Лекція II. Бінарні відношення

§1. Множини. Операції над множинами.

1. об'єднання $\cup$ „або" сума
2. перетин $\cap$ „і" добуток
3. різниця $\setminus$ „і"
4. прямий добуток $\times$ „і"
5. доповнення

§2. Означення бінарного відношення

§3. Способи задання бінарних відношень

1. за допомогою матриці (Пр. 1.)
2. — " — графа
   Приклад 1. про здачу іспитів
   Приклад 2 „$\leq$"
3. за допомогою перетинів
   – верхній пр.
   – нижній

§4. Елементарні типи бінарних відношень

1. порожнє
2. повне ; властивості
3. діагональне
4. антидіагональне

§5. Основні операції над бінарними відношеннями

13/09

1. обернене
2. доповнення
3. перетин
4. об'єднання
   Пр. 1; Пр. 2 ; Пр. 3
5. добуток
   Приклад 4
6. різниця (приклад 5) 7. симетрична різниця

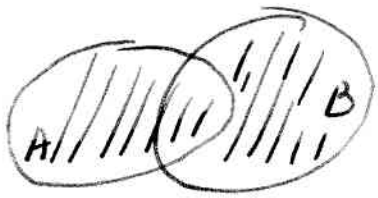
1. Множини. Операції над множинами.

позначення множини: $A = \{x\}$

М - множина: $\{x \in M : P(x)\}$

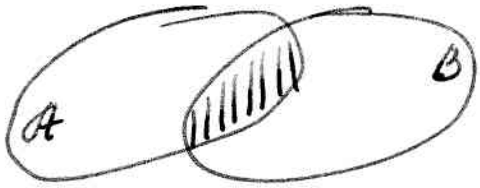
<u>об'єднання:</u>

$$A \cup B = \{x : (x \in A) \underset{\text{„або"}}{\vee} (x \in B)\}$$



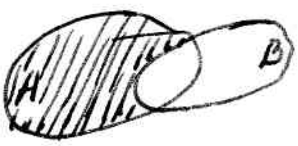
<u>перетин:</u>

$$A \cap B = \{x : (x \in A) \underset{\text{„і"}}{\wedge} (x \in B)\}$$



<u>різниця:</u>

$$A \setminus B = \{x : (x \in A) \underset{\text{„і"}}{\wedge} (x \notin B)\}$$



$A \setminus A = \emptyset$

прямий добуток:

X, Y - довільні множини

$X = \{x\}$; $Y = \{y\}$

множина:

$X \times Y = \{(x;y) : (x \in X) \wedge (y \in Y)\}$

утворена всіма впорядкованими парами $(x;y)$, перший член якої елемент з X, другий елемент з Y.

$X \times Y \neq Y \times X$

$(1;0)$ $(0;1)$ - різні точки площини

доповнення до універсальної множини

$\overline{A} = \{x : (x \in U), x \notin A\}$

доповнення множини A до універсальної.

§2. Означення бінарного відношення

Бінарним відношенням, визначеним на базисних множинах $A = \{a\}$, $B = \{b\}$ є довільна підмножина прямого (декартового) добутку цих множин.

Елементи $a \in A$ та $b \in B$ утв. бінарне відношення aRb або $(a, b) \in R$.

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 & (x_i, x_j) \in R \\ 0 & (x_i, x_j) \in R \end{cases}$$

Якщо базисні множини співпадають, то бінарне відношення є однорідним.

§3. Способи задання бінарних відношень

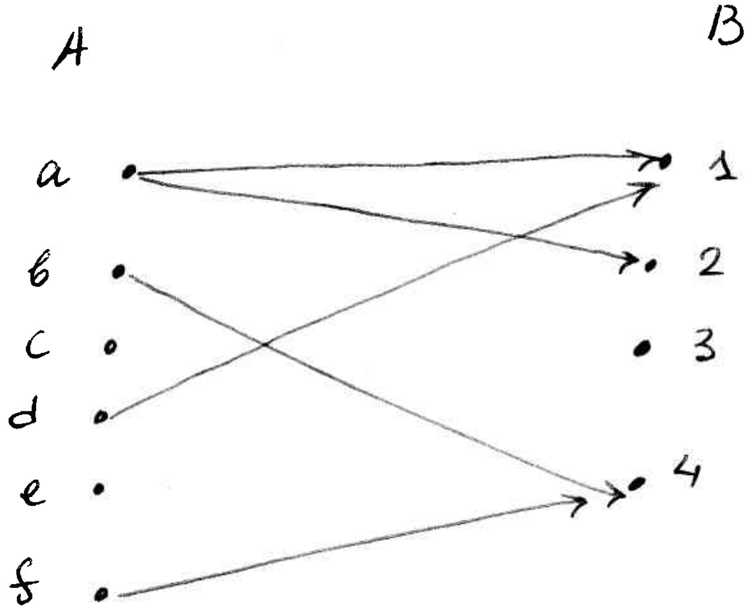
1. задання відношень за допомогою матриці.

бінарне відношення: $R = \{(a, 1); (a, 2); (b, 4); (d, 1); (f, 4)\}$, задане на множинах $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ та $B = \{1, 2, 3, 4\}$.

$$M(R)\quad R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

елементам множини A ставляться у відповідність рядки; елементам множини B - стовбці. Якщо пара $(a, b) \in R$; тоді пишеться „1", якщо не має такої пари в R, тоді нуль „0".

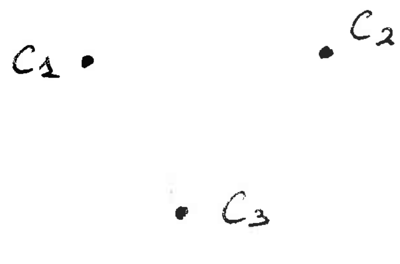
2. Задання відношення за допомогою графа.



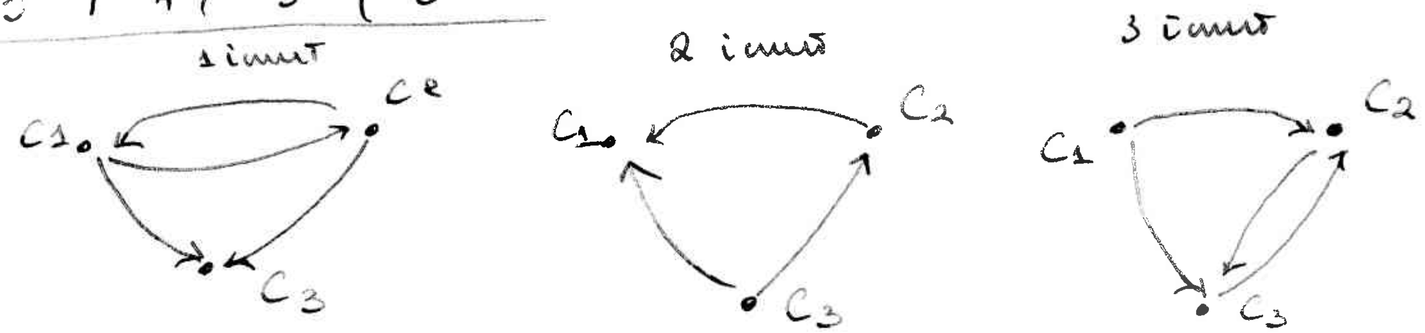
„•" - вершини графа

граф - геометричне відображення бінарного відношення.

Приклад. Три абітурієнти $C1$; $C2$; $C3$ складали 3 іспити. Потрібно порівняти успішність студентів.



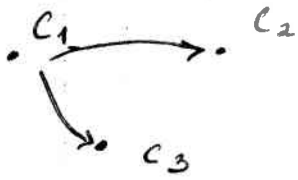
	1 іс.	2 іс.	3 іспит
C_1	5	3	4
C_2	5	4	3
$C3$	4	5	3



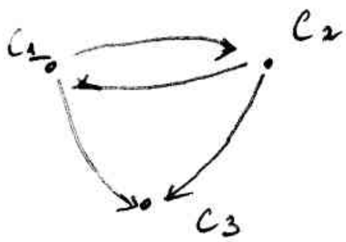
	1 іст.	2 іст.	3 іст.
C_1	5	5	4
C_2	5	3	3
C_3	4	4	3

не порівняні.

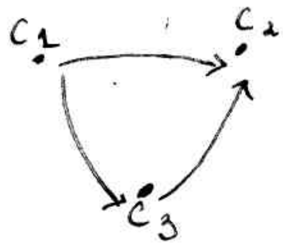
$\Rightarrow$



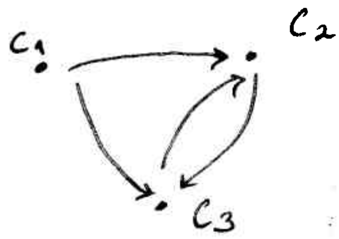
1 іст.



2 іст.



3 іст.



Приклад.

бінарне відношення R „≤"

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$\boxed{x \le y}$

$R: \quad 5 \times 5$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Задання відношень за допомогою перерізів: ~~перетинів~~

$A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$

Нехай бінарне відношення:

$x R y$, де „x" дільник „y".

Тоді верхній розріз (перетин)

$R^+(1) = \{1\}$

$R^+(2) = \{1; 2\}$

$R^+(5) = \{1; 5\}$

$R^+(3) = \{1; 3\}$

$R^+(4) = \{1; 2; 4\}$

$R^+(9) = \{1; 3; 9\}$

нижній розріз (перетин)

$R^-(1) = \{1, \dots, 10\}$

$R^-(2) = \{2; 4; 6; 8; 10\}$

$R^-(3) = \{3; 6; 9\}$

$R^-(4) = \{4; 8\}$

верхній перетин:

$R^+(x) = \{y \in A : (y, x) \in R\}$ множина всіх таких елементів y, що перебувають у відношенні R з фіксованим елементом x: (yRx)

нижній перетин:

$R^-(x) = \{y \in A : (x; y) \in R\}$

множина всіх таких елементів y, з якими фіксований елемент x перебуває у відношенні R: (xRy)

§. 4 елементарні типи бінарних відношень

1. порожнє:

$R = \emptyset : \{ \nexists (x, y) \in R \}$ якщо воно не виконується для жодної пари.

$R = \{(x, y) : \in A \times B\}$

Властивості:
таке бінарне відношення:
a). якщо у матр. вигляді, що це $\hat{O}$;
в). якщо граф: то є вершини, без дуг.
c). $R^+(x) = R^-(x) = \emptyset \quad \forall x \in A$.

2. повне:

$R = U : \{ \forall (x, y) \in A \times B \}$
якщо воно виконується для всіх пар.

a). у матр. вигляді, це матриця з одиничок.
в). у графі дуги з'єднують будь-яку пару вершин.
c). $R^+(x) = R^-(x) = A$.

3. діагональне:

$R = E : \{ \forall (x, y) : \in A \times B \wedge x = y \}$ для всіх „і" пар з принципу
якщо воно виконується для всіх

$R = x E y$, причому x та y це ті самі значення

a) матриця одинична
в) тільки петлі при вершинах

. антидіагональне.

$R = \overline{E} = E^{-1} : \{ \forall (x,y) \in A \times B$ „і“ $x \neq y \}$

а) матр. вигляд: $r_{ij}(E^{-1}) = \begin{cases} 0, & i = j \\ 1, & i \neq j \end{cases}$

б) в графі є дуги тільки для $i \neq j$
петель при вершинах немає.

§. 5. Основні операції над бінарними відношеннями.

1. $\boxed{\text{обернене}}$ відношення до даного.

$R^{-1} = \{ (y,x) \mid (x,y) \in R \}$ визначене

на множинах B, A: $B \times A$.

причому, має виконуватись умова:

$$x R^{-1} y \iff y R x$$

R^{-1}: то транспонована матриця

$$r_{ij}(R^{-1}) = r_{ji}(R)$$

(рядки стають стовбцями.

наприклад: R - бінарне відношення „$\geq$“,
тоді $R^{-1} \to$ „$\leq$“ на множині дійсних
чисел.

слайд 6

бінарне відношення $\boxed{\text{доповнення}}$ до даного

$$\overline{R} = \{(x,y) \in A \times B \mid (x,y) \notin R\}$$

коли воно побудує тільки ті пари елементів, для яких не виконується відношення R.

$$\overline{R} = A \times B \setminus R.$$

різниця множин

приклад 4

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R \cup \overline{R} = A \times B$$

повний граф

$$\overline{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R \cup \overline{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R \cap \overline{R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R \cap \overline{R} = \varnothing$$

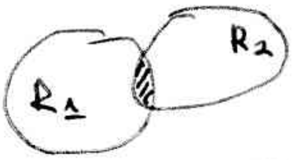
а) якщо бінарне відношення R задане матрицею:

$$\boxed{r_{ij}(\overline{R}) = 1 - r_{ij}(R)}$$

б) у графі $G(\overline{R})$ наявні ті і тільки ті дуги, що відсутні у графі $G(R)$.

3. $\boxed{\text{Перетин}}$ двох відношень

$R_1 \cap R_2$



$$\boxed{r_{ij}(R_1 \cap R_2) = \min \quad r_{ij}(R_1) \underset{\text{"і"}}{\wedge} r_{ij}(R_2)}$$

$$R_1 \cap R_2 = \{(x,y) \in A \times B \mid (x,y) \in R_1 \wedge (x,y) \in R_2\}$$

4. $\boxed{\text{Об'єднання}}$ двох відношень:

$R_1 \cup R_2$

$$r_{ij}(R_1 \cup R_2) = \underline{\max} \quad r_{ij}(R_1) \underset{\text{"або"}}{\vee} r_{ij}(R_2)$$

$R_1 \cup R_2 = \{(x,y) \in A \times B : (x,y) \in R_1 \underset{\text{„або"}}{\vee} (x,y) \in R_2\}$

Приклад 1:

Нехай відношення R на множині $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ задане матрицею:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

R^{-1} – ? $\quad \bar{R}$ – ?

$$R^{-1} = R^{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Приклад 2:

$A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ $\qquad A = \{a\}$

$B = \{23, 24, 25, 26, 27\}$ $\qquad B = \{b\}$

$C = \{a, b, c, d, e, f\}$

Бінарне відношення R визначене на множинах A та B:

$R = \{(x,y) : x \in A;\ y = \frac{b}{x}\}$ без ост.

$x R y$

$R = \{(x,y) \mid x \in A, y \in B\ (x, \frac{y}{x})\}$

зі своєю задачі! щоб вішились без оцінки!

$x R y$:

$y : x$

$S = \{ (23; f); (24; b); (25; d); (26; d); (27; a);$
$(27; e) \}$; $T = R \times S$.

~~Птипакиурозя~~

$T^{-1} \{a, c, d, f\}$ - ?

Розв'язок

будуємо бінарне відношення :

$R \neq \{ \cancel{(24; 2)}; \cancel{(26, 2)}; (24$

~~діа~~ $A =$

$xRy =$

$R = A \times B = $

$= \{ (2, 24); (2, 26); (3, 24); (3, 27); (4, 24); (5, 25); (6, 24); (8, 24); (9, 27) \}$

$T = \cancel{\ } R \times S = \{ (2, b); (2, d); (3, b); (3, a); (3, e); (4, b); (5, d); (6, b); (8, b); (9, a); (9, e) \}$.

$T^{-1} = \{ (b, 2); (d, 2); (b, 3) \dots \}$

$\cancel{T^{-1} \{a, c, d, f\}} =$

слайд 4

не перетинаються, r_{11}

приклад 1 r_{11}

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$R_1 \cap R_2$ - ?

перетин (і)

добуток

$R_1 \vee R_2$ - ?

об'єднання (або)

сума

$$R_1 \cap R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

„і"

перетин

мінімальний елемент

„і"

як булевої алгебри

$1 \wedge 0 = 0$

$2 \wedge 1 = 0$

$1 \wedge 1 = 1$

$0 \wedge 0 = 0$

$$R_1 \vee R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

„або"

об'єднання

максимальний елемент

„або"

R_1 r_{11} R_2 r_{11}

1 або 0 = 1

0 або 1 = 1

0 або 0 = 0

1 або 1 = 1

 слайд 7

5. $\boxed{\text{Добуток}}$ двох відношень

$$R_1 \cdot R_2 = \{ (x, y) \in A \times B : \exists\ z \in A,$$

відношення, що утворює усі пари $\{(x,y)\}$ для яких існує

причому $(x, z) \in R_1 \ \wedge \ (z, y) \in R_2 \}$

„і"

Приклад 5 на множені задані відношення:

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$R_1 \cdot R_2 - ?$

$$r_{ij}(R_1 \cdot R_2) = \max_{k=\overline{1,n}} \min \{ r_{ik}(R_1), r_{kj}(R_2) \}$$

$$R_1 \cdot R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

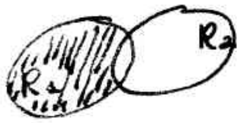
min

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

max

$\boxed{\text{Різниця}}$ відношень слайд 5

$$R_1 \setminus R_2 = \{ (x, y) \in A \times B : (x, y) \in R_1 \underset{\text{„і"}}{\wedge} (x, y) \notin R_2 \}$$



$$R_1 \setminus R_2 = r_{ij}(R_1 \setminus R_2) = r_{ij}(R_1) \underset{\text{„і"}}{\wedge} (\hat{1} - r_{ij}(R_2))$$

Приклад. 2

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_1 \setminus R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R2 \setminus R1 = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

1. $\boxed{\text{Симетрична різниця}}$ слайд 5(2)

$$R_1 \Delta R_2 = R_1 \setminus R_2 \cup R_2 \setminus R_1$$

об'єднання — або

$$r_{ij}(R_1 \Delta R_2) =$$

$$= \{r_{ij}(R_1) \underset{\text{"і"}}{\wedge} (1 - r_{ij}(R_2))\} \underset{\text{"або"}}{\vee} \{r_{ij}(R_2) \underset{\text{"і"}}{\wedge} (1 - r_{ij}(R_1))\}$$

Приклад 3

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

r_{11}: 1 і 1-0 = $\boxed{1 \text{ і } 1 = 1}$ $\boxed{1 \text{ або } 0 = 1}$
або 0 і 1·1 = $\boxed{0 \text{ і } 0 = 0}$

булева алгебра таблиця істинності

$R_1 \Delta R_2 =$

$r_{11} = 1$

$r_{12} = 0$ — r_{12}: 0 і 1-0 = 0 і 1 = 0; або 0 і 1-0 = 0 і 1 = 0 $\boxed{0 \text{ або } 0 = 0}$

$r_{13} = 0$ — r_{13}: 1 і 1-1 = 1 і 0 = 0; або 1 і 1-1 = 1 і 0 = 0; 0 або 0 = 0

$r_{21} = 1$ — 0 і 1-1 = $\boxed{0 \text{ і } 0 = 0}$; r_{21}: або 1 і 1-0 = $\boxed{1 \text{ і } 1 = 1}$ $\boxed{0 \text{ або } 1 = 1}$

$r_{31} =$ — r_{31}: 1 і 1-0 = 1 і 1 = 1; або 0 і 1·1 = 0 і 0 = 0 $\boxed{1 \text{ або } 0 = 1}$

$$R_1 \Delta R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \ldots \end{pmatrix}$$

Властивості однорідних бінарних відношень

$R = \{(x, y) \in A \times A\}$ $A(x)$

1. **рефлексивне**

R рефлексивне, на множині A, якщо $x R x$ (що означає $\forall x \in A$ має місце $(x, x) \in R$)

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0 & i \neq 0 \end{cases}$$

„$\leq$" рефлексивне (бути не старшим)

„$>$" не рефлексивне (бути старшим)

2. **антирефлексивне**

R на множині наз. антирефл., якщо для жодного $x \in R$ $(x, x) \notin R$

$x R y$ не виконується $x \neq y$. $\forall x \in A$

$$r_{ij} = \begin{cases} 0, & i = j \\ 1, & i \neq j \end{cases}$$

„$<$" „$>$" — антирефлексивні

$A = \{\overline{1,6}\}$:

$R_1 = \{(1,1); (1,2); (2,2) ; (3,3) ; (4,4)\}$ — рефл. (по діагоналі $x = y$)!

3. симетричне

якщо:
$$xRy \Rightarrow yRx$$
$$R = R^{-1}$$

$r_{ij} = r_{ji}$ $\forall i, j$ (транспонована матриця

$R_1 = \{(1,1); (1,2); (2,1)\}$ $xRy = \begin{matrix}(1,1)(1,2) \\ (2,1)\ (2,2)\end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$

$R_2 = \{(1,1); (1,2); (1,4); (2,1); (2,2); (3,3); (4,1); (4,4)\}$

4. несиметричне

якщо з $xRy \Rightarrow$ не виконується yRx,

і $R^{-1} \cap R = \varnothing$

перетин

"і"

добуток

іншими словами з двох виразів xRy, yRx хоча б один не відповідає дійсності.

5. лінійне.

якщо $\forall$ $a \in A$, $b \in B$ хоча б одна з пар є елементом

6 транзитивне

7. антисиметричне

$a_{ij} \wedge a_{ji} = 0$, коли $i \neq j$

одночасно пари в бінарному відношенні (x,y) та (y,x) немає.

...область визначення бінарного відношення:

$$\delta_R = \{ a \in A \mid \exists (b \in A) : (a, b) \in R \}$$

на множині $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$R = \{ (a, b) \mid a, b \in A$, причому $a = b + 3 \}$

за умови

$1+3$ $\in R$; $2+3=5 \in R$; $3+3=6 \in R$

$\delta_R = \{ 1 \quad 2 \quad 3 \}$

$4+3=7 \notin R$

ρ область значень бінарного відношення

$$\rho_R = \{ b \in A \mid \exists (a \in A) : (a, b) \in R \}$$

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\quad R = \{ (a, b) \mid a, b \in A : a = b + 2 \}$

$1 \in A$: не $\exists (a \in A)$ $a = 1+2=3 \Rightarrow 1$ не $\in$ обл. знач. $(3;1)$

$2 \in A$: не $\exists (a \in A)$ $a = 2+2=4 \in R \Rightarrow 2$ не $\in$ обл. знач. $(4;2)$

$3 \in A$: $\exists (a \in A)$ $a = 3+2=5 \in R$ $(5;3)$

$b = a - 2$

$4 \in A$ $\exists (a \in A)$ $a = 4+2=6 \in R$ $(6;4)$

$5 \in A$ $\exists$ $a \in A$ $a = 5+2 \notin R$ $(7;5)$

<u>Ізоморфізм</u>

$R_1: \quad A = \{x\}$; $R_2: \quad B = \{y\}$

$R_1: \quad R_1 \subseteq A \times A$; $R_2: \quad R_2 \subseteq B \times B$

Ізоморфні якщо існує таке взаємно однозначне відображення:

$\Psi: A \to B$, $\underline{x R_1 y}$ за умови $\Psi(x) R_2 \Psi(y)$,

де $x \in A$, $y \in A$;

$\Psi(x) \in B$ $\Psi(y) \in B$.

<u>Приклад.</u>

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad R_1 \subseteq A \times A \quad ; \quad A = \{x_1, x_2, x_3\}$$

$$R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad R_2 \subseteq B \times B \quad ; \quad B = \{y_1, y_2, y_3\}$$

Відобразимо взаємно однозначно:

$$\begin{matrix} x_1 \to y_2 \\ x_2 \to y_1 \\ x_3 \to y_3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} y_2 = \Psi(x_1) \\ y_1 = \Psi(x_2) \\ y_3 = \Psi(x_3) \end{matrix} \quad ; \quad \begin{matrix} x_1 = \Psi^{-1}(y_2) \\ x_2 = \Psi^{-1}(y_1) \\ x_3 = \Psi^{-1}(y_3) \end{matrix}$$