§ Розподіл Гаусса
неперервна випадкова величина ξ

$$\boxed{p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}}$$

a, σ - параметри
$p(x)$ - щільність розподілу.

$$\boxed{M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, p(x)\, dx} \text{ - математичне сподівання}$$

коли елементи множини мають різну важливість, пріоритети.
якщо в ній довго повторювати один експеримент і усереднити

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2} dx$$

$$t = \frac{x-a}{\sigma\sqrt{2}} \qquad t^2 = \frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}$$

$$t\sigma\sqrt{2} = x - a$$

$$dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}} dx \qquad x = t\sigma\sqrt{2} + a$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (t\sigma\sqrt{2} + a) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-t^2} \sigma\sqrt{2}dt =$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\sigma\sqrt{2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \sigma\sqrt{2} e^{-t^2} dt}_{0} + \frac{\cancel{\sigma} a}{\sqrt{2\pi}} \cancel{\sigma}\sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt =$$

$$= \frac{\cancel{\sigma} a}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi}$$

$M\xi = a \Rightarrow a$ - математичне сподівання.

§ Розподіл Гауса
неперервної випадкової величини ξ

$$\boxed{p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}}$$

a, σ - параметри
$p(x)$ - щільність розподілу.

$$\boxed{M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, p(x)\, dx \quad \text{- математичне сподівання}}$$

коли елементи множини мають різну важливість, пріоритети.
якщо в ній довго повторювати один експеримент і усереднювати

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2} dx$$

$$t = \frac{x-a}{\sigma\sqrt{2}} \qquad t^2 = \frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}$$

$$t\sigma\sqrt{2} = x - a$$

$$dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}} dx \qquad x = t\sigma\sqrt{2} + a$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (t\sigma\sqrt{2} + a) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-t^2} \sigma\sqrt{2} dt =$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\sigma\sqrt{2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \sigma\sqrt{2}\, e^{-t^2} dt}_{0} + \frac{\sigma a}{\sqrt{2\pi}} \cancel{\sigma}\sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt =$$

$$= \frac{\cancel{\sigma} a}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi}$$

$$M\xi = a \Rightarrow a \text{ - математичне сподівання.}$$

дисперсія нормально розподіленої випадкової величини (неперервної)

$$\boxed{D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^2 \, p(x)\, dx}$$

= міра відхилення наскільки далеко випадкові значення розподілені від свого середнього

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2} dx$$

$$= \left[\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2} = t^2 \qquad dt = \frac{1}{\sqrt{2}\,\sigma} dx \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} 2\sigma^2 t^2 \frac{1}{\cancel{\sigma}\sqrt{2\pi}} \cdot$$

$$\cdot\, e^{-t^2} \cancel{\sigma}\sqrt{2}\, dt = \frac{\sqrt{2}\,\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}\,\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{d\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t^2} dt = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}' = + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi}\, \frac{1}{2}\, \underline{\underline{\sigma^2}}$$

$$D\xi = \sigma^2$$

випадкова величина „однаково часто" відхиляється як вправо так і вліво від свого мат. сподівання

має розмірність

$$D\xi \geq 0$$

§ Рівномірний розподіл.

ξ – неперервна випадкова величина, якщо її ф-ція розп. можна: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt$ ∴ $\int p(t)\,dt = 1$

$$p(x \mid a,b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & x \notin [a,b] \end{cases}$$

$$\boxed{M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, p(x)\,dx} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,dx}{b-a}\,dx \Rightarrow$$

$$= \int_a^b x\,dx\, \frac{1}{b-a} = \frac{1}{b-a}\,\frac{x^2}{2} = \cancel{\ldots}\ \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$ – середина відрізка

$$\boxed{D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2}$$

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^2\, p(x)\,dx \to$$

$$= \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 d\left(x - \frac{a+b}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{b-a}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^3 \frac{1}{3}\Big|_a^b = \frac{1}{3}\left\{\left(b - \frac{a+b}{2}\right)^3 - \left(a - \frac{a+b}{2}\right)^3\right\}\frac{1}{b-a} =$$

$$= \frac{1}{3}\left\{\frac{(b-a)^3}{2^3} - \frac{(a-b)^3}{2^3}\right\}\frac{1}{b-a} = \frac{1}{3\cdot 2^3}\left\{(b-a)^3 + (b-a)^3\right\}\frac{1}{b-a} =$$

$$= \frac{1}{3\cdot 2^2}(b-a)^3\,\frac{1}{b-a} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

§ Дискретні випадкові величини:

ξ – дискретна, якщо значення, які вона може набувати утв. скінченну множину або зліченну множину.

ξ розподілена за зак. Пуассона, якщо ξ пр. знач. $0, 1, 2, \dots$ p_k – ймовірність

$$F(x) = \begin{cases} \sum\limits_{k<x} \boxed{\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}}, & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

$\frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$

$M\xi$ – ?

$$\boxed{M\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k}$$

$$M\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cancel{k}}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (k-1)\cancel{k}} \lambda^k e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(k-1)!} =$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k \cdot \lambda \cdot \lambda^{-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} =$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$ – мат. сподівання.

$\boxed{D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2}$ – дисперсія дискретної випадкової величини.

$$p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$M\xi = \lambda.$

$$M\xi^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_k = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} =$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1} (k-1+1) \frac{\lambda^k}{(k-1)!} =$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{(k-1)!} \lambda^k + e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} =$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=2} \frac{\lambda^k}{(k-2)!} + e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} =$$

$$= e^{-\lambda} \lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} =$$

$m = k - 2$

$$= e^{-\lambda} \lambda^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} + \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1} \frac{\lambda^n}{n!} =$$

$$= \lambda^2 + \lambda;$$

$$D\xi = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

§5 Біноміний розподіл.

n незалежних випробувань, у кожному з яких імов. появи події $A = p$;
кожна елементарна подія це деяка послідовність успіхів і невдач в n випробуваннях.
Для кожної елемент. події ω $\mu = \mu(\omega)$ – число успіхів

$$\boxed{F(x) = \sum_{k<x} C_n^k p^k q^{n-k}} \quad k \leq n$$

$$\boxed{q = 1 - p \; ; \; C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}}$$

$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n$ → μ_k число успіхів при k-му випробуванні.
кожна з випадкових величин може набувати тільки два значення 0; 1.

$M\mu_k = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p$

$M\mu = p \cdot n$ – мат. сподівання.

n – число випробувань.
p – імов. успіху при одному випробуванні.

Дисперсія:

$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n$

$D\mu_k = M\mu_k^2 - (M\mu_k)^2$;

$M\mu_k^2 = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p.$
↳ бо ця вип. величина може набувати значення 0 або 1.

$D\mu_k = p - p^2 = p(1-p) = p \cdot q$

$D\mu = n \cdot pq$
чим більше число випробувань, тим більше величко-ве розсіяння числа успіхів μ навколо його мат. сподівання $n \cdot p$; і менше випадкове розсіяння частоти успіхів навколо її мат. сподівання.

§ Розподіл Стюдента

виникає коли оцінюють мат. сподівання нормально розподіленої популяції, коли вибірка мала.

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\;\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$$. густина

ν - к-ть ступенів вільності
нерівномірні змінні

→ залежать від обсягу вибірки

$$\overline{x}_n \pm A\,\frac{S_n}{\sqrt{n}}$$

вибіркова дисперсія

$$\overline{x}_n = \frac{1}{n}\sum_i x_i \quad \text{вибіркове середнє}, \qquad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$$

n - розмір вибірки

$$\Gamma(z) = \int^{\infty} x^{z-1} e^{-x}\,dx$$

$\{x_1, \dots, x_n\}$ з генеральної сукупності

початкові дані - нормальний розподіл.
$M\xi = a$; $D\xi = \sigma^2$

Визначити з певною мірою надійності невідому
ф-ю розподілу ~~випадко~~

$$\overline{x}_n - A\frac{S_n}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x}_n + A\frac{S_n}{\sqrt{n}}$$

Функція розподілу вибірки (емпірична ф-я розподілу

§ Середні за Колмогоровим

$x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ (вибірка розміру n)

$$M_f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f^{-1}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right\}$$

$f(x_1, \ldots, x_n)$ - строго зростаюча або строго спадна.

$f^{-1}(X)$ - ф-я, обернена до $f(x_1, \ldots, x_n)$

1. У шкалі інтервалів (наскільки один об'єкт кращий за інший) припустимим є середнє арифметичне.
у порядковій шкалі

$f(x) = x$

а) монотонна ф-я

f^{-1} - ?

$$\left\{\boxed{f^{-1}(f(x)) = \text{аргумент}}\right\}$$

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x) = x, \text{ коли } f^{-1} = 1.$$

$$M_f(x_1, \ldots, x_n) = 1 \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \Rightarrow$$

$$\boxed{M_f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}}$$ -

середнє арифметичне

відхилення від $\bar{x}$.

2. У шкалі відношень (у скільки один обєкт кращий за інший)

Для агрегування думок кількох експертів: якщо при порівнянні обєктів експерти дають оцінки a та $\frac{1}{a}$; тоді обч. середнє геометричне (якщо отримується оцінка) $\Rightarrow$ це свідчить про еквівалентність порівнюваних обєктів.

$f(x) = \ln x$

a) монотонна.

f^{-1} - ? $f^{-1}(f(x)) = x$ (аргумент)

$$f^{-1}(\ln x) = e^{\ln x} = x \Rightarrow$$

для $\ln x$ оберненою ф-єю $f^{-1} = \exp$.

$$M_f(x_1, \dots, x_n) = f^{-1}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right\}$$

$$M_f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \exp\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln x_i\right\} =$$

$$= \exp\left\{\frac{\ln x_1 + \ln x_2 + \ln x_3 + \dots + \ln x_n)}{n}\right\} =$$

$$= e^{\frac{\ln x_1}{n}} e^{\frac{\ln x_2}{n}} e^{\frac{\ln x_3}{n}} \dots e^{\frac{\ln x_n}{n}} =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} e^{\frac{1}{n}\ln x_i} = \prod_{i=1}^{n} e^{\ln x_i^{1/n}} = \prod_{i=1}^{n} x_i^{1/n}$$

$$\boxed{M_f(x_1,\dots,x_n) = \sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdots x_n}}$$ -

- середне геометричне

3. $\{x_1,\dots,x_n\} = \underline{X}$ - вибірка

$\{\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_n\} = W$ - вагова ф-я

$$\bar{x} = \exp\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}\omega_i \ln x_i}{\sum_{i=1}^{n}\omega_i}\right\}$$ - середнє геометричне зважене

коли:
$\omega_1=\omega_2=\dots=\omega_n$

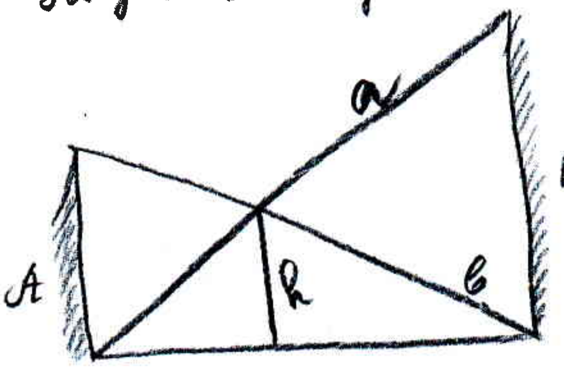
$$\bar{x} = \exp\left\{\frac{\omega_1 \ln x_1 + \omega_1 \ln x_2 + \dots + \omega_1 \ln x_n}{n\cdot\omega_1}\right\} =$$

$$= \exp\left\{\frac{\omega_1(\ln x_1+\dots+\ln x_n)}{n\omega_1}\right\} = \exp\left\{\frac{\ln x_1+\ln x_2+\dots}{n}\right\} =$$

$$= e^{\frac{\ln x_1}{n}}\cdot\ldots\cdot e^{\frac{\ln x_n}{n}} = \prod_{i=1}^{n} e^{\ln x_i^{1/n}} = x_i^{1/n}$$

4. Середнє гармонічне, ≤ сер. геометричного ≤ сер. арифметичного. } - Піфагорові середні для тих самих значень.

приклади задача про перехресні уровини.



$h = \frac{1}{2} \cdot \bar{x}$ між A та B

Для випадкової вибірки обчислюється.

$f(x) = \frac{1}{x}$

а) монотонна ф-я

f^{-1} - ?

$f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \stackrel{?}{=} x$

$f^{-1}(\,??\,) = x$

$\Downarrow$

$f^{-1}(f(x)) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x \Rightarrow$ для $f(x) = \frac{1}{x}$) оберненою є ф-я $\left(\frac{1}{x}\right)^{-1}$

степені „-1"

$$M_f = \left\{ \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-1}}{n} \right\}^{-1} =$$

$$= \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-1}} = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}$$

$$\boxed{\bar{x} = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}}$$ – середнє гармонічне

5. Середнє квадратичне.

$f(x) = x^2$

$f^{-1}(\,?\,) = x$

що підставити у ф-ю x^2, замість x, щоб отримати аргумент x.

$\sqrt{x}$

$f(x) = x^2 \big|_{x=\sqrt{x}} = \sqrt{x}^{\,2} = x$ виконується

$$M_f = \sqrt{\frac{\sum_i x_i^2}{n}} = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2}{n}}$$

(метод найменших квадратів)
дисперсія

$$f(x) = x^p$$

$$f^{-1}(\ldots) = x$$

$$f(x) = x^p \Big|_{x \to x^{1/p}} \Rightarrow \left(x^{1/p}\right)^p = x.$$

$$f^{-1}\left(x^p\right) \Rightarrow x^{1/p} = \sqrt[p]{x}$$

$$M = \left[\frac{\boxed{\sum_{i=1}^{n} x_i^p}}{n}\right]^{\frac{1}{p}}$$