Лабораторна робота № 3

АГРЕГУВАННЯ ТА ФАКТОРИЗАЦІЯ

Мета роботи:

Засвоїти шляхи агрегування та факторизації бінарних відношень (БВ).

Обладнання та програмне забезпечення:

– IBM сумісна персональна обчислювальна машина;

– програмне забезпечення.

Завдання до роботи:

Написавти програму для ПЕОМ, котра реалізує наступні функції:

– факторизацію бінарних відношень;

– відображення результату агрегування та факторизації БВ;

Теоретичні відомості

Агрегування та факторизація

Агрегування, або укрупнення відношень дає змогу виявити та дослідити їх загальні властивості, а також розробити процедури корегування відношень, отриманих експертним шляхом. У разі агрегування структуру первісного відношення переносять з однієї множини – носія – на іншу, одержану як результат гомоморфного відображення носія первісного відношення.

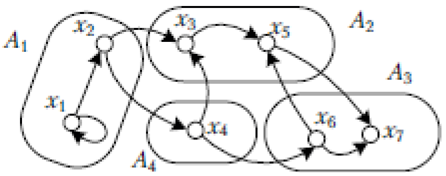
Елементи множини-носія A_{D} агрегованого відношення P_{D} можна розглядати як підмножини (класи) множини A – носія первісного відношення, що утворюють її розбиття. Отже, якщо

$$A_D = \{A_1, \dots, A_m\},\ A = \{x_1, x_2, \dots, x_k\},\ \text{то}\ \bigcup_{i=1}^{m} A_i = A_0,$$

і для будь-яких i, j, $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$.

Приклад Відношення P подано матрицею $B(P)$ та відповідним графом $G(P)$, а відношення P_{D} — за допомогою розбиття множини $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$ – носія відношення P – на класи загального виду $A_1 = \{x_1, x_2\}$, $A_2 = \{x_3, x_5\}$, $A_3 = \{x_6, x_7\}$, $A_4 = \{x_4\}$. Отже, $A_{\mathrm{D}} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ – носій агрегованого відношення є P_{D} (див. рис.1, 2)

$$B(P)=\begin{bmatrix}1&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1&0&1\\0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix},\quad P_D=\begin{bmatrix}1&1&0&1\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\0&1&1&0\end{bmatrix}$$



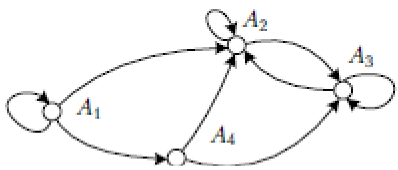


Рис. 1. Граф бінарного відношення P Рис. 2. Граф агрегованого відношення P_{D}

Відношення P_{D} з носієм A_{D}, визначене через первісне відношення P з носієм A співвідношенням,

$$(\forall A_i\,,\, A_j \in A_D)\colon A_i P_D A_j \Leftrightarrow (\exists x_k \in A_i\,) \wedge (\exists x_j \in A_j\,) : x_k P x_j\,,$$

називається фактор-відношенням, отриманим за допомогою факторизації первісного відношення P за певним іншим відношенням D. Отже, A_i й A_j знаходяться у відношенні P_D тоді й лише тоді, коли знайдеться хоча б одна пара елементів із цих підмножин, які знаходяться у відношенні P.

Для прийняття рішень важливий випадок, коли факторизація виконується за відношенням еквівалентності [2].

Нехай на множині A задано відношення еквівалентності D. Тоді її можна розбити на класи еквівалентних елементів. Справді, візьмемо довільний елемент $x_1 \in A$ й утворимо клас A_1, що складається з x_1 і всіх еквівалентних йому елементів. Потім оберемо елемент $x_2 \in A \backslash A_1$ (якщо такий знайдеться) й утворимо клас A_2, що складається з x_2 та всіх еквівалентних йому елементів. Продовжимо цей процес доти, поки не буде виконано умову $A \backslash (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) = \varnothing$, тобто поки не розглянемо всіх елементів. Таким способом отримаємо систему класів A_1, A_2, …, яка для нескінченної множини –може бути теж нескінченною, і кожен елемент множини A належатиме до певного класу, тобто

$$\bigcup_{i \in I} A_i = A,$$

де I – множина індексів класів. Множина класів $\{A_i\}$, $i \in I$, є розбиттям множини A: класи попарно не перетинаються; будь-які два елементи одного класу еквівалентні; будь-які два елементи різних класів не еквівалентні. Отже, за відношенням еквівалентності завжди можна побудувати фактор-відношення.

Наприклад, за відношенням подібності нескінченну множину трикутників можна розбити на нескінченну кількість класів, а множину натуральних чисел N за відношенням «мати спільну остачу від ділення на 3» – на три класи: $A_1 = \{3, 6, 9, ...\}$, $A_2 = \{1, 4, 7, ...\}$, $A_3 = \{2, 5, 8, ...\}$.

Властивості факторизованих відношень

Розглянемо питання про збереження властивостей первісних відношень у разі їх факторизації за довільною еквівалентністю.

Властивість рефлексивності зберігається в разі факторизації.

Доведення. Нехай P – рефлексивне відношення з носієм A, D – відношення еквівалентності, Ai – довільний клас еквівалентності за відношенням D. Оскільки $Ai \neq \emptyset$, то знайдеться хоча б один елемент $x \in Ai$. Унаслідок рефлексивності відношення P справедливе твердження xPx, і за означенням фактор-відношення $A_i P_D A_i$.

Властивість симетричності зберігається в разі факторизації.

Це твердження можна довести аналогічно до попереднього. Що стосується властивості транзитивності, то, узагалі кажучи, вона не зберігається в разі факторизації. Необхідні та достатні умови її збереження дають наступні твердження.

Достатня умова збереження транзитивності фактор-відношення. Властивість транзитивності зберігається в разі факторизації транзитивного відношення за відношенням еквівалентності, що міститься в первісному відношенні.

Необхідна та достатня умова транзитивності відношення P_D в разі факторизації довільного бінарного відношення P за довільною еквівалентністю D, що мають спільний носій A, є виконання умови

$$P \circ D \circ P \subset D \circ P \circ D.$$

Властивість лінійності зберігається в разі факторизації. Це твердження можна перевірити безпосередньо.

Факторизація відношення квазіпорядку за його симетричною складовою є відношенням порядку.

З цього твердження випливає, що в разі факторизації квазіпорядку за симетричною складовою зберігається лінійність.

Наприклад, розглянемо відношення

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

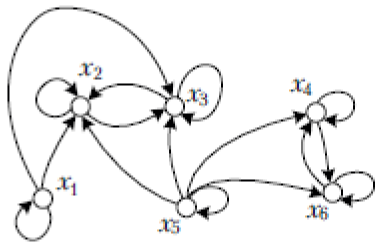


Рис. 3. Граф відношення P

Неважко перевірити, що $P^2 = P$, а тому транзитивне замикання $P = P \cup P_2 \cup P_3 \cup ... \cup P_6 = P$, тобто відношення P транзитивне. (Для знаходження P^n, використовуємо наступне співвідношення: $P^n = P^{n-1} \circ P$.) Оскільки воно ще й рефлексивне, то є квазіпорядком. Виділимо його симетричну складову:

$$D = P \cap P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Відношення D – еквівалентність, а тому розбиває множину-носія $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ на чотири класи $A_1 = \{x_1\}$, $A_2 = \{x_2, x_3\}$, $A_3 = \{x_4, x_6\}$, $A_4 = \{x_5\}$. Факторизуємо відношення P за відношенням D. Носій фактор-відношення P_D – множина $A_D = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$. На рис. 4 показано граф відношення P з класами еквівалентності за відношенням D.

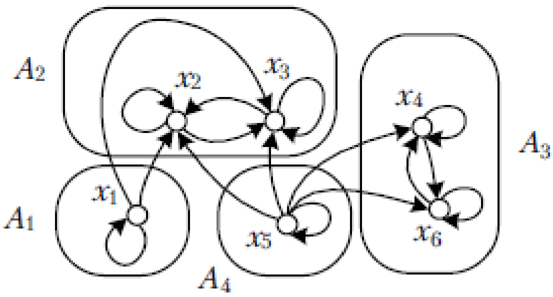
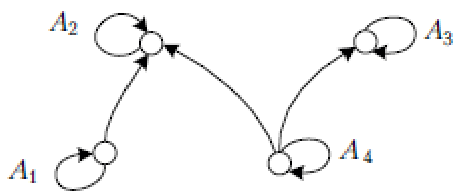


Рис. 4. Граф відношення P з класами еквівалентності за відношенням D.

Матриця відношення P_D має вигляд та граф:

$$P_D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



Відношення P_D — рефлексивне, транзитивне та антисиметричне, тобто є порядком.

Розглянемо результати факторизації довільного відношення P за його відношенням взаємної досяжності $\overleftrightarrow{P}$. Оскільки $\overleftrightarrow{P}$ – еквівалентність, класи якої є контурами в графі $G(P)$, то граф $G(P_{\overleftrightarrow{P}})$ факторизованого відношення $P_{\overleftrightarrow{P}}$ не має контурів. Контури, що були в графі $G(P)$, «стягнулись» у вершини графа $G(P_{\overleftrightarrow{P}})$. Про це йдеться в наступному твердженні.

Факторизація довільного відношення *P* за його відношенням взаємної досяжності $\overleftrightarrow{P}$ дає ациклічне фактор-відношення.

Із цього твердження випливає наступне важливе твердження

Якщо *P* – лінійне відношення з носієм *A*, то фактор-відношення , $P_{\overleftrightarrow{P}}$ отримане з *P* шляхом факторизації його за відношенням взаємної досяжності, є лінійним відношенням порядку з носієм $A_{\overleftrightarrow{P}}$.

Отже, факторизація довільного відношення за відношенням взаємної досяжності дає фактор-відношення без контурів, тобто в процесі такої факторизації відбувається «стягування» контурів первісного бінарного відношення [3]. Факторизація – це, по суті, агрегування системи переваг децидента, що дає змогу досліджувати загальні властивості системи переваг і корегувати отримане відношення.

ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ:

1. Опрацювати і засвоїти матеріал наведений в теоретичних відомостях.
2. Отримати від викладача матрицю відношення для роботи наприклад:

$$B(P)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

варіанти утворюються шляхом циклічного зсуву елементів матриці вліво, кількість зсувів рівна порядковому номеру студента мінус 1 у журналі.

3. Для отриманого відношення намалювати відповідний граф.
4. Виконати факторизацію отриманого відношення за відношенням взаємної досяжності для цього:
   a. Знайти транзитивне замикання отриманого відношення: $\hat{P} = P \cup P^2 \cup \ldots \cup P^n$, *n*– визначається, як найменший порядок композиції за котрого повторюється матриця відношення;
   b. Знайти відношення досяжності: $\widetilde{P} = E \cup \hat{P}$;
   c. Знайти відношення взаємної досяжності: $\vec{P} = \widetilde{P} \cap \widetilde{P}^{-1}$.
5. Намалювати граф факторизованого відношення.
6. Написати програму, котра реалізує операції зазначенні у пункті 4, в звіті навести копії екранів з результатами роботи програми та лістинг основної (виконавчої) частини написаної програми.
7. Зробити висновки.

ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Катренко А. В. Теорія прийняття рішень : підручник з грифом МОН / А. В. Катренко, В. В. Пасічник, В. П. Пасько — К. : Видавнича група BHV, 2009. – 448 с.
2. Розен В. В. Цель – оптимальность – решение (математические модели принятия оптимальных решений). / В. В. Розен – М.: Радио и связь, 1982.
3. Шрейдер Ю. А. Равенство, сходство, порядок /Ю. А. Шрейдер –М.: Наука, 1971.