

1. Що таке транспортна задача і яке її призначення?
2. Яка постановка транспортної задачі?
3. Чи можна застосувати для розв'язування транспортних задач симплекс-Відповідь обґрунтуйте.
4. У чому полягає математична модель транспортної задачі?
5. Що ви знаєте про закриту модель транспортної задачі?
6. Що таке відкрита модель транспортної задачі і як вона розв'язується?
7. Як визначається опорний план транспортної задачі у таблиці, що таке вільні клітинки і заповнені?
8. У чому полягає суть методу північно-західного кута?
9. У чому полягає суть методу мінімального елемента?
10. З якою метою застосовується метод потенціалів?
11. Що таке потенціали, який зв'язок існує між ними?
12. У чому полягає суть методу потенціалів?
13. Як будується система потенціалів, яку називають фіктивно заповненими клітинками?
14. Як переходити до нового опорного плану у методі потенціалів? Як будувати?
15. Сформулюйте теорему про потенціали. Видозміною якої теореми вона є?
16. Як розв'язують транспортні задачі з ускладненнями у постановці?

### Завдання до лабораторної роботи № 3

1. Отримати індивідуальний варіант завдання.
2. Написати програму розв'язування транспортної задачі за методом потенціалів (пошуку опорного початкового плану реалізувати метод північно-західного кута, метод мінімального елемента, евристичний метод Фойгеля) згідно з варіантом із завдання № 1 до лабораторних робіт № 3 та № 4.
3. Оформити звіт про виконану роботу.
4. Продемонструвати викладачеві результати, відповісти на запитання стосовно виконання роботи.

### Вимоги до програми

Програма повинна передбачати такі можливості:

1. Автоматичне знаходження оптимального плану для відповідного завдання:
  - пошук опорного плану;
  - пошук оптимального плану за методом потенціалів із виведенням усіх проміжних таблиць та побудовою циклів.
2. Введення вхідних даних вручну:
  - задати елементи таблиці;
  - пошук опорного плану;
  - пошук оптимального плану за методом потенціалів із виведенням усіх проміжних таблиць та побудовою циклів.
3. Передбачити можливість некоректного введення даних.
4. Підписання таблиць.
5. Виведення відповідного повідомлення у разі відсутності оптимального плану.

## Розв'язування транспортної задачі ЛП за методом диференціальних рент

**Мета роботи** – ознайомитись на практиці із розв'язуванням транспортних задач за допомогою побудови умовно оптимального розподілу та покращування його за методом диференціальних рент.

### 4.1. Метод диференціальних рент знаходження оптимального розв'язку транспортної задачі

Цей метод переважно використовується у разі виродженого опорного плану. Основними його кроками є:

1. Будемо *умовно оптимальний розподіл*. У кожному зі стовпців знаходимо мінімальні тарифи і обводимо їх колами. Завантажуємо клітинки з обведеними тарифами, враховуючи запаси і потреби відповідних пунктів, тобто записуємо мінімальне число. Якщо цей розподіл задовольняє обмеження задачі, то він оптимальний – кінець алгоритму.

2. Визначаємо надлишкові та недостатні рядки за правилом:

- рядок є *недостатнім (від'ємним)*, якщо запаси відповідного пункту зберігання розподілені повністю, а потреби не задоволені;
- рядок є *надлишковим (додатним)*, якщо потреби задоволені й залишився продукт у відповідному пункті зберігання.

У ситуації, коли нерозподілений залишок у рядку дорівнює 0, дивимось на іншу, заповнену клітинку у стовпчику, якщо вона розташована у додатному рядку, то розглядуваний рядок позначаємо +0, інакше –0.

3. Для кожного стовпця знаходимо *різницю* між обведеним тарифом у *від'ємному* рядку та найближчим (за значенням) до нього тарифом, записаним у *надлишковому* рядку. Якщо обведений тариф знаходиться у *додатному* рядку – різницю **не визначаємо**. Серед різниць знаходимо *найменшу* – **проміжну ренту**.

4. Переходимо до нової таблиці – додаємо до відповідних тарифів, що знаходяться у *від'ємних* рядках, проміжну ренту. Інші елементи не змінюємо.

5. Усі клітинки нової таблиці вважаємо вільними. Заповнюємо клітинки цієї таблиці (їх тепер на 1 більше). Оскільки у новій таблиці кількість клітин для заповнення є більшою, ніж кількість стовпців, починаємо від стовпця (чи рядка), в якому є один обведений тариф; цю клітинку заповнюємо і усуваємо з розгляду цей стовпчик (рядок). Продовжуючи цю процедуру, заповнюємо усі клітинки з колами. Якщо план допустимий, то він оптимальний – кінець, в іншому випадку переходимо до кроку 2.

**Приклад 4.1.** Знайти оптимальний план за методом диференціальних рент для транспортної задачі, заданої у табл. 4.1.

Таблиця 4.1

Постачальники	Споживачі					Запаси
	$B_1$	$B_j$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	
$A_1$	11	14	1	1	2	150
$A_2$	1	13	14	2	10	160
$A_3$	14	14	1	12	10	220
$A_4$	11	4	12	14	11	220
Потреби	100	200	120	180	150	750\750

Обчислимо суму потреб (750) та суму усіх запасів (750), отже, задача є закритого типу. У кожному стовпці визначаємо мінімальні ціни перевезення, відразу заповнюючи таблицю відповідними значеннями. Якщо у стовпці є два однакові мінімальні елементи, то заповнюємо один із них так, щоб умовно оптимальний план був найкращим. У стовпці  $B_3$  (табл. 4.2) заповнюємо клітинку  $A_3B_3$ , а не  $A_1B_3$ , щоб використати ще мінімальну вартість перевезень у  $A_1B_4$ , тобто беремо до уваги ще й мінімальні значення в інших стовпцях, а клітинці  $A_1B_3$  приписуємо нульову вартість перевезень.

Таблиця 4.2

Постачальники	Споживачі					Запаси	Нестача (-) Надлишок (+)
	$B_1$	$B_j$	$B_3$	$B_4$	$B_5$		
$A_1$	11	14	1 0	1 150	2 0	150	-180
$A_2$	1 100	13	14	2	10	160	+60
$A_3$	14	14	1 120	12	10	220	+100
$A_4$	11	4 200	12	14	11	220	+20
Потреби	100	200	120	180	150	750	
Різниця	-	-	-	1	8		

Наступним кроком є визначення надлишкових та недостатніх рядків. Наприклад, перший постачальник, використавши усі свої ресурси, не повністю задовольнив споживача  $B_4$  (той недоотримав 30 од. продукції), і зовсім не задовольнив потреби споживача  $B_5$ , отже, перший рядок є недостатнім (-180).

Після цього для обведених тарифів, що знаходяться у від'ємних рядках, знаходимо ренти – різниці між ними та найближчими (за значеннями) до них тарифами, записаними у надлишкових рядках. Якщо обведений тариф знаходиться у додатному рядку – різницю **не визначаємо**. Якщо у стовпчику є кілька обведених тарифів, але хоча б один знаходиться у додатному рядку, – різницю теж **не визначаємо**. Серед різниць знаходимо **найменшу** – так визначаємо **проміжну ренту** (1).

Для побудови нової табл. 4.3 до усіх тарифів, розташованих у від'ємному рядку, додаємо проміжну ренту (1). У стовпці  $B_4$  з'явилися дві клітинки з однаковим тарифом. Спочатку заповнюємо клітинки, які є **єдиними** у стовпцях. У стовпці, де є дві обведені клітинки, заповнення починаємо від тієї, де менша вартість перевезень (у початковій таблиці):  $A_1B_4$ ,  $A_2B_4$ .

Для контролю маємо на увазі, що суми чисел у надлишкових і недостатніх рядках мають бути однаковими за модулем, але з різними знаками, а також те, що вони повинні зменшуватись, – ми маємо покращувати план, зменшуючи нерозподілені надлишки. Зокрема, у табл. 4.2 ми маємо сумарні надлишок і нестачу, що дорівнюють +180 і -180, у табл. 4.3 – +120 і -120. Щоб оцінити рядок  $A_2$ , дивимось, окрім клітинки  $A_2B_4$ , на  $A_1B_4$ , бо вона знаходиться у тому самому стовпчику. Оскільки клітинка  $A_1B_4$  є у від'ємному рядку, то і рядок  $A_2$  визначаємо як недостатній -0. Обчислюємо ренти для обведених тарифів, розміщених у від'ємних рядках, та визначаємо проміжну (7).

Для побудови нової табл. 4.4 до усіх тарифів, розташованих у від'ємних рядках, додаємо проміжну ренту (7). Дві клітинки з однаковим тарифом (окрім стовпця  $B_4$ ) з'явилися у стовпці  $B_5$ . Спочатку заповнюємо клітинки, які є єдиними у стовпчиках, потім інші за поданим вище правилом:  $A_1B_4$ ,  $A_2B_4$ ,  $A_1B_5$ ,  $A_3B_5$ . Визначаємо надлишкові та недостатні рядки і повторюємо алгоритм, доки нерозподілені залишки не дорівнюватимуть 0 (в останньому стовпці отримаємо усі нульові елементи) (табл. 4.5).

Таблиця 4.4

Постачальники	Споживачі					Запаси	Нестача (-) Надлишок (+)
	$B_1$	$B_j$	$B_3$	$B_4$	$B_5$		
$A_1$	19	22	9	9	10	150	-20
$A_2$	8	20	21	9	17	160	-0
$A_3$	14	14	1	12	10	220	-0
$A_4$	11	4	12	14	11	220	+20
Потреби	100	200	120	180	150	850	
Різниця	3	-	11	5	1		

Таблиця 4.5

Постачальники	Споживачі					Запаси	Нестача (-) Надлишок (+)
	$B_1$	$B_j$	$B_3$	$B_4$	$B_5$		
$A_1$	20	23	10	10	11	150	0
$A_2$	9	21	22	10	18	160	0
$A_3$	15	15	2	13	11	220	0
$A_4$	11	4	12	14	11	220	0
Потреби	100	200	120	180	150	850	

Отже, з табл. 4.5 бачимо, що усі елементи останнього стовпця дорівнюють 0, це означає, що знайдено оптимальний розв'язок:

$$Z = 1 \cdot 120 + 4 \cdot 200 + 1 \cdot 120 + 2 \cdot 60 + 1 \cdot 150 + 2 \cdot 60 + 2 \cdot 30 + 10 \cdot 100 + 11 \cdot 20 = 2710.$$

**Примітка.** Оптимальний план перевезень беремо з останньої таблиці, а вартість перевезень – із першої.

**Приклад 4.2.** Знайти за методом диференціальних рент оптимальний план відкритої транспортної задачі, заданої у табл. 4.6.

Таблиця 4.6

Постачальники	Споживачі				Запаси
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	
$A_1$	7	9	4	8	180
$A_2$	1	8	6	5	350
$A_3$	6	4	8	7	20
Потреби	110	90	100	80	380\550

Оскільки маємо задачу відкритого типу, то вводимо додатковий пункт споживання (стовпчик) з нульовими вартостями перевезень та потребами, що дорівнюють  $550 - 380 = 170$ . Будуємо умовно оптимальний розподіл цієї транспортної задачі (табл. 4.7), при цьому у додатковому стовпчику прагнемо максимально розподілити запаси. Нерозподілений залишок у першому рядку дорівнює 0, дві інші заповнені клітинки у стовпчику, де вона розташована, знаходяться у різних за знаками рядках. Але оскільки у стовпчику, пов'язаному з цим рядком, усі потреби вже задоволені, тому розглядуваний рядок позначаємо +0, ренту у такому стовпці не визначаємо.

Таблиця 4.7

	$B_1$	$B_j$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	Запаси	Нестача (-) Надлишок (+)
$A_1$	7	9	4	8	0	180	+0
$A_2$	1	8	6	5	0	350	+70
$A_3$	6	4	8	7	0	20	-70
Потреби	110	90	100	80	170	550	
Різниця	-	4	-	-	-		

Додаємо проміжну ренту до третього (від'ємного) рядка, заповнюємо спочатку одиниці у стовпчиках і рядках клітинки, а потім решту. Бачимо (табл. 4.8), що усі постачання розподілені, тому оптимальним буде план із вартістю перевезень:

$$Z = 1 \cdot 110 + 8 \cdot 70 + 4 \cdot 20 + 4 \cdot 100 + 5 \cdot 80 = 1550.$$



Відзначимо, що він повністю збігся з розв'язком задачі, отриманої за допомогою методу потенціалів (приклад 3.5).

Таблиця 4.8

Постачальники	Споживачі					Запаси	Нестача (-) Надлишок (+)
	$B_1$	$B_j$	$B_3$	$B_4$	$B_5$		
$A_1$	7	9	4	8	0	180	0
$A_2$	1	8	6	5	0	350	0
$A_3$	10	8	12	11	4	20	0
Потреби	110	90	100	80	170	550	

**Приклад 4.3.** Знайти за методом диференціальних рент оптимальний план транспортної задачі з ускладненнями у постановці, заданої у табл. 4.9, за умов, що з  $A_1$  в  $B_j$  повинно бути перевезено не менше, ніж 50 одиниць продукту, з  $A_3$  в  $B_5$  – не менше, ніж 60, з  $A_2$  в  $B_4$  – не більше, ніж 40.

Таблиця 4.9

Постачальники	Споживачі					Запаси
	$B_1$	$B_j$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	
$A_1$	5	3	2	4	8	160
$A_2$	7	6	5	3	1	90
$A_3$	8	9	4	5	2	140
Потреби	90	60	80	70	90	390

Зменшуємо запаси пунктів постачання  $A_1$  та  $A_3$  на 50 та 60 одиниць відповідно, а також потреби пунктів споживання  $B_j$  та  $B_5$  на 50 та 60 одиниць, відповідно. Вводимо додатковий пункт споживання  $B_6$  з запасами, що дорівнюють  $70 - 40 = 30$ , та вартостями перевезень  $c_{i6} = M$  ( $i = 1, 2, 3$ ), при цьому потреби  $B_4$  визначаємо такими, що дорівнюватимуть 40 (табл. 4.10).

Будуємо умовно оптимальний розподіл цієї транспортної задачі, при цьому у додатковому стовпці намагаємось максимально розподілити запаси (у другому рядку записуємо 20, а у третьому – 10).

Таблиця 4.10

Постачальники	Споживачі						Запаси	Нестача (-) Надлишок (+)
	$B_1$	$B_j$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$B_6$		
$A_1$	5	3	2	4	8	$M$	110	-70
$A_2$	7	6	5	3	1	$M$	90	+0
$A_3$	8	9	4	5	2	$M$	80	+70
Потреби	90	10	80	40	30	30	280	

Додаємо проміжну ренту (2) до від'ємного рядка (табл. 4.11). Оскільки у нас було дві однакові мінімальні ренти, то клітинок до заповнення збільшилось на дві, а не на одну. Послідовність їх заповнення буде такою:  $A_1B_2$ ,  $A_2B_4$ ,  $A_2B_5$  (єдині у відповідних стовпчиках),  $A_2B_1$  (у відповідному рядку остання незаповнена для реальних перевезень),  $A_1B_1$  (друга у цьому стовпці),  $A_1B_3$  (менша вартість порівняно з іншою у стовпці і остання – для заповнення у першому рядку),  $A_3B_3$ ,  $A_3B_6$ ,  $A_2B_6$ .

Таблиця 4.11

	$B_1$	$B_j$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$B_6$	Запаси	Нестача (-) Надлишок (+)
$A_1$	7	5	4	6	10	$M+2$	110	0
$A_2$	7	6	5	3	1	$M$	90	0
$A_3$	8	9	4	5	2	$M$	80	0
Потреби	90	10	80	40	30	30	280	

Бачимо (табл. 4.11), що всі поставки розподілені, тому оптимальним буде план із вартістю перевезень:

$$Z = 5 \cdot 70 + 7 \cdot 20 + 3 \cdot 10 + 2 \cdot 30 + 4 \cdot 50 + 3 \cdot 40 + 1 \cdot 30 = 930.$$

Відзначимо, що він повністю збігся з розв'язком задачі, отриманої за допомогою методу потенціалів (приклад 3.3).

#### Контрольні запитання до лабораторної роботи № 4

1. Поясніть основні кроки алгоритму методу диференціальних рент (ДР).
2. Як визначаються надлишкові та недостатні рядки у методі ДР?
3. Як визначаються ренти у методі ДР?
4. Що таке проміжна рента і як вона визначається?
5. Як будується нова таблиця у методі диференціальних рент?
6. Порівняйте між собою методи диференціальних рент та потенціалів.
7. Коли завершується алгоритм методу диференціальних рент?
8. Чи можна використовувати метод диференціальних рент для вироджених задач? Чому?

#### Завдання до лабораторної роботи № 4

1. Отримати індивідуальний варіант завдання.
2. Написати програму розв'язування транспортної задачі за методом диференціальних рент згідно з варіантом із Додатка № 1 до лабораторних робіт № 3 та № 4.
3. Оформити звіт про виконану роботу.
4. Продемонструвати викладачеві результати, відповісти на запитання стосовно виконання роботи.

#### Вимоги до програми

Програма повинна передбачати такі можливості:

1. Автоматичне знаходження оптимального плану для відповідного завдання:
  - пошук оптимального плану за методом диференціальних рент із виведенням усіх проміжних таблиць.
2. Введення вхідних даних вручну:
  - задати елементи таблиці;
  - пошук оптимального плану за методом диференціальних рент із виведенням усіх проміжних таблиць.
3. Передбачити можливість некоректного введення даних.
4. Підписання таблиць.
5. Виведення відповідного повідомлення у разі неіснування оптимального плану.

#### Додаток № 1 до лабораторних робіт № 3 та 4

Є  $n$  пунктів постачання і  $m$  пунктів споживання продукції. Вартість перевезення одиниці продукції з  $i$ -го пункту постачання в  $j$ -й центр споживання  $c_{ij}$  наведена у таблицях. Скласти план перевезень щодо постачання необхідної продукції у пункти споживання, який мінімізуватиме сумарні транспортні витрати. Необхідні дані для індивідуального варіанта потрібно взяти з таблиць, наведених нижче.

##### Варіант 1

Підприємства	Вартість одиниці продукції				Обсяг виготовлення
	Споживачі				
	1	2	3	4	
A	5	1,8	6	6	32
B	1	5,1	8	2	42
C	3,5	6	3	3,1	10
D	2,2	4,9	1,3	4	16
E	3	7	8,95	1	10
Потреби	20	38	30	22	

##### Варіант 2

Підприємства	Вартість одиниці продукції *				Обсяг виготовлення
	Споживачі				
	1	2	3	4	
A	2,3	7	6	8	15
B	2	1,3	1	2,5	55
C	4,9	4	4	1	12
D	2	8	1	4	18
E	3	2,1	1,2	5	17
Потреби	35	37	20	25	

##### Варіант 3

Підприємства	Вартість одиниці продукції				Обсяг виготовлення
	Споживачі				
	1	2	3	4	
A	4	2	4,1	6	17
B	5	2,5	2	3	73
C	3	4	3	4,2	52
D	5,1	3	2	7	38
Потреби	37	35	86	22	

##### Варіант 4

Підприємства	Вартість одиниці продукції				Обсяг виготовлення
	Споживачі				
	1	2	3	4	
A	1,7	3	4	6	28
B	5,2	2,6	9,8	3	27
C	3	2	1	4	52
D	6	5	2,5	7	18
Потреби	32	18	60	15	

Підприємства	Вартість одиниці продукції				Обсяг виготовлення
	Споживачі				
	1	2	3	4	
A	6	2	4,8	3	20
B	8	4	5	8	30
C	5,5	2	3	7	27
D	5	6	8,2	4	23
E	1,8	9	7	6	30
Потреби	40	30	48	12	

Варіант 6

Підприємства	Вартість одиниці продукції				Обсяг виготовлення
	Споживачі				
	1	2	3	4	
A	6,2	1	4,2	5	17
B	2	4	5,1	8	20
C	5	8	3	4	40
D	2	4	9	2	20
E	4	2,75	2	1	23
Потреби	45	30	25	20	

Варіант 7

Підприємства	Вартість одиниці продукції				Обсяг виготовлення
	Споживачі				
	1	2	3	4	
A	4	9	1	3	43
B	2	5	5	6	20
C	2	5	10	4	30
D	3	7	2	6	32
Потреби	18	50	22	35	

Варіант 8

Підприємства	Вартість одиниці продукції				Обсяг виготовлення
	Споживачі				
	1	2	3	4	
A	4	9	4	7,4	20
B	2	8	5	1	15
C	7	2,2	1	4	30
D	2,5	6	10	6	40
Потреби	48	10	35	12	

Варіант 9

Підприємства	Вартість одиниці продукції				Обсяг виготовлення
	Споживачі				
	1	2	3	4	
A	6,3	8,6	1	5	25
B	2,5	7	5	7	42
C	4	5	11	8	40
D	1	5	4	5	35
Потреби	44	30	26	42	

Варіант 10

Підприємства	Вартість одиниці продукції				Обсяг виготовлення
	Споживачі				
	1	2	3	4	
A	6,3	8	5	11	12
B	4	11	7	9	24
C	7	3	5	8	32
D	9	5,5	10	1	32
E	5	8	11	5	30
Потреби	60	20	30	20	

Варіант 11

Підприємства	Вартість одиниці продукції				Обсяг виготовлення
	Споживачі				
	1	2	3	4	
A	7,3	9	3	10	14
B	3	10	5	9	30
C	7	11	3	2	20
D	8	5	9	2	32
E	4,8	9	10	5	16
Потреби	60	14	20	18	

Варіант 12

Підприємства	Вартість одиниці продукції				Обсяг виготовлення
	Споживачі				
	1	2	3	4	
A	4,2	10	5	9	17
B	5	8	5	9	33
C	6	4	4	7,3	20
D	7	5	11	4	12
E	3	11	8	5	20
Потреби	35	22	30	15	