Allgemeine Informationen: Dieses Aufgabenblatt enthält schriftliche und/oder Programmieraufgaben. Bitte kombinieren Sie alle Lösungen zu den schriftlichen Aufgaben zu einem einzelnen PDF Dokument, welches Sie nach folgendem Schema benennen:`{lastname}-written.pdf`. Sie können Ihre Lösungen auch scannen oder fotografieren. Achten Sie in diesem Fall auf die Lesbarkeit. Es werden JPEG/PNG Bilddateien akzeptiert welche wie folgt benannt werden müssen:`{exercisenumber}-{lastname}-written.{jpeg/png}`. Stellen Sie sicher, dass alle Rechenschritte nachvollziehbar sind und kombinieren Sie nicht zu viele kleine Schritte zu einem einzelnen. Die Programmieraufgaben müssen in *Julia* gelöst sein und Ihr Quellcode sollte nach folgendem Schema benannt sein: `{exercisenumber}-{lastname}.jl`.

(1) (1 Punkt) Berechnen Sie die Bogenlänge der folgenden Funktionen. **Hinweis:** Die Formel zur Berechnung der Bogenlänge von Funktionen mit Polarkoordinaten ist gegeben als: $L = \int ds$ mit $ds = \sqrt{r^2 + (\frac{dr}{d\theta})^2}\, d\theta$

a) $r(\theta) = 1 - cos\theta$ for $0 \leq \theta < \pi$ uns skizzieren Sie $r(\theta)$ für $0 \leq \theta < 2\pi$.
Hinweis: $cos(2a) = 2cos^2(a) - 1$

b) $\gamma(\theta) = (2(\theta + sin\theta), 2(1 + cos\theta))$ for $0 \leq \theta < 2\pi$

c) $x(t) = t^{\frac{3}{2}}$, $y(t) = (4 - t)^{\frac{3}{2}}$ for $0 \leq t \leq 8$

(2) (1 Punkt) Definitheit von Matrizen Beschreiben Sie die Definitheit der folgenden Matrizen in den gegebenen Bereichen:

a) Rotationsmatrix für $\varphi = \frac{2\pi}{6}$

$$rot(\varphi) = \begin{bmatrix} cos(\varphi) & -sin(\varphi) \\ sin(\varphi) & cos(\varphi) \end{bmatrix}$$

b) Scherungmatrix, $x \in \mathbb{R}$

$$shear(x) = \begin{bmatrix} 2 & x \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

c) Skalierungmatrix, $x \in \mathbb{R}$

$$scale(x) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}$$

d) (0.5 Punkte) Gegeben sei eine beliebige hochdimensionale nicht-konvexe Funktion. Treten lokale Minima/Maxima der Funktionen weniger oft auf als Sattelpunkte? **Hinweis**: Betrachten Sie die Eigenwerte der Hesse-Matrix.

(3) (1.5 Punkte) Bestimmen Sie für jede der unten durch eine Gleichung beschriebenen Oberfläche ob sie in impliziter, expliziter oder parametrischer Form vorliegt. Berechnen Sie anschließend jeweils die beiden anderen Darstellungsformen.

a) $2z = 4x + 10y - 15$

b) $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})(x, y, z)^\intercal + 5 = 0$

c) $(x-6)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 25$

(4) (2 Punkte) Gegeben seien die folgenden Funktionen $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ and $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ in mehreren Veränderlichen

a) $f(x) = (x_1^2, x_2^2)^\intercal$,

b) $g(x) = (x_1^3 x_2^2 - x_1 x_2^3 - 1, x_1^2 - x_1 x_2^3 - 4)^\intercal$,

c) $h(x) = (2x_1^2 - \cos(x_2 x_3) - \frac{3}{2}, 4x_1^2 - 420x_2^3 + 4x_3 - 1, 20x_3 + \exp(-x_1 x_2) + 10)^\intercal$,

Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen von Hand.

Machen Sie sich mit dem backslash Operator \ in *Julia* vertraut. Implementieren Sie die multivariate Newton Methode sowie die drei Jacobi-Matrizen im zur Verfügung gestellten Template `multivariate_newton.jl`. Invertieren Sie dabei die Jacobi-Matrizen nicht explizit, vgl. Vorlesung. Überprüfen Sie ihre Implementierung auf Korrektheit indem Sie `runtests.jl` ausführen.

```julia
# Snippet for backslash operator.
A = [-4 -1; 2 2]  # 2x2 matrix
b = [-3; 0]  # right-hand side
x = A\b  # solving the system of linear equations
A*x == b
```

d) (0.5 Punkte) Welche Bedingungen müssen erfüllt sein um Newton's Methode anzuwenden? Könnten andere Optimierungsmethoden, die in der Vorlesung besprochen wurden, verwendet werden? Wenn ja, beschreiben Sie die Unterschiede zwischen den Verfahren.

(5) (1 Punkt) Berechnen Sie die Arbeit W an einem Partikel welches sich im Uhrzeigersinn entlang $r(t) = (\cos(t) + 3, sin(t) - 3)^T$ für $0 \leq t < 2\pi$ bewegt im Vektorenfeld $F = [y, -x]^T$. Was würde passieren wenn sich die Orientierung des Partikels ändert? Passie Sie dazu die Parameter der Kurve an und berechnen Sie das neue Resultat.