– 0 –

R:

$A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$

6×6

$xRy = \{(x,y): A \times A \mid x \in A \land y \in A\}$

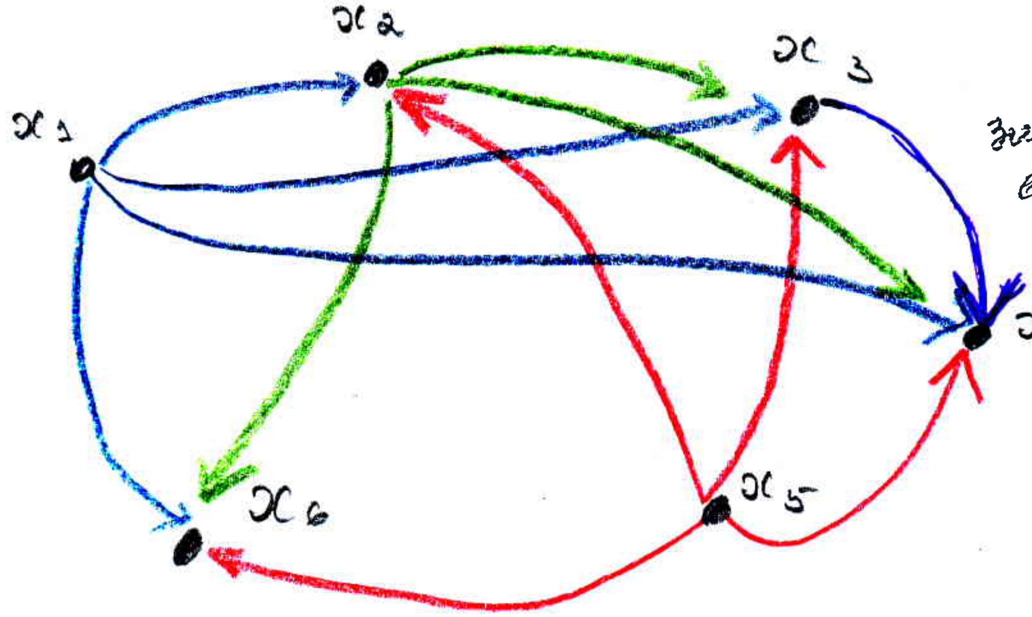
36 елем

тут може бути вказана умова: $\frac{y}{x}$ без остачі; y "сильніше" x; y "холодніше" x

=

$$\begin{array}{cccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & x_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_6 \end{array}$$

матричне представлення



транспортні задачі; потоки в мережі (електрики, водопровід); теорія кодування; теорія графів Л. Ейлер (сім мостів Кенігсберга) конечним мостом пройти лише раз; ввів поняття графа

граф відношення R

якщо б: $x_1 x_1 = 1$, тоді:

§ Властивості бінарних відношень

Лекція III.

Рефлексивне $E \subseteq R$; E – діагональне відношення, U – повне

Антирефлексивне $R \cap E = \emptyset$

Симетричне $R = R^{-1}$

Асиметричне $R \cap R^{-1} = \emptyset$

Антисиметричне $R \cap R^{-1} \subseteq E$

Транзитивне $R^2 \subseteq R$; Ациклічне $R^k \cap R^{-1} = \emptyset$

Зв'язне $(R \cup R^{-1}) \setminus E = U \setminus E$

Приклад (антисиметричність)

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

U – універсальна множина:
1. множина усіх точок площини
2. множина студентів ЛНУ ім. І. Франка
3. сукупність усіх результатів деякого експерименту

$R \cap R^{-1}$ – ?

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R \cap R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$R \cap R^{-1} \subseteq E \Rightarrow$ антисиметричне

Приклад (симетричне)

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$R = R^{-1}$ – симетричне

Приклад (антирефлективність, асиметричне)

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{R \cap E = \emptyset}$ – антирефлективне

$R \cap E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ – антирефлективне

$\boxed{R \cap R^{-1} = \emptyset}$ асиметричне

$R^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad R_1 \cap R^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

рефлексивне $(E \subseteq R)$: „бути подібним"
„бути не молодшим"
$(x, x) \in R, \ \forall x \in A$.
я подібна до себе
я не молодша за себе.

В матриці рефлексивного відношення по діагоналі одиниці!
всюди будь-які інші.

антирефлексивне $(R \cap E = \emptyset)$: „відрізнятися"
„бути молодшим"
„бути батьком"
я ~~не~~ є батьком собі ⇒ „0"
я молодший за себе ⇒ „0"
я відрізняюсь від себе ⇒ „0"

на головній діагоналі в матриці бінарного відношення мають бути нулі.

елементів $x = x$ не має „0"

„бути родичем" — симетричне

A родич B $\Rightarrow$ B родич A.

$(x,y) = (y,x)$ $\Rightarrow$ $R = R^{-1}$

„бути батьком" — асиметричне

A батько B, тоді B не батько A

$R \cap R^{-1} = \emptyset$

„бути сестрою" — ані симетричне і не є асиметричним

Марія сестра „1" Ольги $\Rightarrow$ О. „1" с. М;

Марія сестра Петра „1" $\not\Rightarrow$ П. с. Марії; „0"

Транзитивність $\boxed{R \circ R \subseteq R}$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R^2 = R \circ R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ — транзитивне.

„Ворог мого ворога — мій ворог" $\Rightarrow$ бути ворогом — не транзитивне

$R^3 = R \circ R^2$

$\boxed{R^k \subseteq R}$

Ациклічність $\boxed{R^k \cap R^{-1} = \emptyset, \ \forall k}$

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Вершини x та y зєднані; але дуга (y;x) немає

$$R^2 \cap R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

відношення „≤" на множині $\mathbb{N}$ — рефлексивне, антисиметричне, транзитивне.

„<" — " — " — антирефлексивне, антисиметричне, транзитивне

$\boxed{\text{...зв'язне} \quad RUR^{-1}\backslash E = U\backslash E}$

$U\backslash E \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

~~$U\backslash E = \; 0 \; 1$~~ $\qquad U\backslash E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$RUR^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$RUR^{-1} \neq U\backslash E$$

$\forall\, x, y \in A, \; x \neq y \qquad$ або $(x,y) \in R$ або $(y,x) \in R$

В матриці бінарного відношення хоча б один елемент дорівнює одиниці

$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$RUR^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \neq U\backslash E.$

1 математичний конгрес 1897р, Цюрих (Кантор) приховане мета:

доповідями: Кантор, Адамар, Гурвіц, В. Вольтерра, Пеано, Пуанкаре

застосув. теорії множин в мат. аналізі.

...основних теорії множин, ...канторові сходи.

тотожність вісьми квадратів

теорія чисел, т. ф. к. зм. $\sqrt{-1}$:

крива Пеано; аксіоми для N в символьній формі

...система р-нь для екосистеми "хижак - жертва".

3) Жуль Верн „Із Землі на Місяць"

...) працював над розвитком ...дерижаблів (використовуючи "He замість H_2)

приклад 6 слайд 13

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

визначити його властивості.

слайд 13

1. $E \subseteq R \Rightarrow$ рефлексивне $\quad \forall x \in A \ \exists (x, x) \in A$.

2. не симетричне, бо: $\boxed{R \neq R^{-1}}$: $R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ адже $\boxed{r_{12} \neq r_{21}}$

3. не буде асиметричним, не буде антисиметричним бо $a_{13} = a_{31}$

$a_{13} = 1$; $\quad a_{31} = 1$

4. транзитивність — не є транзитивним

$R^2 \subseteq R$.

$$R^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$1 \le 1 \quad 1 \le 0 \quad 1 \le 1$

не виконується

R_1 - симетричне бінарне відношення, тоді, коли $R_1 = R_1^{-1}$ - достатння умова.

необхідна умова: того, що відном. симетричне $R_1 \subseteq R_1^{-1}$

оце відношення, міститься в цьому

Нехай маємо „1" відношення R_1; а „2" R_1^{-1}. Довести, що вони рівні.

якщо $\forall$ $P; Q$ вик. умова $P \subseteq Q$ $\Rightarrow$ $P^{-1} \subseteq Q^{-1}$

$R_1^{-1} \subseteq (R_1^{-1})^{-1}$

$R_1^{-1} \subseteq R_1$ і за умовою $R_1 \subseteq R_1^{-1}$ одночасно $\Rightarrow$ $R_1 = R_1^{-1}$

...наслідки:

1) якщо R - асиметричне ($R \cap R^{-1} = \varnothing$) => то R антирефлексивне ($R \cap E = \varnothing$)

Довести самостійно.

2). якщо R_1, R_2 - симетричні ($R = R^{-1}$) то $R_1 \cup R_2$ і $R_1 \cap R_2$ теж симетричні.

Довести самостійно.

3). якщо R_1, R_2 - симетричні, то $R_1 \circ R_2$ теж симетричне, за умови: $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$

Довести самостійно

4). якщо R - транзитивне ($R^2 \subseteq R$), то R^{-1} є транзитивним.

Довести самостійно.

толерантність (байдужість)

- відношення не можна розрізнити (два об'єкти нерозрізнені за якоюсь ознакою)
- похибка накопичується при послідовних порівняннях об'єктів - нетранзитивне

еквівалентність

на множині множина векторів задана.
еквівалентними будуть ті з них, які мають однакові довжини.
еквівалентні фігури: мають рівні площі.

на екв. і тол. ґрунтується проблема порівняння декількох альтернатив за вект. критеріям.

усі типи бін. відношень використовуються
при фор. власт. бінарних відношень,
які в основному отримані експериментально
як рез-т опитування - децидента-експерта в різних ситуаціях приймається рішень.
тому дослідити транзитивність, ацикличність, лінійність
тощо і виявити суперечності в поведінці
так це дозволяє акорегувати і виявити суперечності
децидента та можливі аномальні ситуації приймаєтся рішень.

система переваг децидента:
отримується шляхом спостереження (опитування)
над децидентом, коли він обирає варіант дії з
множини можливих.
Тоді виникає проблема перевірки отриманого
бінарного відношення на наявність певних бажаних
властивостей.