Білет №5

26.12.20

1. Зміст питання надіслав конспект лекцій.

2. а) Обчислити транзитивне замикання для бінарного відношення P.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$P^2 = \overbrace{P \times P}^{\text{добуток}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^3 = P^2 \times P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Оскільки $P^3 = P^2$, то ми знайшли степінь замикання 3.

$$\hat{P} = P \cup P^2 \cup P^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Обчислити математичне сподівання для розподілу Пуасона.

Розподіл Пуасона:

$$f(\lambda, k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

$$\underline{M(X)} = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} =$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \underbrace{\left(1 + \frac{\lambda}{1} + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \dots\right)}_{e^{\lambda}} =$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot e^{\lambda} = \underline{\lambda}.$$

Оскільки розподіл Пуасона лише для цілих значень k, тому інтеграл ми замінюємо на нескінченну суму. Причому, k - визначено на невід'ємних цілих числах - $\{0,1,2\ldots\}$.

c) Перевірити, чи бінарне відношення Q є асиметричним

$$Q=\begin{pmatrix}0&0&1&1\\1&1&1&0\\0&1&1&1\\0&1&1&0\end{pmatrix};\quad Q^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&1&1\\1&1&1&1\\1&0&1&0\end{pmatrix};$$

Асиметричне відношення - це відношення, для якого

$R\cap R^{-1}=\varnothing$. (переріз з оберненим дає пусту множину)

$$Q\cap Q^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1&1\\1&1&1&0\\0&1&1&1\\0&1&1&0\end{pmatrix}\cap\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&1&1\\1&1&1&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&1&0\\0&1&1&1\\0&0&1&0\end{pmatrix};$$

Оскільки $Q\cap Q^{-1}\neq\varnothing$, то бінарне відношення Q не є асиметричним.

3.

а) Означення нормальної нечіткої множини.

Нехай A — нечітка множина з елементами x з універсальної множини U і множиною значень функції належності $M = [0;1]$. Величиною $\sup\limits_{x \in U} \mu_A(x)$ назвемо висотою нечіткої множини A. Тоді, множина A буде нормальною, у випадку коли значення її висоти буде рівним 1, тобто верхня межа її функції належності:

$$\sup_{x \in U} \mu_A(x) = 1,$$

б) Означення нижнього і верхнього перетину бінарного відношення.

Верхній переріз $R^+(x)$ відношення R, заданого на множині елементів A, називають множину, яка виконує умови:

$$R^+(x) = \{y \in A \mid (y,x) \in R\};$$

Нижній переріз $R^-(x)$ відношення R множиною-носієм відносно елемента x називають множину, яка

$$R^-(x) = \{y \in A \mid (x,y) \in R\}$$

Приклад:

Нехай маємо множину елементів $A = \{1, 2, 3, \ldots 6\}$, на цій множині виділим бінарне відношення xRy, де „x" дільник „y"

Тоді верхні перерізи згідно умови:

$R^+(1) = \{1\}$; $R^+(4) = \{1; 2; 4\}$;

$R^+(2) = \{1, 2\}$; $R^+(5) = \{1; 5\}$;

$R^+(3) = \{1, 3\}$; $R^+(6) = \{1; 2; 3; 6\}$.

А нижній переріз, згідно умови:

$R^-(1)=\{1,2,3 \ldots 6\}$; $R^-(4)=\{4\}$;

$R^-(2)=\{2;4;6\}$; $R^-(5)=\{5\}$;

$R^-(3)=\{3;6\}$; $R^-(6)=\{6\}$;

c) Дати означення моди та медіани

Мода – це таке значення з прогони (вибірки), що трапляється найчастіше.

Медіана – це таке значення, що знаходиться посередині ранжованої прогони (вибірки). Тобто середня величина змінюваної ознаки, яка міститься в середині ряду, розміщеного в порядку зростання або спадання ознаки. Якщо кількість значень парна, то єдиного значення медіани немає, і за нього беруть середнє між двома числами посередині.

4. Зміст питання подано конспект лекцій.