§ Функції вибору.

$A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ множина скінченних альтернатив.

децидент, керуючись власним уявленням про кращу альтернативу для себе: для кожної підмножини $X \subseteq A$ обирає підмножину $Y \subseteq X$ альтернатив, які є кращими.

$C: X \to Y$ або $Y = C(X)$, $C(X) \subseteq X$

C - функція вибору є відображенням, що ставить у відповідність кожній X підмножину Y альтернатив, які обираються децидентом в цих умовах.

Кожному бінарному відношенню R з носієм A можна поставити у відповідність ф-ю вибору.

$$C_+(X)_R = \{x \in X \mid \forall y \in X : y \bar{R} x\}$$ множина мажорант на множині X (блокування)

$$C^+(X)_R = \{x \in X \mid \forall y \in X : x R y\}$$ множина максимумів (переваги)

$C_+(X)_R$ - нормальна ф-я вибору (~~для~~ породжена бінарним відношенням.)

не для будь-якої ф-ї вибору існує бінарне відношення

$A = \{x_1, x_2\} = \{$сир, ковбаса$\}$

$C(x_1) = C(x_2) = C(x_1, x_2) = \varnothing$ – „піст"

$C(x_1) = x_1$; $C(x_2) = \varnothing$ „вегетаріанець" $C(x_1, x_2) = x_1$

$C(x_1, x_2) = \{x_1, x_2\}$ студент

$C(x_1) = x_1$, $C(x_2) = x_2$ $C(x_1, x_2) = \varnothing$ „Буриданів віслюк"

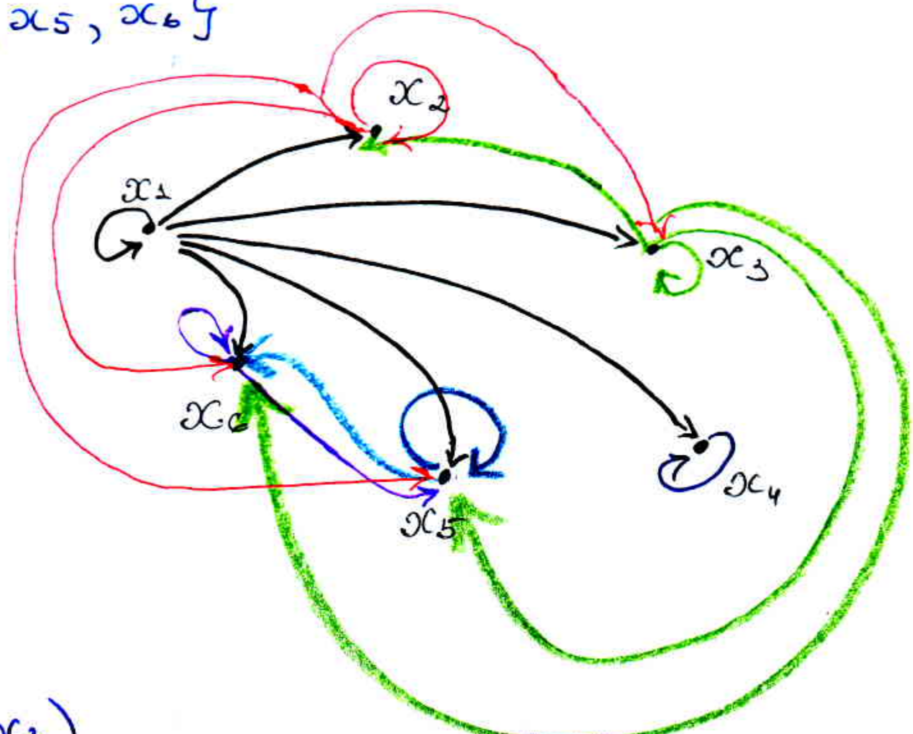
$C(x_1) = x_1$ $C(x_2) = x_2$

§ Транзитивне замикання графа.

граф бінарного відношення транзитивний: із існування дуг (x_i, x_j) та (x_j, x_k) $\Rightarrow$ має випливати існування дуги $(x_i; x_k)$

$A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



1. $E \subseteq R$ (усюди є петлі)

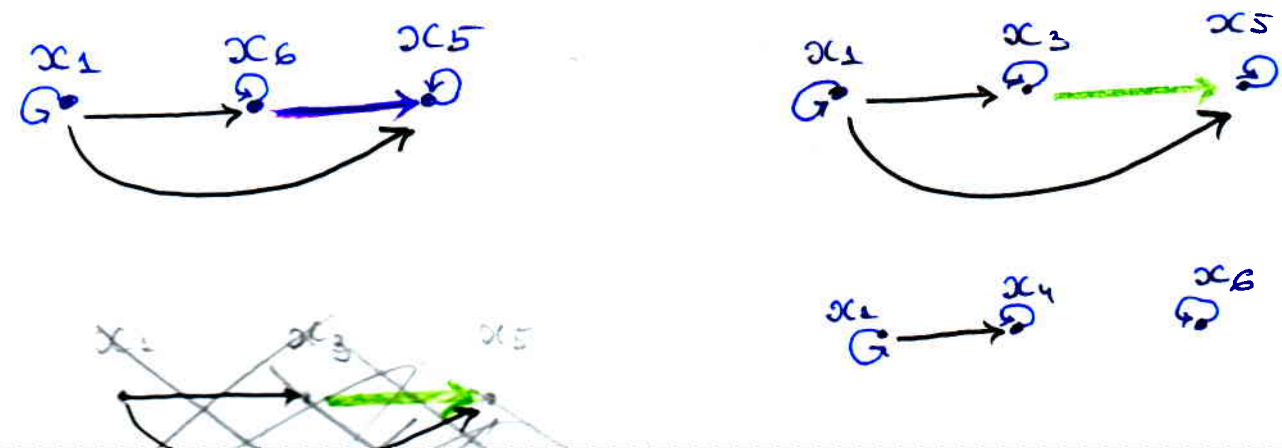
2. $(x_1 \to x_2)$; $(x_2 \to x_3)$

$\Downarrow$

$(x_1 \to x_3)$ таке має справджуватись ~~для кожної пари~~

$R^2 \subseteq R$

3. $(x_1 \to x_6)$ і $(x_6 \to x_5)$ $\Rightarrow$ (x_1, x_5)

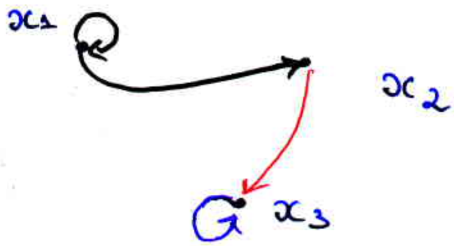


II. транзитивне замикання.

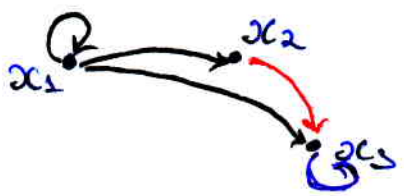
для графу G є такий граф, в якому потрібно додати найменше число дуг, щоб G став транзитивним (тобто якщо є (x_i, x_k) дуга і (x_k, x_j) дуга $\Rightarrow$ (x_i, x_j) дуга)

$R^2 \subseteq R$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$R^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$R^3 = R \circ R^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R^2$$

$$\hat{R} = R \cup R^2 \cup R^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

до початкового графу додати найменше число дуг, щоб почала виконуватись умова $R^2 \subseteq R$

$\Downarrow$

додати 1 дугу $(x_1 \to x_3)$.

(x_1, x_2) і (x_2, x_3)

$\Downarrow$

(x_1, x_3)

„+" ще додати 1 петлю тоді по діагоналі будуть одиниці.

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 & 100 & 111 \\ 000 & 000 & 001 \\ 000 & 000 & 001 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R^2 \subseteq R$$

$\mathcal{A} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R \circ R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R^3 = R^2 \circ R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

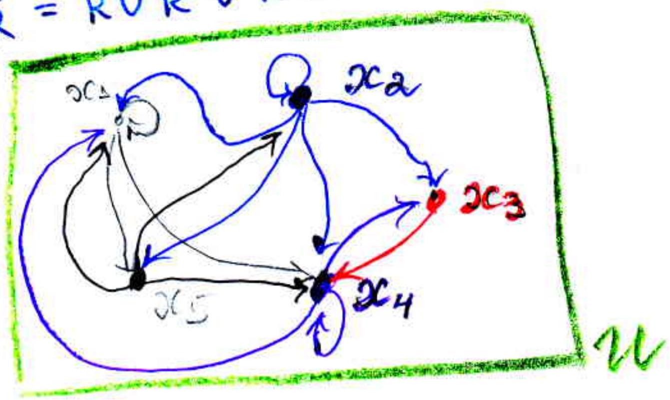
$$R^4 = R^3 \circ R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$R^5 = R^4 : R = \mathcal{U} \cdot R = \mathcal{U}$; $n = 5$.

$\hat{R} = R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4 \cup R^5 = \mathcal{U}$; $\tilde{R} = E \cup \hat{R} = \mathcal{U}$

$\overleftrightarrow{R} = \tilde{R} \cup \tilde{R}^{-1} = \mathcal{U}$.

R :

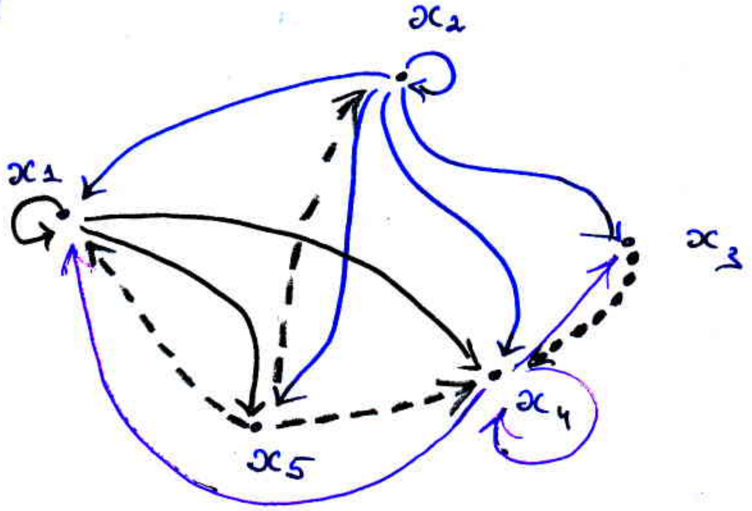


тут в R з x_2 виходить макс. число ліній.

$R_D \Rightarrow \mathcal{U}$.

$A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



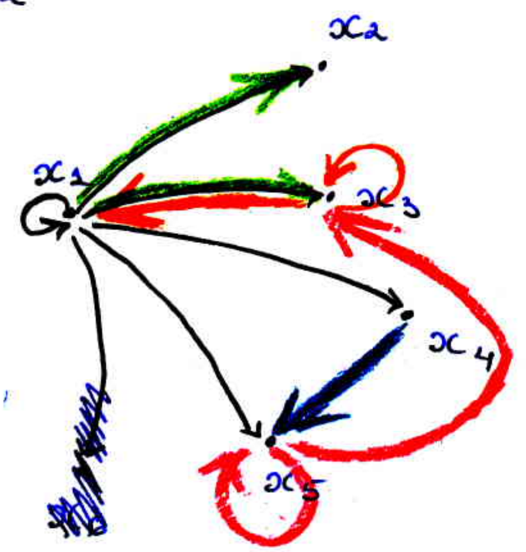
Після перетворень над R ; виникатимуть помилки, граф бінарного відношення буде змінюватись, будуть змінюватись зв'язки.

Завдання: щоб новоутворене $\hat{R}$; $\tilde{R}$; $\overleftrightarrow{R}$; чи бінарне відношення на виході (після помилок) не втратило початкових властивостей.

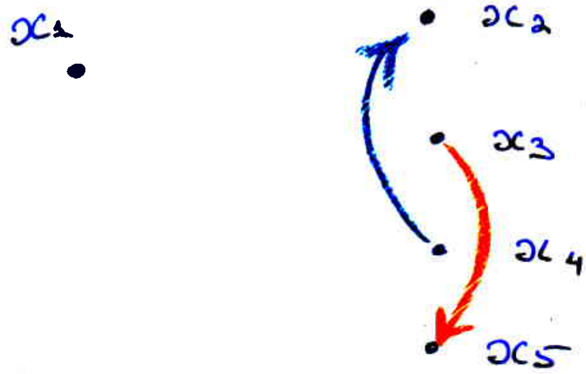
транзитивне замикання: якими елементами доповнити R, щоб виконувалась умова $R^2 \subseteq R$.

$$D(\omega) = \frac{V}{(2\pi)^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}\omega^{1/2}\,\Theta(\omega)$$

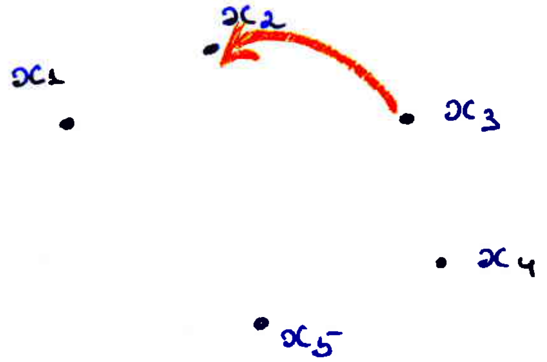
$$R^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cancel{1} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cancel{1} \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \end{pmatrix}$$



$$R^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

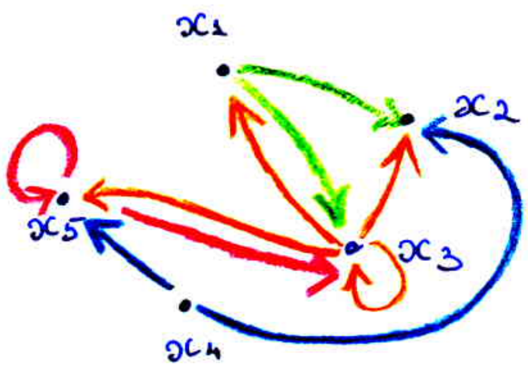


$$R^4 = R^3 \circ R = \mathcal{U}$$

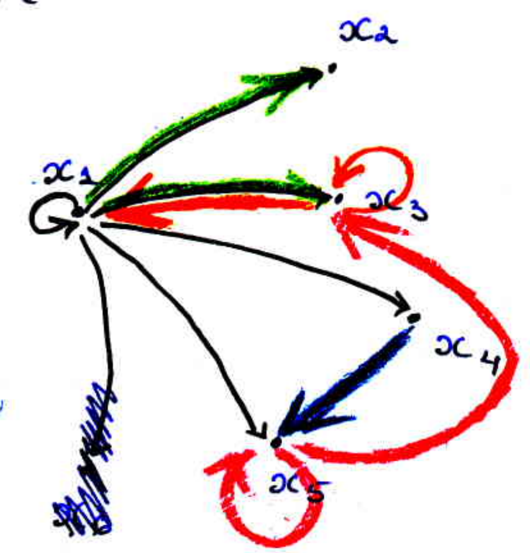


$$R^5 = R^4 \circ R = \mathcal{U} \circ R$$

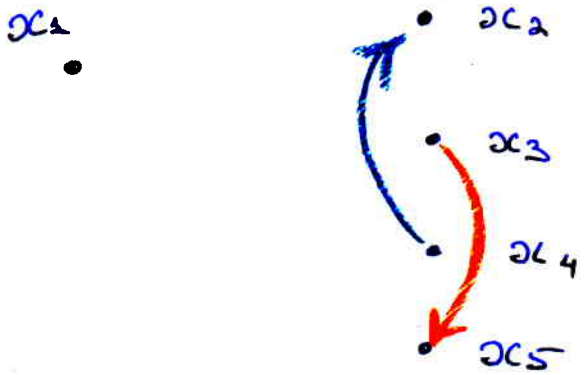
$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



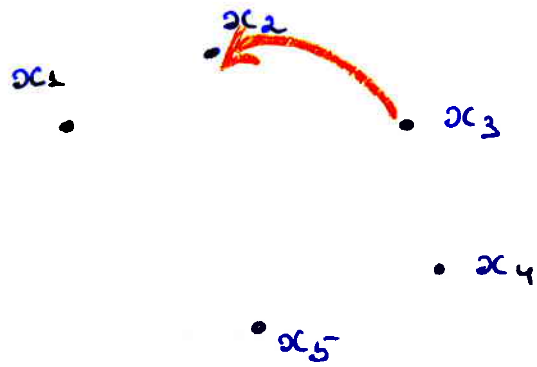
$$R^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cancel{1} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cancel{1} \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \end{pmatrix}$$



$$R^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

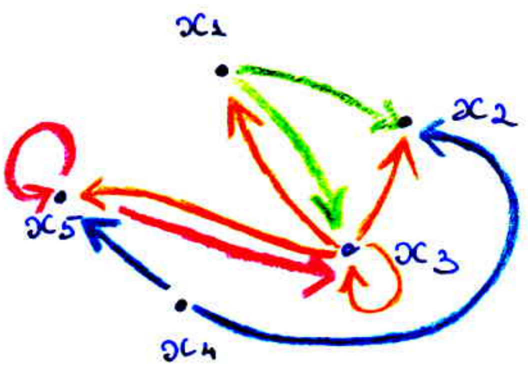


$$R^4 = R^3 \circ R = \mathcal{U}$$



$$R^5 = R^4 \circ R = \mathcal{U} \circ R$$

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R \circ R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R^3 = R^2 \circ R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} = \emptyset$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R \circ R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R^3 = R^2 \circ R = \underset{R^2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \circ \underset{R}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}} =$$

$$= \underset{R}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

$R^3 = R.$

$$\hat{R} = R \vee R^2 \vee R^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

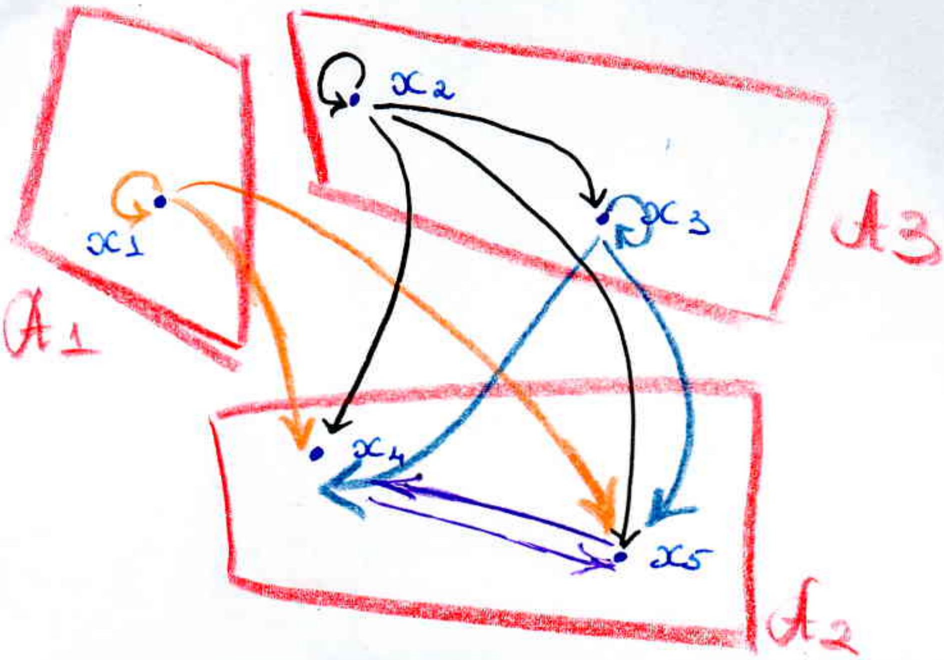
$$\tilde{R} = E \vee \hat{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overleftrightarrow{R} = \tilde{R} \vee \tilde{R}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$

$A_1 = \{x_1\}$; $A_2 = \{x_4, x_5\}$ $A_3 = \{x_2, x_3\}$



$$R_D = \begin{pmatrix} A_1A_1 & A_1A_2 & A_1A_3 \\ A_2A_1 & A_2A_2 & A_2A_3 \\ A_3A_1 & A_3A_2 & A_3A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

x_5 i x_4 powiązani.