Allgemeine Informationen: Dieses Aufgabenblatt enthält schriftliche und/oder Programmieraufgaben. Bitte kombinieren Sie alle Lösungen zu den schriftlichen Aufgaben zu einem einzelnen PDF Dokument, welches Sie nach folgendem Schema benennen:`{lastname}-written.pdf`. Sie können Ihre Lösungen auch scannen oder fotografieren. Achten Sie in diesem Fall auf die Lesbarkeit. Es werden JPEG/PNG Bilddateien akzeptiert welche wie folgt benannt werden müssen:`{exercisenumber}-{lastname}-written.{jpeg/png}`. Stellen Sie sicher, dass alle Rechenschritte nachvollziehbar sind und kombinieren Sie nicht zu viele kleine Schritte zu einem einzelnen. Die Programmieraufgaben müssen in *Julia* gelöst sein und Ihr Quellcode sollte nach folgendem Schema benannt sein: `{exercisenumber}-{lastname}.jl`.

(1) (0.25, 0.25, 0.5 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Integrale.

a)

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \cos(7-4x)\mathrm{d}x$$

b)

$$\int \frac{x^2+1}{x^3+3x}\,\mathrm{d}x$$

c)

$$\int \frac{x-1}{x^2-1}\mathrm{d}x$$

d)

$$\int \sin(x)\cdot x\,\mathrm{d}x$$

Hinweise:
(1a) (1b) Verwenden Sie hier eine Substitution

(2) (0.5, 0.25 Punkte) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^8 \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x\,. \tag{$\star$}$$

Substituieren Sie dazu $x=\sinh(u)$ gemäß $\mathrm{d}x=\cosh(u)\,\mathrm{d}u$. Transformieren Sie die Grenzen des bestimmten Integrals und berechnen Sie das über u formulierte Integral. Es können die Identitätsgleichung und das Addionstheorem der Hyperbelfunktionen verwendet werden.

Überprüfen Sie das Ergebnis mit Hilfe des *Julia* Packages **QuadGK** (numerische Integration).

Snippet:

```julia
# Bestimmtes Integral von x^2 - 2*x fuer 0 < x < 8
using QuadGK
quadgk(x -> x^2 - 2*x, 0.0, 8.0)
```

Mit `QuadGK.quadgk()` wird ein bestimmtes Integral mittels numerischer Quadratur berechnet. Sowohl der numerische Wert als auch ein geschätzer Fehler werden zurückgegeben.

(3) Berechnen Sie die von der Kurve $y = x^3 - 2x + 2$ und der Geraden $y = x + 2$ eingeschlossene Fläche. Fertigen Sie zusätzlich eine Skizze an und führen sie die Rechnungen von Hand aus.

a) (1 Punkte) Mittels Integration nach x. Achten Sie dabei besonders auf die beiden Stellen $x = \pm\sqrt{3}$ sowie $x = 0$.

(4) Die Messung einer Beschleunigung $a(t)$ ergibt die Funktion

$$a(t) = \begin{cases} 1.5 & 0 \leq t \leq 60\,, \\ 0 & 60 < t \leq 150\,, \\ -\frac{t}{150} + 1 & 150 < t \leq 300\,, \end{cases}$$

welche zusätzlich grafisch in Abbildung 1 dargestellt ist.

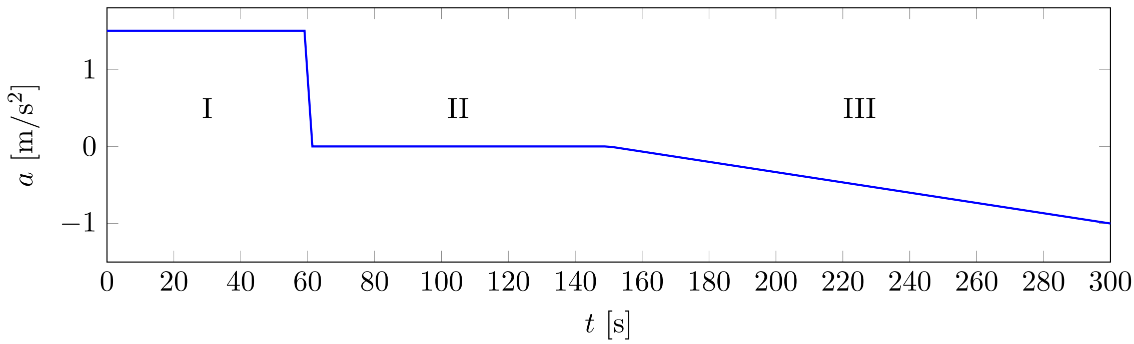

Abbildung 1: Gemessene Beschleunigung $a(t)$.

a) (1.5 Punkte) Geschwindigkeit $v(t)$ und Position $x(t)$ können mittels (mehrmaliger) Integration der Beschleunigung $a(t)$ berechnet werden. Lösen Sie dazu das Anfangswertproblem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v(t) = \dot{v}(t) = a(t)\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t) = \dot{x}(t) = v(t)\,,$$
$$v(0) = v_0 = x(0) = x_0 = 0\,.$$

Skizzieren Sie die beiden Verläufe $v(t)$ und $x(t)$ analog zu Abbildung 1. Bestimmen Sie weiters den Wert von $x(300)$.

Hinweis: Achten Sie insbesondere auf die unterschiedlichen Integrationsgrenzen. Die Geschwindigkeit $v(t)$ für $150 < t \leq 300$ ist z. B. abhängig von der Geschwindigkeit im Intervall $0 \leq t \leq 150$.

b) (1.5 Punkte) Gegeben sei die Zerlegung des Intervalls $[0, 300]$ von

$$t_j = j \quad \text{für } j = 0, 1, 2, \ldots, 300\,.$$

Bestimmen Sie die Approximationen $\hat{v} \approx v$ und $\hat{x} \approx x$ mittels Aufsummieren der diskreten Werte $a_j = a(t_j)$ und $v_j = v(t_j)$. Plotten Sie anschließend die absoluten Fehler

$$|\hat{v}(t_j) - v(t_j)| \quad \text{sowie} \quad |\hat{x}(t_j) - x(t_j)|$$

pro Zeitschritt t_j mit *Julia*.

c) (0.25 Punkte) Was ist bei der Summenbildung zu beachten wenn man die Zeitschritte auf $t_j = 5j$ für $j = 0, 1, \ldots, 60$ vergrößert? Erstellen Sie dazu eine erklärende Skizze.

(5) Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y) = -\sqrt{\frac{5}{4}}x^2 + 2y + 80$$

sowie der Bereich $A = [0, 8] \times [-4, 4]$ in der xy-Ebene, siehe Abbildung 2.

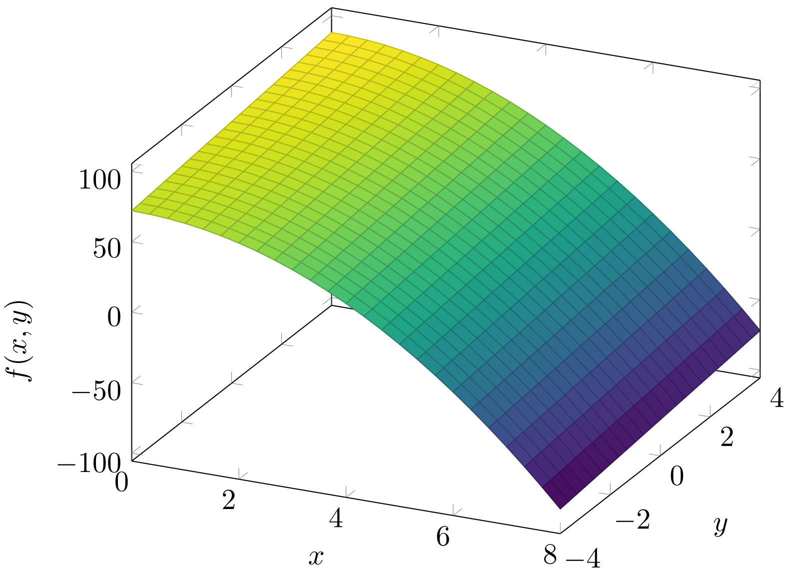

Abbildung 2: Die Funktion $f(x, y)$ in zwei Veränderlichen.

a) (0.5 Punkte) Berechnen Sie das Volumen zwischen der xy-Ebene $z = 0$ und der Funktion $f(x, y)$ im Bereich A

$$V = \int_0^8 \int_{-4}^4 f(x, y) \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \, .$$

b) (0.5 Punkte) Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Funktion im Bereich A. Berechnen Sie dazu das Integral über den Betrag des Kreuzproduktes der Richtungsvektoren der Tangentialebene (Flächen der infinitesimalen Tangentialebenen)

$$S = \int_0^8 \int_{-4}^4 \left| (1, 0, \partial_x f)^T \times (0, 1, \partial_y f)^T \right| \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \, .$$

Hinweis: Verwenden Sie in (5b) die Lösung von ($\star$).