**Allgemeine Informationen:** Dieses Aufgabenblatt enthält schriftliche und/oder Programmieraufgaben. Bitte kombinieren Sie alle Lösungen zu den schriftlichen Aufgaben zu einem einzelnen PDF Dokument, welches Sie nach folgendem Schema benennen:`{lastname}-written.pdf`. Sie können Ihre Lösungen auch scannen oder fotografieren. Achten Sie in diesem Fall auf die Lesbarkeit. Es werden JPEG/PNG Bilddateien akzeptiert welche wie folgt benannt werden müssen:`{exercisenumber}-{lastname}-written.{jpeg/png}`. Stellen Sie sicher, dass alle Rechenschritte nachvollziehbar sind und kombinieren Sie nicht zu viele kleine Schritte zu einem einzelnen. Die Programmieraufgaben müssen in *Julia* gelöst sein und Ihr Quellcode sollte nach folgendem Schema benannt sein: `{exercisenumber}-{lastname}.jl`.

(1) a) (0.5 Punkte) Gegeben sei die Funktion

$$y(x) = e^{-3x}.$$

Ist diese Funktion eine Lösung der folgenden Differentialgleichung? Erläutern Sie ihre Antwort.

$$y'' + 2y' = 3y$$

b) (0.5 Punkte) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$y = x \cos(\ln |x|)$$

eine Lösung der folgenden Differentialgleichung ist

$$x^2 y'' - xy' + 2y = 0$$

c) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$y(x) = x^3 (C + \ln |x|)$$

eine Lösung der folgenden Differentialgleichung ist

$$xy' - 3y = x^3.$$

Finden sie die partikuläre Lösung für folgenen Anfangswert

$$y(1) = 17$$

(2) (2 Punkte) Finden Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung mittels Trennung der Variablen

$$y' = \frac{x + e^{2x}}{y}.$$

(3) (3 Punkte) Ein Skispringer springt vom Schanzentisch mit Winkel $\theta$ und Geschwindigkeit $v$ ab. Folgende Differentialgleichungen beschreiben die vertikale und horizontale Beschleunigung des Skispringers zum Zeitpunkt $t$ (wir ignorieren alle externen Kräfte bis auf die Erdbeschleunigung $g \approx 9.81$)

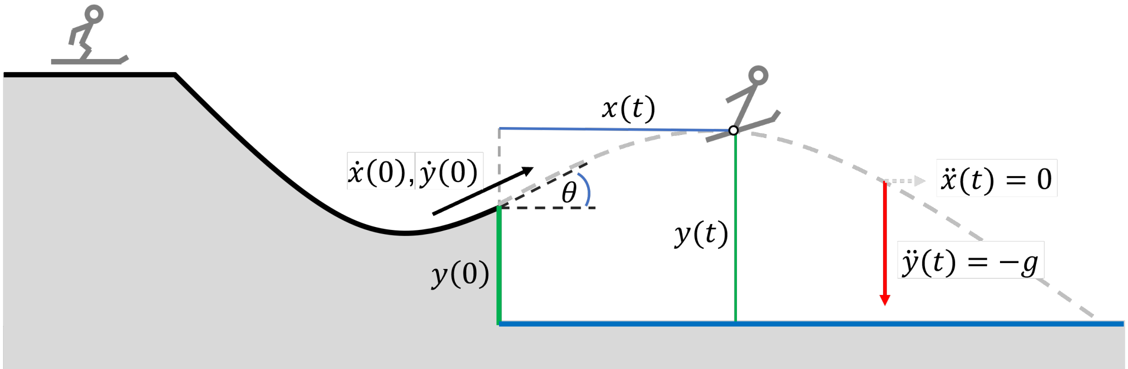
$$\ddot{y}(t) = -g$$
$$\ddot{x}(t) = 0.$$

Die Anfangsbedingungen (d.h. bei $t = 0$) sind gegeben als die vertikale und horizontale Geschwindikeit

$$\dot{y}(0) = v \sin\theta$$
$$\dot{x}(0) = v \cos\theta$$

und die Höhe (und Distanz) beim Absprung

$$y(0) = h_0$$
$$x(0) = 0.$$




Lösen Sie diese Differentialgleichungen numerisch mit der *Expliziten Euler* Methode. Das heißt, Sie berechnen die Distanz $x$ und Höhe $y$ des Skispringers für die diskreten Zeiten $t_0, ..., t_n$ mit $t_n = t_0 + n \cdot h$. Sie müssen dafür die Methode zweimal für jede Dimension anwenden um die Werte für $t_{n+1}$ zu bekommen. Zuerst, werden die Geschwindigkeiten $\dot{x}_{n+1}, \dot{y}_{n+1}$ von der Beschleunigung approximiert. Anschließend berechnen Sie die Distanz $x_{n+1}$ und Höhe $y_{n+1}$ aus den numerisch berechneten Geschwindigkeiten $\dot{x}_n, \dot{y}_n$.

a) (1 Punkt) Berechnen Sie per Hand die ersten zwei Zeitschritte $t_1 = h, t_2 = 2h$, mit $h = \frac{1}{4}$ mit der Expliziten Euler Methode. Berechnen Sie die Anfangswerte $\dot{x}_0, \dot{y}_0, x_0, y_0$ aus den folgenden Parameter
$$h_0 = 1,\ \theta = \frac{\pi}{4},\ v = 2\sqrt{2}.$$
Zur Vereinfachung dürfen Sie für die Erdbeschleunigung $g = 10m/s^2$ annehmen.

b) (1 Punkt) Implementieren Sie in Julia die Explizite Euler Methode um die erwähnten Differentialgleichungen zu lösen – siehe den Julia Code `ski_jump_euler.jl`.

c) (0.5 Punkte) Berechnen Sie für jeden Zeitschritt den Fehler zwischen der analytischen Lösung und dessen Approximation, z.B. für die vertikale Komponente $|y(t_n) - y_n|$.

d) (0.5 Punkte) Testen Sie ihre Implementierung mit verschiedenen Zeitschrittgrößen $h$. Was können Sie beobachten? Erklären Sie das Verhalten geometrisch.