Allgemeine Informationen: Dieses Aufgabenblatt enthält schriftliche und/oder Programmieraufgaben. Bitte kombinieren Sie alle Lösungen zu den schriftlichen Aufgaben zu einem einzelnen PDF Dokument, welches Sie nach folgendem Schema benennen:`{lastname}-written.pdf`. Sie können Ihre Lösungen auch scannen oder fotografieren. Achten Sie in diesem Fall auf die Lesbarkeit. Es werden JPEG/PNG Bilddateien akzeptiert welche wie folgt benannt werden müssen:`{exercisenumber}-{lastname}-written.{jpeg/png}`. Stellen Sie sicher, dass alle Rechenschritte nachvollziehbar sind und kombinieren Sie nicht zu viele kleine Schritte zu einem einzelnen. Die Programmieraufgaben müssen in *Julia* gelöst sein und Ihr Quellcode sollte nach folgendem Schema benannt sein: `{exercisenumber}-{lastname}.jl`.

(1) (3 Punkte) Für $z \in \mathbb{C}$, gilt:

$$z = a + \mathrm{i} \cdot b = r(\cos(\varphi) + \mathrm{i} \cdot \sin(\varphi)) = r \cdot e^{\mathrm{i} \cdot \varphi},$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

a) (1.2 points) Gegeben sind die komplexen Zahlen $x = (\cos(0) + \mathrm{i}\sin(0))$, $y = 5e^{\mathrm{i}0.64}$, und $z = -5 + 2\mathrm{i}$, nennen sie die jeweilige Form in welcher sie gegeben sind und bestimmen Sie die fehlenden Formen. Denken Sie über die Bedeutung der einzelnen Komponenten nach um eine Formel für φ zu finden und machen Sie gebrauch von Skizzen um Ihre Argumentation zu stützen.

b) (0.2 Punkte) Berechnen Sie die Summen $b_1 = x + z$, $b_2 = y + z$.

c) (0.2 Punkte) Berechnen Sie die Produkte $c_1 = x \cdot z$, $c_2 = y \cdot z$.

d) (0.8 Punkte) Komplexe Division $\frac{a}{b}$ wird mittels der konjugierten komplexen des Nenners erreicht indem man diese mit Nenner und Zähler multiplizert $\frac{a\bar{c}}{c\bar{c}}$. Die komplex Konjugierte einer komplexen Zahl $\bar{c}$ wird durch vertauschen des Vorzeichens der imaginären Komponente erreicht. Berechnen Sie:

$$d_1 = \frac{y}{x},\ d_2 = \frac{x}{y},\ d_3 = \frac{z}{y},\ d_4 = \frac{y}{z}$$

e) (0.2 Punkte) Der Betrag einer komplexen Zahl $z = a + ib$ ist definiert durch $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Berechnen Sie die Beträge für y und z.

f) (0.4 Punkte) Der Kehrwert einer komplexen Zahl ist wie folgt definiert:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

Berechnen Sie die Kehrwerte für y und z.

(2) (2 Punkte) Benutzen Sie eine Taylor Reihe um Euler's Formel herzuleiten. Gegeben ist die Taylor Reihe für $x \in \mathbb{R}$:

$$e^x \approx \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!},$$

welche folgendermaßen erweitert werden kann:

$$e^{\mathrm{i}x} \approx \sum_{k=0}^{N} \frac{(\mathrm{i}x)^k}{k!}.$$

Zeigen Sie, dass $e^{\mathrm{i}x} = \cos(x) + \mathrm{i} \cdot \sin(x)$.

Hinweis: Schauen Sie sich die Lösungen zur Approximation von $\sin(x)$ nochmals an, welche bereits als Aufgabe in Folgen und Reihen vorgekommen ist. Leiten Sie eine respektive Approximation für $\cos(x)$ ab.

(3) (2 Punkte) Wir schauen uns nochmals die Fourier Reihen Darstellung einer Rechteckschwingung an, welche wir bereits in Folgen und Reihen besprochen haben. Das Ziel ist es, die reelle Darstellung in eine komplexe Darstellung zu überführen. Dabei hatten wir:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_n e^{ikx}$$

mit

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\mathrm{dx}, \quad k \geq 0$$
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\mathrm{dx}, \quad k \geq 1,$$

als Koeffizienten für die reelle Darstellung der Reihe und ähnlich haben wir jetzt

$$c_k = \begin{cases} a_0 & , k = 0 \\ \frac{(a_k - \mathrm{i}b_k)}{2} & , k > 0 \\ \frac{(a_{|k|} + \mathrm{i}b_{|k|})}{2} & , k < 0 \end{cases}$$

als Koeffizienten für die komplexe Version der Reihe.

a) (1 Punkt) Berechnen Sie c_k durch einsetzen von a_k und b_k.

b) (1 Punkt) Implementieren Sie die komplexe Version der Fourer Reihen Darstellung der Rechteckschwingung mit `fourier.jl`. Nutzen Sie dafür die in Julia zur Verfügung gestellten komplexen Zahlen[1].

Prüfen Sie, ob das Ergebnis die Lösung aus Abbildung 1 widerspiegelt.

[1] `https://docs.julialang.org/en/v1/manual/complex-and-rational-numbers/`

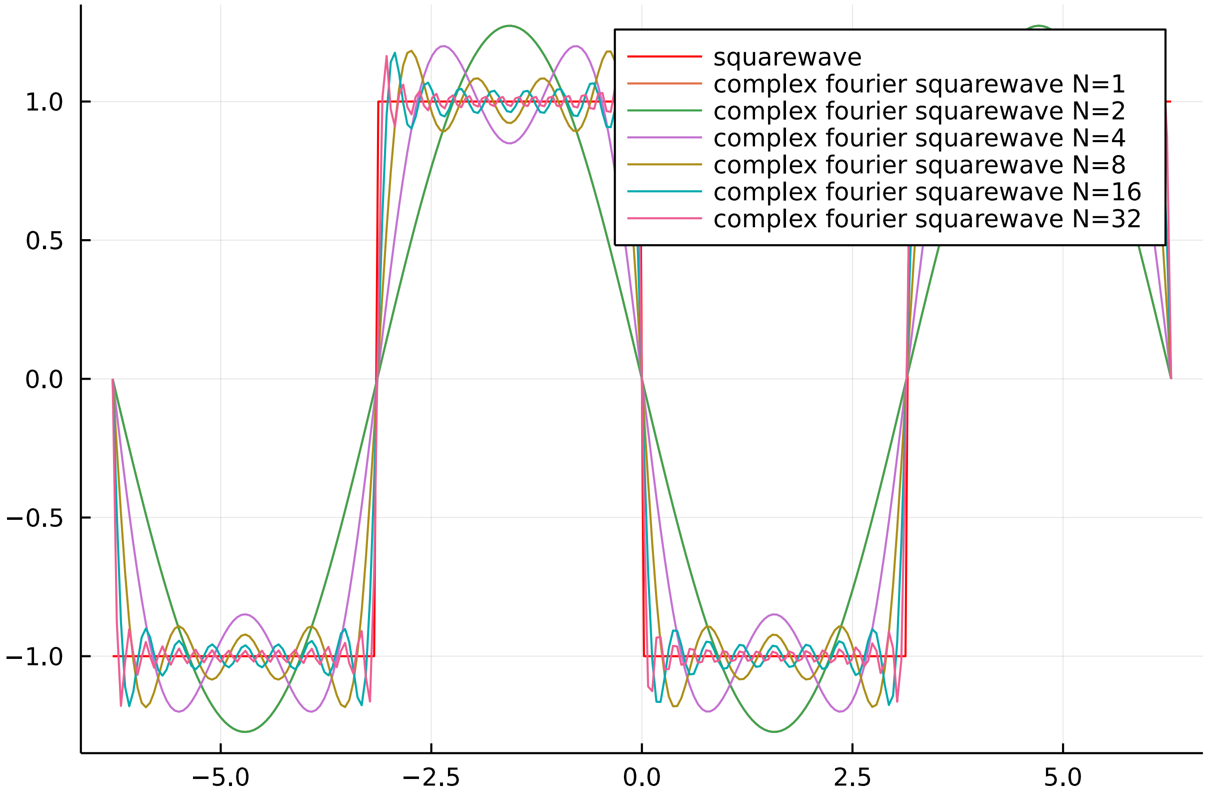

Abbildung 1: Komplexe Fourier Reihen Darstellung einer Rechteckschwingung.