (2.37) і (2.38), побачимо, що для відшукання нового опорного розв’язку $\bar{v}'$ і значення $f(\bar{v}')$ (тобто значень (n+1)-го стовпця), нових векторів $\bar{\gamma}'_j$ $(j = \overline{1,n})$ та відповідних симплекс-різниць Δ'_j (тобто значень (m+1)-го рядка), треба кожен елемент симплекс-таблиці попередньої ітерації перетворити за формулами:

$$\gamma'_{kj} = \frac{\gamma_{lj}}{\gamma_{lk}}, \quad j = \overline{1,n+1}, \tag{2.40}$$

$$\gamma'_{ij} = \gamma_{ij} - \gamma_{ik} \cdot \gamma'_{kj} \quad \left(i = 1,\ldots,l-1,l+1,\ldots,m,m+1;\, j = \overline{1,n+1}\right), \tag{2.41}$$

де

$\gamma_{m+1,j} = \Delta_j$, $\gamma'_{m+1,j} = \Delta'_j$ $(j = \overline{1,n})$; $\gamma_{m+1,n+1} = f(\bar{v})$, $\gamma'_{m+1,n+1} = f(\bar{v}')$;

$\gamma_{i,n+1} = v_i$, $\gamma'_{i,n+1} = v'_i$ $(i = 1,\ldots,l-1,l+1,\ldots,m)$.

Формули (2.40), (2.41) дають змогу деталізувати третій крок алгоритму симплекс-методу щодо побудови нової ітерації симплекс-таблиці. Для цього виконують такі дії:

1. У новій ітерації на місці базисної змінної x_l ставлять x_k.
2. Ведучий рядок попередньої ітерації симплекс-таблиці ділять на γ_{lk} (релізація правої частини формули (2.40)). Результати ділення записують у нову ітерацію в рядку, що відповідає новій ба-

зисній змінній x_k (реалізація лівої частини формули (2.40)). Отримують *модифікований* ведучий рядок.

3. До кожного i-го рядка $(i = 1,\ldots,l-1,l+1,\ldots,m)$ попередньої ітерації додають *модифікований* ведучий рядок, помножений на $-\gamma_{ik}$ (релізація правої частини формули (2.41)). Результати записують у нову ітерацію на місці i-го рядка (реалізація лівої частини формули (2.41)).

Отже, ми формально, за допомогою ітерацій сиплекс-таблиці, описали правила переходу від одного базису до іншого.

Приклад 2.3. Розв’язати задачу ЛП:
$$-2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \to \min;$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 4, \\ 4x_1 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

➢ Визначимо $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\overline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overline{c} = (-2,\ 1,\ 1,\ -1)^T$. Стовпці $\overline{A}_2$ і $\overline{A}_3$ – лінійно незалежні, отже x_2, x_3 – базисні змінні.

Тоді $A_b = A_b^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\overline{v}_b = \overline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overline{c}_b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overline{v} = (0,\ 4,\ 1,\ 0)^T$ – опорний розв’язок задачі ЛП, $f(\overline{v}) = \overline{c}_b^T \overline{v}_b = (1,1)\cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 5$,

$$(\Delta_1, \Delta_4) = \left(\overline{c}_b^T \overline{A}_1 - c_1,\ \overline{c}_b^T \overline{A}_4 - c_4\right) = \left((1,1)\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 2,\ (1,1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \right) = (7,\ 1),$$

$\gamma_{ij} = \left(\overline{A}_j\right)_i$; $i = 2,\ 3$; $j = 1, 4$. Початкова ітерація симплекс-методу:

I	БЗ	x_1	x_2	x_3	x_4	$\overline{v}_b$
0	x_2	1	1	0	1	4
	x_3	$\underline{4}$	0	1	–1	1
		7	0	0	1	5

Оскільки $\Delta_1 > \Delta_3 > 0$ і $\gamma_{i1} > 0$ $(i = 2,3)$, то справджується умова (2.33), що дає змогу перейти до іншого опорного розв'язку (теорема 2.6). Згідно з (2.34) отримаємо l=3, оскільки $\frac{1}{4} < \frac{4}{1}$. У базисі міняємо $\overline{A}_3$ на $\overline{A}_1$ (змінна x_3 стає небазисною змінною, а змінна x_1 – базисною). Перша ітерація симплекс-методу:

I	БЗ	x_1	x_2	x_3	x_4	$\overline{v}_b$
1	x_2	0	1	–1/4	<u>5/4</u>	15/4
	x_1	1	0	1/4	–1/4	1/4
		0	0	–7/4	11/4	13/4

Оскільки $\Delta_4 > 0$ і $\gamma_{24} = 5/4 > 0$, то можна перейти до іншого опорного розв'язку (змінна x_2 стає небазисною змінною, а змінна x_4 – базисною). Друга ітерація симплекс-методу:

I	БЗ	x_1	x_2	x_3	x_4	$\overline{v}_b$
1	x_4	0	4/5	–1/5	1	3
	x_1	1	1/5	1/5	0	1
		0	–11/5	–6/5	0	–5

Оскільки симплекс-різниці усіх небазисних змінних – від'ємні, то розв'язок $\overline{v} = (1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 3)^T$ є *оптимальним* ($f(\overline{v}) = -5$). ⊲

Згідно з формулами (2.40) і (2.41) значення базисних стовпців не змінюються, окрім значень l-го стовпця, які стануть такими:

$$\gamma'_{kl} = \frac{1}{\gamma_{lk}},\ \ \gamma'_{il} = -\gamma_{ik} \cdot \frac{1}{\gamma_{kl}} \quad \left(i = 1,\ldots,l-1,l+1,\ldots,m,m+1\right). \tag{2.42}$$

Надалі використовуватимемо симплекс-таблиці без базисних стовпців. Наприклад, початкова ітерація прикладу 2.2 виглядатиме так (позначення: НЗ – небазисні змінні):

I	НЗ / БЗ	x_1	x_4	$\overline{v}_b$
0	x_2	1	1	4
	x_3	<u>4</u>	–1	1
		7	1	5

Формулу (2.41) можна записати ще й так:

$$\gamma'_{ij} = \frac{\gamma_{ij}\gamma_{lk} - \gamma_{ik}\gamma_{lj}}{\gamma_{lk}}, \; j \in I_{\text{нб}}; \; j \neq k, \tag{2.43}$$

де $i = 1,...,l-1, l+1,...,m, m+1$; $I_{\text{нб}}$ – множина, що містить індекси небазисних стовпців та індекс $n+1$.

Формули (2.40), (2.42) і (2.43) дають змогу деталізувати третій крок алгоритму симплекс-методу щодо побудови нової ітерації симплекс-таблиці *без базисних стовпців*. Для цього виконують такі дії:

1. У новій ітерації на місці базисної змінної x_l записують небазисну змінну x_k, а на місці змінної x_k записують змінну x_l.
2. Ведучий рядок попередньої ітерації ділять на γ_{lk}, *умовно* вважаючи, що $\gamma_{lk} = 1$. Результати ділення записують у нову ітерацію в рядку, що відповідає базисній змінній x_k.
3. Ведучий стовпець попередньої ітерації, окрім *ведучого елемента*, ділять на γ_{lk}. Результати ділення з протилежним знаком записують у нову ітерацію в стовпці, що відповідає небазисній змінній x_l (окрім елемента γ'_{kl}, який обчислюють на попередньому кроці).
4. Незаповнені елементи нової ітерації визначають згідно з (2.43).

Виконуючи обчислення за формулами (2.43), зручно користуватися правилом "прямокутника" (рис. 2.9).

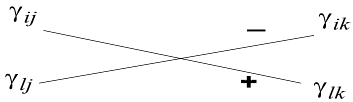


Рис. 2.9. Правило "прямокутника"

Базові ітерації прикладу 2.2 без базисних стовпців виглядають так:

I	НЗ / БЗ	x_3	x_4	$\bar{v}_b$
0	x_2	–1/4	5/4	15/4
	x_1	1/4	–1/4	1/4
		–7/4	11/4	13/4

I	НЗ / БЗ	x_3	x_2	$\bar{v}_b$
0	x_4	–1/5	4/5	3
	x_1	1/5	1/5	1
		–6/5	–11/5	–5

Означення 2.13. Задачу ЛП (2.10), (2.11) називають *невиродженою*, якщо усі кутові точки множини X невироджені. Якщо хоча б одна кутова точка $\overline{v}$ вироджена, тоді задача є *виродженою*.

У випадку невиродженої задачі (2.10), (2.11) усі базисні координати кутових точок додатні. Тоді за одну ітерацію симплекс-методу переходять від однієї кутової точки $\overline{v}$ до іншої кутової точки $\overline{\nu}'$ і $f(\overline{v}') < f(\overline{\nu})$. Якщо врахувати, що кількість кутових точок скінченна, то й алгоритм дає розв'язок за *скінченну* кількість кроків.

У випадку виродженої задачі може виявитися, що базисні координати точки $\overline{v}$ з номерами $i \in I_k$ будуть додатні. Тоді одна ітерація симплекс-методу приведе до нової точки $\overline{\nu}'$ і $f(\overline{v}') < f(\overline{\nu})$.

Якщо $\gamma_{lk} > 0$ і $\nu_l = 0$, то $l \in I_k$ і $0 = \min\limits_{i \in I_k} \dfrac{\nu_i}{\gamma_{ik}}$. У цьому випадку один крок симплекс-методу приводить до точки $\overline{\nu}' = \overline{v}$ з іншим базисом $\overline{A}_1, \ldots, \overline{A}_{l-1}$, $\overline{A}_{l+1}, \ldots, \overline{A}_m, \overline{A}_k$.

Оскільки кожній кутовій точці відповідає скінченна кількість базисів, то можна вийти з цієї точки. Однак у цьому випадку під час переходу від одного базису до іншого необхідно строго дотримуватися правила, яке не даватиме змоги повернутися до вже розглянутого базису, бо це спричинить до *зациклення*.

Таке трапляється, якщо не вживати додаткових заходів, що ускладнюють алгоритм. Будь-яке правило вибору головного елемента, за допомогою якого можна уникнути зациклення у задачі (2.10), (2.11), називають *антицикліном.*

Трапляються досить прості антицикліни, однак навіть у таких випадках алгоритм розв'язку задачі суттєво ускладнюється. Необхідно врахувати, що серед практичних задач ЛП вироджені задачі хоч і часто трапляються, проте зациклення у них виникає дуже рідко. З огляду на це, на практиці не часто користуються симплекс-методом з антицикліном. Отож цього питання ми надалі не торкатимемось.

Приклад 2.3. Розв'язати ЗЛП:
$$2x_1 + 5x_2 \to \max;\quad \begin{cases} x_1 + x_2 \le 500, \\ 0 \le x_1 \le 400, \\ 0 \le x_2 \le 300. \end{cases}$$

➢ Зведемо задану ЗЛП до канонічної форми:
$$-2x_1 - 5x_2 \to \min;\quad \begin{cases} x_1 + x_3 = 400, \\ x_2 + x_4 = 300, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 500, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

Тоді $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_b = A_b^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\bar{v}_b = \begin{pmatrix} 400 \\ 300 \\ 500 \end{pmatrix}$, $\bar{c}_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Симплекс-таблиця прикладу 2.3

I	НЗ / БЗ	x_1	x_2	$\bar{v}_b$
0	x_3	1	0	400
	x_4	0	$\underline{1}$	300
	x_5	1	1	500
		2	5	0
1	НЗ / БЗ	x_1	x_4	$\bar{v}_b$
	x_3	1	0	400
	x_2	0	1	300
	x_5	$\underline{1}$	–1	200
		2	–5	–1500
2	*НЗ* / *БЗ*	x_5	x_4	$\bar{v}_b$
	x_3	–1	1	200
	x_2	0	1	300
	x_1	$\underline{1}$	–1	200
		–2	–3	–1900

Оскільки симплекс-різниці усіх небазисних змінних – нулі, то розв'язок $(200, 300, 200, 0, 0)$ є *оптимальним*. Цільова функція за цього розв'язку досягає свого найбільшого значення 1900. $\prec$

2.7. Визначення опорних планів

Під час застосування симплекс-методу до ЗЛП (2.10), (2.11) ми припускали, що початковий опорний план є *відомим*. У простих (*учбових*) ЗЛП цей план, зазвичай, є очевидним. Однак для більшості практичних задач ЛП початковий опорний план є невідомим.

Існують різні способи визначення початкових опорних планів. Розглянемо найпоширеніший спосіб – *метод штучного базису*.

Цей спосіб неявно застосовувався під час розв'язування ЗЛП прикладу 2.3. Початково цю задачу ЛП сформульовано у вигляді *першої стандартної форми*, отож для переходу до канонічної форми введено $m = 3$ допоміжних (*штучних*) змінних.

Вектори умов допоміжних змінних є ортами простору R^m, які утворюють його *базис*. Цей базис зумовлює "ідеальний випадок", за якого $A_b = A_b^{-1} = I_m$, $\overline{c}_b = \overline{0}_m$. А це, у свою чергу, згідно з (2.22), передбачає, що $\Delta_j = -c_j$, $j = \overline{m+1, n}$.

Продемонструємо застосування *методу штучного базису* для визначення початкового опорного плану ЗЛП (2.10), (2.11), зображеній у канонічній формі. Не втрачаючи загальності, вважатимемо $\overline{b} \ge 0$ (якщо деяке $b_i < 0$ $\left(i = \overline{1, m}\right)$, то відповідне i-те рівняння системи (2.11) множимо на -1).

Введемо допоміжні змінні $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ і у просторі R^{n+m} змінних $\overline{z} = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})^T = (\overline{x}, \overline{y})^T$ розглянемо допоміжну задачу:

$$f_1(\overline{z}) = x_{n+1} + \ldots + x_{n+m} \to \min, \tag{2.44}$$

$$\overline{z} \in Z = \left\{ \overline{z} : \overline{z} = \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix} \in R^{n+m},\ \overline{z} \ge \overline{0}_{n+m},\ C\overline{z} = A\overline{x} + I_m \overline{y} = \overline{b} \right\}. \tag{2.45}$$

Звичайним підставлянням можна легко переконатися, що початковим опорним планом допоміжної задачі (2.44), (2.45) є вектор $\bar{z}_0 = \left(\bar{0}_n, \bar{b}\right)^T \geq \bar{0}_{n+m}$. Точка $\bar{z}_0$ – кутова точка множини Z з базисом, який містить останні m стовпців матриці $C = \left(A, I_m\right)$. Очевидно, що $\text{rang}C = \text{rang}I_m = m$.

Лінійна форма (2.44) допоміжної задачі обмежена знизу на множині планів Z ($f_1(\bar{z}) \geq 0$), а сама множина Z має кутову точку $\bar{z}_0$. На основі теореми 2.3 можна стверджувати, що задача (2.44), (2.45) має оптимальний опорний план і щодо цього можливі *два випадки*:

$$1)\ \min f_1(\bar{z}) > 0; \tag{2.46}$$

$$2)\ \min f_1(\bar{z}) = 0. \tag{2.47}$$

Теорема 2.7. Виконання умови (2.46) означає, що початкова ЗЛП (2.10), (2.11) *не має жодного плану* (тобто система її умов (2.11) є несумісною).

➢ Доведемо це твердження від супротивного. Нехай система умов (2.11) є сумісною і задача ЛП (2.10), (2.11) має плани. Нехай одним з планів є вектор $\bar{x}' = (x_1', \ldots, x_n')^T$. Тоді вектор $\bar{z}' = (\bar{x}', \bar{0}_m)^T$ буде планом допоміжної задачі, значення лінійної форми якої дорівнює *нулю* (отримали протиріччя). ≺

У другому випадку оптимальний план допоміжної задачі набуває вигляду $\bar{z}^* = (\bar{v}, \bar{0}_m)^T$ і вектор $\bar{v}$ слугуватиме *опорним планом* початкової ЗЛП (2.10), (2.11).

Отже, кутову точку $\bar{v} \in X$ визначено, необхідно ще відшукати rang$A$ і зазначити базис точки $\bar{v}$. Оскільки $m = \text{rang}\,C \geq \text{rang}A$, то базис $\bar{z}^*$ може налічувати і стовпці матриці I_m (якщо $\text{rangA} < m$, то так обов’язково буде).

Не порушуючи узагальненості, вважатимемо, що базисними векторами точки $\bar{z}^*$ є $\bar{A}_1, \bar{A}_2, ..., \bar{A}_r$, $\bar{e}_1, ..., \bar{e}_{m-r}$ матриці C, які відповідають основним змінним $x_1,...,x_r$ і допоміжним $x_{n+1},...,x_{n+m-r}$. Розглянемо три можливі випадки.

Випадок 1. Немає рядків з допоміжними змінними ($r = m \le n$ і базисними є стовпці $\overline{A_1}, \overline{A_2}, ..., \overline{A_m}$). У такому випадку *нульова* ітерація симплекс-таблиці *початкової* задачі збігається з *останньою* ітерацією симплекс-таблиці *допоміжної* задачі, з якої вилучено стовпці, які відповідають допоміжним змінним, а також записаний вираз цільової функції через нові небазисні змінні.

Випадок 2. У таблиці є рядки, які відповідають допоміжним змінним, нехай
$$x_{n+i} = v_{n+i} - \sum_{k=r+1}^{n} \gamma_{n+i,k} x_k - \sum_{j=1}^{r} \gamma_{n+i,n+m-r+j} x_{n+m-r+j}$$
($1 \le i \le m-r;\ r+1 \le k \le n$) і серед коефіцієнтів $\gamma_{n+i,k}$ є додатні. Тоді один з таких елементів $\gamma_{n+i,k} > 0$ обираємо за ведучий і відповідну допоміжну змінну виводимо із базисних, замінюючи її основною змінною. Після скінченної кількості кроків ми отримаємо випадок 1 або ситуацію, коли всі елементи $\gamma_{n+i,k} \le 0$.

Випадок 3. У цьому випадку $r < m$, але $\gamma_{n+i,k} \le 0$. Це означає, що рядкові $n+i$ відповідає рівняння
$$\gamma_{n+i,r+1} x_{r+1} + ... + \gamma_{n+i,n} x_n + x_{n+i} + \gamma_{n+i,n+m-r+1} x_{n+m-r+1} +$$
$$+ ... + \gamma_{n+i,n+m} x_{n+m} = v_{n+i} = 0.$$
Стовпці із допоміжними змінними відкидають: $x_{n+i} = 0,\ i = \left(\overline{1,m}\right)$.
Після цього отримують рівняння:
$$\gamma_{n+i,r+1} x_{r+1} + ... + \gamma_{n+i,n} x_n = 0 \ (\ i = 1,...,m-r\ ).$$

Можливим є випадок, коли за деякого значеня i та усіх $j = \overline{r+1,n}$: $\gamma_{n+i,j} = 0$. Таке рівняння задовольнятиме довільний вектор $\overline{x} \in X$, отож його можна викреслити. Якщо у ($n+i$)-му рівнянні
$$\gamma_{n+i,s_1} < 0,...,\gamma_{n+i,s_q} < 0, \quad r+1 \le s_i \le n,$$

а решта коефіцієнтів дорівнюють нулю, то його записують так:

$$\gamma_{n+i,s_1} x_{s_1} + \ldots + \gamma_{n+i,s_q} x_{s_q} = 0.$$

Це рівняння виконуватиметься лише при $x_{s_1} = x_{s_2} = \ldots = x_{s_q} = 0$.

Змінні x_k, яким відповідає хоча б один коефіцієнт $\gamma_{n+i,k} < 0$, виокремимо позначками і приймемо, що вони дорівнюють нулю.

Для початкової системи $A\bar{x} = \bar{b}$ можливі лише такі невід'ємні розв'язки, у яких зазначені вище координати дорівнюють нулю. Оскільки деякі координати уже визначено, то їх можна вилучити з розгляду. З цією метою викреслимо коефіцієнти, які відповідають виокремленим змінним. Після такої операції усі рівняння, які відповідають допоміжним змінним, також викреслюємо. У результаті отримаємо задачу:

$$\sum_{j=1}^{r} c_j x_j + \sum_{i \in I} c_i x_i \to \min,$$

$$\bar{x}_j + \sum_{k \in I} \gamma_{jk} \bar{x}_k = \nu_j, \; \bar{x}_j \geq \bar{0}, \; j = \overline{1,r},$$

де I – множина номерів тих координат з $x_{r+1}, \ldots, x_n$, які не виокремлено.

Ми одержали задачу, зручну для застосування симплекс-методу. Додамо до неї рядок з Δ_j та $f(\bar{v})$. До відшуканого розв'язку цієї задачі $\overset{*}{x}_1, \ldots, \overset{*}{x}_r, \overset{*}{x}_i \; (i \in I)$ додаємо нульові значення виокремлених координат і отримуємо розв'язок початкової задачі.

З виконаного аналізу випливає *практичне правило*: якщо внаслідок застосування симплекс-методу деяка з допоміжних змінних перейшла в небазисні, то відповідний їй стовпець доцільно викреслити з розгляду.

Далі наведемо приклади, які ілюструють усі можливі випадки, що виникають під час визначення початкового опорного плану.

Приклад 2.4. Розв'язати ЗЛП:
$$f(\bar{x}) = 5x_1 + 3x_2 + x_3 - 4x_4 \to \min,$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 5,$$
$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5,$$
$$3x_1 + 7x_3 + 2x_4 = 13, \; x_i \geq 0, \; i = \overline{1,4}.$$

➢ Введемо змінні x_5, x_6, x_7 і в просторі R^7 розглянемо задачу:
$$f_1(z) = x_5 + x_6 + x_7 \to \min, \quad x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 5,$$
$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 \quad + x_6 = 5, \; 3x_1 + \; 7x_3 + 2x_4 \quad + x_7 = 13, \; x_i \geq 0, \; i = \overline{1,7}.$$
Розв'язування допоміжної задачі наведено у табл. 2.2, де $f_1(\bar{z})$ записано через небазисні змінні: $f_1(\bar{z}) = 23 - 5x_1 + x_2 - 12x_3 - 3x_4$.

Таблиця 2.2. Симплекс-таблиця допоміжної задачі прикладу 2.4

I	НЗ / БЗ	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{\nu}_b$
0	x_5	1	1	2	$\underline{1}$	5
	x_6	1	–2	3	0	5
	x_7	3	0	7	2	13
		5	–1	12	3	23

I	НЗ / БЗ	x_1	x_2	x_3	$\bar{\nu}_b$
1	x_4	1	1	2	5
	x_6	1	–2	3	5
	x_7	$\underline{1}$	–2	3	3
		2	–4	6	8

I	НЗ / БЗ	x_2,0	x_3,0	$\bar{\nu}_b$
2	x_4	3	–1	2
	x_6	0	0	2
	x_1	–2	3	3
		0	0	f_1 =2

Оскільки f_1 =2, то початкова задача ЛП не має розв'язків. ∢

Приклад 2.5. Розв'язати ЗЛП:

$$f(\bar{x}) = x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \to \min,$$
$$x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 12,$$
$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2, \quad x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,4}.$$

➢ Розв'язуємо допоміжну задачу: $f_1(\bar{z}) = x_5 + x_6 \to \min,$

$x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 = 12,\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_6 = 2,\ x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,6}.$
Розв'язування допоміжної задачі наведено у табл. 2.3, де значення $f_1(\bar{z})$ записане через небазисні змінні: $f_1(\bar{z}) = 14 - 2x_1 - 4x_3 - 3x_4$.

Таблиця 2.3. Симплекс-таблиця допоміжної задачі прикладу 2.5

Ітерація	БЗ	Небазисні змінні				$\bar{v}_b$
		x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_5	1	1	3	4	12
	x_6	1	–1	$\underline{1}$	–1	2
		2	0	4	3	14
1	БЗ	x_1	x_2	x_6	x_4	$\bar{v}_b$
	x_5	–2	$\underline{4}$		7	6
	x_3	1	–1		–1	2
		–2	4		7	6
2	БЗ	x_1	x_5	x_6	x_4	$\bar{v}_b$
	x_2	–1/2			7/4	3/2
	x_3	1/2			3/4	7/2
		0			0	f_1 =0

Розв'язок допоміжної задачі f_1 =0. Початковим опорним планом основної задачі є вектор $\bar{v} = (0,\ 3/2, 7/2, 0)^T$. Базисні змінні x_2, x_3 та функція f виражаються через небазисні змінні так:

$x_2 = 3/2 + 1/2 \cdot x_1 - 7/4 \cdot x_4$, $x_3 = 7/2 - 1/2 \cdot x_1 - 3/4 \cdot x_4$,

$$f = x_1 + (3/2 + 1/2 \cdot x_1 - 7/4 \cdot x_4) + 2 \cdot (7/2 - 1/2 \cdot x_1 - 3/4 \cdot x_4) + 3x_4 =$$
$$= 17/2 + 1/2 \cdot x_1 - 1/4 \cdot x_4.$$

Розв’язування початкової задачі прикладу 2.5 наведено у табл. 2.4.

Таблиця 2.4. Симплекс-таблиця початкової задачі прикладу 2.5

Ітерація	Базисні змінні	Небазисні змінні		$\overline{\nu}_b$
		x_1	x_4	
0	x_2	–1/2	<u>7/4</u>	3/2
	x_3	1/2	3/4	7/2
		–1/2	1/4	17/2
	Базисні змінні	Небазисні змінні		$\overline{\nu}_b$
		x_1	x_2	
1	x_4	–2/7	4/7	6/7
	x_3	5/7	–3/7	20/7
		–3/7	–1/7	f = 58/7

Отже, початкову задачу прикладу (2.6) розв’язано. Оптимальною є точка $\overline{x} = (0{,}0, 20/7, 6/7)^T$ і значення цільової функції у цій точці дорівнює 58/7. ≺

Приклад 2.6. Розв’язати ЗЛП:

$$f(\overline{x}) = 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 2x_4 \to \min,$$
$$3x_1 + x_2 + 7x_3 + x_4 = 6, \;\; x_2 + x_3 - 2x_4 = 3,$$
$$x_1 + 2x_3 + x_4 = 1, \;\; x_i \geq 0, \;\; i = \overline{1{,}4}.$$

➢ Як і раніше, для відшукання початкової кутової точки розглядають допоміжну задачу:

$$f_1(\overline{z}) = x_5 + x_6 + x_7 \to \min$$
$$3x_1 + x_2 + 7x_3 + x_4 + x_5 = 6,$$
$$x_2 + x_3 - 2x_4 + x_6 = 3, \;\; x_1 + 2x_3 + x_4 + x_7 = 1,$$
$$x_i \geq 0, \;\; i = \overline{1{,}7}.$$

Процес розв’язування допоміжної задачі наведено у табл. 2.5. У нашому випадку $f_1 = 10 - 4x_1 - 2x_2 - 10x_3$.

Таблиця 2.5. Симплекс-таблиця допоміжної задачі прикладу 2.6

Ітерація	Базисні змінні	Небазисні змінні				$\overline{\nu}_b$
		x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_5	3	1	7	1	6
	x_6	0	1	1	–2	3
	x_7	$\underline{1}$	0	2	1	1
		4	2	10	0	10
1	Базисні змінні	x_7	x_2	x_3	x_4	$\overline{\nu}_b$
	x_5		$\underline{1}$	1	–2	3
	x_6		1	1	–2	3
	x_1		0	2	1	1
			2	2	–4	6
2	Базисні змінні	x_7	x_5	x_3	x_4	$\overline{\nu}_b$
	x_2			1	–2	3
	x_6			0	0	0
	x_1			2	1	1
				0	0	$f_1 = 0$

У точці $\bar{z}_0 = (1,3,0,0,0,0,0)^T$ функція $f_1 = 0$ і досягає свого мінімуму. Допоміжну задачу прикладу 2.6 розв’язано. Точка $\bar{z}_0$ є кутовою точкою множини Z і водночас точка $\bar{x} = (1,3,0,0)^T$ є кутовою точкою для множини X. Однак серед базисних змінних є допоміжна змінна x_6.

У таблиці 2.5 (ітерація 2) змінній x_6 відповідає рядок з нульовими коефіцієнтами, а це означає, що одне з рівнянь у системі обмежень основної задачі ЛП є лінійною комбінацією двох інших (дійсно, перше рівняння дорівнює сумі другого і потроєного третого), отож такий рядок з розгляду вилучено й отримано нову задачу:

$$f(\bar{x}) = 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 3(1 - 2x_3 - x_4) + 4(3 - x_3 + 2x_4) -$$
$$- 3x_3 - 2x_4 = 15 - 13x_3 + 3x_4 \to \min$$

з обмеженнями $x_2 = 3 - x_3 + 2x_4$, $x_1 = 1 - 2x_3 - x_4$, $x_i \geq 0$, $i = \overline{1,4}$.

Процес розв'язування цієї задачі наведено у табл. 2.6.

Таблиця 2.6. Симплекс-таблиця початкової задачі прикладу 2.6

Ітерація	БЗ	Небазисні змінні		$\bar{\nu}_b$
		x_3	x_4	
0	x_2	1	–2	3
	x_1	$\underline{2}$	1	1
		13	–3	15
1	БЗ	x_1	x_4	$\bar{\nu}_b$
	x_2	–1/2	–5/2	5/2
	x_3	1/2	1/2	1/2
		–13/2	–19/2	f = 17/2

Отже, початкову задачу прикладу 2.6 розв'язано. Оптимальною є точка $\bar{x} = (0, 5/2, 1/2, 0)^T$ і значення цільової функції у цій точці дорівнює 17/2. ⋖

Приклад 2.7. Розв'язати ЗЛП:

$$f(x) = x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 - 5x_5 \to \min,$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 5,\ -4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 = 9,$$
$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 = 12,\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,5}.$$

➢ Вводимо допоміжну задачу: $f_1(\bar{z}) = x_6 + x_7 + x_8 \to \min,$

$$2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6 = 5,\ -4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 + x_7 = 9,$$
$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 + x_8 = 12,\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,8}.$$

Процес розв'язування допоміжної задачі наведено у табл. 2.7. У цьому випадку $f_1(\bar{z}) = 26 - x_2 - 4x_3 + x_4 - 7x_5$.

Таблиця 2.7. Симплекс-таблиця допоміжної задачі прикладу 2.7

Ітерація	БЗ	Небазисні змінні					$\overline{\nu}_b$
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_6	2	1	$\underline{1}$	–1	1	5
	x_7	–4	–2	1	1	3	9
	x_8	2	2	2	–1	3	12
		0	1	4	–1	7	26
1	БЗ	x_1	x_2	x_6	x_4	x_5	$\overline{\nu}_b$
	x_3	2	1		–1	1	5
	x_7	–6	–3		2	2	4
	x_8	–2	0		$\underline{1}$	1	2
		–8	–3		3	3	6
	БЗ	x_1	x_2	x_6	x_8	x_5	$\overline{\nu}_b$
2	x_3	0	1			2	7
	x_7	–2	–3			0	0
	x_4	–2	0			1	2
		–2	–3			0	$f_1 = 0$

Точка $\overline{x} = (0,0,7,2,0)^T$ є кутовою для множини X, однак серед базисних змінних є допоміжна змінна x_7, якій відповідає рядок, що має тільки від'ємні елементи. Це означає, що відповідні їм змінні основної задачі ЛП є нульовими ($x_1 = x_2 = 0$).

Отже, для визначення оптимального розв'язку початкової задачі маємо обмеження $x_3 = 7 - 2x_5$, $x_4 = 2 - x_5$, $x_1 = x_2 = 0$. Функція $f(\overline{x}) = 3x_3 - 4x_4 - 5x_5 = 3(7 - 2x_5) - 4(2 - x_5) - 5x_5 = 13 - 7x_5$.

Оптимальний розв'язок досягається в точці $\overline{x}^* = (0,0,3,0,2)$ (розв'яжіть самостійно). ∢

2.8. Двоїстість у лінійному програмуванні

Кожній задачі лінійного програмування відповідає задача лінійного програмування, яку називають *двоїстою* (або *спряженою*) до вихідної. Щоб краще зрозуміти поняття двоїстості, виклад матеріалу розпочнемо з такого прикладу.

Приклад 2.8. Фірма *B* закуповує ресурси S_i $\left(i=\overline{1,m}\right)$ у фірми *A* і зацікавлена у тому, щоб витрати на закупівлю цих ресурсів у кількостях b_i за цінами, відповідно, y_i були *мінімальними*. Проте фірма *A* зацікавлена у тому, щоб одержана виручка від продажу ресурсів була не меншою за суму, яку фірма може одержати при переробці ресурсів у готову продукцію. На виготовлення одиниці продукції P_j за ціною c_j ($j=\overline{1,n}$) витрачається a_{ij} одиниць ресурсу S_i. Необхідно записати економіко-математичні моделі для обох фірм.

➢ Для фірми *A* необхідно забезпечити такий план випуску продукції $\overline{x}=(x_1, x_2, ..., x_n)^T$, за якого прибуток від реалізації продукції буде *максимальним* за умови, що використання кожного виду ресурсу не перевищить величини b_i $\left(i=\overline{1,m}\right)$. Отримуємо ЗЛП у першій стандартній формі (2.6), (2.7): $f(\overline{x}) = \overline{c}^T\,\overline{x}\to\max$, $\begin{cases} A\overline{x}\le\overline{b}, \\ \overline{x}\ge\overline{0}_n. \end{cases}$

Для фірми *B* необхідно відшукати такий набір цін $\overline{y}=(y_1, y_2, ..., y_m)^T$ на ресурси, за яких загальні *витрати* на ресурси при виробництві кожного виду продукції фірмою *A* будуть <u>більшими</u> або <u>дорівнюватимуть</u> *прибуткові* від реалізації цього виду продукції (тобто фірмі *A* вигідніше буде продавати ресурси, а не виготовляти продукцію). Отримуємо ЗЛП у другій стандартній формі вигляду:

$$z(\overline{y}) = \overline{b}^T\,\overline{y}\to\min, \tag{2.48}$$

$$\begin{cases} A^T\overline{y}\ge\overline{c}, \\ \overline{y}\ge\overline{0}_m. \end{cases} \tag{2.49}$$

Задачу (2.6), (2.7) називають *прямою*, а задачу (2.48), (2.49) – *двоїстою* до неї. ≺

Побудуємо двоїсту задачу до задачі (2.48), (2.49). З цією метою запишемо її у першій стандартній формі:

$$-z(\bar{y}) = -\bar{b}^T\,\bar{y} \to \max, \quad \begin{cases} -A^T\bar{y} \le -\bar{c}, \\ \bar{y} \ge \bar{0}_m. \end{cases}$$

Двоїстою до неї є задача

$$-f(\bar{x}) = -\bar{c}^T\,\bar{x} \to \min, \quad \begin{cases} \left(-A^T\right)^T\bar{x} \ge -\bar{b}, \\ \bar{x} \ge \bar{0}_n, \end{cases}$$

яка еквівалентна задачі ЛП (2.6), (2.7) і відрізняється від неї тільки формою запису.

Отже, поняття двоїстості ЗЛП є взаємним. Якщо будь-яку з цих задач вважати *прямою*, тоді інша буде *двоїстою* до неї.

Задачі (2.6), (2.7) і (2.48), (2.49) називають *взаємно двоїстими задачами у симетричній формі.* Ці задачі володіють такими властивостями:

– в одній з задач шукають *максимум*, а в іншій – *мінімум*;
– коефіцієнти біля змінних у лінійній функції однієї задачі є вільними членами системи обмежень в іншій;
– пряма і двоїста задачі записано у різних стандартних формах (*домовимося* пряму ЗЛП записувати у *першій* стандартній формі, а двоїсту – у *другій* стандартній формі);
– матриці коефіцієнтів біля невідомих у системах обмежень обох задач є транспонованими одна щодо іншої;
– кількість нерівностей у системі обмежень однієї задачі збігається з кількістю невідомих іншої задачі;
– умови *невід'ємності невідомих* є в обох задачах.

Двоїсті невідомі $\bar{y} = (y_1, y_2, ..., y_m)^T$ називають *внутрішніми* (або *тіньовими*) цінами. Вони дають змогу оцінити вартість використовуваних ресурсів, отож їх ще називають *оцінками ресурсів*. Ціни $\bar{c} = (c_1, c_2, ..., c_n)^T$ називають *зовнішніми* цінами на продукцію.

Для будь-якої задачі ЛП, що має довільну форму, можна побудувати двоїсту ЗЛП. З цією метою початкову ЗЛП необхідно попередньо звести до *першої стандартної* форми запису, використовуючи відповідні правила перетворень (див. § 2.1). Розглянемо приклади 2.9 і 2.10.

Приклад 2.9. Для задачі ЛП $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - x_3 \to \min; \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 \le 7, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ x_3 \ge 4, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1;3}, \end{cases}$ побудувати двоїсту задачу.

➢ Зведемо початкову ЗЛП до *першої стандартної* форми запису:

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 + x_3 \to \max; \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 \le 7, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \le 6, \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 \le -6, \\ -x_3 \le -4, \\ x_j \ge 0,\quad j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

Двоїста задача: $\begin{cases} 7y_1 + 6y_2 - 6y_3 - 4y_4 \to \min; \\ 3y_1 + y_2 - y_3 \ge -1, \\ 4y_1 + 2y_2 - 2y_3 \ge 4, \\ y_1 + y_2 - y_3 - y_4 \ge 1, \\ y_i \ge 0,\ i = \overline{1,4}. \end{cases}$

Якщо у двоїстій задачі ввести нове невідоме $y = y_2 - y_3$, яке *не обмежене у знаку*, то ця задача зводиться до мінімізації функції $z = 7y_1 + 6y - 4y_4$ при обмеженнях:

$$3y_1 + y \ge -1,\ 4y_1 + 2y \ge 4,\ y_1 + y - y_4 \ge 1,\ y_1 \ge 0,\ y_4 \ge 0. \quad ⋞$$

Приклад 2.10. Для задачі ЛП: $6x_1 + 10x \to \max;$

$$5x_1 + 3x \ge 10,\ x_1 - x \le 4,\ x_1 \ge 0$$

побудувати двоїсту задачу.

➢ Зведемо початкову ЗЛП до *першої стандартної* форми запису. Нехай $x = x_2 - x_3$, де $x_2 \ge 0$ і $x_3 \ge 0$. Тоді пряма задача лінійного програмування набуде вигляду: $\begin{cases} 6x_1 + 10x_2 - 10x_3 \to \max; \\ -5x_1 - 3x_2 + 3x_3 \le -10, \\ x_1 - x_2 + x_3 \le 4, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$

Двоїста до неї задача матиме вигляд: $\begin{cases} -10y_1 + 4y_2 \to \min; \\ -5y_1 + y_2 \ge 6, \\ -3y_1 - y_2 \ge 10, \\ 3y_1 + y_2 \ge -10, \\ y_1 \ge 0, \ \ y_2 \ge 0. \end{cases}$

Обмеження $-3y_1 - y_2 \ge 10$ і $3y_1 + y_2 \ge -10$ можна замінити одним обмеженням типу рівності $3y_1 + y_2 = -10$. ≺

У загальному випадку можна продемонструвати [31], що:

- якщо у прямій задачі лінійного програмування є обмеження типу рівності, то у двоїстій задачі їм відповідають змінні, які не обмежені знаком (див. приклад 2.9);
- якщо в прямій задачі лінійного програмування є змінні, які не обмежені знаком, то у двоїстій задачі їм відповідає обмеження типу рівності (див. приклад 2.10).

Для ЗЛП у канонічній формі (2.10), (2.11) двоїстою є така задача:

$$z(\bar{y}) = \bar{b}^T \bar{y} \to \max, \tag{2.50}$$

$$A^T \bar{y} \le \bar{c}. \tag{2.51}$$

Задачі (2.10), (2.11) і (2.50), (2.51) називають *взаємно двоїстими задачами у несиметричній формі*. Домовимося ЗЛП у канонічній формі (2.10), (2.11) вважати *прямою* задачею, а ЗЛП (2.50), (2.51) – *двоїстою*. Умови *невід'ємності невідомих* наявні тільки у прямій ЗЛП.

Зв'язок між оптимальними розв'язками прямої та двоїстої задач встановлюють леми та теореми двоїстості.

Лема 2.5. *Основна нерівність теорії двоїстості*. Якщо пряма (2.6), (2.7) і двоїста до неї (2.48), (2.49) задачі лінійного програмування мають непорожні обмежені множини X і Y допустимих розв'язків, то для будь-яких $\bar{x} \in X$ і $\bar{y} \in Y$ справедлива нерівність:

$$\bar{c}^T \bar{x} \le \bar{b}^T \bar{y}. \tag{2.52}$$

➢ За умовою множини X і Y непорожні. Нехай $\bar{x} \in X$ і $\bar{y} \in Y$.

Тоді $\begin{cases} A\bar{x} \le \bar{b}, \\ \bar{x} \ge \bar{0}_n \end{cases}$ і $\begin{cases} A^T\bar{y} \ge \bar{c}, \\ \bar{y} \ge \bar{0}_m . \end{cases}$ Векторна нерівність $A\bar{x} \le \bar{b}$ є сукупністю скалярних нерівностей $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i,\ i = \overline{1,m}.$

Перемножуючи кожну i-ту нерівність цієї сукупності на $y_i \ge 0$ і сумуючи їх, отримуємо нерівність $\sum_{i=1}^{m} y_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le \sum_{i=1}^{m} y_i b_i$, або у матрично-векторному вигляді $\bar{y}^T A\bar{x} \le \bar{y}^T\bar{b}$.

Аналогічно, з векторних нерівностей $A^T\bar{y} \ge \bar{c}$ і $\bar{x} \ge 0_n$ можна отримати нерівність $\bar{x}^T A^T\bar{y} \ge \bar{x}^T\bar{c}$.

Отже, $\bar{c}^T\bar{x} = \bar{x}^T\bar{c} \le \bar{x}^T A^T\bar{y} = \bar{y}^T A\bar{x} \le \bar{y}^T\bar{b} = \bar{b}^T\bar{y}$, звідки й випливає нерівність (2.52). $\prec$

Сформулюємо відповідну лему для взаємно двоїстих задач у несиметричній формі.

Лема 2.5*. Якщо пряма (2.10), (2.11) і двоїста до неї (2.50), (2.51) задачі ЛП мають непорожні обмежені множини X і Y допустимих розв'язків, то для будь-яких $\bar{x} \in X$ і $\bar{y} \in Y$ справедлива нерівність:

$$\bar{b}^T\,\bar{y} \le \bar{c}^T\,\bar{x}. \qquad (2.53)$$

➢ За умовою множини X і Y непорожні. Нехай $\bar{x} \in X$ і $\bar{y} \in Y$.

Тоді $\begin{cases} A\bar{x} = \bar{b}, \\ \bar{x} \ge \bar{0}_n \end{cases}$ і $A^T\bar{y} \le \bar{c}.$ Векторна рівність $A\bar{x} = \bar{b}$ є сукупністю скалярних рівностей $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ i = \overline{1,m}.$

Перемножуючи кожну i-ту нерівність цієї сукупності на y_i і сумуючи їх, отримуємо рівність $\sum_{i=1}^{m} y_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \sum_{i=1}^{m} y_i b_i$, або у матрично-векторному вигляді $\bar{y}^T A\bar{x} = \bar{y}^T\bar{b}$.

Аналогічно з векторних нерівностей $A^T\bar{y} \le \bar{c}$ і $\bar{x} \ge 0_n$ можна отримати нерівність $\overline{x}^T A^T \overline{y} \le \overline{x}^T \overline{c}$.

Отже, $\overline{b}^T \overline{y} = \overline{y}^T \overline{b} = \overline{y}^T A\overline{x} = \overline{x}^T A^T \overline{y} \le \overline{x}^T \overline{c} = \overline{c}^T \overline{x}$, звідки й випливає нерівність (2.53). ≺

Нерівності (2.52) і (2.53) суперечать між собою із-за різних припущень про *пряму* задачу в парі *пряма задача – двоїста задача* (проаналізуйте самостійно). Головний *висновок* з цих нерівностей:

значення функціонала (на <u>максимум</u>) однієї задачі не перевищує значення функціонала (на <u>мінімум</u>) двоїстої задачі для довільних допустимих розв'язків відповідних задач.

Лема 2.6. *Достатня умова оптимальності двоїстих задач*. Якщо пряма (2.6), (2.7) і двоїста до неї (2.48), (2.49) задачі ЛП мають непорожні обмежені множини *X* і *Y* допустимих розв'язків, причому існують такі допустимі розв'язки $\overline{x}^* \in X$ і $\overline{y}^* \in Y$, що

$$\overline{c}^T \, \overline{x}^* = \overline{b}^T \, \overline{y}^*, \tag{2.54}$$

то допустимі розв'язки $\overline{x}^*$ і $\overline{y}^*$ є *оптимальними* розв'язками.

➢ Згідно з лемою 2.5, для будь-якого допустимого розв'язку $\overline{x} \in X$ прямої задачі виконується нерівність $\overline{c}^T \, \overline{x} \le \overline{b}^T \, \overline{y}^*$. Отже, якщо існує $\overline{x}^* \in X$, що справджує рівність (2.54), то $\overline{c}^T \, \overline{x} \le \overline{c}^T \, \overline{x}^*$ ($\overline{x}^*$ – оптимальний розв'язок прямої задачі).

Аналогічно, для будь-якого допустимого розв'язку $\overline{y} \in Y$ двоїстої задачі виконується нерівність $\overline{c}^T \, \overline{x}^* \le \overline{b}^T \, \overline{y}$. Отже, якщо існує $\overline{y}^* \in Y$, що справджує рівність (2.54), то $\overline{b}^T \, \overline{y}^* \le \overline{b}^T \, \overline{y}$ ($\overline{y}^*$ – оптимальний розв'язок двоїстої задачі). ≺

Сформулюємо відповідну лему для взаємно двоїстих задач у несиметричній формі.

Лема 2.6*. Якщо пряма (2.10), (2.11) і двоїста до неї (2.50), (2.51) задачі ЛП мають непорожні обмежені множини *X* і *Y* допустимих розв'язків, причому існують такі допустимі розв'язки $\overline{x}^* \in X$ і

$\bar{y}^* \in Y$, що виконується рівність (2.54), то допустимі розв'язки $\bar{x}^*$ і $\bar{y}^*$ є оптимальними розв'язками.

➢ Доведення аналогічне доведенню леми 2.6 (самостійно). ≺

Теорема 2.8. *Перша теорема двоїстості*. Якщо одна з пари взаємно двоїстих задач ЛП (у симетричній чи несиметричній формі) має оптимальний розв'язок, то й друга задача також має оптимальний розв'язок, причому для оптимальних розв'язків значення цільових функцій збігаються. Якщо цільова функція однієї із задач на непорожній множині допустимих розв'язків *не обмежена*, то множина допустимих розв'язків іншої ЗЛП є *порожньою*.

➢ Оскільки довільну задачу ЛП можна звести до канонічної форми, то обмежимося доведенням теореми для пари взаємно двоїстих задач ЛП у несиметричній формі (2.10), (2.11) і (2.50), (2.51). Враховуючи взаємну двоїстість цих задач ЛП, доведення досить здійснити, беручи за початкову одну з них, наприклад (2.10), (2.11).

Нехай задача ЛП (2.10), (2.11) має оптимальний розв'язок (позначимо $\bar{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)^T$, тоді $\min f(\bar{x}) = f(\bar{x}^*) = \bar{c}^T \bar{x}^*$). Доведемо, що задача ЛП (2.50), (2.51) теж має оптимальний розв'язок, причому для оптимальних розв'язків значення цільових функцій збігаються (справедлива рівність (2.54)).

Запишемо вираз для цільової функції згідно з (2.24):

$$f(\bar{x}) = \bar{c}_b^T A_b^{-1} \bar{b} - \left(\bar{c}_b^T A_b^{-1} A_s - \bar{c}_s^T\right) \bar{x}_s = \bar{c}_b^T A_b^{-1} \bar{b} - \overline{\Delta}_s \cdot \bar{x}_s,$$

де $\bar{c}_s = (c_{m+1}, \dots, c_n)^T$; $\overline{\Delta}_s$ – відповідний вектор симплекс-різниць. На останній ітерації у симплекс-таблиці розв'язок є *оптимальним*. А це означає, що $\overline{\Delta}_s \le \bar{0}$, тобто

$$\bar{c}_b^T A_b^{-1} A_s - \bar{c}_s^T \le \bar{0}; \; \bar{c}_b^T A_b^{-1} A_s \le \bar{c}_s^T .$$

Нехай $\bar{y}^T = \bar{c}_b^T A_b^{-1}$. Тоді $\bar{y}^T A_b = \bar{c}_b^T$, $\bar{y}^T A_s \le \bar{c}_s^T$. Об'єднуючи останні вирази, маємо $\bar{y}^T A \le \bar{c}^T$, або $A^T \bar{y} \le \bar{c}$.

Порівнюючи одержані обмеження з обмеженнями (2.51), переконуємося у тому, що $\bar{y}$ є допустимим розв'язком двоїстої задачі

(2.50), (2.51). Доведемо, що $\bar{y}$ є оптимальним розв'язком цієї задачі. Запишемо так:

$$\bar{y}^T\bar{b} = \bar{c}_b^T A_b^{-1}\bar{b} = \bar{c}_b^T \bar{x}_b^* = \bar{c}^T\bar{x}^*.$$

Отже, значення цільової функції двоїстої задачі для допустимого розв'язку $\bar{y}$ дорівнює значенню цільової функції прямої задачі для її оптимального розв'язку $\bar{x}^*$ (справедлива рівність (2.54)). Згідно з лемою 2.6*, це означає, що $\bar{y}$ – оптимальний розв'язок двоїстої задачі ЛП (2.50), (2.51).

Доведемо другу частину теореми. Нехай відомо, що цільова функція прямої задачі (2.10), (2.11) *не обмежена знизу* на непорожній множині допустимих розв'язків. У цьому випадку множина допустимих розв'язків двоїстої задачі ЛП (2.50), (2.51) є *порожньою*.

Доведемо від *супротивного*. Нехай задача ЛП (2.50), (2.51) має допустимі розв'язки і $\bar{y}$ – один з них. Згідно з лемою 2.5*, існує такий допустимий розв'язок прямої задачі $\bar{x}$, що $\bar{b}^T\bar{y} \le \bar{c}^T\bar{x}$ (тобто цільова функція прямої задачі *обмежена знизу*). Отримали протиріччя. $\prec$

Економічний зміст *першої теореми двоїстості*.

План виробництва $\bar{x}^* = (x_1^*, ..., x_n^*)^T$ і набір цін (оцінок) ресурсів $\bar{y}^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*)^T$ є оптимальними тоді і тільки тоді, коли *прибуток* від продажу продукції, розрахований при зовнішніх (заздалегідь відомих) цінах $c_1, c_2, \ldots, c_n$, дорівнює *витратам* на ресурси за внутрішніми (визначеними за розв'язком задачі) цінами $y_1, y_2, \ldots, y_m$.

Економічний зміст першої теореми двоїстості можна трактувати і так: підприємству *однаково*, чи виробляти продукцію за оптимальним планом $\bar{x}^* = (x_1^*, ..., x_n^*)^T$ і отримати максимальний прибуток $\bar{c}^T\bar{x}^*$, чи продати ресурси за оптимальними цінами $\bar{y}^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*)^T$ і відшкодувати з продажу мінімальні витрати на ресурси $\bar{y}^T\bar{b}^*$.

Теорема 2.9. *Друга теорема двоїстості*. Нехай $\bar{x}^* = (x_1^*, ..., x_n^*)^T$ і $\bar{y}^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*)^T$ – допустимі розв'язки, відповідно, прямої та двоїстої задач ЛП (у симетричній чи несиметричній формі). Для оптимальності цих розв'язків необхідно і достатньо, щоб виконувалися *умови доповнювальної нежорсткості*:

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j\right) x_j^* = 0, \ j = \overline{1, n}; \tag{2.55}$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i\right) y_i^* = 0, \ i = \overline{1, m}. \tag{2.56}$$

➢ Оскільки довільну задачу ЛП можна звести до канонічної форми, то обмежимося доведенням теореми для пари взаємно двоїстих задач ЛП у несиметричній формі (2.10), (2.11) і (2.50), (2.51).

Необхідність. Нехай $\bar{x}^*$ і $\bar{y}^*$ – оптимальні розв'язки, відповідно, прямої (2.10), (2.11) та двоїстої (2.50), (2.51) задач ЛП. Доведемо, що виконуються умови (2.55), (2.56).

Оскільки $\bar{x}^*$ і $\bar{y}^*$ – розв'язки ЗЛП, то виконуються співвідношення:

$$A\bar{x}^* = \bar{b}, \ \bar{x}^* \geq \bar{0}_n, \ A^T \bar{y}^* \leq \bar{c}. \tag{2.57}$$

З цих співвідношень випливає, що

$$\bar{c}^T \bar{x}^* = (\bar{x}^*)^T \bar{c} \geq (\bar{x}^*)^T A^T \bar{y}^* = (\bar{y}^*)^T A\bar{x}^* = (\bar{y}^*)^T \bar{b} = b^T \bar{y}^*.$$

За першою теоремою двоїстості $\bar{c}^T \bar{x}^* = \bar{b}^T \bar{y}^*$. Отож

$$(\bar{x}^*)^T \bar{c} = (\bar{x}^*)^T A^T \bar{y}^*; \qquad (\bar{y}^*)^T A\bar{x}^* = (\bar{y}^*)^T \bar{b},$$

або $(\bar{x}^*)^T \left(A^T \bar{y}^* - \bar{c}\right) = 0; \qquad (\bar{y}^*)^T \left(A\bar{x}^* - \bar{b}\right) = 0.$

Запишемо останні дві рівності у скалярному вигляді:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^* (\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j) = 0; \quad \sum_{i=1}^{m} y_i^* (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i) = 0. \tag{2.58}$$

Згідно з (2.57) маємо:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i = 0, \ i = \overline{1, m}; \quad x_j^* \geq 0, \ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j \leq 0, \ j = \overline{1, n}.$$

Врахуємо у першій рівності (2.58), що сума недодатних доданків дорівнює нулю лише тоді, коли кожен доданок дорівнює нулю. У другій рівності (2.58) кожен доданок дорівнює нулю за умовою розв'язання прямої ЗЛП. Звідси і випливає справедливість умов (2.55), (2.56).

Достатність. Нехай виконуються умови (2.55), (2.56). Доведемо, що $\bar{x}*$ і $\bar{y}*$ – оптимальні розв'язки, відповідно, прямої (2.10), (2.11) та двоїстої (2.50), (2.51) задач ЛП.

В умовах (2.55) і (2.56) розкриємо дужки та підсумуємо умову (2.55) за i $\left(i=\overline{1,m}\right)$, а умову (2.56) – за j $\left(j=\overline{1,n}\right)$. Отримаємо:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^*y_i^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*; \qquad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^*y_i^* = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^*.$$

Ліві частини отриманих рівнянь однакові. Отже: $\sum\limits_{i=1}^{m} b_i y_i^* = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j^*.$

Тоді, згідно з лемою 2.6*, $\bar{x}*$ і $\bar{y}*$ – оптимальні розв'язки, оскільки значення цільових функцій прямої та двоїстої задачі збігаються. Теорему доведено. ∢

Взаємозв'язок між оптимальними планами прямої та двоїстої задач ЛП у симетричній формі встановлює *наслідок* з другої теореми двоїстості.

Наслідок (*з теореми 2.9*). Якщо під час підстановки оптимального розв'язку однієї з пари взаємно двоїстих задач ЛП у симетричній формі у систему обмежень цієї задачі *i*-те обмеження виконується як строга нерівність, то відповідна *i*-та компонента оптимального плану двоїстої задачі дорівнює нулю. Якщо *i*-та компонента оптимального розв'язку однієї із задач додатна, то відповідне *i*-те обмеження двоїстої задачі виконується для оптимального розв'язку як рівність.

Наслідок *з* теореми 2.9 для пари взаємно двоїстих задач ЛП у несиметричній формі детально проаналізовано під час розгляду транспортної задачі (розділ 4).

Економічний зміст *другої теореми двоїстості* щодо оптимального плану $\overline{x}*$ прямої задачі. Якщо для виготовлення усієї продукції в обсязі, що визначається оптимальним планом $\overline{x}*$, витрати *i*-го ресурсу строго менші, ніж його загальний обсяг b_i, то відповідна оцінка такого ресурсу y_i^* (компонента оптимального плану двоїстої задачі) дорівнюватиме нулю, тобто такий ресурс за даних умов для виробництва не є "цінним".

Якщо ж витрати ресурсу дорівнюють його наявному обсягові b_i, тобто його використано максимально, то він є "цінним" для виробництва, і його оцінка y_i^* буде строго більшою від нуля.

Економічний зміст *другої теореми двоїстості* щодо оптимального плану $\overline{y}*$ двоїстої задачі. У разі, коли деяке *j*-те обмеження виконується як нерівність, тобто усі витрати на виробництво одиниці *j*-го виду продукції перевищують її ціну c_j, виробництво такого виду продукції є недоцільним, і в оптимальному плані прямої задачі обсяг такої продукції x_j^* дорівнює нулю.

Якщо витрати на виробництво *j*-го виду продукції дорівнюють ціні одиниці продукції c_j, то її необхідно виготовляти в обсязі, який визначає оптимальний план прямої задачі $x_j^* > 0$.

2.9. Двоїстий симплексний метод розв'язування задачі ЛП

Розглянемо ЗЛП у канонічній формі (2.10), (2.11). Якщо цю задачу розв'язують симплексним методом, то після кожної ітерації отримують опорний розв'язок $\overline{v} \geq \overline{0}_n$ системи (2.11). Якщо ж унаслідок деякої ітерації справдиться ще й умова (2.31), то відповідний опорний розв'язок буде *оптимальним*.

Нерівності $\overline{v} \geq \overline{0}_n$ називають умовами *допустимості*, а (2.31) – умовами *оптимальності*. Отже, *симплексний метод* передбачає такі перетворення опорного плану, які при збереженні умов допустимості дають змогу досягти умов оптимальності. Цей метод називають також методом *послідовного поліпшення плану*.

Двоїстий симплексний метод передбачає такі перетворення *базисних* розв'язків системи (2.11), за яких зберігаються умови оптимальності (такі розв'язки називають *псевдопланом*). Ці перетворення виконують так, щоб досягти умов допустимості. Двоїстий симплексний метод називають ще методом *послідовного поліпшення оцінок*.

Викладемо цей метод без детального обґрунтування. Зі строгим обґрунтуванням двоїстого симплексного методу можна ознайомитися у джерелах [6, 13, 16].

У матриці умов A системи (2.11) відшукують m лінійно незалежних стовпців $\overline{A}_{j_e}$ $\left(1 \le j_e \le n, \quad e = 1,...,m\right)$. Не зменшуючи загальності, вважають надалі, що незалежними є перші m стовпців. Формують матрицю A_b, вектор $\overline{c}_b$ і визначають матрицю A_b^{-1}. Згідно з (2.25) відшукують базисний розв'язок $\overline{u} = (\overline{u}_b, \overline{0}_{n-m})^T = (u_1,...,u_m,0,...,0)^T$, який може містити від'ємні компоненти.

Обчислюють $\overline{\gamma}_j = A_b^{-1}\overline{A}_j \quad \left(j = \overline{1,n}\right)$, вектор симплекс-різниць $\left(\Delta_1,..., \Delta_n\right)$, згідно з (2.22), і значення функції $f(\overline{u})$, згідно з (2.24). Формують таблицю початкової ітерації двоїстого симплекс-методу так само, як і таблицю початкової ітерації симплекс-методу, з тією лише різницею, що замість стовпця $\overline{v}_b$ відображають стовпець $\overline{u}_b$.

У прямому симплекс-методі спочатку виявляють змінну, яку *вводять* у базис, а в двоїстому симплекс-методі навпаки – спочатку визначають змінну, яку *вилучають* з базису.

Розглянемо такий *алгоритм* двоїстого симплек-методу.

1. Якщо усі $u_i > 0 \ (i = \overline{1, m})$, то оптимальний розв'язок *знайдено* (*завершують обчислення*). Інакше необхідно вибрати найбільшу за модулем компоненту $u_l < 0 \ (l = \overline{1, m})$ і відповідну змінну x_l вилучити з базису.
2. Якщо в l-му рядку симплекс-таблиці, що відповідає змінній x_l, не міститься жодного $a_{lj} < 0$ ($j = \overline{m+1, n}$), то початкова задача *не має* розв'язку (*завершують обчислення*).

Інакше визначають індекс k $\left(m+1 \le k \le n\right)$, для якого

$$\frac{\Delta_k}{\gamma_{lk}} = \min_{j \in J_k} \frac{\Delta_j}{\gamma_{lj}}, \text{ де } J_k = \left\{ j : \gamma_{lj} < 0 \right\}.$$

Якщо таких найменших відношень є декілька, то можна взяти довільне з них.

3. *Ведучим елементом* обирають γ_{lk} і виконують третій крок прямого симплекс-методу.

Приклад 2.11. Розв'язати ЗЛП:
$$19x_1 + 21x_2 \to \min;$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \ge 20, \\ 4x_1 + x_2 \ge 20, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

➢ Зведемо задачу до канонічної форми:
$$19x_1 + 21x_2 \to \min;$$
$$\begin{cases} -2x_1 - 5x_2 + x_3 = -20, \\ -4x_1 - x_2 + x_4 = -20, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

Симплекс-таблиця прикладу 2.11

I	НЗ / БЗ	x_1	x_2	$\overline{u}_b$
0	x_3	–2	$\underline{-5}$	–20
	x_4	–4	–1	–20
		–19	–21	0
1	НЗ / БЗ	x_1	x_3	$\overline{u}_b$
	x_2	2/5	–1/5	4
	x_4	$\underline{-18/5}$	–1/5	–16
		–53/5	–21/5	84
2	*НЗ* / *БЗ*	x_4	x_3	$\overline{u}_b$
	x_2	1/9	–2/9	20/9
	x_1	–5/18	1/18	40/9
		–53/18	–65/18	1180/9

Отже, оптимальним розв'язком задачі є вектор (40/9, 20/9). ≺

? Запитання для самоперевірки

1. Запишіть у скалярному вигляді першу стандартну форму ЗЛП.
2. Запишіть у векторному вигляді першу стандартну форму ЗЛП.
3. Запишіть у матричному вигляді першу стандартну форму ЗЛП.
4. Запишіть у скалярному вигляді другу стандартну форму ЗЛП.
5. Запишіть у векторному вигляді другу стандартну форму ЗЛП.
6. Запишіть у матричному вигляді другу стандартну форму ЗЛП.
7. Запишіть у скалярному вигляді канонічну форму ЗЛП.
8. Запишіть у векторному вигляді канонічну форму ЗЛП.
9. Запишіть у матричному вигляді канонічну форму ЗЛП.
10. Сформулюйте правило перетворення **min** (функціонала) на **max**.
11. Сформулюйте правило перетворення **max** (функціонала) на **min**.
12. Сформулюйте правило зміни знака нерівності.
13. Сформулюйте правило перетворення рівності у систему нерівностей.
14. Сформулюйте правило перетворення нерівностей у рівності.
15. Сформулюйте правило подолання двостороннього обмеження під час зведення до канонічної форми ЗЛП.
16. Сформулюйте правило подолання відсутності вимоги на невід'ємність змінних під час зведення до канонічної форми ЗЛП.
17. Дайте означення багатогранної множини.
18. Дайте означення опуклого багатогранника.
19. Що таке кутова точка? Що таке базис кутової точки?
20. Що таке кутовий напрям множини?
21. Що таке допустимі та опорні плани?
22. Що таке оптимальний план?
23. Коротко опишіть суть сиплексного методу.
24. Що таке симплекс-різниці?
25. У чому полягає виродженість опорного плану?
26. Що таке антициклін?
27. Коротко сформулюйте правило побудови двоїстої задачі для задачі ЛП, зображеної у першій стандартній формі.
28. Коротко сформулюйте правило побудови двоїстої задачі для задачі ЛП, зображеної у канонічній формі.
29. Сформулюйте економічну інтерпретацію першої теореми двоїстості.
30. Сформулюйте економічну інтерпретацію другої теореми двоїстості.

🕮 Завдання для самостійної роботи

Завдання 2.1. Звести до канонічної форми такі ЗЛП**:**

1. $x_1 - x_2 + 3x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 \le 5, \\ x_1 + \ 2x_3 = 8, \\ -x_1 - 2x_2 \ge 1, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

2. $-x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} -5x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 5, \\ x_1 - \ 3x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ x_1 \ge 0, \quad x_3 \ge 0. \end{cases}$$

3. $2x_1 - x_2 + x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} 7x_1 - x_2 + x_3 \le 7, \\ 8x_1 + \ x_3 = 5, \\ x_1 - 2x_2 \ge 3, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

4. $x_1 + x_2 - 5x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 \ge 6, \\ x_1 + \ 3x_3 \le 3, \\ x_1 + 2x_2 = 2, \\ 1 \le x_1 \le 5, \quad x_3 \ge 0. \end{cases}$$

5. $2x_1 - x_2 - x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} 7x_1 - x_2 + x_3 \le 7, \\ 8x_1 + \ x_3 = 5, \\ x_1 - 2x_2 \ge 3, \\ x_1 \ge 0, \ \ 2 \le x_2 \le 7. \end{cases}$$

6. $x_1 - x_2 - 2x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 \ge 6, \\ x_1 + \ 3x_3 \le 3, \\ x_1 + 2x_2 = 2, \\ 0 \le x_1 \le 2, \quad x_3 \ge 0. \end{cases}$$

Завдання 2.2. Звести до першої стандартної форми ЗЛП 1 – 9 (завд. 2.1).

Завдання 2.3. Звести до другої стандартної форми ЗЛП 1 – 9 (завд. 2.1).

Завдання 2.4. Представити математичну модель задачі ухвалення рішення (завд.1.1) як задачу лінійного програмування та отримати її розв'язок графічним способом. Сформулювати рекомендації щодо виробництва виробів, складу пайка тощо.

Завдання 2.5. Нехай деяка фірма виготовляє 4 види продукції, використовуючи для цього 3 види ресурсів. Можливий об'єм споживання i-го ресурсу ($i = \overline{1,\ 3}$) обмежений невід'ємною величиною b_i, а витрати i-го ресурсу на виготовлення одиниці j-го виду продукції ($j = \overline{1,\ 4}$) становлять a_{ij} умовних одиниць. Прибуток від продажу одиниці j-го виду продукції дорівнює c_j умовних грошових одиниць. Необхідно визначити такі об'єми виготовлення кожного j-го виду продукції, які забезпечать фірмі максимальний сумарний дохід від їхньої реалізації.

Представити математичну модель задачі ухвалення рішення як задачу лінійного програмування та отримати її розв'язок симплекс-методом. Сформулювати рекомендації щодо випуску продукції. У наведених нижче задачах передбачено, що можливі об'єми споживання ресурсів задаються вектором $\overline{b}$, а прибутки від продажу видів продукції – вектором $\overline{c}^T$; витрати ресурсів на виготовлення одиниць видів продукції задаються матрицею A.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0{,}5 & 4 \\ 1 & 5 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$; $\overline{b} = \begin{pmatrix} 2400 \\ 1200 \\ 3000 \end{pmatrix}$; $\overline{c}^T = (75;\ 30;\ 60;\ 120)$.

2. $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2{,}4 & 7{,}3 \\ 4 & 5 & 13 & 10 \\ 3{,}6 & 0{,}7 & 0 & 1{,}1 \end{pmatrix}$; $\overline{b} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 2100 \\ 2000 \end{pmatrix}$; $\overline{c}^T = (91;\ 40;\ 55;\ 30)$.

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4{,}5 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & 4 & 15 \\ 6 & 17 & 10 & 6 \end{pmatrix}$; $\overline{b} = \begin{pmatrix} 400 \\ 200 \\ 1000 \end{pmatrix}$; $\overline{c}^T = (111;\ 50;\ 77;\ 70)$.

4. $A = \begin{pmatrix} 16 & 12 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & 12 & 18 \\ 5{,}6 & 4{,}8 & 11 & 1 \end{pmatrix}$; $\overline{b} = \begin{pmatrix} 3200 \\ 3100 \\ 3000 \end{pmatrix}$; $\overline{c}^T = (21;\ 60;\ 71;\ 80)$.

5. $A = \begin{pmatrix} 8 & 4{,}6 & 4 & 31 \\ 8 & 5{,}9 & 3 & 16 \\ 3 & 6 & 0 & 8 \end{pmatrix}$; $\overline{b} = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 200 \end{pmatrix}$; $\overline{c}^T = (9;\ 4;\ 5;\ 3)$.

6. $A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 4 & 7 \\ 4{,}8 & 15 & 3 & 1 \\ 6 & 13 & 5 & 1 \end{pmatrix}$; $\overline{b} = \begin{pmatrix} 1400 \\ 1100 \\ 2400 \end{pmatrix}$; $\overline{c}^T = (165;\ 140;\ 155;\ 130)$.

7. $A=\begin{pmatrix} 6 & 14 & 24 & 33 \\ 0 & 5 & 23 & 0 \\ 6 & 7 & 0 & 11 \end{pmatrix}$; $\quad \bar{b}=\begin{pmatrix} 900 \\ 1300 \\ 2400 \end{pmatrix}$; $\bar{c}^T=(131;120;5;50)$.

8. $A=\begin{pmatrix} 16 & 23 & 24 & 3 \\ 14 & 25 & 3 & 15 \\ 36 & 17 & 10 & 0 \end{pmatrix}$; $\quad \bar{b}=\begin{pmatrix} 800 \\ 900 \\ 1000 \end{pmatrix}$; $\quad \bar{c}^T=(213;145;75;88)$.

9. $A=\begin{pmatrix} 9 & 13 & 2 & 0 \\ 24 & 15 & 3 & 0 \\ 16 & 17 & 10 & 21 \end{pmatrix}$; $\quad \bar{b}=\begin{pmatrix} 1700 \\ 3100 \\ 3000 \end{pmatrix}$; $\quad \bar{c}^T=(222;50;155;120)$.

10. $A=\begin{pmatrix} 16 & 23 & 24 & 23 \\ 24 & 25 & 13 & 20 \\ 26 & 0 & 10 & 11 \end{pmatrix}$; $\quad \bar{b}=\begin{pmatrix} 1600 \\ 1400 \\ 3200 \end{pmatrix}$; $\quad \bar{c}^T=(95;60;85;80)$.

11. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$; $\quad \bar{b}=\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\quad \bar{c}^T=(2;4;1;1)$.

12. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; $\quad \bar{b}=\begin{pmatrix} 24 \\ 12 \\ 35 \end{pmatrix}$; $\quad \bar{c}^T=(0{,}4;0{,}2;0{,}5;0{,}8)$.

13. $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\quad \bar{b}=\begin{pmatrix} 34 \\ 16 \\ 22 \end{pmatrix}$; $\quad \bar{c}^T=(25;17;19;12)$.

14. $A=\begin{pmatrix} 2{,}5 & 2{,}5 & 2 & 1{,}5 \\ 4 & 10 & 4 & 6 \\ 8 & 7 & 4 & 10 \end{pmatrix}$; $\quad \bar{b}=\begin{pmatrix} 100 \\ 260 \\ 370 \end{pmatrix}$; $\quad \bar{c}^T=(40;50;100;80)$.

15. $A=\begin{pmatrix}1&2&3&1\\2&1&0&0\\0&1&4&1\end{pmatrix}$; $\bar{b}=\begin{pmatrix}1000\\500\\1200\end{pmatrix}$; $\bar{c}^T=(2;\,40;\,10;\,15)$.

Завдання 2.6. Знайти оптимальний розв’язок таких задач ЛП:

1. $2x_1+10x_2-2x_3\to\max;\ \begin{cases}x_1+2x_2-x_3\ge 1,\\2x_1-x_2+2x_3\le 3.\end{cases}$

2. $3x_1+4x_2-2x_3\to\min;\ \begin{cases}2x_1+x_2-x_3\ge 7,\\3x_1-2x_2+3x_3\ge 9,\\x_1-2x_2-x_3\ge 5.\end{cases}$

3. $x_1+x_2+2x_3\to\max;\ \begin{cases}3x_1+4x_2-x_3=4,\\x_1-x_2+2x_3=6,\\2x_1+x_3=5.\end{cases}$

4. $2x_1+3x_2-x_3+5x_4\to\min;\ \begin{cases}5x_1+4x_2-3x_3-x_4=7,\\x_1+2x_2-x_3=3,\\2x_1+x_2+x_3+3x_4=8.\end{cases}$

5. $2x_1-x_2+x_3+3x_4+x_5\to\max;\ \begin{cases}x_1+3x_2+x_3+2x_4=5,\\2x_1+x_2+2x_3+3x_4\le 8,\\x_1+x_2+3x_3+x_4+2x_5\le 9,\\-x_1-2x_2+x_3+3x_4-x_5\le 4.\end{cases}$

6. $7x_1+6x_2+3x_3-x_4\to\min;\ \begin{cases}2x_1-x_2+2x_3-3x_4\ge 12,\\-x_1+2x_2-x_3+x_4\le 10,\\3x_1+5x_2+x_4=7.\end{cases}$

3. ЦІЛОЧИСЕЛЬНЕ ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

🗎 **План викладу матеріалу**:

1. Постановка задачі.
2. Методи розв'язування задач цілочисельного лінійного програмування (ЦЛП).
3. Метод Гоморі розв'язування задач ЦЛП.
4. Метод гілок і меж розв'язування задач ЦЛП.
5. Задача комівояжера.
6. Метод гілок і меж розв'язування задачі комівояжера.

Ключові терміни розділу

- *Частково цілочисельна задача*
- *Цілковито цілочисельна задача*
- *Метод заокруглення* (*МЗ*)
- *Методи відтинання*
- *Комбінаторні методи*
- *Гамільтонів цикл*
- *Зведення матриці відстаней*
- *Константи зведення*

3.1. Постановка задачі

При розв'язуванні багатьох оптимізаційних задач необхідно, щоб невідомі величини подавали цілими числами. Такі задачі зараховано до задач *цілочисельного програмування*. Вони можуть бути лінійними і нелінійними. Обмежимося розглядом задач *цілочисельного лінійного програмування* (ЦЛП), коли функція мети і обмеження задачі є *лінійними*.

Якщо вимога цілочисельності поширюється на *усі* невідомі величини задачі, то задачу ЦЛП називають *цілковито* цілочисельною; якщо ж ця вимога поширюється лише на *частину* невідомих величин – *частково* цілочисельною.

➢ ***Приклад 3.1***. На виробничій ділянці необхідно встановити устаткування трьох типів. Вартість одиниці устаткування першого типу становить 2 млн грн., другого – 3 млн грн. і третього –1 млн грн. На закупівлю устаткування виділено 20 млн грн. Площа виробничої ділянки становить 40 м^2. Продуктивність одиниці кожного типу устаткування, відповідно, дорівнює 2, 4 і 3 одиниці за зміну. Визначити, скільки устаткування кожного типу необхідно закупити, щоб одержати максимальну продуктивність виробничої ділянки, якщо для установки одиниці устаткування першого типу вимагається 9 м^2 площі, другого – 7 і третього – 10 м^2.

➢ Позначимо через x_1, x_2 і x_3 кількість устаткування кожного типу, що закуповується. Тоді математична модель задачі набуде вигляду: $2x_1+4x_2+3x_3 \to \max$, $2x_1+3x_2+x_3 \le 20$,

$$9x_1+7x_2+10x_3 \le 40, \quad x_j \ge 0; \quad x_j \text{ – цілі } (j=\overline{1,3}).$$ ⋖

Приклад 3.2. Транспортне судно вантажопідйомністю P і місткістю V завантажується n неподільними різними предметами. Для кожного предмета відомі такі величини, як вага p_j, вартість перевезення c_j і об'єм V_j $(j=\overline{1,n})$. Необхідно завантажити судно предметами так, щоб їхня сумарна вартість перевезення була максимальною і виконувалися обмеження з вантажопідйомності та місткості.

➢ Якщо позначити

$$x_j = \begin{cases} 1, \text{ якщо } j-\text{й предмет завантажується на судно } (j=\overline{1,n}); \\ 0, \text{ у протилежному випадку,} \end{cases}$$

то математична модель задачі набуде вигляду:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max; \quad \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \le P, \quad \sum_{j=1}^{n} v_j x_j \le V.$$ ⋖

Запишемо математичну модель цілковито цілочисельної задачі ЦЛП у канонічній формі:

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min, \tag{3.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \; i=\overline{1,m}; \tag{3.2}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j=\overline{1,n}), \tag{3.3}$$

$$x_j \in Z \quad (j=\overline{1,n}), \tag{3.4}$$

де Z – множина цілих чисел.

3.2. Методи розв'язування задач цілочисельного лінійного програмування

На перший погляд найкращим методом розв'язування задач цілочисельного програмування є *метод заокруглення*, реалізація якого відбувається у два етапи. На першому етапі відшукують оптимальний розв'язок задачі лінійного програмування з *послабленими обмеженнями* (без вимоги цілочисельності змінних).

На другому етапі значення змінних в оптимальному розв'язку, що не є цілими, округляють так, щоб одержати допустимий розв'язок з цілочисельними значеннями.

Спокусливість використання методу заокруглення зрозуміла, однак його практична реалізація може спричинити до допустимого розв'язку, який значно відрізняється від оптимального розв'язку вихідної задачі цілочисельного програмування.

Приклад 3.3. Розглянемо цілочисельну задачу: $x_1 + 1{,}5x_2 \to \max$;

$$2x_1 + 4x_2 \le 17,\ 10x_1 + 4x_2 \le 45,\ \ x_j \ge 0,\ \ x_j \in Z\ \ (j = 1, 2).$$

➢ Оптимальний розв'язок відповідної ЗЛП з послабленими обмеженнями $(7/2;\ 5/2)^T$ можна отримати геометричним методом. Значення цільової функції у цьому випадку дорівнює 7,25. Методом заокруглення одержуємо допустимий розв'язок $(3;\ 2)^T$, значення цільової функції на якому дорівнює 6. Однак насправді оптимальним розв'язком цілочисельної задачі є розв'язок $(2;\ 3)^T$, значення цільової функції на якому дорівнює 6,5. ⮜

Неспроможність методу заокруглення зумовлена не тільки можливістю одержання неоптимального розв'язку. Справа в тому, що безліч задач математичного програмування можна сформулювати як задачі цілочисельного програмування, у яких змінні моделі набувають значень із множини $\{0, 1\}$. У цій ситуації процедура заокруглення є логічно неприйнятною.

Виокремлюють два *типи* точних методів розв'язування задач ЦЛП: методи *відтинання* і *комбінаторні* методи. Основна ідея методів відтинання розв'язування цілковито цілочисельних задач (3.1) – (3.4) полягає в такому.

Множина допустимих розв'язків ЗЛП з послабленими обмеженнями (тобто задачі (3.1) – (3.3)) є опуклим багатогранником

$X \subset R^n$. Множина допустимих розв’язків ЗЛП (3.1) – (3.4) є *сукупністю* ізольованих точок з цілочисельними координатами, які належать X (позначимо її через G, $G \subseteq X$).

Якщо у задачі (3.1) – (3.4) множину допустимих розв’язків X замінити множиною G, то це не може спричинити до зміни її оптимального розв’язку, оскільки G отримано з X шляхом *відтинання* від неї підмножини, яка не містить допустимих розв’язків, що задовільняють вимозі цілочисельності.

Однак у цьому випадку оптимальний розв’язок задачі лінійного програмування з послабленими обмеженнями й множиною G допустимих розв’язків відповідає крайній точці множини G.

Як наслідок, цей розв’язок задовольняє вимозі цілочисельності й забезпечує екстремальне значення цільової функції не тільки на G, але й на X, тобто є оптимальним розв’язком вихідної цілковито цілочисельної задачі. Основні розбіжності у методах відтинання стосуються процедур виокремлення підмножини G.

В основу *комбінаторних методів* розв’язування задач ЦЛП покладено ідею *перебирання* елементів X з метою відшукання оптимального рішення. При цьому за рахунок використання різних спеціальних процедур безпосередньо розглядають лише *частину* елементів X, що задовольняють вимозі цілочисельності. Найвідомішим комбінаторним методом є *метод гілок і меж*, основна ідея якого полягає в такому.

Якщо оптимальний розв’язок $\bar{x}*$ задачі ЦЛП з послабленими обмеженнями не задовольняє вимозі цілочисельності, то із множини X допустимих розв’язків виокремлюють дві опуклих підмножини K_1 і K_2, що не перетинаються, які містять усі допустимі розв’язки з X, що задовольняють вимозі цілочисельності та не містять $\bar{x}*$. Це дає змогу замінити розглянуту задачу цілочисельного програмування сукупністю двох еквівалентних їй задач із множинами допустимих розв’язків K_1 і K_2, відповідно. Кожна з цих задач, у свою чергу, може розділитися на дві нові і т.д.

Комбінаторні методи широко використовують для розв’язування задач *булевого програмування,* тобто для розв’язування цілковито цілочисельних задач, змінні яких набувають значення з множини {0, 1}. Задачі ЦЛП та задачі булевого програмування належать до ширшого класу задач *дискретного програмування*.

Зазначимо, що існують й інші підходи до розв'язування задач цілочисельного програмування, які в загальному випадку не гарантують визначення оптимального розв'язку, проте дають змогу відшукати допустимий розв'язок, близький (щодо значення цільової функції) до оптимального, іноді збігаючись з ним.

3.3. Метод Гоморі розв'язування задач ЦЛП

Метод Гоморі базується на застосуванні симплекс-методу і методу відтинання. Ідея його достатньо проста і полягає в такому.

Спочатку необхідно відшукати оптимальний розв'язок задачі (3.1) – (3.3) симплекс-методом. Якщо одержаний розв'язок цілочисельний, то ціль досягнуто. Якщо ж оптимальний розв'язок не є цілочисельним, то в умови задачі вводять *додаткове обмеження*, яке відтинає від області допустимих розв'язків одержаний нецілочисельний розв'язок і не відтинає від неї жодної точки із цілочисельними координатами.

Далі симплекс-методом розв'язують *розширену* задачу (тобто задачу (3.1) – (3.3) з додатковим обмеженням). Якщо новий розв'язок не буде цілочисельним, то вводять інше додаткове обмеження.

Процес побудови додаткових обмежень і розв'язування розширеної задачі симплекс-методом продовжують доти, доки не відшукають оптимальний цілочисельний розв'язок або не встановлять, що його не існує.

Додаткове обмеження буде *правильним*, якщо воно лінійне, відтинає оптимальну нецілочисельну точку від ОДР і не відтинає жодної цілочисельної точки в ОДР.

Розглянемо питання побудови правильного додаткового обмеження. Нехай під час розв'язування задачі (3.1) – (3.3) симплекс-методом отримано оптимальний розв'язок $\overline{v} = (v_1, ..., v_m, 0, ..., 0)$, який є результатом його *останньої ітерації*.

Якщо *усі* v_i $\left(i = \overline{1, m}\right)$ – цілі, то $\overline{v}$ є оптимальним розв'язком задачі (3.1) – (3.4) і обчислення завершують.

Нехай у розв'язку $\bar{v}$ компонент $v_p \left(p = \overline{1, m}\right)$ – дробовий. Розклад змінної x_p, згідно з (2.28), матиме такий вигляд:

$$x_p = \nu_p - \sum_{j=m+1}^{n} \gamma_{pj} x_j. \tag{3.5}$$

Якщо *усі* коефіцієнти γ_{pj} $(j = \overline{m+1, n})$ у (3.5) – *цілі*, то задача (3.1) – (3.4) *не має* розв'язку, оскільки у цьому випадку не можна підібрати цілих значень x_j $\left(j = \overline{m+1, n}\right)$ так, щоб виконати умову цілочисельності x_p.

Припустимо, що серед коефіцієнтів γ_{pj} $(j = \overline{m+1, n})$ є дробові числа. Цілу частину числа b позначатимемо через $[b]$ (найбільше ціле число, яке не перевищує числа b), а дробову частину – через α, тоді $b = [b] + \alpha$. Наприклад: 5,3 = 5 + 0,3; –5,3 = –6 + 0,7.

Покажемо, що на базі розкладу змінної x_p, згідно з (3.5), можна сформулювати правильне додаткове обмеження. Запишемо так:

$$v_p = \left[v_p\right] + \alpha_p; \ \gamma_{pj} = \left[\gamma_{pj}\right] + \alpha_{pj}, \ j = \overline{m+1, n}. \tag{3.6}$$

Оскільки v_p – дробове число, а серед коефіцієнтів γ_{pj} можуть бути як цілі, так і дробові числа, то $0 < \alpha_p < 1$, $0 \le \alpha_{pj} < 1$.

Підставимо (3.6) у (3.5) і після простих перетворень одержимо

$$x_p = \left[v_p\right] - \sum_{j=m+1}^{n} \left[\gamma_{pj}\right] x_j + \alpha_p - \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_{pj} x_j. \tag{3.7}$$

Рівність (3.7) справджується для довільного розв'язку задачі (3.1) – (3.3), у тому числі й *цілочисельного*, за якого значення величин x_p, $\left[v_p\right] - \sum_{j=m+1}^{n} \left[\gamma_{pj}\right] x_j$ є цілими. Тоді з (3.7) одержимо

$$\alpha_p - \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_{pj} x_j = z, \tag{3.8}$$

де z – допоміжна величина, яка набуває *цілих* значень.

Якщо припустити, що $z \ge 1$, то $\alpha_p = \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_{pj} x_j + z \ge 1$, що суперечитиме умові $0 < \alpha_p < 1$. Тому залишається вважати $z \le 0$, тобто справедливою є нерівність

$$\sum_{j=m+1}^{n} \alpha_{pj} x_j \ge \alpha_p. \qquad (3.9)$$

Нецілочисельний оптимальний розв'язок $\bar{v}$ задачі (3.1) – (3.3) не задовольняє обмеження (3.9), оскільки $0 < \alpha_p < 1$, а ліва частина (3.9) дорівнює нулю, бо $v_j = 0$ $\left(j = \overline{m+1, n}\right)$. Водночас будь-який оптимальний цілочисельний розв'язок задовольняє обмеження (3.9) як строгу рівність, оскільки $\alpha_p = 0$ $\left(p = \overline{1, m}\right)$.

Отже, нами доведено, що обмеження (3.9) є *правильним* додатковим обмеженням задачі (3.1) – (3.4). Введемо допоміжну змінну x_{n+1} так, щоб $\sum_{j=m+1}^{n} \alpha_{pj} x_j - x_{n+1} = \alpha_p$. Тоді

$$x_{n+1} = -\alpha_p - \sum_{j=m+1}^{n} (-\alpha_{pj}) x_j. \qquad (3.10)$$

З введеним додатковим обмеженням раніше знайдений оптимальний розв'язок стає неопорним, оскільки $-\alpha_p < 0$. Тому для розв'язування розширеної задачі використовують двоїстий симплекс-метод.

Застосування методу Гоморі розглянемо на прикладі 3.1.

➢ Запишемо задачу у канонічному вигляді:

$$-2x_1 - 4x_2 - 3x_3 \to \min,$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 20,$$

$$9x_1 + 7x_2 + 10x_3 + x_5 = 40,$$

$$x_j \ge 0, \quad x_j \in Z \quad (j = \overline{1,5}).$$

Початкову ітерацію симплекс-методу зображено у табл. 3.1.

Таблиця 3.1. Початкова ітерація симплекс-методу

НЗ / БЗ	x_1	x_2	x_3	$\bar{v}_b$
x_4	2	3	1	20
x_5	9	$\underline{7}$	10	40
	2	4	3	0

Оптимальний, проте нецілочисельний розв'язок (табл. 3.2) одержуємо уже на першій ітерації симплекс-методу.

Таблиця 3.2. Перша ітерація симплекс-методу

НЗ / БЗ	x_1	x_5	x_3	$\bar{v}_b$
x_4	–13/7	–3/7	–23/7	20/7
x_2	9/7	1/7	10/7	40/7
	–22/7	–4/7	–19/7	–160/7

Додаткове обмеження у табл. 3.3 формують за елементами другого рядка згідно з (3.10).

Таблиця 3.3. Введення додаткового обмеження

НЗ / БЗ	x_1	x_5	x_3	$\bar{u}_b$
x_4	–13/7	–3/7	–23/7	20/7
x_2	9/7	1/7	10/7	40/7
x_6	–2/7	$\underline{-1/7}$	–3/7	–5/7
	–22/7	–4/7	–19/7	–160/7

Згідно з двоїстим симплекс-методом, у табл. 3.4 одержуємо оптимальний цілочисельний розв'язок прикладу 3.1.

Таблиця 3.4. Оптимальний цілочисельний розв'язок прикладу 3.1

НЗ / БЗ	x_1	x_6	x_3	$\bar{u}_b$
x_4	–1	–3	–2	5
x_2	1	1	1	5
x_5	2	–7	3	5
	–2	–4	–1	–20

Отже, оптимальним розв'язком задачі є вектор (0, 5, 0). ≺

3.4. Метод гілок і меж розв'язування задач ЦЛП

Загальну схему методу гілок і меж проілюструємо на задачі *дискретного програмування*: необхідно знайти мінімум функції $f(\bar{x})$ за умови, що $\bar{x} = (x_1, ..., x_n)^T \in G,$ де G – скінченна множина.

Нехай $\xi(G)$ – *нижня межа* функції $f(\bar{x})$ на множині G (тобто $\forall \bar{x} \in G$: $f(\bar{x}) \geq \xi(G)$). Реалізація методу базується на розбитті (*галуженні*) початкової множини G на послідовність підмножин, які не перетинаються: $G = \bigcup\limits_{i=1}^{s} G_i^1$, $\bigcap\limits_{i=1}^{s} G_i^1 = \varnothing$. Очевидно, що нижня межа будь-якої з цих підмножин не менша за нижню межу G, тобто

$$\xi(G_i) \geq \xi(G). \tag{3.11}$$

На кожній підмножині $G_1^1, G_2^1, ..., G_s^1$ розв'язують часткову задачу дискретного програмування. Якщо відшукали точний розв'язок задачі на деякій підмножині G_k^1 $(1 \leq k \leq s)$, то його вважають *поточним* оптимальним розв'язком початкової задачі $\bar{x}^*$. Якщо розв'язків є декілька, то за $\bar{x}^*$ обирають той з них, що має найменше значення $f(\bar{x}^*)$.

Усі підмножини G_i^1, на яких $\xi(G_i^1) \geq f(\bar{x}^*)$ або існує точний розв'язок, *вилучають* з подальшого розгляду. Серед решти підмножин G_j^1 визначають $\min\limits_{j} \xi(G_j^1) = \xi(G_l^1)$. Якщо точних розв'язків не відшукали, то $\min\limits_{1 \leq j \leq s} \xi(G_j^1) = \xi(G_l^1)$. Множину G_l^1 знову розбивають на декілька підмножин, які не перетинаються і об'єднання яких дає G_l^1. На цих підмножинах знову розв'язують часткові задачі і здійснюють відповідний аналіз. Якщо якийсь з нових розв'язків $\bar{x}_0$ має значення $f(\bar{x}_0) < f(\bar{x}^*)$, то $\bar{x}^* := \bar{x}_0$.

Процес галуження продовжують доти, доки є невилучені підмножини. Цей процес скінченний із-за скінченності множини G. Розв'язком початкової задачі буде останнє знайдене значення $\bar{x}^*$.

Під час реалізації загальної схеми методу гілок і меж для *конкретних задач* дискретного програмування необхідно розробляти правила галуження, способи обчислення нижніх меж і знаходження розв'язів, виходячи зі специфіки цих задач.

Розглянемо реалізацію методу гілок і меж для *цілковито цілочисельної* задачі ЦЛП (3.1) – (3.4) (позначимо ЦЛП0). Спочатку розв'язують відповідну ЗЛП з послабленими обмеженнями (тобто задачу (3.1) – (3.3)).

Нехай множина допустимих розв'язків задачі (3.1) – (3.3) є опуклим багатогранником $X \subset R^n$. Скінченна множина G допустимих розв'язків ЗЛП (3.1) – (3.4) є *сукупністю* ізольованих точок з цілочисельними координатами, які належать X (тобто $G \subset X$). Очевидно, що $\min\limits_{\bar{x} \in G} f(\bar{x}) \geq \min\limits_{\bar{x} \in X} f(\bar{x})$. Якщо задача (3.1) – (3.3) не має розв'язків, то розв'язків не має і задача (3.1) – (3.4).

Якщо оптимальний розв'язок $\bar{x}_0$ задачі (3.1) –(3.3) – цілочисельний, то *обчислення завершують*. У протилежному випадку значення цільової функції $y_0 = f(\bar{x}_0)$ дає *нижню межу* для шуканого розв'язку, тобто $\xi(G) = y_0$.

Нехай в оптимальному розв'язку $\bar{x}_0$ змінна x_l $(1 \leq l \leq n)$ має дробове значення v_l. Далі обираємо змінну x_l (назвемо її *змінною галуження*) і за нею будуємо два нові обмеження: $x_l \leq [v_l]$ і $x_l \geq [v_l] + 1$, де, як і вище, $[v_l]$ означає цілу частину v_l.

Розіб'ємо скінченну множину G на три підмножини:

G_1 – задовольняє обмеження задачі ЦЛП0 і умову $x_l \leq [v_l]$;

G_2 – задовольняє обмеження задачі ЦЛП0 і умову $x_l \geq [v_l] + 1$;

G_3 – задовольняє обмеження задачі ЦЛП0 і умову $x_l \in ([v_l], [v_l] + 1)$.

Очевидно, що $G = \bigcup\limits_{i=1}^{3} G_i$, $\bigcap\limits_{i=1}^{3} G_i = \varnothing$. На цих підмножинах формуємо нові задачі ЦЛП з цільовою функцією (3.1). На підмножині G_3 одержати *цілковито* цілочисельний розв'язок неможливо, тому її вилучають з подальшого розгляду.

Це еквівалентно заміні задачі ЦЛП0 двома *породженими* задачами: ЦЛП1 (ОДР збігається з підмножиною G_1) і ЦЛП2 (ОДР збігається з підмножиною G_2). Згідно зі специфікою задач ЛП, справджуються умови (3.11). Нові обмеження є взаємновилучними, отож породжені задачі ЦЛП1 і ЦЛП2 є *незалежними* задачами ЦЛП.

Кожна з породжених задач після отримання оптимального розв'язку відповідної задачі ЛП з послабленими обмеженнями, у свою чергу, може галузитися на дві нові задачі ЦЛП і т.д. Дихотомія задач – база концепції *галуження* у методі гілок і меж для задач ЦЛП.

Внаслідок такого галуження отримують *двійкове дерево* породжених задач ЦЛП. Оскільки існують різні способи обходу двійкового дерева, то у літературі трапляються *різні* описи реалізації методу гілок і меж для задач ЦЛП [4, 5, 6, 9, 15, 16]. Опишемо модифікацію цього методу, спираючись на підручник [15].

Номери задач зберігатимемо у стеку. Операція "*отримати номер задачі зі стеку*" має загальноприйнятий зміст: отримання номера з вершини стека з одночасним вилученням його зі стека. Занесення нових номерів у стек відбувається через його вершину. Введемо такі позначення:

– $\bar{x}_0$ – оптимальний розв'язок відповідної задачі ЛП з послабленими обмеженнями для поточної породженої задачі ЦЛП;
– $y_0 = f(\bar{x}_0)$ – відповідне значення цільової функції (нижня межа шуканого цілочисельного розв'язку на поточній підмножині);
– $\bar{x}^*$ – поточний розв'язок задачі (3.1) –(3.4); після завершення алгоритму $\bar{x}^*$ – оптимальний розв'язок задачі (3.1) –(3.4);
– $y^* = f(\bar{x}^*)$ – відповідне значення цільової функції.

Алгоритм методу гілок і меж для задач ЦЛП:

Крок 0. Розв'язуємо задачу (3.1) – (3.3).

Якщо задача не має розв'язків, то виведення повідомлення "*задача* (*3.1*) – (*3.4*) *не має розв'язків*" і перехід на крок 5.

Якщо $\bar{x}_0$ – цілочисельний розв'язок, то $\bar{x}^* := \bar{x}_0$; $y^* := y_0$ і перехід на крок 4.

У протилежному випадку $y^* := +\infty$.

Крок 1. За довільною змінною галуження нецілочисельного розв'язку $\bar{x}_0$ формуємо дві породжені задачі ЦЛП і їхні номери у довільному порядку заносимо у стек.

Крок 2. Отримуємо номер задачі ЦЛП зі стека і розв'язуємо відповідну задачу ЛП з послабленими обмеженнями.

Якщо задача не має розв'язків, то перехід на крок 3.

Якщо $\bar{x}_0$ – цілочисельний розв'язок і $y^* > y_0$, то $\bar{x}^* := \bar{x}_0$; $y^* := y_0$ і перехід на крок 3.

Якщо $\bar{x}_0$ – цілочисельний розв'язок і $y^* \le y_0$, то перехід на крок 3.

Якщо $\bar{x}_0$ – нецілочисельний розв'язок і $y^* \le y_0$, то перехід на крок 3.

У протилежному випадку перехід на крок 1.

Крок 3. Якщо стек не порожній, то перехід на крок 2.

Крок 4. Якщо $y^* = +\infty$, то виведення повідомлення "*задача* (*3.1*) – (*3.4*) *не має розв'язків*" і перехід на крок 5.

Інакше виведення результатів обчислення ($\bar{x}^*$, y^*).

Крок 5. Завершення обчислень.

Приклад 3.4. Відшукати мінімум функції $y = -x_1 - 2x_2$ за обмежень: $7x_1 + 5x_2 \le 35$, $-2x_1 + 3x_2 \le 6$, $x_j \ge 0$, $x_j \in Z$ $(j = 1, 2)$.

➢ Розв'язавши відповідну задачу ЛП з послабленими обмеженнями, одержуємо $\bar{x}_0 = (2{,}42;\ 3{,}61)$, y_0=–9,64. Тоді $y^* := +\infty$ і формуємо породжені задачі ЦЛП:

Задача ЦЛП1	*Задача ЦЛП2*
$-x_1 - 2x_2 \to \min,$	$-x_1 - 2x_2 \to \min,$
$7x_1 + 5x_2 \le 35,\ -2x_1 + 3x_2 \le 6,$	$7x_1 + 5x_2 \le 35,\ -2x_1 + 3x_2 \le 6,$
$x_2 \le 3,\ x_j \ge 0,\ x_j \in Z\ \ (j = 1, 2).$	$x_2 \ge 4,\ x_j \ge 0,\ x_j \in Z\ \ (j = 1, 2).$

Стек: 2, 1 (на вершині стека розміщений номер 2).

Отримуємо номер 2 зі стека (у стеку залишається 1) і для задачі ЦЛП2 розв'язуємо відповідну задачу ЛП з послабленими обмеженнями. Ця задача не має розв'язків. Перехід на крок 3.

Оскільки стек не порожній, то перехід на крок 2.

Отримуємо номер 1 зі стека (стек порожній) і для задачі ЦЛП1 розв'язуємо відповідну задачу ЛП з послабленими обмеженнями. Ця задача має розв'язок $\bar{x}_0 = (2{,}86;\ 3)$, $y_0 = -8{,}86$. Оскільки $\bar{x}_0$ – нецілочисельний розв'язок і $y^* > y_0$, то перехід на крок 1.

Формуємо породжені задачі ЦЛП:

Задача ЦЛП3	*Задача ЦЛП4*
$-x_1 - 2x_2 \to \min,$	$-x_1 - 2x_2 \to \min,$
$7x_1 + 5x_2 \le 35,\ -2x_1 + 3x_2 \le 6,$	$7x_1 + 5x_2 \le 35,\ -2x_1 + 3x_2 \le 6,$
$x_1 \le 2,\ x_2 \le 3,$	$x_1 \ge 3,\ x_2 \le 3,$
$x_j \ge 0,\ x_j \in Z\ \ (j = 1, 2).$	$x_j \ge 0,\ x_j \in Z\ \ (j = 1, 2).$

Стек: 3, 4.

Отримуємо номер 3 зі стека (у стеку залишається 4) і для задачі ЦЛП3 розв'язуємо відповідну задачу ЛП з послабленими обмеженнями. Ця задача має розв'язок $\bar{x}_0 = (2;\ 3)$, $y_0 = -8$. Оскільки $\bar{x}_0$ – цілочисельний розв'язок і $y^* > y_0$, то $\bar{x}^* := (2;\ 3)$; $y^* := -8$ і перехід на крок 3. Оскільки стек не порожній, то перехід на крок 2.

Отримуємо номер 4 зі стека (стек порожній) і для задачі ЦЛП4 розв'язуємо відповідну задачу ЛП з послабленими обмеженнями. Ця задача має розв'язок $\bar{x}_0 = (3;\ 2{,}8)$, $y_0 = -8{,}6$. Оскільки $\bar{x}_0$ – нецілочисельний розв'язок і $y^* > y_0$, то перехід на крок 1.

Формуємо породжені задачі ЦЛП:

Задача ЦЛП5	*Задача ЦЛП6*
$-x_1 - 2x_2 \to \min,$	$-x_1 - 2x_2 \to \min,$
$7x_1 + 5x_2 \le 35,\ -2x_1 + 3x_2 \le 6,$	$7x_1 + 5x_2 \le 35,\ -2x_1 + 3x_2 \le 6,$
$x_1 \ge 3,\ x_2 \le 2,$	$x_1 \ge 3,\ x_2 \ge 3,$
$x_j \ge 0,\ x_j \in Z\ \ (j = 1, 2).$	$x_j \ge 0,\ x_j \in Z\ \ (j = 1, 2).$

Стек: 5, 6.

Отримуємо номер 5 зі стека (у стеку залишається 6) і для задачі ЦЛП5 розв'язуємо відповідну задачу ЛП з послабленими обмеженнями. Ця задача має розв'язок $\bar{x}_0$ = (3,57; 2), y_0= –7. Оскільки $\bar{x}_0$ – нецілочисельний розв'язок і $y^* < y_0$, то перехід на крок 3.

Оскільки стек не порожній, то перехід на крок 2.

Отримуємо номер 6 зі стека (стек порожній) і для задачі ЦЛП6 розв'язуємо відповідну задачу ЛП з послабленими обмеженнями. Ця задача не має розв'язків. Перехід на крок 3.

Оскільки стек порожній, то реалізуємо виведення розв'язку $\bar{x}^* = (2; 3)$; $y^* = -8$. Закінчуємо обчислення. ∢

Алгоритм методу гілок і меж може застосовуватися і для розв'язування *частково* цілочисельних задач ЦЛП. У цьому випадку, якщо деяка змінна набуває дійсних значень, то вона ніколи не обирається змінною галуження.

3.5. Задача комівояжера

Маємо n міст. Відстані між будь-якою парою міст відомі і становлять $a_{ij}\ (i, j = \overline{1, n}, i \neq j)$. Якщо прямого маршруту між містами i та j не існує, то $a_{ij} = \infty$. Відстані між містами зручно записувати у вигляді матриці $A = (a_{ij})_{n \times n}$ де $a_{ii} = \infty$.

Комівояжер, виїжджаючи з будь-якого міста, повинен відвідати всі міста, побувавши в кожному з них тільки один раз, і повернутися у початкове місто. Необхідно визначити таку послідовність об'їзду міст, за якої довжина маршруту була б найменшою.

Якщо містам поставити у відповідність вершини графа, а дорогам, що їх з'єднують, дуги, то в термінах теорії графів задача полягає у визначенні гамільтонового циклу мінімальної довжини.

Гамільтоновим циклом у зв'язаному графі називають шлях, який починається і закінчується в деякій вершині графа, а через кожну з решти вершин графа він проходить точно один раз. Під довжиною циклу розуміють суму довжин дуг, що налічує цикл.

Визначимо *булеві змінні*:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо комівояжер переїжджає із міста } i \text{ в місто } j \ (i, j = \overline{1,n}), \\ 0, \text{ у протилежному випадку.} \end{cases}$$

Тоді задача полягає у відшуканні значень змінних x_{ij}, що мінімізують

$$z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij}, \tag{3.12}$$

за обмежень

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \ j = \overline{1,n} \ \text{(в'їзд у місто } j\text{);} \tag{3.13}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \ i = \overline{1,n} \ \text{(виїзд із міста } i\text{);} \tag{3.14}$$

$$u_i - u_j + n x_{ij} \le n - 1, \ i, j = \overline{1,n} \ (i \ne j). \tag{3.15}$$

Змінні $u_i, i = \overline{1,n}$ можуть набувати довільних значень, проте без жодного збитку на них можна накласти умову невід'ємності та цілочисельності.

Лема 3.1. Обмеження (3.15) вимагають, щоб маршрут утворював цикл і проходив через усі міста.

➢ Розглянемо частковий цикл, що проходить через k міст $(k < n)$, визначений значеннями $x_{ij} = 1$ для k невідомих. Додаючи усі нерівності вигляду (3.15), що містять k невідомих $x_{ij} = 1$, що відповідають дугам, які утворюють частковий цикл, одержимо недопустиму нерівність $nk \le (n-1)k$ (при додаванні всі різниці $u_i - u_j$ взаємно знищуються). Отже, умова (3.15) виключає можливість утворення будь-якого часткового циклу.

Тепер встановимо, що існують значення змінних u_i які задовольняють обмеження (3.15) для будь-якого гамільтонового циклу. Нехай $u_i = p \ (p = 1,2,...,n)$, якщо місто i в гамільтоновому циклі відвідується p-м за порядком, де $u_1 = 1$, $u_j = u_i + 1$, $j = \overline{2,n}$; j – номер міста в гамільтоновому циклі. Наприклад, у циклі 1 – 3 – 6 – 8 – ... значення u_i такі: $u_1 = 1; u_3 = 2; u_6 = 3; u_8 = 4$, ...

З припущення випливає, що при $x_{ij} = 0$ відповідна нерівність (3.15) має вигляд $u_i - u_j \le n - 1$ і завжди виконується, оскільки $u_i < n$ і $u_j > 1$ при $j \ne 1$. При $x_{ij} = 1$ ці обмеження виконуються як рівності: $u_i - u_j + nx_{ij} = p - (p+1) + n \cdot 1 = n - 1$.

Отже, справедливість леми 3.1 цілковито доведено. ∢

Для задачі комівояжера, як і для інших комбінаторних задач, притаманним є поєднання *простоти постановки* зі *складністю* розв'язку, причому ці труднощі виключно обчислювального характеру. Оптимальний маршрут можна відшукати шляхом перебирання і порівняння усіх можливих маршрутів, оскільки їхнє число скінченне.

Проте зі збільшенням числа міст кількість можливих маршрутів швидко зростає (кількість можливих маршрутів для n міст дорівнює $(n-1)!$). Оскільки час розв'язання задачі пропорційний числу можливих маршрутів, вичерпне перебирання варіантів практично неприйнятне навіть за використання надшвидкодіючих комп'ютерів.

3.6. Метод гілок і меж розв'язування задачі комівояжера

Сьогодні розроблено чимало алгоритмів для розв'язання задачі комівояжера. Найефективнішим з них є *метод гілок та меж*, запропонований 1963 р. групою авторів (Дж. Літл, К. Мурті, Д. Суїні, К. Керол).

Спочатку для множини R усіх гамільтонових циклів визначають деяку нижню межу φ_R їхньої довжини. Потім множину усіх гамільтонових циклів розбивають на дві підмножини. Перша підмножина налічує гамільтонові цикли з деякою дугою (i, j) (позначимо її $\{(i, j)\}$). А друга налічує гамільтонові цикли без цієї дуги (позначимо $\{\overline{(i, j)}\}$).

Для кожної з підмножин $\{(i,j)\}$ і $\{\overline{(i,j)}\}$ визначають нижню межу довжини гамільтонових циклів $\varphi_{(i,j)}$ і $\varphi_{\overline{(i,j)}}$. Кожна нова нижня межа виявляється не меншою за нижню межу всієї множини гамільтонових циклів φ_R. Серед цих підмножин обирають підмножину з *найменшою* нижньою межею.

Цю підмножину знову розбивають на дві і для утворених підмножин обчислюють нижні межі. Процес розбиття підмножин продовжується доти, доки не буде одержано матриці відстаней розмірності 2×2.

Взаємозв'язок підмножин, одержаних в результаті розбиття, зображають деревом, вершинам якого приписуються нижні межі. Це дерево дає змогу виокремити *поточний* гамільтонів цикл.

Якщо нижні межі підмножин, які відповідають деяким обірваним гілкам, виявляться меншими за довжину *поточного* гамільтонового циклу, то ці гілки розбивають за тим же правилом. У результаті можна отримати нові гамільтонові цикли. У цьому випадку порівнюють довжини усіх одержаних гамільтонових циклів і *поточним* серед них обирають цикл з *найменшою довжиною*.

Розв'язок задачі вважають завершеним, якщо нижні межі обірваних гілок не менші за довжину поточного гамільтонового циклу. Останній поточний гамільтонів цикл вважають *оптимальним*. Розрахунок нижніх меж базується на такій лемі.

Лема 3.2. Якщо відшукати довжину оптимального гамільтонового циклу з матрицею відстаней A, а потім від елементів деякого рядка або стовпця матриці A відняти деяке число і знову розв'язати задачу з новою матрицею, то гамільтонів цикл комівояжера не зміниться, а довжина його зменшиться на це число.

➢ Довжина оптимального гамільтонового циклу комівояжера складається з суми n чисел (елементів матриці відстаней), узятих по одному з кожного рядка і з кожного стовпця. Отже, зміна всіх елементів рядка або стовпця на одне і те ж число не впливає на оптимальний розв'язок задачі. Якщо операцію віднімання виконати і для інших рядків і стовпців, то довжина оптимального циклу задачі зі зміненою матрицею відрізнятиметься від довжини оптимального циклу задачі з початковою матрицею на суму чисел, що віднімаються від елементів рядків і стовпців. ◄

Отже, для визначення нижньої межі множини усіх гамільтонових циклів необхідно в кожному рядку матриці A відшукати мінімальний елемент $\alpha_i = \min\limits_j a_{ij} \quad (i = \overline{1,n})$, і відняти його від усіх елементів цього рядка (таку операцію називають *зведенням матриці відстаней за рядками*). У результаті зведення у кожному рядку матриці буде хоча б один нуль.

Потім у матриці, зведеній за рядками, визначаємо мінімальний елемент β_j у кожному стовпці і зводимо її за стовпцями. Матрицю, зведену за рядками і стовпцями, називають *цілковито зведеною*, а величини α_i і β_j $(i, j = \overline{1,n})$ – *константами зведення.* Цілковито зведена матриця містить хоча б один нуль у кожному рядку і кожному стовпці.

Оскільки довжина L_1 оптимального гамільтонового циклу в задачі з цілковито зведеною матрицею відрізняється від довжини L оптимального гамільтонового циклу в задачі з незведеною матрицею на суму констант зведення $\gamma = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i + \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j$, то $L = L_1 + \gamma$.

У цілковито зведеній матриці усі елементи невід'ємні, отож $L_1 \geq 0$ і γ можна вибрати як нижню межу довжини гамільтонового циклу, тобто $\varphi_R = \gamma$.

Розглянемо спосіб вибору дуги (i, j), апріорне долучення якої в гамільтонів цикл (або вилучення з гамільтонового циклу) розбиває всю множину гамільтонових циклів на підмножини.

Апріорне вилучення будь-якої дуги (i, j) з гамільтонового циклу здійснюється заміною відповідного елементу матриці відстаней на ∞. Вилучення дає змогу виконати додаткове зведення матриці і покращити нижню межу.

Апріорне долучення дуги (i, j) у гамільтонів цикл дає змогу скоротити розмір матриці відстаней внаслідок викреслювання i-го рядка і j-го стовпця. Якщо дуга (a, b) є початком гамільтонового циклу, то при долученні дуги (i, j) у цикл необхідно одночасно *вилучити* з нього дугу (j, a) для уникнення негамільтонового циклу.

До оптимального гамільтонового циклу увійдуть дуги, яким у зведеній матриці відповідають нульові елементи. Отож вибір дуги здійснюватимемо так. У зведеній матриці елемент $a_{ij} = 0$ умовно замінимо на ∞. Щоб визначити суму констант зведення одержаної матриці, необхідно додати мінімальний елемент α_i i-го рядка до мінімального елемента β_j j-го стовпця, оскільки решта рядків і стовпців містить хоча б один нуль.

Позначимо суму констант зведення матриці з вилученою дугою (i, j) через $\gamma_{\overline{(i,j)}}$. Отже, $\gamma_{\overline{(i,j)}} = \alpha_i + \beta_j$. Аналогічний розрахунок виконуємо щодо решти нульових елементів матриці, умовно замінюючи їх на ∞. Передусім вилучатимемо з гамільтонового циклу дугу, для якої сума констант зведення $\gamma_{\overline{(i,j)}}$ є *найбільшою*, оскільки в цьому випадку відбудеться найрізкіша зміна оцінки.

Нехай для дуги (r, s) сума констант зведення максимальна, тобто $\gamma_{\overline{(r,s)}} = \max\{\gamma_{\overline{(i,j)}}\}$. Тоді, вилучивши дугу (r, s) з гамільтонового циклу, одержимо підмножину циклів $\{(\overline{r, s})\}$ і, долучивши цю дугу в гамільтонів цикл, одержимо підмножину циклів $\{(r, s)\}$.

Нижня межа підмножини циклів $\{(\overline{r, s})\}$:

$$\varphi_{\overline{(r,s)}} = \varphi_R + \gamma_{\overline{(r,s)}} = \gamma + \gamma_{\overline{(r,s)}} .$$

Нижня межа підмножини циклів $\{(r, s)\}$:

$$\varphi_{(r,s)} = \varphi_R + \gamma_{(r,s)} = \gamma + \gamma_{(r,s)} ,$$

де $\gamma_{(r,s)}$ дорівнює сумі констант зведення скороченої матриці (скорочену матрицю одержано з початкової шляхом викреслювання r-го рядка і s-го стовпця та заміни деякого елемента матриці на ∞).

На практиці процес розбиття множини гамільтонових циклів на підмножини продовжується доти, доки не буде одержано матриці відстаней розмірності 2×2.

Після зведення цієї матриці нульові її елементи, розташовані симетрично, прямо вказують на дуги, які необхідно долучити в гамільтонів цикл. Довжина гамільтонового циклу визначається додаванням до нижньої межі відповідної підмножини циклів суми констант зведення матриці 2×2. Всі розглянуті дії для більшої чіткості сформулюємо у вигляді такого алгоритму.

Алгоритм методу гілок і меж розв'язування задачі комівояжера:

1. *Зводять* матрицю відстаней за рядками і стовпцями. Визначають нижню межу всієї множини маршрутів:
$$\varphi_R = \gamma = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_j .$$
2. Кожен нуль у зведеній матриці умовно *замінюють* на ∞ і знаходять суму констант зведення $\gamma_{\overline{(i,j)}} = \alpha_i + \beta_j$. Значення $\gamma_{\overline{(i,j)}}$ записують у відповідні клітинки поряд з нулями.
3. *Апріорно вилучають* з гамільтонового циклу дугу (i, j), для якої сума констант зведення *максимальна*. У результаті вилучення (i, j) утворюється підмножина гамільтонових циклів $\{\overline{(i, j)}\}$.
4. *Зводять* одержану матрицю відстаней і визначають нижню межу $\varphi_{\overline{(i,j)}}$ підмножини гамільтонових циклів $\{\overline{(i, j)}\}$.
5. *Апріорно долучають дугу* (i, j) в гамільтонів цикл, що спричинить до вилучення в матриці, одержаній після виконання п. 2, i-го рядка та j-го стовпця. Замінюють один з елементів матриці на ∞, щоб не допустити утворення негамільтонового циклу.
6. Зводять скорочену матрицю і визначають нижню межу $\varphi_{(i,j)}$ підмножини маршрутів $\{(i, j)\}$.
7. Якщо скорочена матриця має розмірність 2×2, то переходять до виконання п. 9.

8. Порівнюють нижні межі підмножин гамільтонових циклів $\varphi_{(i,j)}$ і $\varphi_{\overline{(i,j)}}$ і переходять до виконання п. 2. При цьому, якщо $\varphi_{\overline{(i,j)}} < \varphi_{(i,j)}$, то розбиттю підлягає підмножина $\{\overline{(i,j)}\}$: аналізують матрицю, одержану в результаті останнього виконання п. 4. Якщо $\varphi_{(i,j)} < \varphi_{\overline{(i,j)}}$, то розбиттю підлягає підмножина $\{(i,j)\}$: аналізують матрицю, одержану після останнього виконання п. 6. Результати розбиття відображають на дереві.
9. Визначають поточний гамільтонів цикл і його довжину.
10. Порівнюють довжину поточного гамільтонового циклу з нижніми межами обірваних гілок. Якщо його довжина не перевищує нижніх меж обірваних гілок дерева, то задачу розв’язано. Якщо ж довжина поточного циклу більша за нижню межу деяких гілок, то, діючи за алгоритмом, розвивають ці гілки доти, доки не одержать цикл з меншою довжиною або не переконаються, що його не існує.

Приклад 3.5. Матрицю відстаней між п’ятьма містами представлено у табл. 3.5. Необхідно відшукати гамільтонів цикл об’їзду міст мінімальної довжини.

Таблиця 3.5. Відстані між містами

i \ j	1	2	3	4	5	α_i
1	∞	9	8	4	10	4
2	6	∞	4	5	7	4
3	5	3	∞	6	2	2
4	1	7	2	∞	8	1
5	2	4	5	2	∞	2

➢ Для визначення нижньої межі множини усіх гамільтонових циклів φ_R здійснюємо зведення матриці відстаней. З цією метою в додатковий стовпець табл. 3.5 запишемо константи зведення α_i ($i = \overline{1,5}$) за рядками. Матрицю, зведену за рядками, представлено у табл. 3.6. У додатковому рядку цієї матриці записано константи зведення за стовпцями. Виконуючи зведення за стовпцями, одержимо цілковито зведену матрицю (табл. 3.7).

Таблиця 3.6

$i \backslash j$	1	2	3	4	5
1	∞	5	4	0	6
2	2	∞	0	1	3
3	3	1	∞	4	0
4	0	6	1	∞	7
5	0	2	3	0	∞
β_j	0	1	0	0	0

Таблиця 3.7

$i \backslash j$	1	2	3	4	5
1	∞	4	4	0 (4)	6
2	2	∞	0 (2)	1	3
3	3	0 (1)	∞	4	0 (3)
4	0 (1)	5	1	∞	7
5	0 (0)	1	3	0 (0)	∞

Нижня межа множини усіх гамільтонових циклів R:

$$\varphi_R = \gamma = \sum_{i=1}^{5} \alpha_i + \sum_{j=1}^{5} \beta_j = 13 + 1 = 14 .$$

Відшукаємо дугу, вилучення якої максимально збільшуватиме межу, і розіб'ємо всю множину гамільтонових циклів щодо цієї дуги на дві підмножини. З цією метою визначимо суму констант зведення для всіх клітинок матриці з нульовими елементами, умовно замінюючи нулі на ∞.

Замінимо, наприклад, елемент $a_{14} = 0$ (табл. 3.7) на ∞. Тоді константа зведення за 1-м рядком дорівнює 4, а за 4-м стовпцем – нулю. Суму констант зведення $\gamma_{\overline{(1,4)}} = \alpha_1 + \beta_4 = 4 + 0 = 4$ записано у дужках в клітинці (1, 4).

Аналогічно обчислено решту констант і записано у відповідні клітинки табл. 3.8. Найбільша сума констант зведення дорівнює 4 (відповідає дузі (1, 4)). Отже, множина R розбивається на підмножини $\{\overline{(1,4)}\}$ і $\{(1,4)\}$. Розпочнемо формувати дерево (рис. 3.1).

Вилучення дуги (1, 4) з гамільтонового циклу здійснюється заміною у табл. 3.4 елемента $a_{14} = 0$ на ∞. Така заміна дає змогу виконати додаткове зведення матриці шляхом віднімання від елементів 1-го рядка 4, а від елементів 4-го стовпця – 0. У результаті зведення матриця відстаней для підмножини $\{\overline{(1,4)}\}$ набуде вигляду, проілюстрованого у табл. 3.9, а нижня межа довжин гамільтонових циклів цієї підмножини $\varphi_{(\overline{1,4})} = \varphi_{(R)} + \gamma_{(\overline{1,4})} = 14 + 4 = 18$.

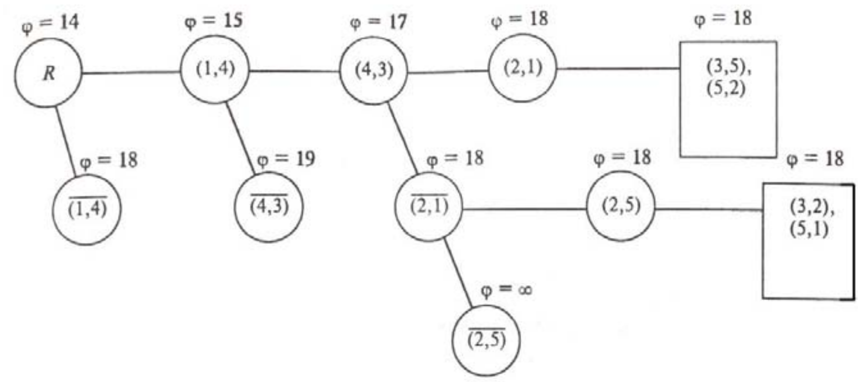


Рис. 3.1. Дерево розбиття множини гамільтонових циклів

Долучення дуги (1, 4) у шуканий цикл спричинить до вилучення елементів 1-го рядка і 4-го стовпця табл. 3.6. Окрім того, елемент $a_{41} = 0$ замінюємо на ∞, щоб не допустити утворення негамільтонового циклу (1 – 4 – 1). Скорочену матрицю наведено в табл. 3.9.

Таблиця 3.8

$i \backslash j$	1	2	3	4	5
1	∞	0	0	∞	2
2	2	∞	0	1	3
3	3	0	∞	4	0
4	0	5	1	∞	7
5	0	1	3	0	∞

Таблиця 3.9

$i \backslash j$	1	2	3	5	α_i
2	2	∞	0	3	0
3	3	0	∞	0	0
4	∞	5	1	7	1
5	0	1	3	∞	0
β_j	0	0	0	0	

Ця матриця допускає додаткове зведення на 1 одиницю тільки за 4-м рядком. Константи зведення записано у стовпці α_i і рядку β_j. Сума констант зведення скороченої матриці:

$$\gamma_{(1,4)} = \sum_i \alpha_i + \sum_j \beta_j = 1 + 0 = 1.$$

Після зведення скорочену матрицю зображено у табл. 3.10. Нижня межа довжин гамільтонових циклів підмножини $\{(1,4)\}$:

$$\varphi_R + \gamma_{(1,4)} = 14 + 1 = 15\,.$$

Оскільки після скорочення одержано матрицю 4×4, переходимо до порівняння оцінок $\varphi_{\overline{(1,4)}}$ та $\varphi_{(1,4)}$. Подальшому розбиттю підлягає підмножина $\{(1,4)\}$, оскільки її нижня межа менша.

Таблиця 3.10

$i \backslash j$	1	2	3	5
2	2	∞	0 (2)	3
3	3	0 (1)	∞	0 (3)
4	∞	4	0 (4)	6
5	0 (3)	1	3	∞

Таблиця 3.11

$i \backslash j$	1	2	3	5
2	2	∞	0	3
3	3	0	∞	0
4	∞	0	∞	2
5	0	1	3	∞

Відшукаємо дугу, вилучення якої максимально збільшуватиме нижню межу. З цією метою визначимо суму констант зведення для кожної клітинки з нулем (табл. 3.10). Максимальна сума констант зведення $\gamma_{\overline{(4,3)}} = \alpha_4 + \beta_3 = 4 + 0 = 4$ відповідає дузі (4, 3). Після заміни елемента $a_{43} = 0$ (табл. 3.10) на ∞ і зведення матриці результати зображено у табл. 3.11. Нижня межа довжин гамільтонових циклів підмножини $\varphi\left[(1,4),\overline{(4,3)}\right] = \varphi_{(1,4)} + \gamma_{\overline{(4,3)}} = 15 + 4 = 19$.

Долучення дуги (4, 3) в гамільтонів цикл спричинить до вилучення з нього дуг (4, 2) і (4, 5), тобто елементів 4-го рядка матриці (табл. 3.10), а також дуг (2, 3) і (5, 3), тобто елементів 3-го стовпця. Окрім того, вилучаємо з циклу дугу (3, 1), щоб не допустити утворення негамільтонового циклу (1 – 4 – 3 – 1). Скорочена матриця (табл. 3.12) допускає зведення за 2-м рядком на дві одиниці. Після зведення цю матрицю зображено у табл. 3.13.

Таблиця 3.12

$i \backslash j$	1	2	5	α_i
2	2	∞	3	2
3	∞	0	0	0
5	0	1	∞	0
β_j	0	0	0	

Таблиця 3.13

$i \backslash j$	1	2	5
2	0 (1)	∞	1
3	∞	0 (1)	0 (1)
5	0 (1)	1	∞

Сума констант зведення $\gamma_{(4,3)} = 2 + 0 = 2$, а нижня межа довжин гамільтонових циклів: $\varphi[(1,4),(4,3)] = \varphi_{(1,4)} + \gamma_{(4,3)} = 15 + 2 = 17$.

Оскільки $\varphi[(1,4),(4,3)] = 17 < \varphi[(1,4),\overline{(4,3)}] = 19$, то подальшому галуженню підлягає підмножина $\{(1,4),(4,3)\}$. Усі суми констант зведення для клітинок з нулями (табл. 3.13) рівні, отож обираємо будь-яку з дуг, наприклад (2, 1), і розбиваємо $\{(1,4),(4,3)\}$ на дві нові підмножини $\{(1,4),(4,3),\overline{(2,1)}\}$ та $\{(1,4),(4,3),(2,1)\}$. Після вилучення дуги (2, 1) і зведення матриці відстаней одержимо нову матрицю (табл. 3.14), для якої $\gamma_{\overline{(2,1)}} = 1$.

Таблиця 3.14

i \ j	1	2	5
2	∞	∞	0 (∞)
3	∞	0 (1)	0 (0)
5	0 (∞)	1	∞

Нижня межа підмножини $\{(1,4),(4,3),\overline{(2,1)}\}$:

$$\varphi[(1,4),(4,3),\overline{(2,1)}] = \varphi[(1,4),(4,3)] + \gamma_{\overline{(2,1)}} = 17 + 1 = 18 .$$

Долучення дуги (2, 1) в цикл спричинить до вилучення 2-го рядка і 1-го стовпця табл. 3.13, а також дуги (3, 2). Скорочену матрицю зображено у табл. 3.15. Сума констант зведення цієї матриці $\gamma_{(2,1)} = 1$. Зведену матрицю представлено в табл. 3.16. Нижня межа підмножини циклів $\{(1,4),(4,3),(2,1)\}$:

$$\varphi[(1,4),(4,3),(2,1)] = \varphi[(1,4),(4,3)] + \gamma_{(2,1)} = 17 + 1 = 18 .$$

Оскільки в результаті скорочення одержано матрицю 2×2 (табл. 3.16), то в шуканий гамільтонів цикл долучаємо дуги (3, 5) і (5, 2), які відповідають нульовим елементам цієї матриці. Сума констант зведення табл. 3.16 дорівнює нулю.

Таблиця 3.15

i \ j	2	5
3	∞	0
5	1	∞

Таблиця 3.16

i \ j	2	5
3	∞	0
5	0	∞

Отже, довжина гамільтонового циклу збігається з нижньою межею підмножини $\{(1,4),(4,3),(2,1)\}$ і дорівнює 18.

Відповідно до дерева галужень (рис. 3.1), гамільтонів цикл утворюють дуги (1, 4) (4, 3) (2, 1) (3, 5) (5, 2). Розташуємо їх, починаючи з міста 1, так, щоб кінець однієї дуги збігався з початком іншої. Одержимо гамільтонів цикл, який відповідає послідовності об’їзду міст комівояжером $\mu = (1-4-3-5-2-1)$.

Довжина визначеного маршруту об’їзду міст не перевищує нижніх меж обірваних гілок, отже, вона є оптимальною. Проте можливо, що гамільтонів цикл μ не єдиний, оскільки є підмножини циклів $\{(1,4),(4,3),\overline{(2,1)}\}$ та $\{\overline{(1,4)}\}$, нижні межі яких також рівні 18.

Продовжимо галуження підмножини $\{(1,4),(4,3),\overline{(2,1)}\}$. Слідуючи алгоритму, знайдемо суму констант зведення для кожної клітинки з нулем (табл. 3.15). Максимальна сума, рівна ∞, припадає на дві клітинки: (2, 5) і (5, 1). Обираємо будь-яку дугу, наприклад, (2, 5), і розбиваємо підмножину $\{(1,4),(4,3),\overline{(2,1)}\}$ на дві підмножини $\{(1,4),(4,3),\overline{(2,1)},\overline{(2,5)}\}$ і $\{(1,4),(4,3),(2,1),(2,5)\}$. Нижні межі підмножин:

$$\varphi\left[_{(1,4),(4,3),\overline{(2,1)},\overline{(2,5)}}\right] = 18 + \infty = \infty, \quad \varphi\left[_{(1,4),(4,3),\overline{(2,1)},\overline{(2,5)}}\right] = 18 + 0 = 18.$$

Продовжуючи обчислення, знайдемо другий оптимальний гамільтонів цикл $\mu' = (1-4-3-2-5-1)$. Можна відшукати ще один оптимальний гамільтонів цикл, продовжуючи розвиток гілки, відповідної підмножині циклів $\{\overline{(1,4)}\}$. ≺

? Запитання для самоперевірки

1. Що розуміють під цілочисельним лінійним програмуванням?
2. Сформулюйте задачу ЦЛП.
3. Що розуміють під частковою цілочисельною задачею ЦЛП?
4. Опишіть математичну модель задачі ЦЛП.
5. Коротко охарактеризуйте методи розв’язування задач ЦЛП.
6. Вкажіть недоліки методу заокруглення розв’язування задач ЦЛП.

7. Коротко охарактеризуйте комбінаторні методи розв’язування задач ЦЛП.
8. Коротко охарактеризуйте методи відтинання розв’язування задач ЦЛП.
9. Опишіть у загальних рисах метод Гоморі розв’язування задач ЦЛП.
10. Як вводять додаткове обмеження в умови задачі ЦЛП?
11. Опишіть у загальних рисах метод гілок і меж розв’язування задач ЦЛП.
12. Сформулюйте задачу комівояжера.
13. Сформулюйте і доведіть лему про обмеження, які забезпечують утворення циклу для маршруту і його проходження через усі міста.
14. Що таке гамільтонів цикл?
15. Опишіть у загальних рисах метод гілок і меж розв’язання задачі комівояжера.
16. Сформулюйте і доведіть лему, на основі якої здійснюється розрахунок нижніх меж.
17. Як відбувається розбиття ОДР на дві області?
18. Як відбувається зведення матриці відстаней?
19. Що таке константи зведення?
20. Як відбувається апріорне долучення дуги в цикл?
21. Як відбувається апріорне вилучення дуги з циклу?

🕮 Завдання для самостійної роботи

Завдання 3.1. Виконайте *завдання 2.1*, накладаючи на змінні умову цілочисельності. Для розв’язання задачі ЦЛП використайте метод Гоморі.

Завдання 3.2. Виконайте *завдання 2.5*, накладаючи на змінні умову цілочисельності. Для розв’язання задачі ЦЛП використайте метод гілок і меж.

Завдання 3.3. Розв’яжіть задачі ЦЛП, використовуючи метод гілок і меж:

1. $5x_1 + 7x_2 \to \max;\ \ 2x_1 + x_2 \le 13,\ \ 6x_1 + 9x_2 \le 41,$

   $x_j \ge 0,\ \ x_j \in Z\ \ (j = 1,\ 2).$

2. $5x_1 + 4x_2 \to \max;\ \ -3x_1 - 2x_2 \le -5,\ \ -2x_1 - 3x_2 \le -7,$

   $x_j \ge 0,\ \ x_j \in Z\ \ (j = 1,\ 2).$

3. $x_1 + x_2 \to \max;\ 2x_1 + 5x_2 \le 16,\ 6x_1 + 5x_2 \le 27,$

   $x_j \ge 0,\ x_j \in Z\ \ (j = 1, 2).$

4. $2x_1 + 3x_2 \to \max;\ 5x_1 + 7x_2 \le 35,\ 4x_1 + 9x_2 \le 36,$

   $x_j \ge 0,\ x_j \in Z\ \ (j = 1, 2).$

5. $3x_1 + 2x_2 \to \max;\ 2x_1 + 2x_2 \le 9,\ 3x_1 + 3x_2 \ge 18,$

   $x_j \ge 0,\ x_j \in Z\ \ (j = 1, 2).$

Завдання 3.4. Розв’яжіть задачі ЦЛП *завдання 3.3* методом гілок і меж, вважаючи, що на змінну x_1 не накладено умову цілочисельності.

Завдання 3.5. Матрицю відстаней між п’ятьма містами представлено у табл. 3.18 – 3.21. Необхідно відшукати гамільтонів цикл об’їзду міст мінімальної довжини.

Таблиця 3.18

i \ j	1	2	3	4	5
1	∞	4	7	9	11
2	16	∞	14	4	9
3	6	5	∞	7	6
4	5	9	2	∞	8
5	2	4	7	8	∞

Таблиця 3.19

i \ j	1	2	3	4	5
1	∞	10	9	5	11
2	7	∞	5	6	8
3	6	4	∞	7	3
4	2	8	3	∞	9
5	3	5	6	3	∞

Таблиця 3.20

i \ j	1	2	3	4	5
1	∞	8	7	3	9
2	5	∞	4	5	7
3	4	4	∞	9	2
4	1	7	4	∞	8
5	7	4	5	3	∞

Таблиця 3.21

i \ j	1	2	3	4	5
1	∞	10	7	5	9
2	7	∞	3	6	8
3	4	6	∞	5	4
4	2	6	3	∞	7
5	3	5	6	1	∞

4. ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА

🖹 **План викладу матеріалу**:

1. Постановка транспортної задачі.
2. Властивості закритої транспортної задачі.
3. Властивості опорних планів транспортної задачі.
4. Алгоритми побудови опорних планів транспортної задачі.
5. Критерій оптимальності плану перевезень.
6. Алгоритм методу потенціалів.
7. Приклади задач, які зводяться до транспортної задачі.
8. Задача про призначення.
9. Транспортна задача за критерієм часу.

🗝 **Ключові терміни розділу**

- *Транспортна задача* (*ТЗ*)
- *Відкрита ТЗ*
- *Допустимі плани перевезень*
- *Існування розв'язків ТЗ*
- *Опорний план* (*ОП*) *ТЗ*
- *Ланцюжки клітинок*, *цикли*; *метод викреслювання*
- *Базис опорного плану*
- *Подолання виродженості ОП*
- *Метод Фоґеля для ОП*
- *Метод потенціалів*
- *Закрита транспортна задача*
- *Основні обмеження ТЗ*
- *Ранг матриці основних обмежень ТЗ*
- *Зведення закритої ТЗ до відкритої ТЗ*
- *Вироджений і невироджений ОП*
- *Необхідна і достатня умови існування ОП у таблиці перевезень*
- *Метод північно-західного кута для ОП*
- *Метод мінімального елемента для ОП*
- *Критерій оптимальності плану ТЗ*
- *Угорський метод*

4.1. Постановка транспортної задачі

Симплексний метод є універсальним способом розв'язування задач лінійного програмування з неперервними аргументами. Проте окремі типи задач лінійного програмування мають таку структуру, яка дає змогу побудувати значно простіші за симплексний методи розв'язування. Найважливішим типом таких задач є *транспортна задача* (ТЗ).

До транспортної задачі можуть зводитися інші задачі ДО, які на перший погляд не мають нічого спільного з перевезеннями. Такими задачами є задачі оптимального розміщення виробництва, баз та складів; оптимальний добір у племінній справі тощо.

Постановка транспортної задачі. Нехай у m пунктах $A_1, A_2, \ldots, A_m$ зосереджено однорідний вантаж у кількостях a_i ($i = \overline{1, m}$), який необхідно цілковито розвезти у n інших пунктів $B_1, B_2, \ldots, B_n$ у кількостях b_j ($j = \overline{1, n}$). Очевидно, що $a_i > 0$, $i = \overline{1, m}$; $b_j > 0$, $j = \overline{1, n}$. Відомо, що вартість перевезення одиниці вантажу з пункту A_i у пункт B_j дорівнює c_{ij}. Необхідно мінімізувати загальну вартість перевезень за умови цілковитого вивезення вантажу з пунктів відправки і розвезення його у потрібних кількостях у пункти призначення.

Побудуємо математичну модель ТЗ. Нехай x_{ij} – кількість одиниць вантажу, які необхідно перевезти з пункту A_i до пункту B_j. Тоді:

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \ \to \ \min, \tag{4.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i; \qquad i = \overline{1, m}, \tag{4.2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ \ j = \overline{1, n}. \tag{4.3}$$

Умова (4.2) гарантує цілковите вивезення вантажу з усіх пунктів, а (4.3) – означає цілковите задоволення попиту в усіх пунктах призначення. Умови (4.2) і (4.3) називають *основними обмеженнями* ТЗ. Очевидна також необхідність накладення на змінні задачі природних обмежень невід’ємності:

$$x_{ij} \geq 0, \qquad i = \overline{1, m}; \ \ j = \overline{1, n}, \tag{4.4}$$

оскільки перевезення з пунктів B_j у пункти A_i не допускаються. Задачу (4.1) – (4.4) називають *транспортною задачею* за критерієм вартості перевезень.

Отже, ТЗ є задачею лінійного програмування з mn числом змінних; $(m+n)$ обмеженнями-рівностями та mn обмеженнями-нерівностями. Матрицю $C = \left\| c_{ij} \right\|_{i=\overline{1,m};\, j=\overline{1,n}}$ називають матрицею *вартості перевезень*. Вектор $\overline{a} = (a_1, a_2, \ldots a_m)^T$ називають вектором *запасів*, а вектор $\overline{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^T$ – вектором *потреб*.

Для існування розв'язку ТЗ важливим питанням є співвідношення між сумою запасів $\sum_{i=1}^{m} a_i$ та сумою потреб $\sum_{j=1}^{n} b_j$. Якщо сума запасів дорівнює сумі потреб, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j, \tag{4.5}$$

то транспортну задачу називають *закритою*. Співвідношення (4.5) називають умовою *балансу*.

У разі порушення співвідношення (4.5) отримуємо транспортну задачу з порушеним балансом (або *відкриту* ТЗ).

4.2. Властивості закритої транспортної задачі

Закрита ТЗ має деякі важливі *властивості*, які дають змогу спростити її розв'язання порівняно із симплекс-методом:

1. Кожну змінну x_{ij} ТЗ налічує система основних обмежень лише двічі: вперше у (4.2), а вдруге – у (4.3).
2. Елементи матриці основних обмежень – це нулі та одиниці. Кожен стовпець матриці має лише дві одиниці, решта елементів – нулі. Кожен рядок матриці має n або m одиниць, решта елементів – нулі. Запишемо, наприклад, (4.1) – (4.3) для m=2 і n=3:
   $z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23} \to \min$;
   $x_{11}+x_{12}+x_{13}=a_1$, $x_{21}+x_{22}+x_{23}= a_2$, $x_{11}+x_{21}= b_1$, $x_{12}+x_{22}= b_2$, $x_{13}+x_{23}= b_3$.

   Матрична форма обмежень: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

   Систему лінійних алгебричних рівнянь (4.2) і (4.3), яка задає основні обмеження ТЗ, запишемо у матричній формі $A\overline{X} = \overline{B}$, де $\overline{X} = (x_{11}, x_{12}, ..., x_{1n}; x_{21}, x_{22}, ..., x_{2n}; \ldots; x_{m1}, x_{m2}, ..., x_{mn})^T$ – вектор-стовпець невідомих, що має mn компонент;
   $\overline{B} = (a_1, a_2, ..., a_m; b_1, b_2, ..., b_n)^T$ – вектор-стовпець обмежень;

$A=(\overline{P}_{11},\overline{P}_{12},...,\overline{P}_{1n};\overline{P}_{21},\overline{P}_{22},...,\overline{P}_{2n};\ldots;\overline{P}_{m1},\overline{P}_{m2},...,\overline{P}_{mn})$ – матриця, в якій $\overline{P}_{ij}=(\underbrace{\underbrace{\overbrace{0,0,\ldots,1}^{i},0,\ldots,0,1}_{m+j},0,\ldots,0}_{m+n})^T$ – вектор *перевезень* вантажу з пункту A_i ($i=\overline{1,m}$) у пункт B_j ($j=\overline{1,n}$), який відповідає невідомому x_{ij}.

3. ***Теорема 4.1***. Ранг матриці A системи лінійних алгебричних рівнянь (4.2) і (4.3), яка задає основні обмеження закритої ТЗ, дорівнює $m+n-1$.
   ➢ Нехай r – ранг матриці A. Покажемо спочатку, що $r\le m+n-1$. Додамо всі рівняння (4.3), а потім віднімемо всі рівняння (4.2) за винятком першого, тобто: $\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{m}x_{ij}-\sum\limits_{i=2}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}x_{ij}=\sum\limits_{j=1}^{n}b_j-\sum\limits_{i=2}^{m}a_i$.
   Після очевидних перетворень, з урахуванням (4.5), маємо умову $\sum\limits_{j=1}^{n}x_{1j}=a_1$, що є першим рівнянням (4.2). Отже, перше рівняння системи (4.2) і (4.3) є лінійною комбінацією усіх інших рівнянь. А це означає, що $r\le m+n-1$.
   Доведемо, що $r=m+n-1$. З цією метою досить у матриці A виокремити квадратну підматрицю порядку $m+n-1$, визначник якої не дорівнює нулю. Це, наприклад, може бути підматриця, складена з перших $m+n-1$ компонент векторів $\overline{P}_{1n},\overline{P}_{2n},\ldots,\overline{P}_{mn},\ \overline{P}_{11}$, $\overline{P}_{12},\ldots,\overline{P}_{1,n-1}$. Визначник цієї підматриці: $\begin{vmatrix} 1\ 0\ldots\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0\ 1\ldots\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & & & \ldots & \\ 0\ 0\ldots\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0\ 0\ldots\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0\ 0\ldots\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & & & \ldots & \\ 0\ 0\ldots\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix}=1.$ ⋞

4. ***Теорема 4.2***. Для розв'язання ТЗ необхідно і достатньо, щоб виконувалася умова балансу (4.5).

➢ *Необхідність*. Розв'язок $\overline{X}^* = (x^*_{11}, \ldots, x^*_{mn})^T$ ТЗ задовольняє співвідношення (4.2) і (4.3). Додаючи ліві і праві частини системи (4.2), отримаємо $\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} x^*_{ij} = \sum\limits_{i=1}^{m} a_i$. Така ж сама дія до системи (4.3) дає $\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{m} x^*_{ij} = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$. Тоді $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$.

Достатність. Нехай умова балансу (4.5) виконується. Величини

$$x'_{ij} = \frac{a_i b_j}{d} \quad (i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n},\ d = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j)$$

утворюють допустимий план задачі (4.1) – (4.4). Дійсно, оскільки $a_i > 0$, $b_j > 0$ і $d > 0$, то $x_{ij} > 0$ і, отже, задовольняється обмеження (4.4). Безпосереднім підставлянням переконуємося, що x'_{ij} задовольняють основні обмеження задачі:

$$\sum_{i=1}^{m} x'_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i b_j}{d} = \frac{d \cdot b_j}{d} = b_j, \qquad \sum_{j=1}^{n} x'_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i b_j}{d} = \frac{a_i d}{d} = a_i .$$

Отже, ТЗ має допустимі плани. Оскільки $0 \le x_{ij} \le \min(a_i, b_j)$, то можна стверджувати, що область допустимих планів ТЗ – *непорожня*, *замкнута і обмежена* (утворює *компакт*). Покажемо *обмеженість функції* z. Оберемо серед величин c_{ij} $(i = \overline{1, m};$ $j = \overline{1, n})$ найбільше ($c_{\max}$) і найменше ($c_{\min}$) значення. Тоді:

$$z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{\max} x_{ij} = c_{\max} \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} x_{ij}) = c_{\max} \sum_{i=1}^{m} a_i = c_{\max} d,$$

$$z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \ge \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{\min} x_{ij} = c_{\min} \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} x_{ij}) = c_{\min} \sum_{i=1}^{m} a_i = c_{\min} d,$$

звідки $c_{\min} d \le z \le c_{\max} d$.

Неперервна функція *z обмежена на компакті* допустимих планів, отож набуває на цьому компакті свого найменшого значення, що й доводить існування *оптимального* плану ТЗ. ≺

З теореми 4.2 випливає, що побудувати розв'язок можна тільки для закритої ТЗ. Для розв'язання відкритої ТЗ її попередньо необхідно звести до закритої. Проілюструємо це.

Нехай $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$ (перевищення потреб над запасами). У цьому випадку вводять *фіктивного* постачальника A_{m+1} з ресурсом

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i.$$

Нехай $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$ (перевищення запасів над потребами). У цьому випадку вводять *фіктивного* споживача B_{n+1} з потребою

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Вартість перевезення від *фіктивного* постачальника A_{m+1} (або до фіктивного споживача B_{n+1}) вважають рівною нулю.

4.3. Властивості опорних планів транспортної задачі

З теореми 4.1 попереднього параграфа випливає, що серед $m + n$ лінійно залежних рівнянь системи (4.2), (4.3) з mn невідомими можна виокремити підсистеми, які містять $m + n - 1$ лінійно незалежних рівнянь.

Виокремлюючи у таких підсистемах *базисні* невідомі, можна знайти *базисні допустимі розв'язки* (або *опорні плани*) $\overline{X}_{\text{оп}}$ системи (4.2) – (4.4). Кожен опорний план має не більше $m + n - 1$ ненульових (додатних) компонент та не менше $mn - (m + n - 1) = (m - 1)(n - 1)$ нульових.

Опорний план ТЗ (вектор $\overline{X}_{\text{оп}}$), який містить $m + n - 1$ ненульових компонент, називають *невиродженим*. У *виродженого* опорного плану кількість ненульових компонент є меншою за $m + n - 1$.

Кожній компоненті $x_{i_0 j_0}$ опорного плану $\overline{X}_{\text{оп}}$ взаємно-однозначно відповідає вектор *перевезень* $\overline{P}_{i_0 j_0}$ вантажу з пункту A_{i_0} у пункт B_{j_0}. Нехай $E_{\text{оп}}$ – система векторів перевезень, що відповідають компонентам $\overline{X}_{\text{оп}}$. Очевидно, що $E_{\text{оп}}$ є системою *лінійно незалежних векторів.*

Під час обчислення планів ТЗ зручно користуватися прямокутною таблицею розміром $m\times n$. Клітинку таблиці, яка розміщена на перетині i-го рядка та j-го стовпця, позначимо (i, j). У клітинці (i, j) записують значення c_{ij}, x_{ij} та інших величин. Нехай символ "$\leftrightarrow$" позначає взаємно-однозначну відповідність, тоді

$$(i, j) \leftrightarrow x_{ij};\ x_{ij} \leftrightarrow \overline{P}_{ij} \Rightarrow (i, j) \leftrightarrow \overline{P}_{ij}\,.$$

Взаємно-однозначна відповідність $(i, j) \leftrightarrow \overline{P}_{ij}$ дає змогу інтерпретувати дії над векторами $E_{\text{оп}}$, як певні дії над клітинками таблиці. Ця інтерпретація полегшує розуміння алгоритмів знаходження опорного та оптимального планів ТЗ.

Клітинку (i, j) зв'язують також з *комунікацією* A_iB_j (шляхом) між пунктом постачання A_i та пунктом споживання B_j. Якщо переміщатися від A_i до B_j, то такому переміщенню відповідає вектор $\overline{P}_{ij}$, переміщенню від B_j до A_i відповідає вектор $-\overline{P}_{ij}$. Набір клітин $(i_1, j_1), (i_2, j_1), (i_2, j_2), (i_3, j_2)\ldots$, або $(i_1, j_1), (i_1, j_2), (i_2, j_2), (i_2, j_3,),\ \ldots$, називають *ланцюжками переміщень* (просто *ланцюжками*). Кожна пара клітинок *ланцюжка* міститься або в одному рядку, або в одному стовпці таблиці так, що деякі три чи більше клітинок набору не є клітинками одного рядка або одного стовпця.

Перший ланцюжок задає такі переміщення між пунктами (символ "$\rightarrow$" позначає напрям переміщення):

$$A_{i_1} \rightarrow B_{j_1} \rightarrow A_{i_2} \rightarrow B_{j_2} \rightarrow A_{i_3} \rightarrow \ \ldots$$

Другий ланцюжок задає такі переміщення між пунктами:

$$B_{j_1} \rightarrow A_{i_1} \rightarrow B_{j_2} \rightarrow A_{i_2} \rightarrow B_{j_3} \rightarrow \ \ldots$$

Кожному ланцюжку переміщень відповідає певна лінійна комбінація векторів перевезень: $\overline{P}_{i_1j_1} - \overline{P}_{i_2j_1} + \overline{P}_{i_2j_2} - \overline{P}_{i_3j_2} + \ldots$ (для першого ланцюжка) і $-\overline{P}_{i_1j_1} + \overline{P}_{i_1j_2} - \overline{P}_{i_2j_2} + \overline{P}_{i_2j_3} + \ldots$ (для другого ланцюжка).

Ланцюжок вигляду $(i_1, j_1), (i_2, j_1), (i_2, j_2), \ldots, (i_s, j_s), (i_1, j_s)$, або $(i_1, j_1), (i_1, j_2), (i_2, j_2), \ldots, (i_k, j_k), (i_k, j_1)$ є *замкнутим*. Замкнутий ланцюжок іноді називають *циклом*.

Перший замкнутий ланцюжок задає такі переміщення:

$$A_{i_1} \to B_{j_1} \to A_{i_2} \to B_{j_2} \to \ldots \to A_{i_s} \to B_{i_s} \to A_{i_1}.$$

Другий замкнутий ланцюжок задає такі переміщення:

$$B_{j_1} \to A_{i_1} \to B_{j_2} \to A_{i_2} \to \ldots \to B_{j_k} \to A_{i_k} \to B_{j_1}.$$

В обох випадках кінцевий пункт переміщення збігається з початковим пунктом. А це означає, що відповідна лінійна комбінація векторів переміщень дорівнює $\overline{0}$: $\overline{P}_{i_1 j_1} - \overline{P}_{i_2 j_1} + \overline{P}_{i_2 j_2} - \ldots + \overline{P}_{i_s j_s} - \overline{P}_{i_1 j_s} = \overline{0}$ (для першого ланцюжка) і $-\overline{P}_{i_1 j_1} + \overline{P}_{i_1 j_2} - \overline{P}_{i_2 j_2} + \ldots - \overline{P}_{i_k j_k} + \overline{P}_{i_k j_1} = \overline{0}$ (для другого ланцюжка). Отже, система векторів перевезень, яка відповідає замкнутому ланцюжку, є *лінійно залежною*.

Приклад 4.1. Позначити ланцюжки {(2, 1), (5, 1), (5, 3), (4, 3), (4, 2), (2, 2)} (позначення символом "•") і {(4, 1), (1, 1), (1, 3), (3, 3), (3, 4)} (позначення символом "*") у прямокутній таблиці розміром 5×4.

i \ j	1	2	3	4
1	*		*	
2	•	•		
3			*	*
4	*	•	•	
5	•		•	

➢ Перший ланцюжок, позначений символом "•", є замкнутим. Зауважимо, що *кожен* рядок (стовпець), в якому розміщені клітинки замкнутого ланцюжка, містить рівно дві клітинки такого ланцюжка. Отже, *кількість клітинок* замкнутого ланцюжка завжди *парна*. ≺

Нехай E – деяка система векторів перевезень $\overline{P}_{ij}$, а I – множина пар індексів (i, j), які відповідають векторам системи E.

Теорема 4.3. Система векторів перевезень E *лінійно незалежна* тоді і тільки тоді, коли *з клітин*, які відповідають векторам системи E, *не можна скласти замкнутий ланцюжок* (цикл).

➢ *Необхідність*. Система E лінійно незалежна $\Rightarrow$ з клітин, які відповідають E, *не можна* скласти цикл (доведемо від супротивного).

Нехай існує цикл (i_1, j_1), (i_2, j_1), (i_2, j_2), …, (i_s, j_s), (i_1, j_s), утворений з клітинок, які відповідають деяким векторам E. З попередніх міркувань випливає, що $\overline{P}_{i_1 j_1} - \overline{P}_{i_2 j_1} + \overline{P}_{i_2 j_2} - \ldots + \overline{P}_{i_s j_s} - \overline{P}_{i_1 j_s} = \overline{0}$. Отже, підсистема векторів $\overline{P}_{i_1 j_1}$, $\overline{P}_{i_2 j_1}$, $\overline{P}_{i_2 j_2}$, …, $\overline{P}_{i_s j_s}$, $\overline{P}_{i_1 j_s}$ з E є лінійно залежною, що означає лінійну залежність E (протиріччя).

Достатність. З клітин, що відповідають E, *не можна* скласти цикл $\Rightarrow$ система E лінійно незалежна (від супротивного).

Нехай E лінійно залежна система векторів перевезень. Тоді існують такі числа λ_{ij} (пара індексів $(i, j) \in I$), серед яких є відмінні від нуля, для яких справедливе співвідношення $\sum\limits_{(i,\, j) \in I} \lambda_{ij} \overline{P}_{ij} = \overline{0}$.

Нехай $\lambda_{i_1 j_1} \neq 0$. Перенесемо вектор $\overline{P}_{i_1 j_1}$ до правої частини

$$\sum_{(i,\, j) \in I_1} \lambda_{ij} \overline{P}_{ij} = -\lambda_{i_1 j_1} \overline{P}_{i_1 j_1}, \tag{4.6}$$

де $I_1 = I \backslash (i_1, j_1)$. Компонента i_1 у правій частині (4.6) не дорівнює нулю, отож серед векторів лівої частини (4.6) існує хоча б один вектор вигляду $\overline{P}_{i_1 j_2}$ з коефіцієнтом $\lambda_{i_1 j_2} \neq 0$. Перенесемо його у праву частину (4.6), отримаємо:

$$\sum_{(i,\, j) \in I_2} \lambda_{ij} \overline{P}_{ij} = -\lambda_{i_1 j_1} \overline{P}_{i_1 j_1} - \lambda_{i_1 j_2} \overline{P}_{i_1 j_2}, \tag{4.7}$$

де $I_2 = I_1 \backslash (i_1, j_2)$. Оскільки $j_1 \neq j_2$, то компонента $m + j_2$ у правій частині (4.7) не дорівнює нулю, отож серед векторів лівої частини (4.7) існує хоча б один вектор виду $\overline{P}_{i_2 j_2}$ з коефіцієнтом $\lambda_{i_2 j_2} \neq 0$. Перенесемо його у праву частину (4.7), отримаємо:

$$\sum_{(i,\, j) \in I_3} \lambda_{ij} \overline{P}_{ij} = -\lambda_{i_1 j_1} \overline{P}_{i_1 j_1} - \lambda_{i_1 j_2} \overline{P}_{i_1 j_2} - \lambda_{i_2 j_2} \overline{P}_{i_2 j_2},$$

де $I_3 = I_2 \backslash (i_2, j_2)$. Таке перенесення виконуватимемо далі.

Після $(2k–1)$-го кроку маємо співвідношення

$$\sum_{(i,\,j)\in I_{2k-1}} \lambda_{ij}\overline{P}_{ij} = -\sum_{\mu=1}^{k} \lambda_{i_\mu j_\mu}\overline{P}_{i_\mu j_\mu} - \sum_{\mu=1}^{k-1} \lambda_{i_\mu j_{\mu+1}}\overline{P}_{i_\mu j_{\mu+1}}, \quad (4.8)$$

де $I_{2k–1}=I_{2k–2}\backslash(i_k, j_k)$. Якщо $i_k = i_s$ $(1\le s\le k–2)$, то процес перенесення векторів припиняємо, оскільки отримуємо *протиріччя*. Дійсно, у цьому випадку з деяких клітинок ланцюжка, які відповідають векторам правої частини (4.8), можна утворити цикл:

$$(i_s, j_{s+1}), (i_{s+1}, j_{s+1}), \quad \ldots, (i_{k-1}, j_k), \ (i_k, j_k) = (i_s, j_k).$$

Якщо $i_k \ne i_s$ $(1\le s\le k–1)$, то серед векторів лівої частини (4.8) існує хоча б один вектор виду $\overline{P}_{i_k j_{k+1}}$ з коефіцієнтом $\lambda_{i_k j_{k+1}} \ne 0$. Перенесемо його у праву частину (4.8), отримаємо:

$$\sum_{(i,\,j)\in I_{2k}} \lambda_{ij}\overline{P}_{ij} = -\sum_{\mu=1}^{k} \lambda_{i_\mu j_\mu}\overline{P}_{i_\mu j_\mu} - \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_{i_\mu j_{\mu+1}}\overline{P}_{i_\mu j_{\mu+1}}, \quad (4.9)$$

$I_{2k}=I_{2k–1}\backslash(i_k, j_{k+1})$. Якщо $j_{k+1} = j_l$ $(1\le l \le k–1)$, то процес перенесення векторів припиняємо, оскільки отримуємо *протиріччя*. Дійсно, у цьому випадку з деяких клітинок ланцюжка, які відповідають векторам правої частини (4.9), можна утворити цикл:

$$(i_l, j_l), (i_l, j_{l+1}), \quad \ldots, (i_k, j_k), \ (i_k, j_{k+1}) = (i_k, j_l).$$

Процес перенесення не може бути нескінченним, оскільки всі вектори, що переносяться праворуч, є різними. Отож через скінченну кількість кроків прийдемо до одного з випадків, які зумовлюють до утворення циклів. ◄

Якщо опорний план $\overline{X}_{оп}$ записати у вигляді таблиці перевезень, то вона має не більше як $m + n –1$ клітинок, у яких знаходяться додатні значення. Ці клітинки відповідають базисним змінним, отож їх називають *базисними клітинками*, а решту – *вільними*. Справедливий такий наслідок з теореми 4.3.

Наслідок 4.1 (з теореми 4.3). Для того, щоб деякий план у таблиці перевезень був *опорним*, необхідно і достатньо, щоб із базисних клітинок не можна було скласти замкнутий ланцюжок (*іншими словами*: з комунікацій, які відповідають базисним клітинкам, не можна було скласти замкнутий маршрут).

i \ *j*	1	2	3	4
1	3	0	0	3
2	0	2	2	0
3	4	0	0	5

1. План не є опорним, адже існує цикл (1, 1), (1, 4), (3, 4), (3, 1)

i \ *j*	1	2	3	4
1	1	2	0	0
2	3	0	4	0
3	0	0	2	5

2. Опорний план

За великих ромірів таблиці перевезень візуальний пошук замкнутих ланцюжків (циклів) є досить складним. Можна алгоритмізувати пошук циклів за допомогою *методу викреслювання*.

Нехай R – множина ненульових елементів у таблиці перевезень T. Визначити наявніть циклів у таблиці T.

Алгоритм *методу викреслювання*:

1. Переглядаємо усі рядки таблиці T і викреслюємо ті з них, які не мають елементів R або мають тільки один елемент R.
2. Переглядаємо усі стовпці таблиці T і викреслюємо ті з них, які не мають елементів R або мають тільки один елемент R. *Раніше викреслені елементи до уваги не беруть*.

Повторюємо кроки 1 – 2. Після скінченної кількості кроків процес викреслювання завершиться. Якщо усі рядки (стовпці) таблиці T викреслені, то побудувати цикл не можна (план *опорний*).

Якщо залишилася підтаблиця, у кожному рядку і стовпці якої є не менше двох елементів R, то R містить цикл (цикли) і відповідний план не є опорним.

Приклад 4.3. За допомогою *методу викреслювання* встановити, чи вказаний план є *опорним* (див. приклад 4.2). Номери ліній вказують на порядок викреслення.

i \ *j*	1	2	3	4	
1	3	0	0	3	
2	0	2	2	0	3
3	4	0	0	5	
		1	2		

1. План не є опорним, адже існує цикл (1, 1), (1, 4), (3, 4), (3, 1)

i \ *j*	1	2	3	4	
1	1	2	0	0	3
2	3	0	4	0	
3	0	0	2	5	4
	5	1	6	2	

2. Опорний план

Нехай E – деяка лінійно незалежна система векторів перевезень $\overline{P}_{ij}$, а $\overline{P}_{kl}$ – вектор, що не входить у E (тобто $\overline{P}_{kl} \notin E$).

Теорема 4.4. Для того, щоб вектор $\overline{P}_{kl} \notin E$ був лінійною комбінацією векторів системи E, необхідно і достатньо, щоб з клітинок, які відповідають векторам системи E, можна було скласти замкнутий ланцюжок (цикл), що замикається на клітинці (k, l).

➢ *Необхідність*. Вектор $\overline{P}_{kl}$ є лінійною комбінацією векторів системи $E \Rightarrow$ з клітинок, які відповідають векторам системи E, можна скласти цикл, що замикається на клітинці (k, l).

Система векторів E', яка складається з векторів системи E і вектора $\overline{P}_{kl}$, є лінійно залежною. З теореми 4.3 (див. доведення достатності) випливає, що з клітинок, які відповідають векторам системи E', можна побудувати цикл. Такий цикл *обов'язково* має містити клітинку (k, l). У протилежному випадку він складався б тільки з клітинок E, а це означало б, що *E лінійно залежна.*

Достатність. З клітинок, які відповідають векторам системи E, можна скласти цикл, що замикається на клітинці (k, l) $\Rightarrow$ вектор $\overline{P}_{kl}$ є лінійною комбінацією векторів системи E.

Нехай цикл має вигляд (k, j_1), (i_1, j_1), (i_1, j_2) …, (i_s, j_s), (i_s, l), (k, l), тоді $\overline{P}_{kj_1} - \overline{P}_{i_1 j_1} + \overline{P}_{i_1 j_2} - \ldots - \overline{P}_{i_s j_s} + \overline{P}_{i_s l} - \overline{P}_{kl} = \overline{0}$. Переносячи $\overline{P}_{kl}$, маємо $\overline{P}_{kl} = \overline{P}_{kj_1} - \overline{P}_{i_1 j_1} + \overline{P}_{i_1 j_2} - \ldots - \overline{P}_{i_s j_s} + \overline{P}_{i_s l}$, що і треба було довести. ≺

Як відомо з лінійної алгебри, довільний вектор деякого векторного простору *однозначно* розкладається через вектори базису цього простору. Отож вводимо поняття *базису* опорного плану.

Базисом опорного плану $\overline{X}_{\text{оп}}$ ТЗ вважатимемо будь-яку систему з $m+n-1$ лінійно незалежних векторів перевезень $\overline{P}_{ij}$, яка містить усі вектори, що відповідають додатним перевезенням.

Якщо $\overline{X}_{\text{оп}}$ – невироджений, то його базис визначають *однозначно*. Якщо $\overline{X}_{\text{оп}}$ –вироджений, то його базис визначають *неоднозначно* (містить усі вектори, які відповідають додатним перевезенням, й окремі вектори, які відповідають нульовим перевезенням).

Нехай B – множина клітинок, які відповідають векторам перевезень $\overline{P}_{ij}$ *базису* деякого опорного плану $\overline{X}_{\text{оп}}$ ТЗ, а клітинка $(k, l) \notin B$. Справедливий такий наслідок з теореми 4.4.

Наслідок 4.2 (з теореми 4.4). З клітинок множини B можна скласти єдиний ланцюжок, який замикається на клітинці (k, l).

Єдиність існування ланцюжка, який замикається на клітинці (k, l), випливає з того, що вектор $\overline{P}_{kl}$ єдиним чином розкладається через вектори базису опорного плану.

4.4. Алгоритми побудови опорних планів транспортної задачі

Як і в звичайному симплексному методі, розв'язання ТЗ полягає у переборі і перевірці на оптимальність опорних планів задачі, для чого треба знайти початковий опорний план.

4.4.1. Побудова опорного плану ТЗ методом північно-західного кута

Назва методу пов'язана з тим, що на кожному кроці визначається величина перевезення для *верхньої лівої* клітинки (північно-західної) незаповненої прямокутної таблиці перевезень.

На початку *першого кроку* таблиця перевезень є незаповненою, окрім стовпця запасів та рядка потреб. Для першої *верхньої лівої* клітинки (1, 1) розглядаємо величини a_1 і b_1. Можливі випадки:

- $a_1 > b_1$ – потребу b_1 можна задовольнити за рахунок запасу a_1 ($x_{11} = b_1$), отож з інших пунктів A_i ($i = 2, 3, \ldots, m$) у пункт B_1 завозити вже не треба нічого ($x_{21} = x_{31} = \ldots = x_{m1} = 0$) – *викреслюємо перший стовпець*. На місці a_1 запишемо $a_1' = a_1 - b_1$.
- $a_1 < b_1$ – увесь запас a_1 вивозимо у пункт B_1 ($x_{11} = a_1$), задовольняючи лише частину його потреб. Тоді $x_{12} = x_{13} = \ldots x_{1n} = 0$ – *викреслюємо перший рядок*. На місці b_1 запишемо $b_1' = b_1 - a_1$.
- $b_1 = a_1 = x_{11}$ – потреба і запас збігаються. Тоді $x_{21} = x_{31} = \ldots = x_{m1} = x_{12} = x_{13} = \ldots x_{1n} = 0$ – *викреслюємо перший стовпець і перший рядок*.

Отже, в усіх випадках приймаємо $x_{11} = \min(a_1; b_1)$.

Далі розглядаємо незаповнену частину таблиці, яка також є прямокутною. Для цієї незаповненої таблиці *аналізуємо* значення запасів/потреб верхньої лівої клітинки (на другому кроці це може бути клітинка (1, 2), або клітинка (2, 1), або клітинка (2, 2)) за аналогією з першим кроком. Через обмеженість числа елементів a_i ($i=\overline{1,m}$) та b_j ($j=\overline{1,n}$) описаний алгоритм є скінченним. Отриманий план є *опорним*, оскільки з його клітинок, заповнених додатними перевезеннями, згідно з побудовою, не можна скласти замкнутий ланцюжок.

Домовимося нульові перевезення у таблиці не вказувати (залишати клітинки незаповненими), викреслювання здійснювати уявно, а старі та нові значення запасів/потреб відокремлювати у відповідному стовпці/рядку через косі риски.

Приклад 4.4. Знайти початковий опорний план ТЗ, заданий таблицею, в якій вказано вартості перевезень, запаси (a_i) і потреби (b_j).

i \ j	1	2	3	4	a_i
1	10	2	20	11	15
2	12	7	9	20	25
3	4	14	16	18	10
b_j	5	15	15	15	$\sum$ =50

➢ Вартості перевезень при побудові опорного плану ТЗ методом північно-західного кута не мають значення, отож їх при побудові опорного плану не вказуватимемо.

i \ j	1	2	3	4	a_i
1	5	10			15/10
2		5	15	5	25/20/5
3				10	10
b_j	5	15/5	15	15/10	$\sum$ =50

Сірим кольором позначено базисні клітинки (6 клітинок). Отриманий опорний план є *невиродженим* (6 = 3 + 4 – 1). Сумарна вартість перевезення z=5×10+10×2+5×7+15×9+5×20+10×18=520. ⋖

Опорний план ТЗ обов’язково має в кожному рядку і в кожному стовпці таблиці перевезень хоча б один додатний елемент, адже $a_i \neq 0$ ($i = \overline{1, m}$) і $b_j \neq 0$ ($j = \overline{1, n}$), отож найменше можливе число додатних змінних x_{ij} дорівнює $N = \max(m, n)$. На кожному кроці методу знаходимо лише один елемент $x_{ij} > 0$, а на місці хоча б одного з елементів a_i чи b_j виникає нуль. На останньому кроці на місці a_m і b_n нуль виникає одночасно. Отже, найбільше можливе число додатних змінних x_{ij} дорівнює $N = n + m - 1$.

Якщо $N < n + m - 1$, то опорний план є виродженим. Причиною виродженості опорного плану *є рівність потреби і запасу* на *проміжному* (не останньому) кроці алгоритму, адже у цьому випадку одночасно викреслюється і рядок, і стовпець. Число базисних змінних, які дорівнюватимуть нулю, збігатиметься з числом цих випадків.

Для вироджених опорних планів базисні змінні формують так: додатні змінні x_{ij} доповнюють $(m + n - 1) - N$ нульовими змінними x_{ij} так, щоб вони разом з додатними змінними не утворювали циклів. *Домовимося надалі вказувати у таблиці нульові перевезення тільки для базисних змінних*.

Приклад 4.5. Знайти початковий опорний план ТЗ, для якої вектор $\overline{a} = (1, 2, 3, 4, 5)^T$, а вектор $\overline{b} = (2, 1, 5, 7)^T$.

i \ j	1	2	3	4	a_i
1	1				1
2	1	1			2/1
3		0	3		3
4			2	2	4/2
5				5	5
b_j	2/1	1	5/2	7/5	$\sum$ =15

➢ Додатні перевезення плану містяться у 7-ми клітинках. Отриманий опорний план є *виродженим* ($7 < 5 + 4 - 1$). Отож до числа базисних клітинок додамо клітинку (3, 2) з нульовим перевезенням.

При побудові ОП методом північно-західного кута не беруть до уваги вартості перевезень, отож опорний план може надто відрізнятиметься від оптимального плану. ≺

4.4.2. Побудова опорного плану ТЗ методом мінімального елемента

Метод мінімального елемента дає змогу побудувати відразу достатньо економічний опорний план, що скорочує загальне число ітерацій при його наступній оптимізації (порівняно з методом північно-західного кута). Це досягається тим, що в ОП обирають такі додатні перевезення, яким відповідає найменша вартість.

Користуючись матрицею перевезень, на першому кроці визначаємо таке значення x_{ij}, для якого величина c_{ij} є мінімальною, тоді x_{ij}=min(a_i, b_j). Можливі три випадки:

- якщо $a_i<b_j$, то решту клітинок i-го рядка заповнюємо нулями;
- якщо $a_i>b_j$, то решту клітинок j-го стовпця заповнюємо нулями;
- якщо $a_i=b_j$, то решту клітинок i-го рядка та j-го стовпця заповнюємо нулями.

Далі цей процес повторюємо з незаповненою частиною таблиці. Отриманий план є *опорним*, оскільки з його клітинок, заповнених додатними перевезеннями, не можна скласти цикл.

Домовимося *вартості* перевезень (c_{ij}) у таблиці вказувати у *правому верхньому* куті клітинки, а *величини* перевезень (x_{ij}) – у *нижньому лівому* куті; замість номерів рядків/ стовпців безпосередньо вказуватимемо величини запасів/потреб відповідного пункту.

Приклад 4.6. Знайти опорний план ТЗ з прикладу 4.4 методом мінімального елемента

a_i \ b_j	5	15	15	15/10
15	10	2 15	20	11 0
25/10	12	7	9 15	20 10
10/5	4 5	14	16	18 5

➢ Послідовність заповнення клітинок: (1, 2), (3, 1), (2, 3), (3, 4), (2, 4). Отриманий опорний план є *виродженим* (5 < 3 + 4 – 1); до числа базисних додамо клітинку (1, 4). Сумарна вартість перевезення z=15×2+5×4+15×9+5×18+10×20=475 (z=520 – у прикладі 4.4). ≺

4.4.3. Побудова опорного плану ТЗ методом Фоґеля.

На довільному кроці методу:

- для кожного рядка та стовпця обчислюється різниця (*штраф*) між значеннями найменшої вартості та вартості, наступної за величиною;
- обчислені штрафи записують у додаткові стовпці та рядки;
- *виокремлюємо* рядок чи стовпець з *найбільшим* штрафом (якщо їх декілька, то обираємо довільний з них);
- у виокремленому рядку/стовпці *обираємо* клітинку з *найменшою* вартістю;
- для обраної клітинки *встановлюємо* величину перевезення (аналогічно методу мінімального елемента);
- *викреслюємо* рядок і/або стовпець (аналогічно методу мінімального елемента).

Далі цей процес повторюємо з незаповненою частиною таблиці ТЗ. Отриманий план є *опорним*, оскільки з його клітинок, заповнених додатніми перевезеннями, не можна скласти цикл.

Приклад 4.7. Знайти ОП задачі з прикладу 4.4 методом Фоґеля

a_i \ b_j	5	15	15	15	Штраф для рядків		
15	10	2 15	20	11 0	10–2= = 8	**9**	–
25/10	12	7	9 15	20 10	9–7= = 2	2	**11**
10/5	4 5	14	16	18 5	14–4= = **10**	2	2
Штраф для стовпців	10–4 = 6	7–2 = 5	16–9 = 7	18–11 = 7			
	–	5	7	7			
	–	–	7	2			

➢ Послідовність заповнення клітинок: (3, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4), (2, 4). Отриманий ОП є *виродженим* ($5 < 3 + 4 - 1$); до числа базисних додамо клітинку (1, 4). Сумарна вартість перевезення z=15×2+-+5×4+15×9+5×18+10×20=475 (z=520 – у прикладі 4.4). Значення цільової функції таке ж, як і в методі мінімального елемента. Зазвичай, метод Фоґеля дає найкращий початковий розв’язок ТЗ. ≺

4.5. Критерій оптимальності плану перевезень

Для ТЗ існує двоїста до неї задача. Змінні двоїстої задачі позначимо $y_1, y_2, ..., y_n, -z_1, -z_2, ..., -z_m$. Задача (4.1) – (4.4) зводиться до наступної двоїстої задачі

$$\sum_{j=1}^{n} b_j y_j - \sum_{i=1}^{m} a_i z_i \to \max; \tag{4.10}$$

$$y_j - z_i \le c_{ij}, \ (i = \overline{1,m}\,; j = \overline{1,n}\,). \tag{4.11}$$

Основним методом відшукання оптимального плану перевезень є *метод потенціалів*, в основу якого покладено теорему 4.5.

Теорема 4.5. Для того, щоб деякий план $\overline{X}$ ТЗ був оптимальним, необхідно і достатньо, щоб йому відповідала система із $m+n$ чисел $v_1, v_2, ..., v_n, u_1, u_2, ..., u_m$, для якої:

$$v_j - u_i \le c_{ij}, \quad (j=\overline{1,n}\,; i = \overline{1,m}\,), \tag{4.12}$$

$$v_j - u_i = c_{ij} \quad \text{для тих } (i, j), \text{ що } x_{ij} > 0. \tag{4.13}$$

➢ *Необхідність*. Нехай план $\overline{X}$ – оптимальний. На основі першої теореми двоїстості існує оптимальний план $y_j = v_j$, $x_i = u_i$ ($j=\overline{1,n}$; $i = \overline{1,m}$), що задовольняє (4.10), (4.11). Отож (4.12) виконується автоматично.

З другої теореми двоїстості маємо $(v_j - u_i - c_{ij})\, x_{ij} = 0$.

А це означає: для тих (i, j), що $x_{ij} > 0$, обов’язково $v_j - u_i - c_{ij} = 0$, тобто виконується (4.13).

Достатність. Нехай для плану $\overline{X}$ маємо числа v_j ($j=\overline{1,n}$) та u_i ($i = \overline{1,m}$), для яких виконується (4.12), (4.13). Покажемо, що $\overline{X}$ – оптимальний. Якщо розглянути будь-який інший план $\overline{X}''$, то

$$z(\overline{X}'') = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x''_{ij} \ge \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (v_j - u_i)x''_{ij} = \sum_{j=1}^{n} v_j \sum_{i=1}^{m} x''_{ij} - \sum_{i=1}^{m} u_i \sum_{j=1}^{n} x''_{ij} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} v_j b_j - \sum_{i=1}^{m} u_i a_i = \sum_{j=1}^{n} v_j \sum_{i=1}^{m} x_{ij} - \sum_{i=1}^{m} u_i \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (v_j - u_i)x_{ij} =$$

$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} = z(\overline{X})$. Отже, $z(\overline{X}'') \ge z(\overline{X})$ – план $\overline{X}$ *оптимальний*.≺

Умови (4.12), (4.13) називають *умовами потенціальності,* а числа v_j ($j=\overline{1,n}$), u_i ($i = \overline{1,m}$) – *потенціалами* відповідних пунктів постачання і споживання. Якщо вважати, що u_i – вартість одиниці продукції у пункті A_i, а v_j – вартість одиниці продукції після перевезення у пункт B_j, то економічний зміст теореми 4.5 такий:

сумарні транспортні витрати за оптимального плану перевезення дорівнюють збільшенню сумарної вартості продукції після її перевезення у пункти споживання, тобто:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j v_j - \sum_{i=1}^{m} a_i u_i \ . \tag{4.14}$$

4.6. Алгоритм методу потенціалів

Алгоритм методу потенціалів складається з *попереднього* етапу і *основного* етапу, який повторюється.

На попередньому етапі необхідно виконати такі дії:

1. Скласти початковий опорний план $\overline{X}_{\text{оп}}$ ТЗ і визначити множину базисних клітинок B (клітинки, що містять додатні перевезення і ті нульові перевезення, що доповнюють план до невиродженого випадку).
2. Для $\overline{X}_{\text{оп}}$ скласти систему з $m+n$ чисел v_j ($j=\overline{1,n}$), u_i ($i = \overline{1,m}$) таких, що виконується умова
$$v_j - u_i = c_{ij}, \ (i, j) \in B \tag{4.15}$$
3. План $\overline{X}_{\text{оп}}$ перевірити на оптимальність, тобто
$$v_j - u_i \le c_{ij}, \ (i, j) \notin B.$$

Увага! Система(4.15) має $m + n - 1$ рівнянь з $m+n$ невідомими. Для розв’язування системи досить, щоб $u_1 = 0$. Тоді значення інших невідомих можна автоматично, одне за одним, визначити з системи, адже всі базові клітинки з’єднуються ланцюжком.

Основний етап виконується, якщо $\overline{X}_{\text{оп}}$, знайдений на попередньому етапі, не є оптимальним. Основний етап має три кроки:

1. *Поліпшення опорного плану* – перехід до нового опорного плану $\overline{X}'_{\text{оп}}$ такого, що $z(\overline{X}'_{\text{оп}}) \le z(\overline{X}_{\text{оп}})$.

2. Для $\overline{X}'_{\text{оп}}$ скласти систему з $m+n$ чисел v'_j ($j=\overline{1,n}$), u'_i ($i=\overline{1,m}$) таких, що виконується умова

$$v'_j - u'_i = c_{ij},\ (i,j) \in B', \tag{4.16}$$

де B' – множина базових клітинок плану $\overline{X}'_{\text{оп}}$.

3. План $\overline{X}'_{\text{оп}}$ перевіряється на оптимальність: $v'_j - u'_i \le c_{ij}$, $(i,j) \notin B'$.

Основний етап триває доти, доки не знайдено оптимальний план. *Поліпшення опорного плану*. Нехай опорний план X не оптимальний. Тоді існує хоча б одна клітинка (i,j), для якої виконується нерівність $v_j - u_i - c_{ij} > 0$. Серед усіх цих клітинок визначаємо таку клітинку (i_0, j_0), для якої

$$\max(v_j - u_i - c_{ij}) = v_{j_0} - u_{i_0} - c_{i_0 j_0} > 0. \tag{4.17}$$

Якщо максимум маємо для декількох пар індексів (i,j), то за (i_0,j_0) обираємо пару, якій відповідає мінімальна вартість перевезень. Клітинка (i_0, j_0) з частиною базисних клітинок плану, згідно з наслідком 4.2, утворює *цикл* γ.

Побудуємо цей цикл проти годинникової стрілки, починаючи з клітинки (i_0, j_0), і позначаємо його клітинки поперемінно знаками "+" і "–" (клітинка (i_0, j_0) має знак "+"). Клітинки, позначені знаком "+", утворюють додатний півланцюжок γ^+, а знаком "–" – від'ємний півланцюжок γ^-. Нехай $\theta = \min\limits_{(i,j)\in\gamma^-} x_{ij} = x_{st}$.

Якщо мінімум досягається для декількох пар індексів (i, j), то за (s, t) обираємо ту пару, якій відповідає максимальна вартість перевезень. Новий опорний план будуємо за правилом:

$$x'_{ij} = \begin{cases} x_{ij} - \theta, \text{ якщо } (i,j) \in \gamma^-; \\ x_{ij} + \theta, \text{ якщо } (i,j) \in \gamma^+; \\ x_{ij} \text{ – для решти базисних клітинок.} \end{cases} \tag{4.18}$$

Внаслідок (4.18) маємо новий опорний план $\overline{X}'_{\text{оп}}$, у якому:

- клітинка (s, t) виводиться з базису ($x_{st} = 0$);
- клітинка (i_0, j_0) вводиться у базис ($x_{i_0 j_0} = \theta$).

Залишилося продемонструвати, що при виконанні (4.17) і (4.18) отримаємо зменшення (принаймні, не збільшення) цільової функції, тобто $z(\overline{X}'_{\text{оп}}) \le z(\overline{X}_{\text{оп}})$.

➢ Нехай I – множина пар індексів (i, j), які відповідають клітинкам, що не ввійшли у замкнутий ланцюжок γ вигляду

$$(i_0, j_0), (i_0, j_1), (i_1, j_1), (i_1, j_2), \ldots, (i_{s-1}, j_{s-1}), (i_{s-1}, j_s), (i_s, j_s), (i_s, j_0).$$

Тоді $z(\overline{X}'_{\text{оп}}) = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij}x'_{ij} = \sum\limits_{(i,j)\in I} c_{ij}x'_{ij} + \sum\limits_{(i,j)\in\gamma^+} c_{ij}x'_{ij} + \sum\limits_{(i,j)\in\gamma^-} c_{ij}x'_{ij} =$

$$= \sum_{(i,j)\in I} c_{ij}x_{ij} + \sum_{(i,j)\in\gamma^+} c_{ij}(x_{ij}+\theta) + \sum_{(i,j)\in\gamma^-} c_{ij}(x_{ij}-\theta) =$$

$$= \sum_{(i,j)\in I} c_{ij}x_{ij} + \sum_{(i,j)\in\gamma^+} c_{ij}x_{ij} + \sum_{(i,j)\in\gamma^-} c_{ij}x_{ij} + \theta\Big(\sum_{(i,j)\in\gamma^+} c_{ij} - \sum_{(i,j)\in\gamma^-} c_{ij}\Big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \theta(c_{i_0 j_0} - c_{i_0 j_1} + c_{i_1 j_1} - \ldots + c_{i_{s-1} j_{s-1}} - c_{i_{s-1} j_s} + c_{i_s j_s} - c_{i_s j_0}) =$$

$$= z(\overline{X}_{\text{оп}}) + \theta(c_{i_0 j_0} - (v_{j_1} - u_{i_0}) + (v_{j_1} - u_{i_1}) - (v_{j_2} - u_{i_1}) - \ldots +$$

$$+ (v_{j_{s-1}} - u_{i_{s-1}}) - (v_{j_s} - u_{i_{s-1}}) + (v_{j_s} - u_{i_s}) - (v_{j_0} - u_{i_s})) =$$

$$= z(\overline{X}_{\text{оп}}) + \theta(c_{i_0 j_0} - (v_{j_0} - u_{i_0})) = z(\overline{X}_{\text{оп}}) - \theta(v_{j_0} - u_{i_0} - c_{i_0 j_0}).$$

Враховуючи (4.17), отримаємо $z(\overline{X}'_{\text{оп}}) \le z(\overline{X}_{\text{оп}})$. ≺

Приклад 4.8. Знайти розв’язок ТЗ, яку задано опорним планом:

b_j / a_i	150	120	80	50
100	3 100	5	7	11
130	1 50	4 80	6	3
170	5	8 40	12 80	7 50

➢ Початковий опорний план *невироджений* (6 = 3 + 4 –1), значення лінійної форми z=100×3+50×1+80×4+40×8+80×12+50×7=2300.

Знайдемо потенціали u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3, v_4 із системи рівнянь: $v_1 - u_1 = 3$; $v_1 - u_2 = 1$; $v_2 - u_2 = 4$; $v_2 - u_3 = 8$; $v_3 - u_3 = 12$; $v_4 - u_3 = 7$.
Нехай $u_1 = 0$. Визначимо $v_1 = 3$; $u_2 = 2$; $v_2 = 6$; $u_3 = -2$; $v_3 = 10$; $v_4 = 5$.

$u_i \backslash v_j$	3	6	10	5
0	– 3 100	5	+ 7	11
2	+ 1 50	– 4 80	6	3
–2	5	+ 8 40	– 12 80	7 50

Перевіримо опорний план на оптимальність. Серед величин $v_j - u_i - c_{ij}$ для вільних клітинок є додатні:
$v_2 - u_1 - 5 = 6 - 0 - 5 = 1$; $v_3 - u_1 - 7 = 10 - 0 - 7 = \mathbf{3}$; $v_3 - u_2 - 6 = 10 - 2 - 6 = 2$.
Отже, $(i_0, j_0) = (1, 3)$. У таблиці сформуємо додатний і від'ємний півланцюжки. Знайдемо $\theta = \min\limits_{(i,j)\in\gamma^-} x_{ij} = x_{33} = 80$. У поліпшеному плані замість клітинки (3, 3) вводимо клітинку (1, 3). Перерахуємо значення потенціалів:

$v_1' - u_1' = 3$; $v_3' - u_1' = 7$; $v_1' - u_2' = 1$; $v_2' - u_2' = 4$; $v_2' - u_3' = 8$; $v_4' - u_3' = 7$.

Нехай $u_1' = 0$, тоді $v_1' = 3$; $v_3' = 7$; $u_2' = 2$; $v_2' = 6$; $u_3' = -2$; $v_4' = 5$.

Поліпшений опорний план з новими значеннями потенціалів:

$u_i \backslash v_j$	3	6	7	5
0	– 3 20	+ 5	7 80	11
2	+ 1 130	– 4 0	6	3
–2	5	8 120	12	7 50

Порушення оптимальності у клітинці (1, 2): $v_2 - u_1 - 5 = 6 - 0 - 5 = 1 > 0$. Отже, $(i_0, j_0) = (1, 2)$. У таблиці сформуємо додатний та від'ємний півланцюжки. Знайдемо $\theta = \min\limits_{(i,j)\in\gamma^-} x_{ij} = x_{22} = 0$.

У поліпшеному плані замість клітинки (2, 2) вводимо клітинку (1, 2). Перерахуємо значення потенціалів:

$$v'_1 - u'_1 = 3; v'_2 - u'_1 = 5;\ v'_3 - u'_1 = 7;\ v'_1 - u'_2 = 1;\ v'_2 - u'_3 = 8;\ v'_4 - u'_3 = 7.$$

Нехай $u'_1 = 0$, тоді $v'_1 = 3;\ v'_2 = 5;\ v'_3 = 7;\ u'_2 = 2;\ u'_3 = -3;\ v' = 4.$

Поліпшений опорний план з новими потенціалами:

u_i \ v_j	3	5	7	4
0	– 3 20	+ 5	7 80	11
2	1 130	4	6	3
–3	+ 5	– 8 120	12	7 50

Порушення оптимальності у клітинці (3, 1): $v_1 – u_3 – 5 = 3+3–5 > 0$.

У таблиці сформуємо додатний та від’ємний півланцюжки. Знайдемо $\theta = \min\limits_{(i,j)\in\gamma^{-1}} x_{ij} = x_{11} = 20.$

У поліпшеному плані замість клітинки (1, 1) вводимо клітинку (3, 1). Перерахуємо потенціали:

$$v'_3 - u'_1 = 7;\ v'_2 - u'_1 = 5;\ v'_2 - u'_3 = 8;\ v'_4 - u'_3 = 7;\ v'_1 - u'_3 = 5;\ v'_1 - u'_2 = 1.$$

Нехай $u'_1 = 0$, тоді $v'_3 = 7;\ v'_2 = 5;\ u'_3 = -3;\ v'_4 = 4;\ v'_1 = 2;\ u'_2 = 1.$

Поліпшений опорний план з новими потенціалами:

u_i \ v_j	2	5	7	4
0	3	5 20	7 80	11
1	1 130	4	6	3
–3	5 20	8 100	12	7 50

Отриманий план є *оптимальним*. Значення лінійної форми z=20×5+80×7+130×1+20×5+100×8+50×7=2040. Для знаходження оптимального плану були здійснені *три кроки* поліпшення опорного плану. Значення функції мети зменшилось на 260 одиниць. ∢

Приклад 4.9. Знайти оптимальний план ТЗ прикладу 4.4, опорний план якої знайдено методом мінімального елемента (приклад 2.6).

Знайдемо потенціали u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3, v_4 із системи рівнянь:

$v_2 - u_1 = 2$; $v_4 - u_1 = 11$; $v_3 - u_2 = 9$; $v_4 - u_2 = 20$; $v_1 - u_3 = 4$; $v_4 - u_3 = 18$.

Нехай $u_1 = 0$, тоді $v_2 = 2$; $v_4 = 11$; $u_2 = -9$; $v_3 = 0$; $u_3 = -7$; $v_1 = -3$.

u_i \ v_j	–3	2	0	11
0	10	– 2 15	20	+ 11 0
–9	12	+ 7	9 15	– 20 10
–7	4 5	14	16	18 5

Порушення оптимальності у клітинці (2, 2): $v_2 - u_2 - 7 = 2 + 9 - 7 > 0$.

У таблиці сформуємо додатний та від'ємний півланцюжки. Знайдемо $\theta = \min\limits_{(i,j)\in\gamma^{-1}} x_{ij} = x_{24} = 10.$ У поліпшеному плані замість клітинки (2, 4) вводимо клітинку (2, 2). Перелічимо потенціали:

$v_2' - u_1' = 2$; $v_4' - u_1' = 11$; $v_2' - u_2' = 7$; $v_3' - u_2' = 9$; $v_1' - u_3' = 4$; $v_4' - u_3' = 18$.

Нехай $u_1' = 0$, тоді $v_2' = 2$; $v_4' = 11$; $u_2' = -5$; $v_3' = 4$; $u_3' = -7$; $v_1' = -3$.

u_i \ v_j	–3	2	4	11
0	10	2 5	20	11 10
–5	12	7 10	9 15	20
–7	4 5	14	16	18 5

Отриманий план є *оптимальним*. Значення лінійної форми $z = 5\times2+10\times11+10\times7+15\times9+5\times4+5\times18 = 435$. Для визначення оптимального плану здійснено *тільки один крок* поліпшення опорного плану. Значення функції мети зменшилось на 40 одиниць. ∢

4.7. Приклади задач, які зводяться до транспортної задачі

Математична структура ТЗ притаманна для великого класу задач ЛП. Реальний зміст таких задач може бути найрізноманітнішим, зовсім не зв'язаним із задачею перевезення вантажів.

4.7.1. Задача про розподіл площ під посіви сільськогосподарських культур

На ділянках D_1, D_2 і D_3 площею S_1, S_2 і S_3, відповідно, можна вирощувати сільгоспкультури K_1, K_2, K_3 і K_4. Планове завдання полягає в отриманні врожаю цих культур у кількостях b_1, b_2, b_3 і b_4 тонн, відповідно. Відома матриця $C = \left\| c_{ij} \right\|_{i=\overline{1,3};\, j=\overline{1,4}}$, елемент c_{ij} якої дорівнює *прибутку* в одиницях грошей від реалізації культури K_j ($j = \overline{1,4}$), вирощеної на ділянці D_i ($i = \overline{1,3}$). Урожайність культури K_j ($j = \overline{1,4}$) дорівнює P_j ц/га (урожайність від ділянки не залежить). Скласти математичну модель задачі, що даватиме змогу знайти такий план розподілу площ під посіви сільськогосподарських культур, який передбачатиме *максимальний прибуток* від реалізації урожаю культур.

Позначимо через x_{ij} площу в га, яку необхідно виокремити на ділянці D_i ($i = \overline{1,3}$) для вирощування культури K_j ($j = \overline{1,4}$).

Цільова функція має вигляд $z = \sum\limits_{i=1}^{3} \sum\limits_{j=1}^{4} (-c_{ij}) x_{ij} \ \rightarrow \ \min$.

Умова використання площ усіх ділянок: $\sum\limits_{j=1}^{4} x_{ij} = S_i, \ i = \overline{1,3}.$

Нехай w_j ($j = \overline{1,4}$) – загальна площа (в га), необхідна для вирощування культури K_j. З урахуванням планового завдання та урожайності культур маємо $w_j = b_j(\text{т}) : \frac{P_j}{10}\left(\text{т}/\text{га}\right) = \frac{b_j \cdot 10}{P_j}(\text{га}).$

Умова цілковитого використання площ усіма культурами:

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ij} = w_j, \text{ де } w_j = \frac{10 \cdot b_j}{P_j}, \qquad j = \overline{1,4}.$$

Нехай $C = \begin{pmatrix} 20 & 50 & 24 & 10 \\ 25 & 40 & 10 & 20 \\ 30 & 15 & 20 & 15 \end{pmatrix}$; $\overline{S} = \begin{pmatrix} 300 \\ 500 \\ 400 \end{pmatrix}$; $\overline{b}^T = (600; 1500; 225; 1250)$, $\overline{P}^T = (20; 30; 15; 50)$.

Обчислимо $\overline{w}^T = (300;\ 500;\ 150;\ 250)$. Оскільки $\sum_{i=1}^{3} S_i = \sum_{j=1}^{4} w_j = 1200$, то ТЗ є закритою, опорний план якої матиме вигляд:

S_i \ w_j	300	500	150	250
300	–20	–50 300	–24	–10
500	–25	–40 200	–10 50	–20 250
400	–30 300	–15	–20 100	–15

Знайдемо потенціали $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3, v_4$ із системи рівнянь:

$v_2 – u_1 = –50$; $v_2 – u_2 = –40$; $v_3 – u_2 = –10$; $v_4 – u_2 = –20$; $v_1 – u_3 = –30$; $v_3 – u_3 = –20$.

Нехай $u_1 = 0$, тоді $v_2 = –50$; $u_2 = –10$; $v_4 = –30$; $v_3 = –20$; $u_3 = 0$; $v_1 = –30$.

u_i \ v_j	–30	–50	–20	–30
0	–20	–50 300	–24	–10
–10	+ –25	–40 200	– –10 50	–20 250
0	– –30 300	–15	+ –20 100	–15

Перевіримо опорний план на оптимальність. Серед величин $v_j - u_i - c_{ij}$ для вільних клітинок є додатні:

$$v_3 - u_1 + 24 = –20 + 24 = 4;\ v_1 – u_2 + 25 = –30 + 10 + 25 = \mathbf{5}.$$

Отже, $(i_0, j_0) = (2, 1)$. У таблиці сформуємо додатний і від’ємний півланцюжки. Знайдемо $\theta = \min\limits_{(i,j)\in\gamma^-} x_{ij} = x_{23} = 50$. У поліпшеному плані замість клітинки (2, 3) вводимо клітинку (2, 1).

Перелічимо значення потенціалів:

$v_2' - u_1' = -50$; $v_2' - u_2' = -40$; $v_1' - u_2' = -25$; $v_4' - u_2' = -20$;

$v_1' - u_3' = -30$; $v_3' - u_3' = -20$. Нехай $u_1' = 0$, тоді

$v_2' = -50$; $u_2' = -10$; $v_1' = -35$; $v_4' = -30$; $u_3' = -5$; $v_3' = -25$.

Поліпшений опорний план з новими значеннями потенціалів:

u_i \ v_j	–35	–50	–25	–30
0	–20	–50 300	–24	–10
–10	–25 50	–40 200	–10	–20 250
–5	–30 250	–15	–20 150	–15

Отриманий план є *оптимальним*. Значення лінійної форми z=300×(–50)+50×(–25)+200×(–40)+250×(–20)+250×(–30)+150×(–20)= = –39750. Отже, *максимальний прибуток* від реалізації урожаю культур становить 39750 грошових одиниць.

4.7.2. Задача оптимізації сезонних запасів

Деяка фабрика частину своїх виробничих потужностей використовує для виготовлення сезонних виробів, попит на які підтримується впродовж чотирьох місяців. Замовлення на вироби у ці місяці, відповідно, дорівнюють 100, 200, 180 і 300 одиниць виробів. Протягом цих місяців фабрика може виготовити, відповідно, 50, 180, 280 і 270 одиниць виробів. Витрати на виготовлення одиниці виробу становлять 4 умовні одиниці (у.о.). Зберігання одиниці виробу на складі протягом одного місяця дорівнює 0,5 у.о. Штраф оптовому покупцеві за недопоставку одиниці виробу дорівнює 2 у.о. Скласти план постачання готової продукції оптовому покупцеві, що даватиме змогу *мінімізувати* витрати, зв'язані з проектом реалізації сезонних виробів протягом чотирьох місяців.

Цю задачу можна сформулювати у термінах ТЗ, якщо:

- пункт постачання i ($i = \overline{1, 4}$) замінити *місяцем виробництва*;
- пункт споживання j ($j = \overline{1,4}$) замінити *місяцем постачання*;

- величину запасів a_i ($i = \overline{1, 4}$) замінити кількістю *виготовлених* одиниць виробу в i-му місяці;
- величину потреб b_j ($j = \overline{1, 4}$) замінити кількістю *відпущених* одиниць виробу в j-му місяці;
- за c_{ij} вважати *витрати*, що стосуються постачання у j-му місяці ($j = \overline{1, 4}$) одиниці виробу, виробленої в i-му місяці ($i = \overline{1, 4}$), які визначаються формулою

$$c_{ij} = \begin{cases} 4, & \text{якщо } i = j; \\ 4 + 0{,}5(j - i), & \text{якщо } i < j; \\ 4 + 2(i - j), & \text{якщо } i > j. \end{cases}$$

Дві інші класичні задачі ДО (задачу про призначення і ТЗ за критерієм часу) розглянемо в окремих параграфах, оскільки для їхнього розв'язання розроблені спеціальні методи.

4.8. Задача про призначення

Нехай маємо n різних робіт, кожну з яких може виконати будь-який з n робітників. Вартість виконання i-ої ($i = \overline{1, n}$) роботи j-м ($j = \overline{1, n}$) робітником дорівнює c_{ij} грошових одиниць. Необхідно *призначити* кожного робітника на конкретну роботу так, щоб *мінімізувати* сумарну вартість робіт.

У ДО цю задачу називають *задачею про призначення*. Якщо визначити $x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } j \text{ робітник призначений на роботу } i; \\ 0, & \text{в інших випадках,} \end{cases}$

то маємо ТЗ: $z = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min$; $\sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$, $\sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij} = 1$; $i, j = \overline{1, n}$.

Теорема 4.6. Оптимальний розв'язок задачі про призначення не зміниться, якщо до всіх елементів деякого рядка і/або стовпця матриці вартостей додати константу (або відняти її).

➢ Нехай p_i і q_j – константи, які віднімаються від елементів i-го рядка та j-го стовпця матриці вартостей одночасно. Тоді вартість c_{ij}

зміниться і дорівнюватиме $c'_{ij} = c_{ij} – p_i – q_j$. Далі продемонструємо, що значення функції мети за коефіцієнтів c'_{ij} відрізняється від її значення за коефіцієнтів c_{ij} на деяку константу K:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(c_{ij}-p_i-q_j\right)x_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}-\sum_{i=1}^{n}\left(p_i\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\right)-\sum_{j=1}^{n}\left(q_j\sum_{i=1}^{n}x_{ij}\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}-\sum_{i=1}^{n}p_i-\sum_{j=1}^{n}q_j=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}-K,\ \text{де } K=\sum_{i=1}^{n}p_i+\sum_{j=1}^{n}q_j.$$

Отже, за довільного допустимого розв’язку $\overline{X}$ задачі про призначення (у тім числі й за оптимального), значення функції мети відрізняються на константу (тобто не залежать від $\overline{X}$). ◄

Якщо маємо дві задачі про призначення з однією і тією ж множиною допустимих розв’язків, то їхні оптимальні розв’язки збігатимуться. Можна переконатися, що аналогічну властивість має і закрита ТЗ (*доведіть самостійно*).

У задачі про призначення змінна x_{ij} може набувати значення 0 або 1, а будь-який допустимий розв’язок містить тільки n одиниць. Отож довільний план задачі про призначення буде *виродженим* і застосування методу потенціалів неефективне. Специфічні властивості задачі про призначення дали змогу розробити спеціальний метод її розв’язання, відомий як *угорський метод* (метод вперше у 1931 році запропонував угорський математик Еґерварі).

Основна ідея угорського методу полягає у переході від початкової матриці вартостей C до еквівалентної матриці C^* з невід’ємними елементами і системою *n незалежних нулів* (сукупністю нульових елементів матриці, з яких жодних два не належать одному і тому ж рядку або одному і тому ж стовпцю).

У задачі про призначення розв’язок $\overline{X}$ має містити n одиниць, з яких жодні дві не належать одному і тому ж рядку або одному і тому ж стовпцю. Отож, якщо n одиниць розв’язку $\overline{X}$ розташувати відповідно до розташування *незалежних нулів*, то отримаємо *допустимий розв’язок* задачі про призначення. Цей розв’язок слугуватиме *оптимальним* розв’язком, оскільки йому відповідатиме *нульове* значення функції мети, яке не можна далі зменшити.

Наслідок 4.3 (з теореми 4.6). Внаслідок застосування угорського методу отримуємо *оптимальний* розв'язок $\overline{X}$, для якого справедливе співвідношення $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} = \sum_{i=1}^{n} p_i + \sum_{j=1}^{n} q_j$ (*доведіть самостійно*).

Алгоритм угорського методу розв'язування задачі про призначення складається з *попереднього* етапу і не більше, ніж $n-2$ ітерацій *основного* етапу.

Попередній етап складається з таких послідовних кроків:

1. У матриці вартостей у кожному рядку визначити найменшу вартість і відняти її від усіх елементів цього рядка.
2. В отриманій матриці у кожному стовпці визначити найменшу вартість і відняти її від усіх елементів цього стовпця.
3. В отриманій матриці визначити систему *незалежних нулів*.
4. Якщо система незалежних нулів має n нулів, то отримано *оптимальний розв'язок* (розташувати n одиниць розв'язку згідно з розташуванням *незалежних нулів*). Якщо система незалежних нулів має менше, ніж n нулів, то перейти до *основного* етапу.

Основний етап складається з таких послідовних кроків:

1. В останній матриці провести *мінімальну кількість* горизонтальних і вертикальних ліній у рядках і стовпцях з тим, щоб викреслити у матриці *всі* нулі.
2. Знайти *найменший невикреслений* елемент, *відняти* його від усіх *невикреслених* елементів і *додати* до елементів, які стоять на *перетині прямих*.
3. В отриманій матриці визначити систему *незалежних нулів*.
4. Якщо система незалежних нулів містить n нулів, то отримано *оптимальний розв'язок* (розташувати n одиниць розв'язку згідно з розташуванням незалежних нулів). Якщо система незалежних нулів містить менше, ніж n нулів, то перейти до 1-го кроку.

Коректність алгоритму угорського методу можна довести, виходячи з теорем двоїстості. З наслідку 4.3 випливає, що сума $\sum_{i=1}^{n} p_i + \sum_{j=1}^{n} q_j$ є функцією мети двоїстої задачі.

Приклад 4.10. Розв'язати задачу про призначення, яку задано матрицею вартості $C = \begin{pmatrix} 15 & 10 & 9 \\ 9 & 15 & 10 \\ 10 & 12 & 8 \end{pmatrix}$. ➢ Мінімуми рядків: p_1=9, p_2=9, p_3=8: $C' = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. Мінімуми стовпців: q_1=0, q_2=1, q_3=0:

$$C'' = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix};\ C^* = \begin{pmatrix} 6 & 0^* & 0 \\ 0^* & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 0^* \end{pmatrix} \Rightarrow x_{12} = 1;\ x_{21} = 1;\ x_{33} = 1.\ \prec$$

Вартість робіт 10+9+8 = (9+9+8) + (0+1+0) = 27 (у.о.).

Приклад 4.11. Розв'язати задачу про призначення, яку задано матрицею вартості $C = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 1 \\ 10 & 4 & 6 & 7 \\ 8 & 5 & 3 & 5 \\ 12 & 5 & 9 & 8 \end{pmatrix}$. ➢ Мінімуми рядків: p_1=1, p_2=4, p_3=3, p_4=5: $C' = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Мінімуми стовпців: q_1=4, q_2=0, q_3=0, q_4=0: $C'' = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; $C^* = \begin{pmatrix} 0^* & 5 & 6 & 0 \\ 2 & 0^* & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0^* & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ – система незалежних нулів має 3 нулі (має бути 4 нулі).

Основний етап. $C'' = \begin{pmatrix} \underline{0} & \underline{5} & \underline{6} & \underline{0} \\ 2 & \underline{0} & 2 & 3 \\ \underline{1} & \underline{2} & \underline{0} & \underline{2} \\ 3 & \underline{0} & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Найменший невикреслений елемент дорівнює 2, тоді $C''' = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $C^* = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 6 & 0^* \\ 0^* & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0^* & 2 \\ 1 & 0^* & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow x_{14} = 1;\ x_{21} = 1;\ x_{33} = 1;\ x_{42} = 1.$

Вартість робіт 1+10+3+5 = (1+4+3+5) + (4)+ (2) = 19 (у.о.). ◄

На практиці трапляються задачі про призначення, у яких задано величину ефективності виконання i-ої ($i = \overline{1,\ n}$) роботи j-м ($j = \overline{1,\ n}$) робітником. У цьому випадку необхідно визначити *максимум* цільової функції. Еквівалентну до неї задачу мінімізації

$$z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (-c_{ij}) x_{ij} \to \min \tag{4.19}$$

формально не можна вважати задачею про призначення, оскільки коефіцієнти її цільової функції є від'ємними. Цю невідповідність можна подолати, замінюючи (4.19) еквівалентною задачею

$$z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (-c'_{ij}) x_{ij} \to \min,$$

у якій $c'_{ij} = c_{ij} - \max\limits_{j=\overline{1,n}} c_{ij},\ i = \overline{1,n},$ оскільки тоді $-c'_{ij} \geq 0.$

4.9. Транспортна задача за критерієм часу

У деяких ТЗ за критерій беруть *час* t_{ij} перевезення однорідних вантажів від i-го пункту постачання ($i = \overline{1,\ m}$) до j-го ($j = \overline{1,\ n}$) пункту споживання (перевезення свіжих продуктів, евакуація людей тощо). Задача полягає у визначенні такого плану перевезень $\|x_{ij}\|_{mn}$, за яким *весь* вантаж буде доставлено споживачам у *найкоротший термін* згідно з умовами (4.2) – (4.5).

Розглянемо постановку задачі *детальніше*. Серед значень t_{ij} виокремимо найбільше (позначимо $t_{\max}$). Величина $t_{\max}$ визначає час, протягом якого *виконається* поточний план перевезень $\|x_{ij}\|_{mn}$. Необхідно визначити такий план, щоб $t_{\max}$ було *найменшим*.

Початковий опорний план ТЗ знаходимо одним з відомих методів (північно-західного кута, мінімального елемента тощо). Нехай клітинка (k, l) цього плану містить *додатне* перевезення, що вимагає *найбільшого часу* (позначимо $t_{kl} = T$).

Починаючи з опорного плану, будуватимемо наступні плани, визначаючи на кожній ітерації досягнуте значення T. Усі *вільні* клітинки, яким відповідають значення $t_{ij} > T$, завантажувати недоцільно, оскільки це збільшить T. Отож, викреслюючи ці клітинки, вилучаємо їх з подальшого розгляду.

У таблиці, що залишилася, треба вилучити клітинку (k, l). З цією метою побудуємо *розвантажувальний* цикл, який складатиметься з базисних і вільних комірок. Від'ємний півланцюжок γ^- починається з клітинки (k, l). Решта клітинок цього півланцюжка – *базисні* клітинки (i, j). У додатний півланцюжок γ^+ можуть входити як базисні, так і вільні клітинки. Якщо ланцюжок γ вдалося побудувати, то застосовуємо формулу (4.18).

Якщо $\theta = x_{kl}$, то клітинка (k, l) цілковито звільняється і в подальшому не розглядається (закреслюється). Якщо ж $\theta < x_{kl}$, то вантаж у цій клітинці зменшується: $x'_{kl} = x_{kl} - \theta$. У цьому випадку будуватимемо новий розвантажувальний цикл доти, доки не отримаємо $x'_{kl} = 0$. На цьому одна ітерація закінчується. Далі знову визначатимемо нове значення $T' < T$, закреслюючи клітинки зі значеннями $t_{ij} > T'$. Продовжуватимемо цей процес доти, доки на деякі ітерації вже неможливо буде побудувати ланцюжок γ. Це означатиме, що досягнуто оптимального значення.

Приклад 4.12. Розв'язати транспортну задачу за критерієм часу, знаючи її опорний план. Домовимося значення $t_{\max}$ підкреслювати.

b_j / a_i	5	15	15	15
15	21	– 2 15	20	+ 11 0
25	12	7 +	9 15	– $\underline{20}$ 10
10	4 5	14	16	18 5

Ланцюжок γ вдалося побудувати. Застосовуємо формулу (4.18).

b_j / a_i	5	15	15	15
15		– 2 5		+ 11 10
25	12	+ 7 10	– 9 15	20
10	4 5	14	+ 16	– $\underline{18}$ 5

Ланцюжок γ вдалося побудувати. Застосовуємо формулу (4.18).

b_j / a_i	5	15	15	15
15		2		11 15
25	12	– 7 15	+ 9 10	
10	4 5	+ 14	– $\underline{16}$ 5	18

Ланцюжок γ вдалося побудувати. Застосовуємо формулу (4.18).

b_j / a_i	5	15	15	15
15		2		11 15
25	12	7 10	9 15	
10	4 5	$\underline{14}$ 5	16	

Ланцюжок γ побудувати не вдалося. План оптимальний. ⊲

❓ Запитання для самоперевірки

1. Наведіть змістовне формулювання ТЗ.
2. Наведіть формальну постановку ТЗ.
3. Що є основними обмеженнями ТЗ?
4. Що таке умова балансу?
5. Дайте означення відкритої ТЗ.
6. Дайте означення закритої ТЗ.
7. Як звести закриту ТЗ до відкритої ТЗ?
8. Наведіть основні властивості закритої ТЗ.
9. Сформулюйте теорему про ранг матриці основних обмежень ТЗ.
10. Доведіть теорему про ранг матриці основних обмежень ТЗ.
11. Сформулюйте і доведіть необхідну умову існування розв'язків ТЗ.
12. Сформулюйте і доведіть достатню умову існування розв'язків ТЗ.
13. Що таке опорний план ТЗ? Що таке вироджений/невироджений ОП?
14. Дайте означення ланцюжка клітинок. Що таке цикл?
15. Опишіть алгоритм методу викреслювання.
16. Сформулюйте і доведіть необхідну умову існування ОП.
17. Сформулюйте і доведіть достатню умову існування ОП.
18. Що таке базис опорного плану?
19. Як подолати виродженість опорного плану?
20. Опишіть алгоритм методу північно-західного кута побудови ОП.
21. Опишіть алгоритм методу мінімального елемента побудови ОП.
22. Опишіть алгоритм методу Фоґеля побудови ОП.
23. Сформулюйте і доведіть теорему про оптимальність плану ТЗ.
24. Опишіть алгоритм попереднього кроку методу потенціалів.
25. Опишіть алгоритм основного кроку методу потенціалів.
26. Наведіть формальну постановку задачі про призначення.
27. Опишіть алгоритм угорського методу розв'язування задачі про призначення.
28. Опишіть алгоритм розв'язування ТЗ за критерієм часу.

🕮 Завдання для самостійної роботи

Завдання 4.1. Три роти, що мають a_i ($i=\overline{1,\,3}$) солдат, розміновують чотири мінні поля, для чого необхідно виділити, відповідно, b_j ($j=\overline{1,\,4}$) солдат. Задано матрицю C, у якій c_{ij} – кількість мін i-го поля, що може розмінувати солдат j-ої роти за зміну. Необхідно розподілити солдат так, щоб за зміну вони розмінували максимально можливу кількість мін.

1. $C=\begin{pmatrix}6&5&9&8\\6&4&8&6\\9&8&4&7\end{pmatrix}$; $\bar{b}^T=(36;32;24;18)$, $\bar{a}^T=(20;35;55)$.

2. $C=\begin{pmatrix}7&4&6&5\\7&5&6&8\\9&4&7&4\end{pmatrix}$; $\bar{b}^T=(28;\ 15;\ 37;\ 20)$, $\bar{a}^T=(35;\ 25;\ 40)$.

3. $C=\begin{pmatrix}5&8&4&7\\9&8&5&9\\7&9&8&6\end{pmatrix}$; $\bar{b}^T=(14;26;16;34)$, $\bar{a}^T=(30;40;20)$.

4. $C=\begin{pmatrix}6&9&6&8\\5&9&8&7\\5&4&6&8\end{pmatrix}$; $\bar{b}^T=(30;\ 18;\ 40;\ 22)$, $\bar{a}^T=(25;\ 35;\ 50)$.

5. $C=\begin{pmatrix}9&7&8&4\\6&6&7&5\\4&7&9&5\end{pmatrix}$; $\bar{b}^T=(32;24;28;16)$, $\bar{a}^T=(30;25;45)$.

6. $C=\begin{pmatrix}4&5&6&6\\6&7&4&9\\7&6&8&4\end{pmatrix}$; $\bar{b}^T=(20;\ 22;\ 18;\ 30)$, $\bar{a}^T=(45;\ 15;\ 30)$.

7. $C=\begin{pmatrix}9&7&5&5\\6&8&5&7\\9&6&8&5\end{pmatrix}$; $\bar{b}^T=(15;35;21;24)$, $\bar{a}^T=(40;30;25)$.

8. $C=\begin{pmatrix}6&5&4&9\\4&6&7&5\\8&4&9&6\end{pmatrix}$; $\bar{b}^T=(60;\ 25;\ 30;\ 15)$, $\bar{a}^T=(35;\ 40;\ 55)$.

9. $C=\begin{pmatrix}8&4&7&6\\7&9&8&6\\9&7&5&8\end{pmatrix}$; $\bar{b}^T=(22;15;23;30)$, $\bar{a}^T=(25;30;35)$.

10. $C=\begin{pmatrix}7&6&9&5\\9&5&6&7\\4&8&5&9\end{pmatrix}$; $\bar{b}^T=(30;\ 14;\ 26;\ 20)$, $\bar{a}^T=(20;\ 45;\ 25)$.

11. $C=\begin{pmatrix}5&8&4&7\\9&8&5&9\\7&9&8&6\end{pmatrix}$; $\bar{b}^T=(30;\ 18;\ 40;\ 22)$, $\bar{a}^T=(25;\ 35;\ 50)$.

12. $C=\begin{pmatrix}6&9&6&8\\5&9&8&7\\5&4&6&8\end{pmatrix}$; $\bar{b}^T=(14;26;16;34)$, $\bar{a}^T=(30;40;20)$.

13. $C=\begin{pmatrix}9&7&8&4\\6&6&7&5\\4&7&9&5\end{pmatrix}$; $\bar{b}^T=(20;\ 22;\ 18;\ 30)$, $\bar{a}^T=(45;\ 15;\ 30)$.

14. $C=\begin{pmatrix}4&5&6&6\\6&7&4&9\\7&6&8&4\end{pmatrix}$; $\bar{b}^T=(32;24;28;16)$, $\bar{a}^T=(30;25;45)$.

15. $C=\begin{pmatrix}9&7&8&4\\6&6&7&5\\4&7&9&5\end{pmatrix}$; $\bar{b}^T=(20;\ 22;\ 18;\ 30)$, $\bar{a}^T=(45;\ 15;\ 30)$.

16. $C=\begin{pmatrix}4&5&6&6\\6&7&4&9\\7&6&8&4\end{pmatrix}$; $\bar{b}^T=(32;24;28;16)$, $\bar{a}^T=(30;25;45)$.

Завдання 4.2. Розв'язати транспортну задачу за *критерієм часу*. Умови задач необхідно вибирати із завдання 2.1, вважаючи $\bar{a}$ вектором запасів, а $\bar{b}$ – вектором потреб. Задана матриця *C* містить час t_{ij} перевезення однорідних вантажів від *i*-го пункту постачання ($i=\overline{1,3}$) до *j*-го ($j=\overline{1,4}$) пункту споживання.

Завдання 4.3. Розв'язати задачу про призначення, яку задано матрицею вартості *C*. Матрицю *C* необхідно вибирати із завдання 4.1, відкидаючи при цьому останній стовпець.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Барвінський А. Ф. та ін.* Математичне програмування: Навч. посібник. – Львів: Національний університет "Львівська політехніка" (Інформаційно-видавничий центр "Інтелект+" Інституту післядипломної освіти) "Інтелект-Захід", 2004.
2. *Бартіш М. Я.* Методи оптимізації: Навч. посібник. – Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2006.
3. *Вентцель Е. С.* Исследование операций. Задачи, принципы, методология: Учеб. пособие для вузов. – М.: Дрофа, 2004.
4. *Волков И. К.*, *Загоруйко Е. А.* Исследование операций: Учебник. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002.
5. *Глибовець М. М.* Основи комп'ютерних алгоритмів. – К.: Вид. дім "КМ Академія", 2003.
6. *Зайченко Ю. П.* Дослідження операцій: Підручник. – К.: ЗАТ "ВІПОЛ", 2000.
7. *Зайченко Ю. П.* Исследование операций: Учеб. пособие. – К.: Вища школа, 1975.
8. *Катренко А. В.* Дослідження операцій: Підручник. – Львів: Магнолія Плюс, 2004.
9. *Костевич Л. С.* Математическое программирование: Информ. технологии оптимальных решений: Учеб. пособие. – Мн.: Новое знание, 2003.
10. *Кремер Н. Ш.*, *Путко Б. А.*, *Тришин И. М.*, *Фридман М. Н.* Исследование операций в экономике: Учеб. пособие. – М.: ЮНИТИ, 2004.
11. *Ларичев О. И.* Теория и методы принятия решений, а также Хроника событий в Волшебных странах: Учебник. – М.: Логос, 2003.
12. *Машина Н. І.* Математичні методи в економіці: Навч. посібник. – К.: Центр навчальної літератури, 2003.
13. *Наконечний С. І.*, *Савіна С. С.* Математичне програмування: Навч. посібник. – К.: КНЕУ, 2003.
14. *Степанюк В. В.* Методи математичного програмування: Навч. посібник. – К.: Вища школа, 1977.
15. *Таха Х.* Введение в исследование операций, 7-е издание. – М.: Издательский дом "Вильямс", 2005.
16. *Цегелик Г. Г.* Лінійне програмування: Навч. посібник. – Львів: Світ, 1995.
17. *Черноруцкий И. Г.* Методы принятия решений: Учеб. пособие. – СПб.: БХВ –Петербург, 2005.

Навчальне видання

Бартіш Михайло Ярославович
Дудзяний Ігор Михайлович

Дослідження операцій
Частина 1. Лінійні моделі

Редактор *І. Лоїк*
Технічний редактор *С. Сеник*
Комп'ютерне макетування *І. Дудзяний*

Підп. до друку . Формат 60×84/16. Папір друк.
Друк на різогр. Умовн. друк. арк. 9,8. Обл.-вид. арк. 10,2.
Тираж 250 прим. Зам.

Видавничий центр Львівського національного університету імені Івана Франка.
79000 Львів, вул. Дорошенка, 41