I

еквівалентності:

рефлексивне $E \subseteq R$
симетричне $R = R^{-1}$
транзитивне $R \circ R \subseteq R$ $(R^2 \subseteq R)$

щоб отримати: $R \cap R^{-1} = R^e$.

байдужості:

рефлексивне $E \subseteq R$
симетричне $R = R^{-1}$

щоб отримати: $\{A \times A \setminus R \cup R^{-1}\} \cup \{R \cap R^{-1}\}$

квазіпорядку:

рефлексивне $E \subseteq R$
транзитивне $R^2 \subseteq R$

порядок:

рефлексивне $E \subseteq R$
антисиметричне $R \cap R^{-1} \subseteq E$
транзитивне $R \circ R \subseteq R$

лінійний:

рефлексивне $E \subseteq R$
антисиметр. $R \cap R^{-1} \subseteq E$
транзитивне $R \circ R \subseteq R$
зв'язне $(R \cup R^{-1}) \setminus E = U \setminus E$

строгий:

асиметричне $R \cap R^{-1} = \emptyset$
транзитивне $R \circ R \subseteq R$
щоб побудувати: $R^s = R \setminus R^{-1}$

II. транзитивне замикання $\hat{R} = R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^n$

досяжність $\tilde{R} = E \cup \hat{R}$

взаємна досяжність $\overleftrightarrow{R} = \tilde{R} \cap \tilde{R}^{-1}$

↳ є відношенням еквівалентності.

III. Агрегування бінарних відношень
будувати $\hat{R}, \tilde{R}, \overleftrightarrow{R}$; новий граф накладається „на старий"

IV. Властивості агрегованих відношень.
R_D має мати ті ж власт. Важливо їх зберегти.

приклад 7

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

задане відн. не строгої переваги (один об'єкт не гірший за ~~другий~~ інший)

[illegible] 20

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

побудув. еквівалентне відношення; строгої переваги, однаковості (байдужості)

еквівалентне:

$$\boxed{R^e = R \cap R^{-1}}$$

1. $R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. $R \cap R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

„і" множ. мін. елемент

еквівалентні елементи x_1 та x_4

строга перевага (строгий порядок)

$$\boxed{R^s = R \setminus R^{-1}}$$

„\" $r_{ij}(R_1)$ і $(1 - r_{ij}(R_2))$!

мін

~~$R^s = \ldots$~~

$R^s =$ 1 і 1−1, 0 і 1−1, 0 і 1−0, 1 і 1−1 | 1 і 1·0, 1 і 1−1, 1 і 1−0, 0 і 1−1 | 0 і 1·0, 0 і 1−1, 1 і 1−1, 1 і 1−0 | 1 і 1−1, 1 і 1−0, 0 і 1−1, 1 і 1−1

$$R^s = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

x_1 x_2 x_3 x_4

(стовпці > інші)

x_1 переважає x_2

x_2 — " — " x_4 ? (кількість > 1 одиниці)

x_3 — " — x_2 (1 одиниця)

x_4 кращий за x_2 (1 [illegible])

приклад 7

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ задане відн. не строгої переваги (один об'єкт не гірший за ~~другий~~ інший)

шпору 20

2

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

побудув. еквівалентне відношення; строгої переваги, однаковості (байдужості)

еквівалентне:

$$\boxed{R^e = R \cap R^{-1}}$$

1. $R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. $R \cap R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

„і" множ. мін. елемент

еквівалентні елементи x_1 та x_4

строга перевага (строгий порядок)

$$\boxed{R^s = R \setminus R^{-1}}$$

„\" $r_{ij}(R_1) \odot (1 - r_{ij}(R_2))$ мін

$R^s = \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{0} \\ \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} \end{pmatrix}$

$R^s =$ 1 і 1−1, 0 і 1−1, 0 і 1−0, 1 і 1−1; 1 і 1·0, 1 і 1−1, 1 і 1−0, 0 і 1−1; 0 і 1·0, 0 і 1·1, 1 і 1−1, 1 і 1−0; 1 і 1−1, 1 і 1−0, 0 і 1−1, 1 і 1−1

$$R^s = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4$

x_1 переважає x_2 ?

x_2 —"— x_4

x_3 —"— x_2

x_4 гірший за x_2

(Відношення байдужості) аналог 20(12)

$$R^I = \{X \times X \setminus \underbrace{R \cup R^{-1}}_{\text{або (max)}}\} \underbrace{\cup}_{\text{або (max)}} \{\underbrace{R \cap R^{-1}}_{\text{"і" (min)}}\}$$

$$X \times X = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = R$$

xRy

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$R \setminus R \cup R^{-1} =$

1 і 1-1   1 і 1-1   0 і 1-0   1 і 1-1
0 і 1-1   1 і 1-1   0 і 1-1   1 і 1-1
0 і 1-0   1 і 1-1   1 і 1-1   0 і 1-1
1 і 1-1   0 і 1-1   1 і 1-1   1 і 1-1

$$\underset{\substack{\text{або} \\ \text{"+"} \\ \text{max}}}{R \cup R^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R \setminus R \cup R^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \varnothing$$

$\Downarrow$

АБО

$\swarrow$

$$\underset{\substack{\text{"і"} \\ \text{"*"} \\ \text{min}}}{R \cap R^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1?

$$R^I = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix} \end{array}$$

?!

мав би бути нуль!!

x_2 – найгірший, бо 1 одиничка.

$\{x_1, x_3\}$ $\{x_1, x_4\}$ $\{x_3, x_4\}$

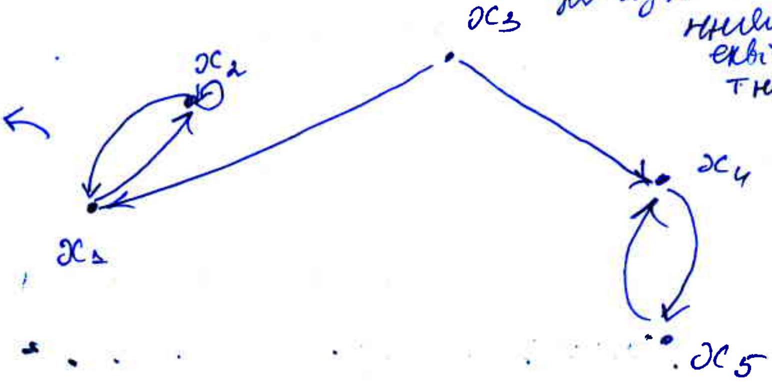
[illegible] у альтернатив "1", "3", "4" к-ть одиничок, що [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] інформації, щоб зробити [illegible] [illegible] [illegible] обґрунтований вибір між альтернативами [illegible] [illegible] [illegible].

Факторизування відношень за відношенням еквівалентності

4

$$R = \begin{array}{c} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array}$$

~~x_1 x_2 x_3 x_4 x_5~~



$A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$

$A \times A = 5 \times 5$

$A_1 = \{x_1, x_2\}$

$A_2 = \{x_4, x_5\}$ — три класи еквівалентності

$A_3 = \{x_3\}$

$$\hat{R} = R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^n$$

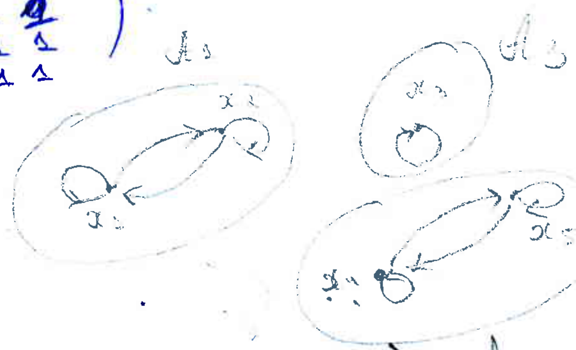
1. Транзитивне замикання.

$$R^2 = R \circ R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R^3 = R \circ R^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R^4 = R^2$$

$$\hat{R} = R \underset{\text{або}}{\cup} R^2 \cup R^3 \cup R^4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



2. Відношення досяжності

$$\tilde{R} = E \cup \hat{R}$$

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overleftrightarrow{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Відношення взаємної досяжності

$$\overleftrightarrow{R} = \tilde{R} \cap \tilde{R}^{-1}$$

є еквівалентністю

§ Агрегування бінарних відношень.

розробити процедури коректування відношень, отриманих експертним шляхом.

$A = \{x\} \quad : \quad xRy$

$A_D \subseteq A \quad : \quad A_D = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$

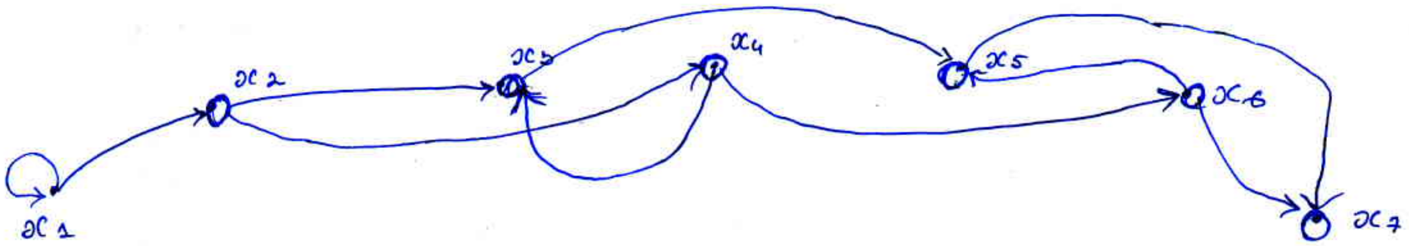
$\forall \; i, j \quad A_i \cap A_j = \emptyset$

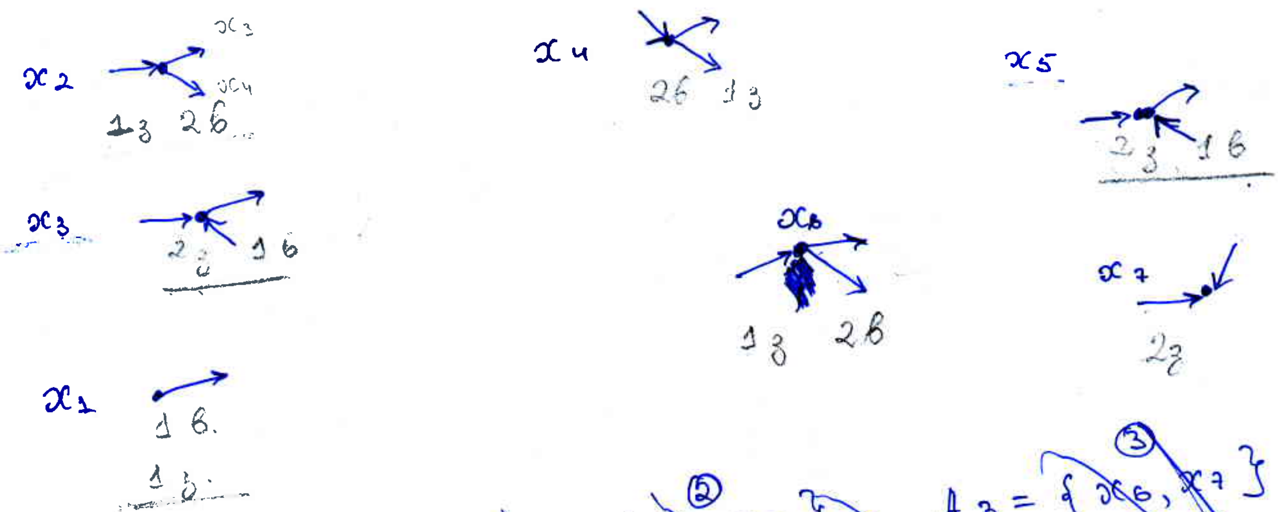
$A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$

11 12 13 14 15 16 17

21 22 23 24 25 26 27

⋮





$A_1 = \{x_1, x_2\}$ ①

$A_4 = \{x_4\}$ ④

$A_2 = \{x_3, x_5\}$ ②

$A_3 = \{x_6, x_7\}$ ③

4×4

$R_D =$

$$\begin{pmatrix} 1&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \circ \overset{R}{\begin{pmatrix} 1&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1&1&1&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$R^3 = R^2 \circ R = \begin{pmatrix} 1&1&1&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1&0\\ 0&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$R^4 = R^3 \circ R = \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1&0\\ 0&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$R^5 = R^4 \circ R = \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} =$$

$$R^5 = \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$R^6 = R^5 \circ R = \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{R^6 = R^5}$$

$$R^7 = R^6 \circ R = R^5 \circ R = R^6 \Rightarrow R^7 = R^6$$

$$\hat{R} = R \underset{\text{або}}{\cup} R^2 \cup R^3 \cup R^4 \cup R^5 \cup R^6 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&1&0&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$ – транзитивне замикання.

$$\tilde{R} = E \cup \hat{R} = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&1&0&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} =$$

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1&1 \\ 0&1&1&1&1&1&1 \\ 0&0&1&0&1&0&1 \\ 0&0&1&1&1&1&1 \\ 0&0&0&0&1&0&1 \\ 0&0&0&0&1&1&1 \\ 0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}.$$

– відношення досягальності.

$$(\tilde{R})^{-1} \cap \tilde{R} = \overleftrightarrow{R}$$

$$\overset{\tilde{R}}{\begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1&1 \\ 0&1&1&1&1&1&1 \\ 0&0&1&0&1&0&1 \\ 0&0&1&1&1&1&1 \\ 0&0&0&0&1&0&1 \\ 0&0&0&0&1&1&1 \\ 0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}} \cap \overset{\tilde{R}^{-1}}{\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0 \\ 1&1&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&1&0&0&0 \\ 1&1&0&1&0&0&0 \\ 1&1&1&1&1&1&0 \\ 1&1&0&1&0&1&0 \\ 1&1&1&1&1&1&1 \end{pmatrix}} =$$

$$= \begin{matrix} 1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1 \end{matrix} = E \; ; \quad ?$$

$$\tilde{R} \cap R^{-1} = \tilde{R} \cap \xcancel{\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0 \\ 1&1&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&1&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&1&0&1&0 \end{pmatrix}} =$$

$$= \xcancel{\begin{matrix} 1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0& & &0 \end{matrix}}$$

$$\overleftrightarrow{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

– відношення взаємної досяжності.

12 = 21

35 = 53

67 = 76

44

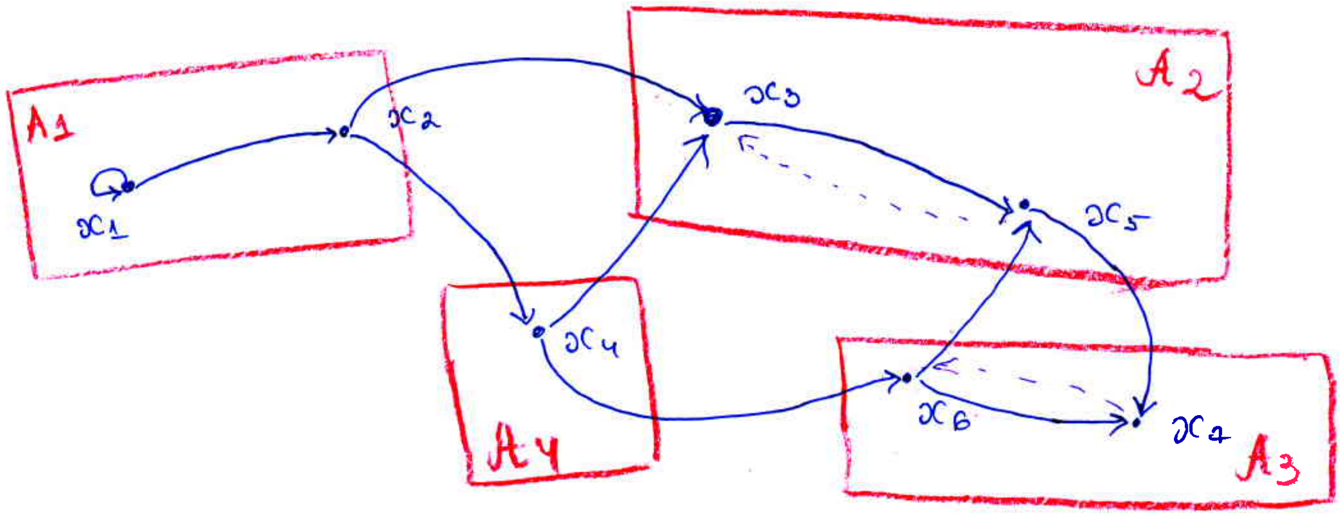
$A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$

$A_1 = \{x_1, x_2\}$; $A_2 = \{x_3, x_5\}$; $A_3 = \{x_6, x_7\}$

$A_4 = \{x_4\}$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

– початкове бінарне відношення



$A_D = \{ A_1, A_2, A_3, A_4 \}$

4 x 4

R_D - агреговане (орієнтоване бінарне відноше-ння)

$$R_D = \begin{array}{cccc} \overset{11}{1} & \overset{12}{1} & \overset{13}{0} & \overset{14}{1} \\ \overset{21}{0} & \overset{22}{1} ?? & \overset{23}{1} & \overset{24}{0} \\ \overset{31}{0} & \overset{32}{1} & \overset{33}{1} & \overset{34}{0} \\ \overset{41}{0} & \overset{42}{1} & \overset{43}{1} & \overset{44}{0} \end{array}$$

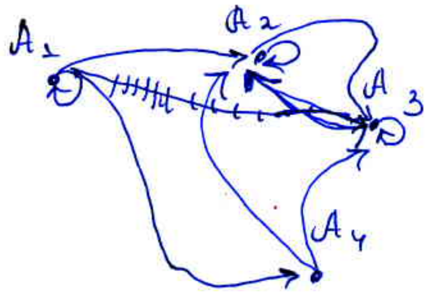
(1) бо є в A_1 хоча б одна петля.

(1) 33 — 2 л. зайшло = 2 вийшло. бо в цьому блоці пара елементів зєднані хоча б одною стрілкою

(0) немає петель

(1) 22 — 3 зайшло 1 вийшла. ? бо в цьому блоці пара елементів зєднана стрілкою,

$$R_D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Нехай на множині A задане відношення еквівалентності. Тоді множину A завжди можна розбити на множину еквівалентних елементів.

Класи еквівалентності попарно не перетинаються;
будь-які два елементи одного класу є еквівалентними;
будь-які два елементи різних класів не є еквівалентними.

§ Властивості агрегованих відношень.

Важливо зберегти властивості початкового відношення під час його факторизації ($\hat{R} = R \cup R^2 \cup \ldots$; $\tilde{R} = \hat{R} \cup E$) $\overset{\leftrightarrow}{R} = \tilde{R} \cap \tilde{R}^{-1}$

1.

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 6 \times 6.$$

$R^2 = R \Rightarrow$ транзитивне

$E \subseteq R \Rightarrow$ рефлексивне.

$R^3 = R^2 \circ R = R \circ R$

~~$R^4 = R^3 \circ R = R^2 \circ R \circ R$~~
~~$R^5 = R^4 \circ R^2 \circ R \circ R$~~
~~$R^6 = R^5 \circ R$~~

$R^4 = R^3 \circ R = R^2 \circ R = R \circ R$

$R^5 = R^4 \circ R = R \circ R \circ R$

$R^6 = R^5 \circ R = R \circ R \circ R \circ R = R^2 \circ R^2 = R \circ R = R^2 = R$

$\underline{R^6 = R.}$

$\hat{R} = R \cup R^2 = R$ – транзитивне замикання

оскільки відношення $\begin{cases} R^2 = R & \text{транз.} \\ E \subseteq R & \text{рефлексивне} \end{cases} \Rightarrow$ відношення квазіпорядку;

Тоді його можна факторизувати (розкласти на множники) за його симетричного складового бінарного відношення

$R_s = R \cap R^{-1}$ ⟵ щоб його побудувати.

транзитивне
рефлексивне $\Rightarrow$ квазіпорядку $\Rightarrow$ можна факторизувати не за $\hat{R}, \tilde{R}, \tilde{R}$

а за : $\underbrace{R_s = R \cap R^{-1}}$

це є відношення еквівалентності $\Rightarrow$

А воно розбиває множину А на підмножини.

13

ст. 60 – 61 (пр. 2.26).

$$R_D = R \cap R^{-1} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array}$$

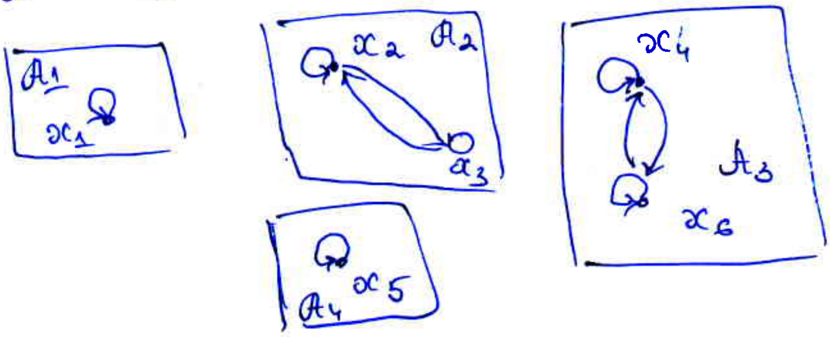
$A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$

$A_1 = \{x_1\}$

$A_2 = \{x_2, x_3\}$

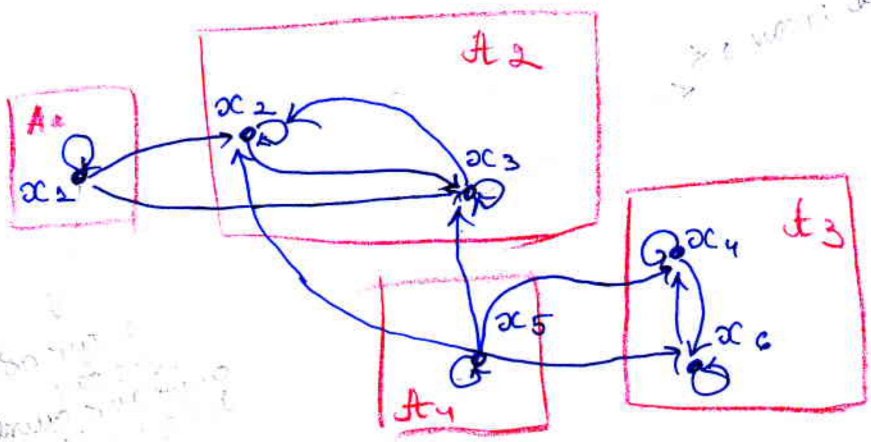
$A_3 = \{x_4, x_6\}$

$A_4 = \{x_5\}$



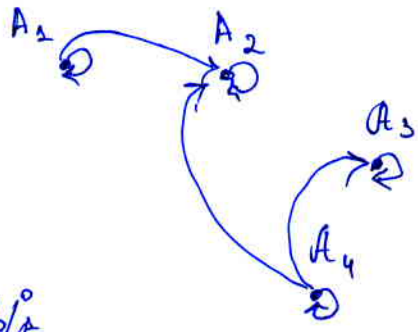
то що одно.

4 x 4.



$A_D = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$

$$R_D = \begin{pmatrix} \overset{11}{1} & \overset{12}{1} & \overset{13}{0} & \overset{14}{0} \\ \overset{21}{0} & \overset{22}{1} & \overset{23}{0} & \overset{24}{0} \\ \overset{31}{0} & \overset{32}{0} & \overset{33}{1} & \overset{34}{0} \\ \overset{41}{0} & \overset{42}{1} & \overset{43}{1} & \overset{44}{1} \end{pmatrix}$$



$$R_D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$ має залишитись транзитивним ($R_D \subseteq R_D^2$) рефлексивним ($E \subseteq R_D$)

$$R_D^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

щоб зберегти властивість транзитивності факторизованого (агрегованого) відношення:

Потрібно факторизувати за відношенням еквівалентності, що міститься в вихідному.

Граф відношення k_D не має контурів; лише стрілки і петлі самі на себе.
Всі контури стають петлями.

Факторизація відповідає процедурі агрегування системи переваг децидента.
Це дозволяє дослідити загальні властивості системи переваг та отримати відкореговане відношення.