Лабораторна робота № 2

БІНАРНІ ВІДНОШЕННЯ ТА ОСНОВНІ ОПЕРАЦІЇ НАД НИМИ

Мета роботи:

Вивчити поняття бінарних відношень та операцій над ними.

Обладнання та програмне забезпечення:

– IBM сумісна персональна обчислювальна машина;

– програмне забезпечення: C++, Turbo Pascal.

Завдання до роботи:

Написавши програму для ПЕОМ, котра реалізую наступні функції:

– ввід бінарних відношень (БВ);

– відображення області визначення та області значення БВ;

– відображає результат основних операцій над БВ.

Теоретичні відомості

Поняття та способи означення бінарного відношення

Апарат бінарних відношень у теорії прийняття рішень є теоретичним підґрунтям для оцінювання переваг альтернатив шляхом попарних порівнянь. Такий підхід достатньо поширений, оскільки він дає змогу виявляти переваги децидента чи експертів «у чистому вигляді»: децидентові значно простіше порівняти дві альтернативи, ніж багато.

Відношення — це твердження, що відображає взаємний зв'язок між двома чи більшою кількістю об'єктів**.**

Наприклад: «Ганна – сестра Івана», «число 12 більше за число 10», «золото важче, ніж алюміній», «весна та зима – пори року». Ці твердження інформують нас про те, що об'єкти належать до одного класу («діти одного батька», «пори року»), або про певний порядок об'єктів у системі («більше», «важче»). У цих прикладах об'єкти й відношення мають конкретні назви, і після підстановки інших об'єктів у твердження відношення може бути правильним або ж утратить сенс.

Отже, необхідною передумовою для побудови відношення є описання множини об'єктів, на яких воно буде визначене, тобто множини-носія відношення. Нехай A – множина певних об'єктів (наприклад, можливих варіантів рішень). Множина всіх пар (x, y), $x \in A$, $y \in A$, є декартовим добутком множини A саму на себе, $A \times A$. **Декартовим**

добутком називають множину впорядкованих пар, у котрій перша компонента належить першій множині, а друга другій.

Приклад: нехай множина А це {зима, весна, літо, осінь}, тоді декартовим добутком буде множина, що місіть $16^{\underline{ть}}$ (4х4=16)елементів

$A\times A$={(зима, зима), (зима, весна), (зима, літо), (зима, осінь),

(весна, зима), (весна, весна), (весна, літо), (весна, осінь),

(літо, зима), (літо, весна), (літо, літо), (літо, осінь),

(осінь, зима), (осінь, весна), (осінь, літо), (осінь, осінь)}.

Бінарним відношенням на множині *A* називається підмножина *R* з елементів множини $A\times A$, тобто $R\subseteq A\times A$. Якщо пара знаходиться у відношенні *R*, то цей факт позначається як *xRy* або $(x, y) \in R$. Множина *A* називається носієм відношення *R*.
Відношення можна означити і для *n* об'єктів. У цьому разі говорять про *n*-арне відношення.

Нехай бінарне відношення *R* означено на скінченній *n*-елементній множині *A*. Пронумеруємо елементи цієї множини числами від 1 до *n*, і розглянемо квадратну матрицю *B* розміром $n\times n$, у якій *i*-й рядок та *i*-й стовпець відповідають *i*-му елементу множини *A*. Визначимо елементи матриці *B* залежно від виконання відношення:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } (x_i, x_j) \in R; \\ 0, & \text{якщо } (x_i, x_j) \notin R, \end{cases}$$

де $x_i\in A$, $x_j\in A$. Отже, відношення *R* на скінченній *n*-елементній множині *A* можна задати матрицею

$$B(R) = ||b_{ij}\,(R)||.$$

Оскільки елементи множини *A* можна перенумерувати довільним чином то існує *n*! різних нумерацій, отже відповідно існує *n*! матриць, що описують конкретне бінарне відношення. У подальшому для скорочення вживатимемо запис *R* замість *B*(*R*), якщо з контексту зрозуміло, що йдеться про матрицю.

Приклад: Нехай $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ – носій бінарного відношення «≤». Для цього відношення відповідна матриця має вигляд:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Областю визначення бінарного відношення *R* називається множина

$$\delta_R=\{a\in A \mid \exists(b\in A): (a, b)\in R\},$$

тобто до області визначення належать ті елементи множини-носія *A,* для яких знайдеться хоча б один елемент цієї множини, з яким вони перебувають у відношенні aRb.

Приклад: Нехай $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $R = \{(a, b) \mid a, b \in A, a = b + 3\}$. Тоді $\delta_R = \{1, 2, 3\}$.

Областю значення бінарного відношення *R* називається множина

$$\rho_R=\{b\in A \mid \exists(a\in A): (a,b)\in R\},$$

тобто до області значення належать ті елементи множини-носія, для яких знайдеться хоча б один елемент, який перебуває з ними у відношенні *R*.

Верхнім перетином $R^+(x)$ відношення *R* множиною-носієм *A* відносно елемента *x* називають множину

$$R^+(x) = \{y\in A \mid (y,x)\in R\}.$$

Нижнім перетином $R^-(x)$ відношення *R* множиною-носієм *A* відносно елемента *x* називають множину

$$R^-(x) = \{y\in A \mid (x, y)\in R\}.$$

У літературі зустрічаються також терміни «прообраз» та позначення $R^{-1}(x) = R^+(x)$ і «образ» для $R(x) = R^-(x)$.

Елементарні типи бінарних відношень

Розглянемо основні елементарні бінарні відношення: порожнє, повне, діагональне й антидіагональне.

Порожнім називається відношення *R* (позначають $\varnothing$), яке не виконується для жодної пари $(x, y) \in A\times A$, тобто

$$R=\varnothing:(\forall(x, y)\in A\times A)(\neg\exists(x, y)\in R),$$

де "$\neg$" – квантор «заперечення», а "$\exists$" – квантор «існування, хоча би одного» в результаті сполучення цих кванторів виходить: "$\neg\exists$" – не знайдеться жодного, у матриці *B* всі елементи нульові, граф *G* не має дуг, і для будь-якого елемента $x\in A$ $R^-(x) ==R^+(x) =\varnothing$.

Повним називається відношення (позначають U), що виконується для всіх пар $(x, y) \in A\times A$, тобто

$$R=U: (\forall(x, y) \in A\times A)((x, y)\in R),$$

у матриці B всі елементи дорівнюють 1, граф G повний, і для будь-якого елемента $x\in A$ $R^{-}(x)=R^{+}(x) = A$.

Діагональним називається відношення (позначають E), що виконується для однакових елементів, тобто

$$R=E: ((\forall(x, y)\in A\times A)\wedge(x = y))((x, y)\in R).$$

Для діагонального відношення матрицю $B(E) =\|b_{ij}(E)\|$ означено так:

$$b_{ij}(E)=\begin{cases}1, & якщо \quad i=j,\\ 0, & якщо \quad i\neq j,\end{cases}$$

у графі $G(E)$ є лише петлі, і $R^{+}(x) = R^{-}(x) = \{x\}$.

Антидіагональним називається відношення (позначають $\overline{E}$), яке виконується для всіх пар $(x, y)\in A\times A$, у яких $x\neq y$, тобто

$$R = \overline{E}: (\forall(x, y)\in A\times A)\wedge(x\neq y))((x, y)\in R).$$

Елементи матриці $B(\overline{E})$ означено наступним чином:

$$b_{ij}(\overline{E})=\begin{cases}0, & якщо \quad i=j,\\ 1, & якщо \quad i\neq j,\end{cases}$$

у графі $G(E)$ є всі дуги, крім петель, і $R^{-}(x) = R^{+}(x) = A\backslash\{x\}$.

Основні операції над бінарними відношеннями

Над бінарними відношеннями можна виконувати такі основні операції: перетин, об'єднання, знаходження різниці, симетричної різниці, доповнення, оберненого відношення, композиції, звуження, включення.

Розглянемо два відношення $P\subseteq A\times A$ та $Q\subseteq A\times A$ й означимо на них основні операції.

Перетином $P \cap Q$ відношень P та Q називається відношення, якому належать пари (x, y), спільні для відношень P та Q:

$$P\cap Q=\{(x, y)\in A\times A \mid (x, y)\in P)\wedge(x, y)\in Q\}.$$

Елементи матриці $B(n\times n)$: $b_{ij}(P\cap Q)=b_{ij}(P)\wedge b_{ij}(Q)$.

Об'єднанням $P \cup Q$ відношень P та Q називається відношення, яке утворюють пари, що входять до P чи Q, тобто

$$P \cup Q = \{(x, y) \in A \times A | (x, y) \in P) \vee (x, y) \in Q\}.$$

Елементи матриці $B(n \times n)$: $b_{ij}\left(P \cup Q\right) = b_{ij}\left(P\right) \vee b_{ij}\left(Q\right)$.

Приклад: Нехай відношення P та Q задано матрицями.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Тоді відношення $P \cap Q$ таке:

$$P \cap Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

елементи цієї матриці утворені шляхом конюкції ($\wedge -$ логічного «і»).

А відношення $P \cup Q$ таке:

$$P \cup Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

елементи цієї матриці утворені шляхом дизюкції ($\vee -$ логічного «або»).

Різницею $P \backslash Q$ відношень P та Q називається відношення, що складається з пар $(x,y) \in P$, які не входять до Q, тобто

$$P \backslash Q = \{(x, y) \in A \times A | (x, y) \in P) \wedge (x, y) \notin Q\},$$

Елементи матриці $B(n \times n)$: $b_{ij}\left(P \setminus Q\right) = b_{ij}\left(P\right) \wedge \left(1 - b_{ij}\left(Q\right)\right)$.

Для нашого прикладу

$$P \setminus Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

елементи цієї матриці утворені шляхом конюкції елемента першої матриці з інвертованим елементом другої матриці.

Симетричною різницею $P\Delta Q$ відношень P та Q називається відношення, яке складається з пар відношення $P\cup Q$, що не належать до $P \cap Q$, тобто

$$P\Delta Q=(P\cup Q)\backslash(P\cap Q)=(P\backslash Q)\cup(Q\backslash P).$$

Елементи матриці $B(n\times n)$: $b_{ij}(P\Delta Q)=\left(b_{ij}(P)\wedge\left(1-b_{ij}(Q)\right)\right)\vee\left(b_{ij}(Q)\wedge\left(1-b_{ij}(P)\right)\right).$

Для нашого прикладу

$$P\Delta Q=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&1&0&1\end{bmatrix}.$$

Доповненням $\overline{P}$ відношення P називається відношення, до складу якого входять пари $(x,y)\notin P$, тобто

$$\overline{P}=\{(x,y)\in A\times A|(x,y)\notin P\},\ \text{або}\ \overline{P}=(A\times A)\backslash P.$$

Відношення P та $\overline{P}$ утворюють розбиття множини $A\times A$, тобто $P\cup\overline{P}=A\times A$, $P\cap\overline{P}=\varnothing$.

Елементи матриці $B(n\times n)$: $b_{ij}\left(\overline{P}\right)=1-b_{ij}(P).$

Для нашого прикладу

$$\overline{P}=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&0&1\\0&1&0&0\\1&1&0&0\end{bmatrix}.$$

Оберненим до відношення $P\subseteq A\times A$ називається відношення P^{-1}, до складу якого пара (x, y) входить тоді й лише тоді, коли $(y, x)\in P$, тобто $xP^{-1}y\Leftrightarrow yPx$:

$$P^{-1}=\{(x,y)\in A\times A|(y,x)\in P\}.$$

$$P^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&0\\1&1&1&1\\0&0&1&1\end{bmatrix},$$

тобто матриця оберненого відношення P^{-1} дорівнює транспонованій матриці відношень P, тобто $[P^{-1}] = [P]^{\mathrm{T}}$.

Елементи матриці $B(n\times n)$: $b_{ij}\left(P^{-1}\right)=b_{ji}(P).$

Композицією $P \circ Q$ відношень P та Q називається відношення, яке утворюють усі пари $\{x,\ y\} \in A \times A$, для яких існує таке $z \in A$, що правдиві твердження $(x,\ z) \in P$ та $(z,\ y) \in Q$, тобто

$$P \circ Q = \{(x,\ y) \in A \times A \mid (\exists z \in A) : ((x,\ z) \in P) \wedge ((z,\ y) \in Q))\}.$$

Для нашого прикладу

$$P \circ Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

матриця композиції відношень, отримується шляхом множення матриць вихідних відношень, памятаючи, що для бінарних відношень, операції додавання відповідає дизюкція, а операції множення кон'юкція.

Елементи матриці $B(n \times n)$: $b_{ij}(P \circ Q) = \underset{k=\overline{1,n}}{\vee} \left(b_{ik}(P) \wedge b_{kj}(Q) \right)$.

Окремий випадок композиції – квадрат відношення $P^2 = P \circ P$. Аналогічно за індукцією можна означити $P^{\,n} = P^{\,n-1} \circ P$

ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ:

1. Опрацювати і засвоїти матеріал наведений в теоретичних відомостях.
2. Отримати від викладача множину для роботи, та відношення над нею. (Наприклад множиною можуть бути пори року: {зима, весна, літо, осінь}, а відношеннями – "не холодніше" (відношення *P*) та "так само" (відношення *Q*)).

№	множина	№	множина	№	множина	№	множина
1	{З, В, Л, О}	5	{В, З, Л, О}	9	{З, Л, В, О}	13	{З, В, О, Л}
2	{В, Л, О, З}	6	{З, Л, О, В}	10	{Л, В, О, З}	14	{В, О, Л, З}
3	{Л, О, З, В}	7	{Л, О, В, З}	11	{В, О, З, Л}	15	{О, Л, З, В}
4	{О, З, В, Л}	8	{О, В, З, Л}	12	{О, З, Л, В}	16	{Л, З, В, О}

номер варіанта відповідає порядковому номеру студента в журналі

3. Для отриманих відношень записати відповідні матриці.
4. Знайти область визначення та область значення пропонованих відношень.
5. Аналітично виконати основні операції над знайденими бінарними відношеннями, а зокрема: перетин, об’єднання, різниця, симетрична різниця, доповнення, композиція та знайти обернене відношення до відношення *P*. Отримані результати навести у звіті.
6. Написати програму котра реалізує операції зазначенні у пункті 5., в звіті навести копії екранів з результатами роботи програми, та лістинг основної (виконавчої) частини написаної програми.
7. Зробити висновки.

ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Катренко А. В. Теорія прийняття рішень : підручник з грифом МОН / А. В. Катренко, В. В. Пасічник, В. П. Пасько — К. : Видавнича група BHV, 2009. – 448 с.