структури „домінування - байдужість" та її [illegible]

відношення байдужості є симетричним і рефлексивним. Тому

1. $\boxed{R_s = R \cap R^{-1}}$ - відношення байдужості.

2. $\boxed{R_D = R \setminus R_S}$ - відношення домінування.

3. $\boxed{R^N = \overline{R^D \cup R^S \cup (R^D)^{-1}}}$ - відношення непорівнянності.

4. $\boxed{R^N \neq 0 \Rightarrow R}$ - не є лінійним.

Приклад.

$A = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_6\}$ - множина альтернатив, що пред'являються децидентy.

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R \in E$$

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ - віднош. байдужості:

$E \subseteq R_S$

$$R_S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow R_S = R_S^{-1} \Rightarrow$$ симетричне.

$$R^D = R \setminus R_s = R(r_{ij}) \cap (1 - R_s(r_{ij})) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ віднош. домінування

α - відношення домінування:

$(a, b) \in \alpha \Rightarrow$ „a" домінує над „b"

β - відношення байдужості:

$(a, b) \in \beta$ „a" та „b" байдужі.

Властивості:

1. α - асиметричне: $R \cap R^{-1} = \varnothing$
   той же шаховий турнір: a перемагає b „і" b перемагає a

   той же тур голосування:

2. β - симетричне: $(R = R^{-1})$
   нічия в шахах; a і b одного віку.

3. $\alpha \cap \beta = \varnothing$ жодна пара об'єктів не належить одночасно і до α і до β

4. кожен об'єкт байдужий до самого себе. $(E \subseteq R)$
   тобто є рефлексивним.

~~Означення~~: висновок:

Пара відношень $(\alpha; \beta)$ з множиною носієм A визначає на цій множині структуру „домінування - байдужість", якщо
α - асиметричне, β - симетричне і рефлексивне,
і $\alpha \cap \beta = \varnothing$.

017455

структура „домінування-байдужість" може бути лінійною (кожен зіграв з кожним).

при порівнянні альтернатив:
- децидент вирішує, що альтернатива x_i переважає x_j
- децидент не може розрізнити за якістю альтернативи x_i, x_j

§ Бінарні відношення та оптимальні альтернативи.

завдання децидента: знайти одну або кілька кращих альтернатив з числа наявних.

наприклад:1 отримати ~~…~~ максимальний дохід. тоді найкраща альтернатива : максимум за певним відношенням переваги R. Інше ми можемо побудувати множину „кращих" але між собою не порівняльних альтернатив

мажоранта:

$$A^{*}_{+}(R) = \{x \in A \mid \forall y \in A : y \bar{R} x\}$$

$\bar{R}$ доповнення до R

$x_1 R x_1$ +
$x_1 R x_2$ +
$x_1 R x_3$
$x_1 R x_4$ +

приклад 2: мінімізувати збитки
поняття мінімуму, міноранти.

міноранта:

$$A_{-}(R) = \{x \in A \mid \forall y \in A : x \bar{R} y\}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \bar{R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{Q} = 1 - r_{ij}(Q)$$

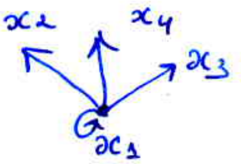
$$Q = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \qquad \bar{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

x_1, x_2:

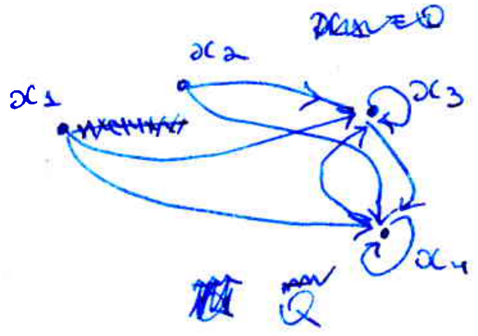
$x_1 x_1$
$x_1 x_2$
$x_2 x_1$
$x_2 x_2$

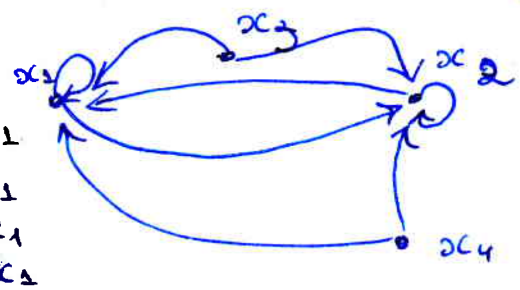
$x_1 Q x_2 = 0$
$x_2 Q x_1 = 0$

$x_1 \bar{Q} x_2 = 1$
$x_2 \bar{Q} x_1 = 1$



$x_1 \in A : \forall y \in A : y \bar{Q} x_1$





$x_1 \bar{Q} x_1$
$x_2 \bar{Q} x_1$
$x_3 \bar{Q} x_1$
$x_4 \bar{Q} x_1$

з „x_1" з'єднані $\bar{Q}$ x_2, x_4, x_3; x_1 стрілкою

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^+(R) = \{ x \in A \mid \forall y \in A \quad xRy \}$$

найкращій альт. відповідає поняття максимуму зг. певним відношенням переваги

$A(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$

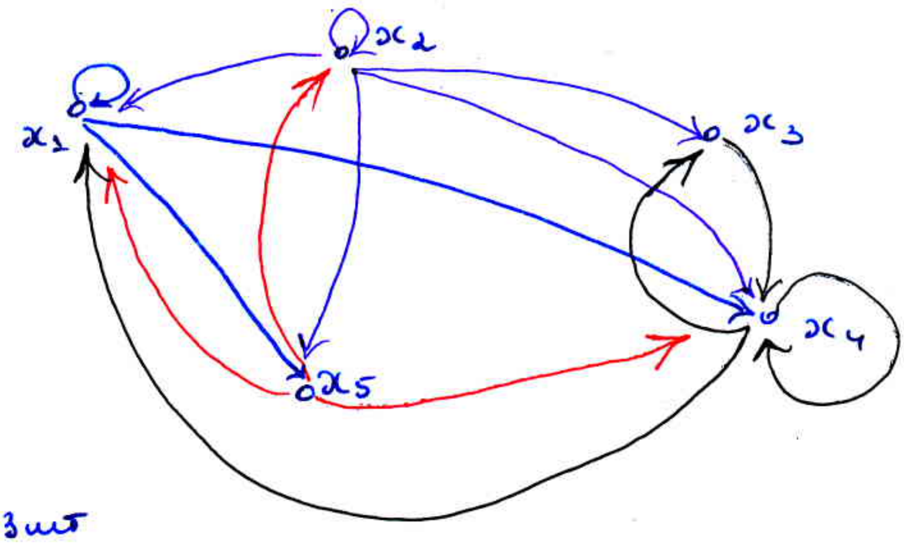
$x_1 R x_1$ +
$x_1 R x_2$ −
$x_1 R x_3$ −
$x_1 R x_4$ +
$x_1 R x_5$ +
~~x_1~~

$x_2 R x_1$ +
$x_2 R x_2$ +
$x_2 R x_3$ +
$x_2 R x_4$ +
$x_2 R x_5$ +

$x_3 R x_1$ −
$x_3 R x_2$ −
$x_3 R x_3$ −
$x_3 R x_4$ +
$x_3 R x_5$ −
~~x_3~~

$x_4 R x_1$ +
$x_4 R x_2$ −
$x_4 R x_3$ +
$x_4 R x_4$ +
$x_4 R x_5$ −

$x_5 R x_1$ +
$x_5 R x_2$ +
$x_5 R x_3$ −
$x_5 R x_4$ +
$x_5 R x_5$ −



максимальна кількість ліній, що виходить з вершини

з x_1 3 шт
з x_2 5 шт
з x_3 1 шт
з x_4 3 шт
з x_5 3 шт

$\Rightarrow$ x_2 - максимум.

$$A^+(R) = \{ x_2 \}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$A^-(Q)$ – ?

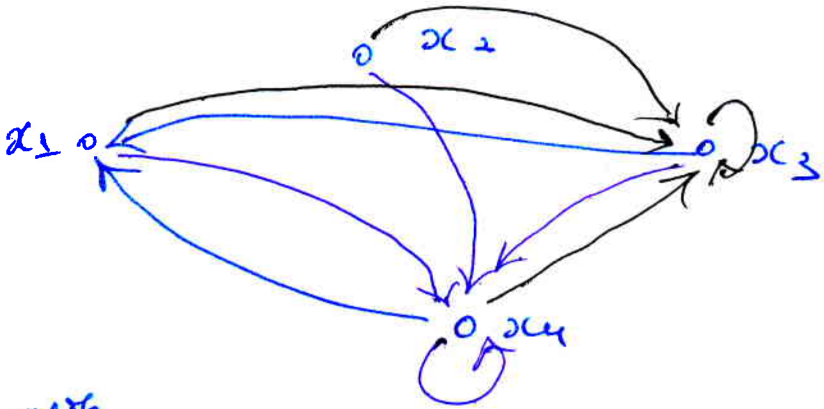
yQx, $x = const$

$x_1 Q x_1$
$x_2 Q x_1$
$x_3 Q x_1$
$x_4 Q x_1$

$x_1 Q x_2$
$x_2 Q x_2$
$x_3 Q x_2$
$x_4 Q x_2$

$x_1 Q x_3$
$x_2 Q x_3$
$x_3 Q x_3$
$x_4 Q x_3$

$x_1 Q x_4$
$x_2 Q x_4$
$x_3 Q x_4$
$x_4 Q x_4$



~~мінорант~~:

мінімуми: максимальне число ліній, що входять у вершину

входять

в x_4 4шт

в x_3 4шт.

$\{x_3, x_4\}$ – мінімуми.

$A_-(Q)$ мінорант: $x\bar{Q}y$, $x = const$

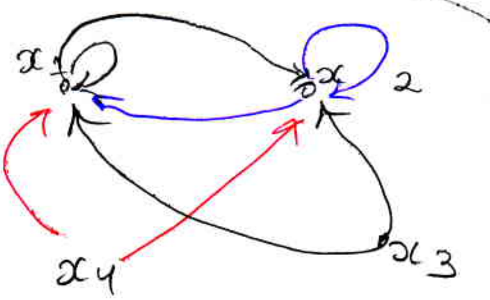
$x_1 Q x_i$

$x_2 Q x_i$

$x_3 Q x_i$

$x_4 Q x_i$

$$\bar{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



з кожної вершини $\boxed{\text{виходить}}$ однакова к-ть ліній

мінорант немає

$A_+(R) = \{x \in A \mid \forall y \in A : y \bar{R} x\}$ мажоранта

побудова множини „крайніх" але непорівнювальних між собою альтернатив.

$$\bar{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad r_{ij}(\bar{R}) = \{1 - r_{ij}(R)\}$$

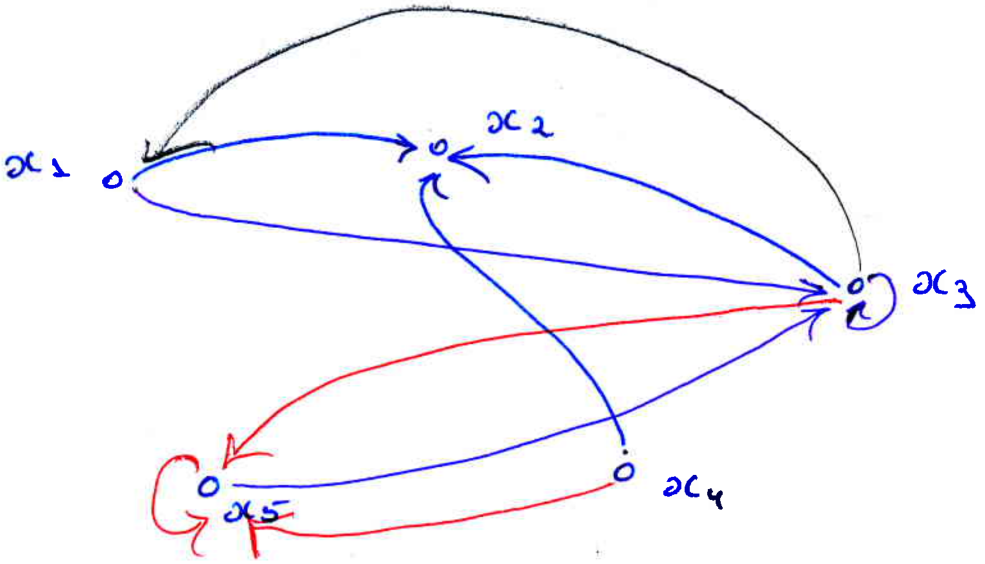
$x_1 \bar{R} x_1$
$x_2 \bar{R} x_1$
$x_3 \bar{R} x_1$
$x_4 \bar{R} x_1$
$x_5 \bar{R} x_1$

$x_2 \bar{R} x_2$
$x_1 \bar{R} x_2$
$x_3 \bar{R} x_2$
$x_4 \bar{R} x_2$
$x_5 \bar{R} x_2$

x_1
x_2 $\bar{R}$ x_3
x_3
x_4
x_5

$x_1 \bar{R} x_4$
$x_2 \bar{R} x_4$
$x_3 \bar{R} x_4$
$x_4 \bar{R} x_4$
$x_5 \bar{R} x_4$

$x_1 \bar{R} x_5$
$x_2 \bar{R} x_5$
$x_3 \bar{R} x_5$
$x_4 \bar{R} x_5$
$x_5 \bar{R} x_5$



максимальна к-ть ліній, що входять в вершину.

x_2 – 3 шт.
x_5 – 3 шт.
x_3 – 3 шт.

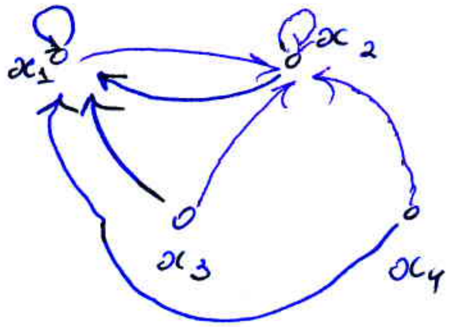
$A_+(R) = x_2, x_5, x_3$ – мажоранти

$x_2 = const.$

$\forall y \in A: \quad y \bar{Q} x_2$

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} \ \bar{Q} \ x_2$$

$\bar{Q}$



$\Rightarrow x_2$ - мажоранта

$\{x_1, x_2\}$ $\tilde{Q}$ мажоранти.

приклад.

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \bar{R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

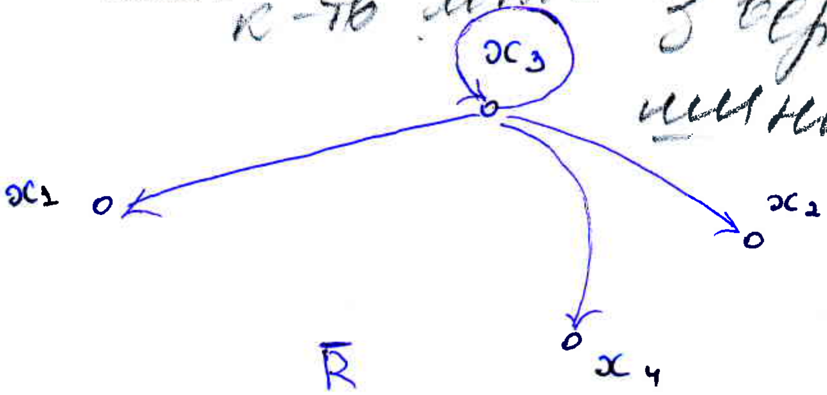
міноранти - ?

$$A_-(R) = \{ \underset{const}{x \in A} \mid \forall y \in A: \underset{const.}{x} \bar{R} y \}$$

$A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

$x_3 = const.$

нескінченна к-ть ліній що виходить з вершини



$\bar{R}$

$x_3 \bar{R} x_1$

$x_3 \bar{R} x_2$

$x_3 \bar{R} x_4$

$x_3 \bar{R} x_3$

$\Downarrow$

x_3 - міноранта

xRy $\quad (yRx) = R$

$A^-(R) = \{x \in A \mid \forall y \in A : yRx\}$ – мінімуми (мінімальні збитки)

$A\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$

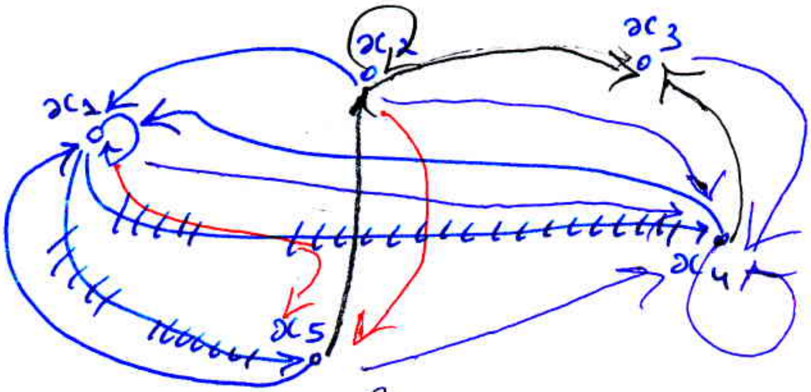
$x_1 R x_1$ 1
$x_2 R x_1$ 1
$x_3 R x_1$ 0
$x_4 R x_1$ 1
$x_5 R x_1$ 1

$x_1 R x_2$ 0
$x_2 R x_2$ 1
$x_3 R x_2$ 0
$x_4 R x_2$ 0
$x_5 R x_2$ 1

$x_1 R x_3$
$x_2 R x_3$
$x_3 R x_3$
$x_4 R x_3$
$x_5 R x_3$

$x_1 R x_4$
$x_2 R x_4$
$x_3 R x_4$
$x_4 R x_4$
$x_5 R x_4$

$x_1 R x_5$
$x_2 R x_5$
$x_3 R x_5$
$x_4 R x_5$
$x_5 R x_5$



макс. к-ть ліній, що ~~[illegible]~~ у вершину

$A^-(R) = \{x_4\}$

$\{x_4\}$ – мінімум

$A_-(R) = \{x \in A \mid \forall y \in A : x\bar{R}y\}$ – мінорант… макс. к-ть ліній, що виходить з вершини.

$$\bar{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

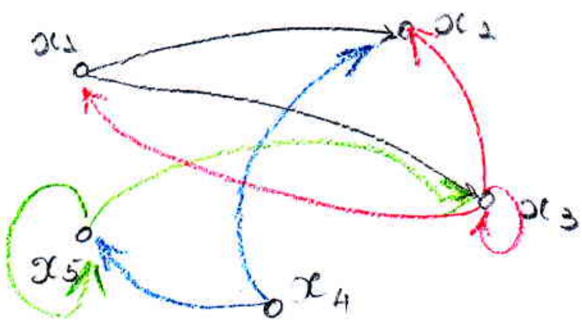
$x_1 \bar{R} x_1$ 0
$x_1 \bar{R} x_2$ 1
$x_1 \bar{R} x_3$ 1
$x_1 \bar{R} x_4$ 0
$x_1 \bar{R} x_5$ 0

$x_2 \bar{R} x_1$
$x_2 \bar{R} x_2$
$x_2 \bar{R} x_3$
$x_2 \bar{R} x_4$
$x_2 \bar{R} x_4$
$x_2 \bar{R} x_5$

$x_3 \bar{R} x_1$ 1
$x_3 \bar{R} x_2$ 1
$x_3 \bar{R} x_3$ 1
$x_3 \bar{R} x_4$
$x_3 \bar{R} x_5$

$x_4 \bar{R} x_1$
$x_4 \bar{R} x_2$
$x_4 \bar{R} x_3$
$x_4 \bar{R} x_4$
$x_4 \bar{R} x_5$

$x_5 \bar{R} x_1$
$x_5 \bar{R} x_2$
$x_5 \bar{R} x_3$
$x_5 \bar{R} x_4$
$x_5 \bar{R} x_5$



з x_1 2 шт

$\boxed{з\ x_3 \quad 3 шт}$

з x_5 2 шт

з x_4 2 шт

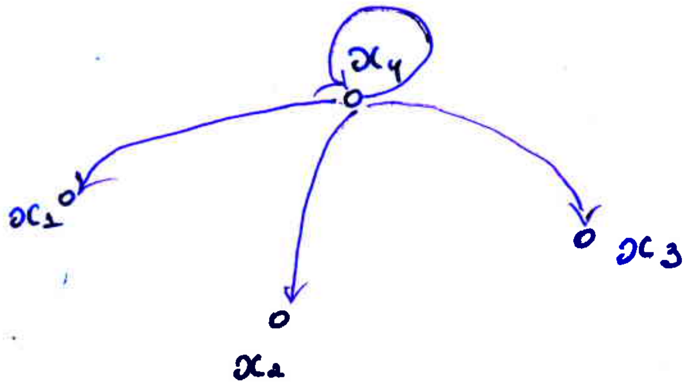
з x_2 = 0 шт.

$A_-(R) = \{x_3\}$

max: ~~мажоранта~~

$\equiv x_4 = const$

$x_4 \bar{R} x_1$
$x_4 \bar{R} x_2$
$x_4 \bar{R} x_3$
$x_4 \bar{R} x_4$



$\Downarrow$

x_4 – мінорант

<u>Приклад.</u>

мінімум: $A^-(R) = \{x \in A \mid \forall y \in A : yRx\}$

максимум: $A^+(R) = \{x \in A \mid \forall y \in A : xRy\}$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$A^-(R)$ – ? $\quad A^+(R)$ – ?

$A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

$x_1 = const$

$x_2 R x_1$ „–"
$x_3 R x_1$ „–"
$x_4 R x_1$ „–"
$x_1 R x_1$ „+"

$x_2 = const$

$x_1 R x_2$ „+"
$x_2 R x_2$ „–"
$x_3 R x_2$ „–"
$x_4 R x_2$ „+"

$x_3, x_4 = const.$

$A^-(R)$ – немає мінімумів.

$A^+(R)$:

$x_1 R x_1$
$x_1 R x_2$ $\Rightarrow x_1$ – не є максимумом.
$x_1 R x_3$
$x_1 R x_4$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Знайти оптимальні альтернативи.

$A^+(R)$ - ? $A_+(R)$ - ?

$A^+(R) = \{ x \in A \mid \forall y \in A : xRy \}$ - максимуми

$A_+(R) = \{ x \in A \mid \forall y \in A : y\bar{R}x \}$ - мажоранта

$A = \{ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \}$ - множина альтернатив.

максимальний дохід - максимуми

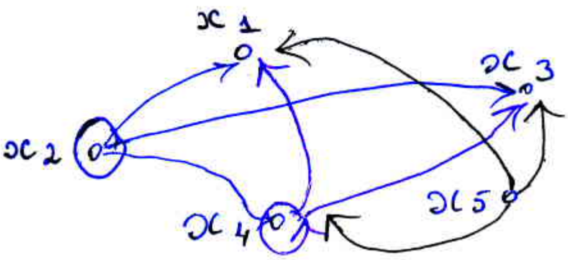
$x_1 = const.$

$x_1 R y$, $y : x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.$

$x_1 R x_1$
$x_1 R x_2$
$x_1 R x_3$
$x_1 R x_4$
$x_1 R x_5$

$x_1 R x_j$, $j = \overline{1,5}$

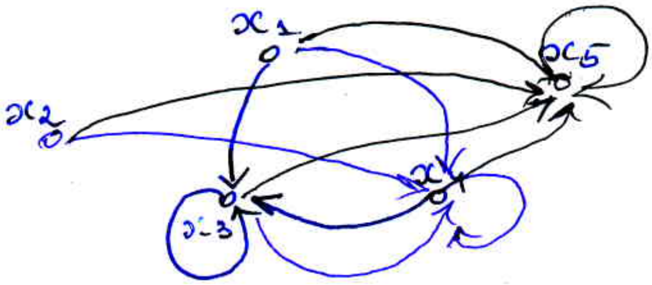
$x_2 R x_j$
$x_4 R x_j$



x_2, x_5 - максимум

„кращі" серед максимумів, але не порівняльні між собою альтернативи - мажоранта:

$$\bar{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$x = const$ $\qquad \forall y : \quad y \bar{R} x$

$x_1 \bar{R} x_3$ „+"
$x_2 \bar{R} x_3$ „–"
$x_3 \bar{R} x_3$
$x_4 \bar{R} x_3$ „–"
$x_5 \bar{R} x_3$

$x_1 \bar{R} x_1$
$x_2 \bar{R} x_1$
$x_3 \bar{R} x_1$
$x_4 \bar{R} x_1$
$x_5 \bar{R} x_1$

$x_1 \bar{R} x_4$
$x_2 \bar{R} x_4$
$x_3 \bar{R} x_4$
$x_4 \bar{R} x_4$
$x_5 \bar{R} x_4$

$x_1 \bar{R} x_5$
$x_2 \bar{R} x_5$
$x_3 \bar{R} x_5$
$x_4 \bar{R} x_5$
$x_5 \bar{R} x_5$

x_5 – мажоранта