1. Задати бінарного відношення за допомогою графа та матриці, навести приклади.

Проілюструємо матричний та графічний спосіб задання відношень на прикладі відношення $R=\{(a,1),(a,2),(b,4),(d,1),(f,4)\}$, заданого на множинах $A=\{a,b,c,d,e,f\}$ та $B=\{1,2,3,4\}$. Тоді матриця відношення R має вигляд

$$M(R)=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Граф відношення наведено на рис. 6.

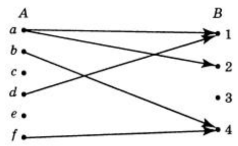


Рис. 6. Граф відношення R

15

Приклад 2.4. Нехай $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ – носій бінарного відношення «$\leqslant$». Для цього відношення відповідна матриця має вигляд

$$R=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&1&1&1\\0&0&1&1&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

2. Обчислити нижній перетин бінарного відношення.

ОЗНАЧЕННЯ 2.5. Нижнім перетином $R^-(x)$ відношення R множиною-носієм A відносно елемента x називають множину

$$R^-(x)=\{y\in A\mid (x,y)\in R\}.$$

У літературі зустрічаються також терміни «прообраз» та позначення $R^{-1}(x) = R^+(x)$ і «образ» для $R(x) = R^-(x)$.

Приклад 2.8. Нехай $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, R = «$\leqslant$», $x = 2$. Тоді $R^-(2) = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

Приклад 2.9. Нехай $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, R = «$>$», $x = 3$. Тоді $R^-(3) = \{4, 5, 6\}$.

3. Обчислити верхній перетин бінарного відношення.

ОЗНАЧЕННЯ 2.4. Верхнім перетином $R^+(x)$ відношення R множиною-носієм A відносно елемента x називають множину

$$R^+(x)=\{y\in A\mid (y,x)\in R\}.$$

4. Обчислити Перетин та об’єднання двох бінарних відношень

$$P=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&0&1&1\end{bmatrix},\quad Q=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\1&1&1&0\\0&1&1&1\\0&1&1&0\end{bmatrix}.$$

Тоді відношення $P\cap Q$ таке:

$$P\cap Q=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}.$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тоді відношення $P \cup Q$ таке:

$$P \cup Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

5. Обчислити Композицію двох бінарних відношень

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тоді відношення $P \circ Q$ таке:

$$P \circ Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

6. Обчислити Різницю двох бінарних відношень

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тоді відношення $P \backslash Q$ таке:

$$P \setminus Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

7. Перевірити, чи бінарне відношення є транзитивним

ОЗНАЧЕННЯ 2.27. Транзитивним називається відношення, для якого $P \circ P \subseteq P$, тобто якщо xPz і zPy, то xPy.

$$= R \circ R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. Обчислити транзитивне замикання для бінарного відношення

$$R^2 = R \circ R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R^3 = R \circ R^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R^2,$$

$$\hat{R} = R \cup R^2 \cup R^3 = R \cup R^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Перевірити, чи бінарне відношення є рефлексивним

ОЗНАЧЕННЯ 2.22. Рефлексивним називається таке відношення P, для якого справедливе твердження $E \subseteq P$, де E – діагональне відношення.

Це означає, що для всіх $x \in A$, де A – носій відношення P, xPx. У матриці рефлексивного відношення на головній діагоналі завжди стоять 1, а у відповідному графі при кожній вершині є петля.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \subseteq P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

10. Перевірити, чи бінарне відношення є Антирефлексивне

ОЗНАЧЕННЯ 2.23. Антирефлексивним називається відношення P, для якого $P \cap E = \varnothing$.

Таким чином, для всіх $x \in A$: $(x, x) \notin P$, тобто в матриці відношення на головній діагоналі завжди стоять 0, а в графі – немає петель.

$$E \cap Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \varnothing;$$

11. Перевірити, чи бінарне відношення є Симетричне

ОЗНАЧЕННЯ 2.24. Симетричним називається відношення P, для якого $P \subseteq P^{-1}$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = P,$$

12. Перевірити, чи бінарне відношення є Асиметричне

ОЗНАЧЕННЯ 2.25. Асиметричним називається відношення P, для якого $P \cap P^{-1} = \varnothing$, тобто якщо $(x, y) \in P$, то $(y, x) \notin P$.

У матриці такого відношення $b_{ij}(P) \wedge b_{ij}(P) = \varnothing$ для всіх i та j, а на головній діагоналі знаходяться 0. У графі $G(P)$ немає водночас дуг (x_i, x_j) та (x_j, x_i), а також петель.

$$Q \cap Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \varnothing,$$

13. Перевірити, чи бінарне відношення є Антисиметричне

ОЗНАЧЕННЯ 2.26. Антисиметричним називається відношення P, якщо $P \cap P^{-1} \subseteq E$, де E – діагональне відношення.

$$R \cap R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \subseteq E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

14. Обчислити Математичне сподівання для рівномірного розподілу
15. Обчислити математичне сподівання для розподілу Гауса
16. Обчислити математичне сподівання для розподілу Пуасона

14. Обчислити мат. сподів. для рівномірного розп. +17

Густина $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b, \ -\infty < a \leq b < \infty \\ 0, & \text{в інших вип.} \end{cases}$

Мат. сподів. $E(X) = \frac{a+b}{2}$ (неперервний)

Дисперсія $D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

15. Обч. мат. сподів і дисп. для розп. Гауса +18

Густина $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, $-\infty < x < \infty$, $-\infty < a < \infty$, $\sigma > 0$

Мат. сподів $E(X) = a$ (неперервний)

Дисперсія $D(X) = \sigma^2$

16. Обч. мат. сподів. і дисп. для розп. Пуассона +19

$p(x) = \frac{\lambda}{x!} e^{-\lambda}$, $x \in N$, $\lambda > 0$ (дискретний?)

Мат. сподів $E(X) = \lambda$

Дисперсія $D(X) = \lambda$

~~17. Обчислити дисперсію для рівномірного розподілу~~
~~18. Обчислити дисперсію для розподілу Гауса~~
~~19. Обчислити дисперсію для розподілу Пуасона~~

20. Обчислити максимуми для бінарних відношень(п-д після пит23)

ОЗНАЧЕННЯ 2.39. Елемент $x \in A$, де A – множина-носій відношення R, називається його максимумом, якщо $\forall (y \in A): xRy$, тобто xRy для всіх елементів множини-носія A.

21. Обчислити мінімуми для бінарних відношень(п-д після пит23)

ОЗНАЧЕННЯ 2.40. Елемент $x \in A$, де A – множина-носій відношення R, називається його мінімумом, якщо $\forall (y \in A): yRx$, тобто yRx для всіх елементів множини-носія A.

Максимумів і мінімумів за певним відношенням може й не бути. Так, множина всіх дійсних чисел не має ні мінімуму, ані максимуму за відношенням «$\geqslant$». Водночас множина всіх невід'ємних чисел за цим самим відношенням має мінімум – 0, але не має максимуму.

22. Обчислити міноранти для бінарних відношень(п-д після пит23)

ОЗНАЧЕННЯ 2.42. Елемент $x \in A$, де A – множина-носій відношення R, називається його мінорантою, якщо $\forall(y \in A)$: $x\bar{R}y$, тобто $x\bar{R}y$ для всіх елементів множини-носія A.

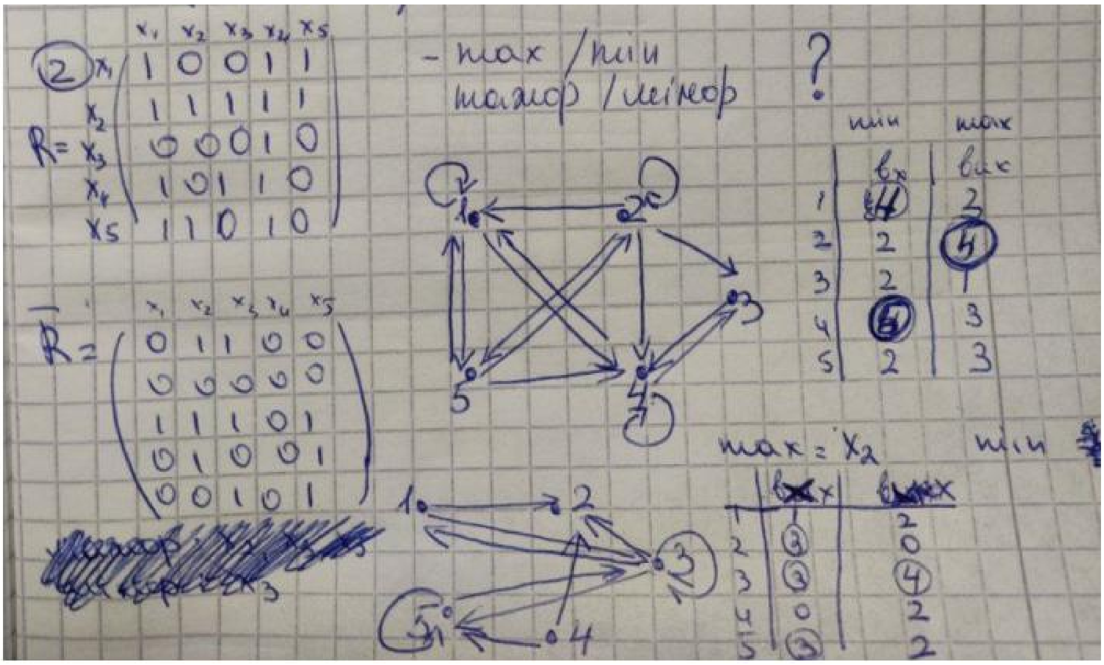
23. Обчислити мажорти для бінарних відношень.

ОЗНАЧЕННЯ 2.41. Елемент $x \in A$, де A – множина-носій відношення R, називається його мажорантою, якщо $\forall(y \in A)$: $y\bar{R}x$, де $\bar{R}$ – доповнення до відношення R, тобто $y\bar{R}x$ для всіх елементів множини-носія A.

Приклад 2.27. Розглянемо відношення R, задане таким графом із двома компонентами зв'язності (рис. 2.10).

Рис. 2.10. Граф незв'язного бінарного відношення

Для цього бінарного відношення x_1, x_4 – міноранти, x_5 – мажоранта; мінімумів та максимумів немає.



~~24. Обчислити середнього геометричного за Колмогоровим~~
~~25. Обчислення середнього арифметичного за Колмогоровим~~
~~26. Обчислення середнього квадратичного за Колмогоровим~~
~~27. Обчислення середнього гармонічного за Колмогоровим~~

28. Обчислення міри близькості на метризованих бінар відношеннях

(4) I : $(x_1 \approx x_4) > x_2 > x_5 > x_3$

II : $(x_4 > (x_2 \approx x_3) > (x_1 \approx x_5))$

$$P_{ij}^{M}(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_{ij}^{M}(P_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d = |P_{12}(P_2) - P_{12}(P_1)| + |P_{13}(P_2) - P_{13}(P_1)| \dots =$$

$$= |-1-1| + |-1-1| + |-1+0| + |0-1| +$$

$$+ |0-1| + |-1+1| + |1-1| + |-1+1| + |1+1| +$$

$$+ |1-1| = 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 2 \cancel{4} = 9$$

(5) I : $\{(x_1, x_5); (x_1, x_4); (x_2\ x_3); (x_2\ x_4)\}$

II : $\{(x_1\ x_3\ x_4); (x_2\ x_5)\}$

$$P_1 = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad P_2 = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$d = |0-0| + |1-0| + |1-1| + |0-1| + |0-1| + |0-1| +$$

$$+ |1-0| + |1-0| + |0-0| + |0-0| = 6$$

~~29. Обчислити власні значення матриць попарних порівнянь альтернатив (розмір матриці 3*3) у ієрархії МАІ.~~

~~30. Знайти власні вектори матриць попарних порівнянь альтернатив в МАІ (розмір матриці 3*3)~~

~~31. Знайти перетин, об’єднання, різницю двох множин альтернатив.~~

~~32. Обчислити відстань до ідеальної точки в просторі критеріїв від наперед заданих альтернатив.~~

~~33. За відомими критеріями якості з обмеженнями (дуга кола) в просторі альтернатив, знайти точки, які відповідатимуть оптимальним альтернативам.~~

~~34. Знайти за критерієм лінійної згортки оптимальну альтернативу, знаючи координати альтернатив у просторі критеріїв і їхні ваги.~~