

# Angewandte Mathematik

## Lösung Linearer Gleichungssysteme

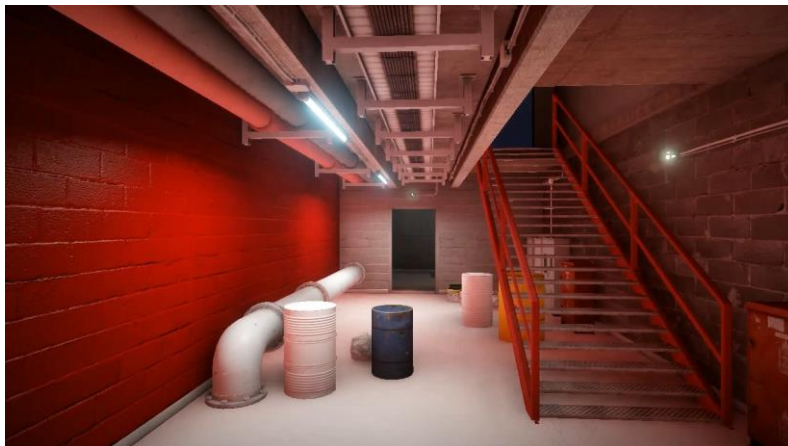
Univ.-Prof. Dr. Matthias Harders

Dr. Marcel Ritter

Sommersemester 2022



## Einführungsfilme



## Einführungsfilme

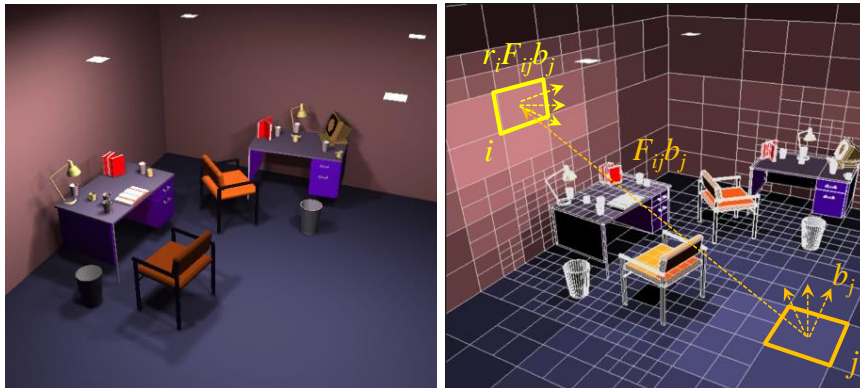


## Inhalt

- Einführung
- Matrixalgebra
- Direkte Verfahren
- Iterationsverfahren
- Liniensuchverfahren
- Konvergenz

## Radiosity (Computergrafik)

- Methode zur computerbasierten Berechnung der exakten Lichtverteilung bei diffusen Reflektionen



[Duke University]



Angewandte Mathematik für die Informatik – SS2022

4

## Radiosity-Gleichung

- Licht  $x_i$  (eigentlich Strahlungsleistung) einer Fläche  $i$

$$x_i = b_i + r_i \sum_{j=1}^n x_j F_{ij} \quad 1 \leq i \leq n$$

mit Variablen/Parametern:

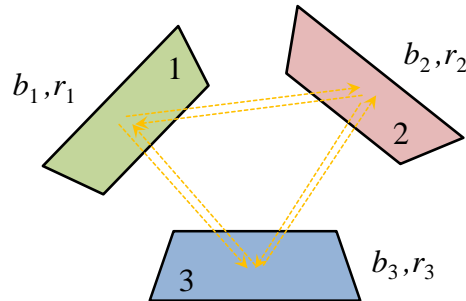
- Mögliche Eigenstrahlung  $b_i$  (für eine Lichtquelle)
- Formfaktor  $F_{ij}$  (gemäß Szenengeometrie; z.B. Verdeckungen, Distanz, Orientierung) für Flächen  $i, j$  (insbesondere  $F_{ii} = 0$ )
- Reflexionskonstante  $r_i$  (diffuses Albedo)  $0 \leq r_i \leq 1$
- Vorherige Aufteilung der Szene in  $n$  Flächen, und Vorberechnung der Formfaktoren  $F_{ij}$



Angewandte Mathematik für die Informatik – SS2022

5

## Gleichungssystem – Beispiel



(nur zur  
Veranschau-  
lichung)

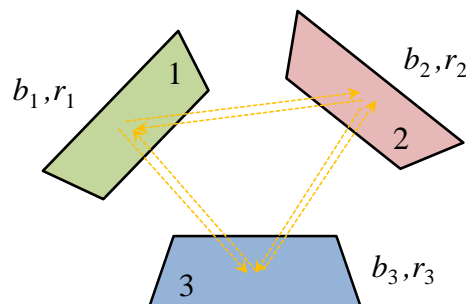
$$x_1 = b_1 + r_1 F_{12} x_2 + r_1 F_{13} x_3$$

$$x_2 = b_2 + r_2 F_{21} x_1 + r_2 F_{23} x_3$$

$$x_3 = b_3 + r_3 F_{31} x_1 + r_3 F_{32} x_2$$



## Gleichungssystem – Beispiel



(nur zur  
Veranschau-  
lichung)

$$\begin{bmatrix} 1 & -r_1 F_{12} & -r_1 F_{13} \\ -r_2 F_{21} & 1 & -r_2 F_{23} \\ -r_3 F_{31} & -r_3 F_{32} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$



## Allgemeines Gleichungssystem

- Lösung zur Bestimmung der Unbekannten  $x_i$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -r_1 F_{12} & \cdots & -r_1 F_{1n} \\ -r_2 F_{21} & 1 & \cdots & -r_2 F_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -r_n F_{n1} & -r_n F_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

- Lineares Gleichungssystem  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$
- Nach Lösung hinsichtlich  $\mathbf{x}$ , können Bilder der Szene gemäß der bestimmten Strahlungsleistung erzeugt werden (für beliebige Kamerapositionen)



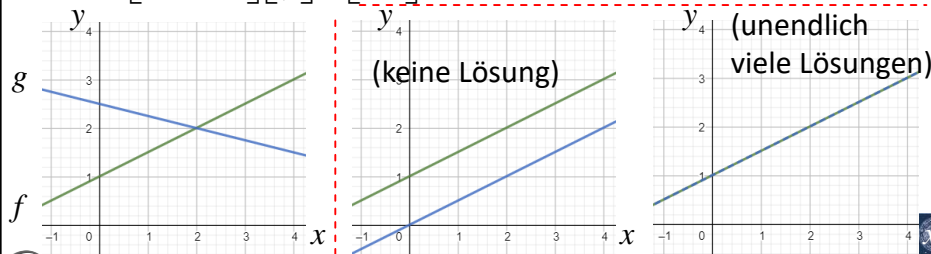
## Geometrie

- Gesucht: Schnittpunkt von Geraden in 2D, z.B.

$$f(x): y = 0.5x + 1 \quad g(x): y = -0.25x + 2.5$$

- Lösung z.B. über lineares Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} -0.5 & 1 \\ 0.25 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2.5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$



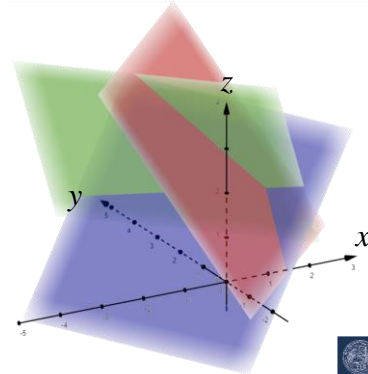
## Geometrie

- Gesucht: Schnittpunkt von drei Ebenen in 3D, z.B.

$$p_1: x + y + z - 4 = 0 \quad p_2: x - y + z - 2 = 0 \quad p_3: 2x + y - 2z - 1 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$



## Option Lösungsverfahren

- Lösung z.B. mit Cramerscher Regel (VL Lineare Algebra)
- Annahme: Matrix **A** quadratisch und invertierbar

$$x_i = \frac{\det(\mathbf{A}[i])}{\det(\mathbf{A})}$$

wobei Matrix **A**[*i*] gegeben ist durch Ersetzen der *i*-ten Spalte **a**<sub>*i*</sub> der Matrix **A** mit Vektor **b**

- Beispiel:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}} = 12/8 = 1.5$$



## Herleitung

- Für ein lineares Gleichungssystem  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  gilt:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}[1] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \mathbf{A}[1]$$



## Herleitung

- Weiters gilt:

$$\det(\mathbf{X}[1]) = \begin{vmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = x_1$$

somit

$$\det(\mathbf{A}) \cdot x_1 = \det(\mathbf{A}[1]) \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{\det(\mathbf{A}[1])}{\det(\mathbf{A})}$$

(Berechnung für andere  $x_i$  analog)



## Lineare Gleichungssysteme (LGS)

- System von Gleichungen mit ausschließlich Linearkombinationen der unbekannten Werte  $x_i$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

mit  $n$  Unbekannten  $x_i$  in  $m$  Gleichungen, bekannten (hier reellen) Koeffizienten  $a_{ij}$ , sowie Werten der rechten Seite  $b_i$  (siehe auch VL Lineare Algebra)



## Lineare Gleichungssysteme (LGS)

- LGS ist homogen, wenn alle  $b_i = 0$  (in diesem Fall existiert die triviale Lösung  $x_i = 0$ ), sonst inhomogen
- Generell werden die Gleichungen in Matrix-/Vektorschreibweise zusammengefasst zu:  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ , mit der Koeffizientenmatrix  $\mathbf{A}$  bestehend aus Elementen  $a_{ij}$
- Gemäß Konvention bezeichnet  $i$  Zeilen,  $j$  Spalten
- Es kann überbestimmte:  $m > n$ , unterbestimmte:  $m < n$ , sowie quadratische:  $m = n$  Systeme geben
- Passende Verfahren können gemäß Eigenschaften der Matrix  $\mathbf{A}$  ausgewählt werden





## Arten von Matrizen

- Für eine reelle, quadratische  $n \times n$  Matrix  $\mathbf{A}$ 
  - Inverse Matrix  $\mathbf{A}^{-1}$ :  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$  (Identitätsmatrix  $\mathbf{I}$ )
  - Orthogonalmatrix:  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$  (somit  $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$ )
  - Symmetrische Matrix:  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$  (elementweise  $a_{ij} = a_{ji}$ )
  - Schiefsymmetrische Matrix:  $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$  (elementweise  $a_{ij} = -a_{ji}$ )
  - Diagonalmatrix:  $a_{ij} = 0$ , für  $i \neq j$
  - Tridiagonalmatrix:  $a_{ij} = 0$ , für  $|i - j| > 1$
  - Obere (Untere) Dreiecksmatrix:  $a_{ij} = 0$ , falls  $i > j$  ( $i < j$ )
  - Normierte Dreiecksmatrix, zusätzlich:  $a_{ii} = 1$
  - Positive Matrix:  $a_{ij} > 0$ , für alle  $i, j$
  - Dünnbesetzte Matrix: viele  $a_{ij} = 0$  (z.B. Anzahl  $O(n)$ )



## Determinanten

- Determinante einer reellen, quadratischen  $n \times n$  Matrix  $\mathbf{A}$ , z.B. gemäß Laplace'schem Entwicklungssatz

$$\det(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det(\mathbf{A}_{ij}) \quad \det(a) = a$$

mit  $\mathbf{A}_{ij}$  gegeben durch Streichung von Zeile  $i$ , Spalte  $j$

- Regel von Sarrus speziell für  $3 \times 3$  Matrizen:

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ - & - & - & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13} + \dots$$



## Determinanten – Eigenschaften

- Für Determinanten von reellen, quadratischen  $n \times n$  Matrizen **A** und **B** gilt:
  - $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B})$
  - $\det(c\mathbf{A}) = c^n \det(\mathbf{A})$
  - $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T)$
  - Dreiecksmatrix **A**:  $\det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^n a_{ii}$
  - $\det(\mathbf{I}) = 1$
  - Linear abhängige Spalten/Zeilen:  $\det(\mathbf{A}) = 0$   
(Matrix nicht invertierbar)
  - Invertierbare Matrix:  $\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}$



## Determinanten – Operationen

- Für Determinanten von reellen, quadratischen  $n \times n$  Matrizen **A** und **B** gilt, falls sich **B** aus **A** ergibt durch:
  - Tausch zweier Zeilen/Spalten in **A**:  $\det(\mathbf{A}) = -\det(\mathbf{B})$
  - Addition eines Vielfachen einer Zeile/Spalte zu einer anderen in **A**:  $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{B})$
  - Multiplikation einer Zeile/Spalte in **A** mit Konstante  $c$ :  
 $\det(\mathbf{A}) = c \cdot \det(\mathbf{B})$
- Falls Matrizen **A**, **B**, **C** bis auf eine Reihe/Spalte identisch sind, und **C** die Summe der Reihen/Spalten aus **A**, **B** aufweist, dann gilt:  $\det(\mathbf{C}) = \det(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{B})$



## Eigenwerte, Eigenvektoren

- Für eine reelle, quadratische  $n \times n$  Matrix  $\mathbf{A}$  ist ein Vektor  $\mathbf{v}_i \neq \mathbf{0}$  ein Eigenvektor von  $\mathbf{A}$ , wenn mit einem zugehörigen Eigenwert  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  gilt:  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$  (d.h. nur Skalierung; die Richtung wird beibehalten)
- Insbesondere gilt dann:  $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}) \cdot \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$
- Da  $\mathbf{v}_i \neq \mathbf{0}$  angenommen wird, existiert für dieses LGS eine Lösung wenn  $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = p_{\mathbf{A}}(\lambda) = 0$
- Die Eigenwerte  $\lambda_i$  sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms  $p_{\mathbf{A}}(\lambda)$
- Matrix  $\mathbf{A}$  hat höchstens  $n$  verschiedene Eigenwerte



## Rechenbeispiel

- Gesucht: Eigenwerte/-vektoren einer  $3 \times 3$  Matrix  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

- Ermittlung der Eigenwerte als Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\begin{aligned}
 p_{\mathbf{A}}(\lambda) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 & 1 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 1 & -3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(-2-\lambda) - 3(-3) - (-2-\lambda)(-3) \\
 &= (4-4\lambda+\lambda^2)(-2-\lambda) - 6 + 2 + \lambda + 6 - 3\lambda + 6 - 3\lambda \\
 &= -\lambda(\lambda-1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = 1
 \end{aligned}$$



## Rechenbeispiel

- Bestimmung der Eigenvektoren über Einsetzen der Eigenwerte, z.B.  $\lambda_2 = 1$

$$\begin{bmatrix} 2-1 & -3 & 1 \\ 1 & -2-1 & 1 \\ 1 & -3 & 2-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{2,x} \\ v_{2,y} \\ v_{2,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{z.B.}) \Rightarrow \begin{bmatrix} v_{2,x} \\ v_{2,y} \\ v_{2,z} \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad c \neq 0$$

- Überprüfen durch Einsetzen, z.B.

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot \mathbf{v}_2$$



## Matrizen – Eigenschaften

- Eine  $n \times n$  Matrix  $\mathbf{A}$  ist positiv-definit (bzw. -semidefinit), falls  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ , gilt  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$  (bzw.  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0$ )
- Eine symmetrische  $n \times n$  Matrix ist positiv-definit (bzw. -semidefinit), wenn alle Eigenwerte  $\lambda_i > 0$  (bzw.  $\lambda_i \geq 0$ )
- Eine  $n \times n$  Matrix  $\mathbf{A}$  ist (strikt) diagonaldominant, falls für alle Zeilen  $i = 1, \dots, n$  gilt:

$$\sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| < |a_{ii}|$$

- Eine symmetrische, diagonaldominante Matrix  $\mathbf{A}$  mit Diagonalwerten  $a_{ii} \geq 0, 1 \leq i \leq n$  ist positiv-semidefinit



## Direkte Lösungsverfahren

- Ziel: Lösung des linearen Gleichungssystems  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ , mit  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , nach dem unbekannten Vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
- In einem direkten Verfahren wird der Lösungsvektor in einer voraussagbaren Anzahl von vorgegebenen Rechenschritten bestimmt
- Beispiel: Gauß-Verfahren (siehe VL Lineare Algebra)
- Generelles Vorgehen: Umformung des Gleichungssystems durch elementare Schritte (z.B. Addition von Zeilen, Permutation), unter Beibehaltung der Lösung
- Gauß-Verfahren benötigt  $2n^3/3 + O(n^2)$  Operationen



## Elementare Umformungen

- Eine Permutationsmatrix  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  weist je Zeile und Spalte nur einen Eintrag 1 auf, alle anderen sind 0
- Eine Elementarmatrix  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ergibt sich aus der Einheitsmatrix  $\mathbf{I}$  durch Änderung nur eines Wertes oder durch Vertauschen zweier Zeilen/Spalten dieser
- Durch Linksmultiplikation wird elementar umgeformt
- Beispiel: Tausch (Permutation) zweier Zeilen (2 & 3)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$



## Elementare Umformungen

- Beispiel: Addition des  $-2$ -fachen von Zeile 2 zu 1

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

- Beispiel: Skalierung einer Zeile (hier Zeile 3 mit 2)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

- Spaltenumformungen durch Rechtsmultiplikationen



## LU-Zerlegung

- Zerlegung einer invertierbaren Matrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  in eine untere und obere Dreiecksmatrix  $\mathbf{L}$  und  $\mathbf{U}$ :

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U} \quad (\text{eindeutig falls z.B. alle } u_{ii} = 1, \text{ d.h. } \mathbf{U} \text{ normiert})$$

- Beispiel in  $\mathbb{R}^{3 \times 3}$  (ohne Normierung)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

- Danach Lösung von  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  über Vor- bzw. Rückwärts einsetzen, via  $\mathbf{L}\mathbf{y} = \mathbf{b}$  und danach  $\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ , da

$$\mathbf{L}\mathbf{y} = \mathbf{L}\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$



## LU-Zerlegung

- Berechnung der LU-Zerlegung analog zum Gauß-Verfahren mittels elementarer Umformungen
- Zentrales Element: Nullsetzen aller Einträge unter der Diagonalen über Linksmultiplikation mit Matrix  $\mathbf{L}_{(0)}[j]$

$$\mathbf{L}_{(0)}[j] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ & & 1 & \vdots \\ \vdots & & l_{j+1,j} & \ddots & 0 \\ & & \vdots & \ddots & \\ 0 & l_{n,j} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{(Frobeniusmatrix)} \\ l_{i,j} = -\frac{a_{ij}}{a_{jj}} \\ \mathbf{L}_{(0)}\mathbf{A} = \mathbf{A}_{(1)} \end{array}$$



## LU-Zerlegung

- Beispiel in  $\mathbb{R}^{3 \times 3}$  (Nullsetzen der Einträge der 1. Spalte unter der Diagonalen)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a_{21}/a_{11} & 1 & 0 \\ -a_{31}/a_{11} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ (-a_{21}/a_{11})a_{11} + a_{21} & \cdot & \cdot \\ (-a_{31}/a_{11})a_{11} + a_{31} & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{(1)}$$

- Weiterführen für neue Spalte  $j$  der neuen Matrix  $\mathbf{A}_{(1)}$  mit entsprechend angepasster Matrix  $\mathbf{L}_{(1)}[j]$



## LU-Zerlegung

- Nach  $n-1$  Schritten sind alle Einträge unter der Diagonalen in  $\mathbf{A}_{(n-1)}$  gleich Null, und wir haben
 
$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \mathbf{L}_{(0)}^{-1} \mathbf{L}_{(0)} \mathbf{A} = \mathbf{L}_{(0)}^{-1} \mathbf{A}_{(1)} = \mathbf{L}_{(0)}^{-1} \mathbf{L}_{(1)}^{-1} \mathbf{L}_{(1)} \mathbf{A}_{(1)} = \mathbf{L}_{(0)}^{-1} \mathbf{L}_{(1)}^{-1} \mathbf{A}_{(2)} \\ &= \mathbf{L}_{(0)}^{-1} \mathbf{L}_{(1)}^{-1} \dots \mathbf{L}_{(n-1)}^{-1} \cdot \mathbf{A}_{(n-1)} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}\end{aligned}$$
- Da die Bildung von  $\mathbf{L}_{(k)}[j]$  erfordert, dass der Diagonaleintrag  $a_{jj}^{(k)}$  nicht Null ist, müssen die Zeilen der Matrix  $\mathbf{A}_{(k)}$  ggbs. permutiert werden
- LU-Zerlegung benötigt auch  $2n^3/3 + O(n^2)$  Operationen
- Verfahren kann u.a. auch dazu verwendet werden, um z.B.  $\mathbf{A}^{-1}$  oder  $\det(\mathbf{A})$  zu bestimmen



## Cholesky-Zerlegung

- Spezialfall: Zerlegung einer symmetrischen positiv-definiten Matrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , mittels Dreiecksmatrix  $\mathbf{L}$

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$$

- Beispiel in  $\mathbb{R}^{3 \times 3}$

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} l_{11}^2 & l_{21}l_{11} & l_{31}l_{11} \\ l_{21}l_{11} & l_{21}^2 + l_{22}^2 & l_{31}l_{21} + l_{32}l_{22} \\ l_{31}l_{11} & l_{31}l_{21} + l_{32}l_{22} & l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$





## Cholesky-Zerlegung

- Fortsetzung des Beispiels; wir erhalten hier für  $\mathbf{L}$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \pm\sqrt{a_{11}} & 0 & 0 \\ a_{21}/l_{11} & \pm\sqrt{a_{22}-l_{21}^2} & 0 \\ a_{31}/l_{11} & (a_{32}-l_{31}l_{21})/l_{22} & \pm\sqrt{a_{22}-l_{31}^2-l_{32}^2} \end{bmatrix}$$

- Somit allgemein (mit  $n^3/3 + O(n^2)$  Operationen):

$$l_{jj} = \pm\sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2} \quad l_{ij} = \frac{1}{l_{jj}} \left( a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk} \right) \quad \text{für } i > j$$

- Berechnung spaltenweise, beginnend mit  $j = 1$



## Iterationsverfahren

- Ziel: Lösung des linearen Gleichungssystems  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ , mit  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , nach dem unbekannten Vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
- In einem Iterationsverfahren wird der Lösungsvektor durch die wiederholte Anwendung einer Vorschrift sukzessive angenähert

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = f(\mathbf{x}^{(k)}) \quad k \geq 0$$

- Die Iteration beginnt mit einem Startvektor  $\mathbf{x}^{(0)}$  und ergibt eine Folge von Näherungen  $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots$
- In vielen Verfahren ist die Operation  $f$  durch eine Iterationsmatrix  $\mathbf{C}$  gegeben, so dass  $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}^{(k)}$



## Abbruchkriterien

- Eine Iteration wird abgebrochen, wenn ein  $\mathbf{x}^{(k)}$  nahe genug an  $\mathbf{x}$  ist, gemäß eines gewählten Kriteriums
- Der absolute Fehler in einem Schritt:  $\mathbf{e}^{(k)} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}$
- Da aber  $\mathbf{x}$  nicht bekannt ist, könnte statt dessen z.B. das Residuum untersucht werden:

$$\mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)} \quad (\text{z.B. Testen ob } \|\mathbf{r}^{(k)}\| < \varepsilon)$$

- Insbesondere gilt auch:  $\mathbf{A}\mathbf{e}^{(k)} = \mathbf{r}^{(k)}$
- Für die exakte Lösung  $\mathbf{x}$  ist  $\mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{0}$ , bzw.  $\|\mathbf{r}^{(k)}\| = 0$
- Alternative: Testen ob z.B.  $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\| < \varepsilon$
- Aber: Tests evtl. positiv, auch wenn  $\mathbf{x}^{(k)}$  nicht nahe  $\mathbf{x}$



## Allgemeine Splitting-Verfahren

- In mehreren Verfahren wird die Matrix  $\mathbf{A}$  unterteilt in  $\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N}$ , wobei  $\mathbf{M}$  leicht invertierbar sein sollte
- Ein Iterationsverfahren ist dann gegeben als:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{N} \cdot \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}) \quad k \geq 0$$

- Häufige Startaufteilung ist  $\mathbf{A} = \mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U}$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$



## Jacobi-Verfahren

- Ausgangspunkt: lineares Gleichungssystem

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \mathbf{b}$$

- Betrachtung separater Zeile  $i$ , Separieren von  $x_i$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i$$

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij}x_j \right) \quad a_{ii} \neq 0$$



## Jacobi-Verfahren

- Iterationsvorschrift für einzelne Unbekannte

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right) \quad i = 1, \dots, n$$

mit gewählten Startwerten  $x_i^{(0)}$

- Matrixschreibweise

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{D}^{-1} \left( \mathbf{b} - (\mathbf{A} - \mathbf{D})\mathbf{x}^{(k)} \right) = \mathbf{D}^{-1} \left( \mathbf{b} - (\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x}^{(k)} \right)$$

- Konvergenz garantiert für strikt diagonaldominante Matrizen  $\mathbf{A}$
- Parallelisierbar, erfordert aber separate Speicherung der alten und neuen Werte  $\mathbf{x}^{(k)}$  und  $\mathbf{x}^{(k+1)}$



## Gauß-Seidel-Verfahren

- Überlegung: bei sequentiell, zeilenweisem Vorgehen, sind in Zeile  $i$  die Werte  $x_j, j=1, \dots, i-1$  schon berechnet und können direkt verwendet werden

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right) \quad i = 1, \dots, n$$

- Matrixschreibweise (inkl. Umformung)

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{b} - \mathbf{L}\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{U}\mathbf{x}^{(k)})$$

$$\mathbf{D}\mathbf{x}^{(k+1)} + \mathbf{L}\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{b} - \mathbf{U}\mathbf{x}^{(k)}$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1} (\mathbf{b} - \mathbf{U}\mathbf{x}^{(k)})$$



## Gauß-Seidel-Verfahren

- Aufgrund der sequentiellen Ausführung nicht direkt parallelisierbar
- Speicherung alter und neuer Werte im gleichen Vektor
- Ein Schritt des Jacobi- bzw. Gauß-Seidel-Verfahrens erfordert  $O(n^2)$  Operationen, bis zur Konvergenz sind aber mehrere Schritte notwendig
- In vielen Fällen konvergiert das Gauß-Seidel-Verfahren schneller als das Jacobi-Verfahren
- Konvergenz wiederum garantiert für strikt diagonal-dominante Matrizen  $\mathbf{A}$



## SOR-Verfahren

- Successive Over-Relaxation variiert das Gauß-Seidel-Verfahren über eine gewichtete Kombination der letzten Näherung und eines Gauß-Seidel-Schrittes

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right) \quad i=1,\dots,n$$

mit einem Parameter  $0 < \omega < 2$

- Matrixschreibweise (inkl. Umformung)

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (1-\omega)\mathbf{x}^{(k)} + \omega\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{L}\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{U}\mathbf{x}^{(k)})$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (\mathbf{D} + \omega\mathbf{L})^{-1}(\omega\mathbf{b} - (\omega\mathbf{U} + (\omega-1)\mathbf{D})\mathbf{x}^{(k)})$$



## SOR-Verfahren

- Falls  $\mathbf{A}$  symmetrisch und positiv-definit, ist die Konvergenz für  $0 < \omega < 2$  garantiert
- Die Konvergenz hängt von Parameter  $\omega$  ab ( $\omega = 1$  ergibt Gauß-Seidel-Verfahren); in der Regel bessere Konvergenz als Jacobi- und Gauß-Seidel-Verfahren
- Für bestimmte Probleme existiert ein optimaler Relaxationsparameter, für Systemmatrix  $\mathbf{M} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})$ , sowie deren Spektralradius  $\rho$  (siehe unten)

$$\omega_{opt} = 1 + \frac{\rho(\mathbf{M})^2}{\left(1 + \sqrt{1 - \rho(\mathbf{M})^2}\right)^2}$$



## Weitere Anmerkungen

- Auswahl Verfahren gemäß Koeffizientenmatrix, sowie auch Problemgröße (direkt bei kleineren  $n$ ) und -art
- Rechenfehler problematisch für direkte Verfahren
- Falls  $\mathbf{A}$  fix,  $\mathbf{b}$  wechselnd, eignen sich direkte Verfahren
- Heutzutage oft Verwendung von Multigrid-Verfahren
- Zur Lösung großer Gleichungssysteme bietet sich die Verwendung von Präkonditionierern an
- In der Praxis Nutzung vorhandener Pakete, z.B. BLAS, LAPACK (programmiert in FORTRAN, mit C-Bindungen)



## Problemformulierung

- Falls  $n \times n$  Matrix  $\mathbf{A}$  positiv-definit, symmetrisch und dünn besetzt ist (d.h. viele Nulleinträge), bietet sich die Verwendung spezieller Verfahren an
- Kernidee: Bestimmung von  $\mathbf{x}$  über Lösung eines äquivalenten Minimierungsproblems
- Ziel: Minimierung des Funktionals
 
$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{b}$$
- Hierzu häufig verwendet: Verfahren der konjugierten Gradienten (CG-Verfahren)



## Problemformulierung

- Gradient des Funktionals (mit symmetrischem  $\mathbf{A}$ )

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T + \mathbf{A}) - \mathbf{b} = \mathbf{Ax} - \mathbf{b}$$

- Insbesondere gilt auch:

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}$$

- Für ein  $\mathbf{x}^*$ , das  $f$  minimiert gilt:

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} = \mathbf{Ax}^* - \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Ax}^* = \mathbf{b}$$

somit ist  $\mathbf{x}^*$  eine Lösung des linearen Gleichungssystems



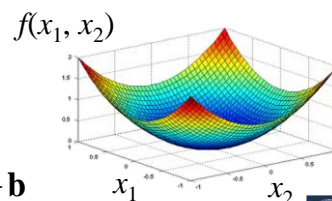
## Gradient – 2D Beispiel

- Funktional  $f$  in  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{Ax} - \mathbf{bx} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} (a_{11}x_1^2 + 2a_{21}x_1x_2 + a_{22}x_2^2) - b_1x_1 - b_2x_2 \end{aligned}$$

- Gradient

$$\begin{aligned} \nabla f(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 - b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 - b_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \mathbf{Ax} - \mathbf{b} \end{aligned}$$



## LinienSuchverfahren

- Im LinienSuchverfahren werden sukzessiv Suchschritte zur Lösung vorgenommen:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha^{(k)} \mathbf{p}^{(k)} \quad k \geq 0$$

mit Startwert  $\mathbf{x}^{(0)}$ , Suchrichtung(en)  $\mathbf{p}^{(k)}$ , sowie Schrittweite(en)  $\alpha^{(k)} > 0$

- Jeder Schritt sollte sich der exakten Lösung nähern

$$f(\mathbf{x}^{(k+1)}) < f(\mathbf{x}^{(k)})$$

- Eine Variante dieser Verfahren sind die Gradientenverfahren, in welchen die Suchrichtung(en) über den Gradienten des Funktionals bestimmt wird



## Verfahren des Steilsten Abstiegs

- Im einfachsten Fall erfolgt der Suchschritt in Richtung des negativen Gradienten

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha^{(k)} \mathbf{p}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k)} - \alpha^{(k)} \nabla f(\mathbf{x}^{(k)})$$

- Für den negativen Gradienten erhalten wir hier:

$$-\nabla f(\mathbf{x}^{(k)}) = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{r}^{(k)} \quad (\text{Residuum})$$

- Noch zu bestimmen: Schrittweite  $\alpha^{(k)}$  in Suchrichtung
- Idee:  $\alpha^{(k)}$  so wählen, dass das Funktional  $f(\mathbf{x}^{(k+1)})$  im nächsten Schritt minimal wird





## Bestimmung der Schrittweite

- Das Funktional  $f(\mathbf{x}^{(k+1)})$  soll abhängig vom Wert  $\alpha^{(k)}$  minimiert werden, somit

$$\frac{d}{d\alpha^{(k)}} f(\mathbf{x}^{(k+1)}) = \frac{d}{d\alpha^{(k)}} f(\mathbf{x}^{(k)} + \alpha^{(k)} \mathbf{p}^{(k)}) = 0$$

- Nach Anwendung der multivariaten Kettenregel

$$\nabla f(\mathbf{x}^{(k+1)})^T \frac{d}{d\alpha^{(k)}} \mathbf{x}^{(k+1)} = 0$$

$$-\left(\mathbf{r}^{(k+1)}\right)^T \frac{d}{d\alpha^{(k)}} \left(\mathbf{x}^{(k)} + \alpha^{(k)} \mathbf{p}^{(k)}\right) = 0 \quad \text{mit } \mathbf{p}^{(k)} = \mathbf{r}^{(k)}$$

$$\left(\mathbf{r}^{(k+1)}\right)^T \mathbf{r}^{(k)} = 0$$



## Bestimmung der Schrittweite

- Weitere Umformungen

$$\left(\mathbf{r}^{(k+1)}\right)^T \mathbf{r}^{(k)} = 0 \quad \text{mit } \mathbf{r}^{(k+1)} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k+1)}$$

$$\left(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k+1)}\right)^T \mathbf{r}^{(k)} = 0 \quad \text{mit } \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha^{(k)} \mathbf{r}^{(k)}$$

$$\left(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{A}\alpha^{(k)} \mathbf{r}^{(k)}\right)^T \mathbf{r}^{(k)} = 0 \quad \text{mit } \mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)}$$

$$\left(\mathbf{r}^{(k)}\right)^T \mathbf{r}^{(k)} - \alpha^{(k)} \left(\mathbf{A}\mathbf{r}^{(k)}\right)^T \mathbf{r}^{(k)} = 0$$

$$\alpha^{(k)} = \frac{\left(\mathbf{r}^{(k)}\right)^T \mathbf{r}^{(k)}}{\left(\mathbf{A}\mathbf{r}^{(k)}\right)^T \mathbf{r}^{(k)}} = \frac{\left(\mathbf{r}^{(k)}\right)^T \mathbf{r}^{(k)}}{\left(\mathbf{r}^{(k)}\right)^T \mathbf{A}^T \mathbf{r}^{(k)}}$$



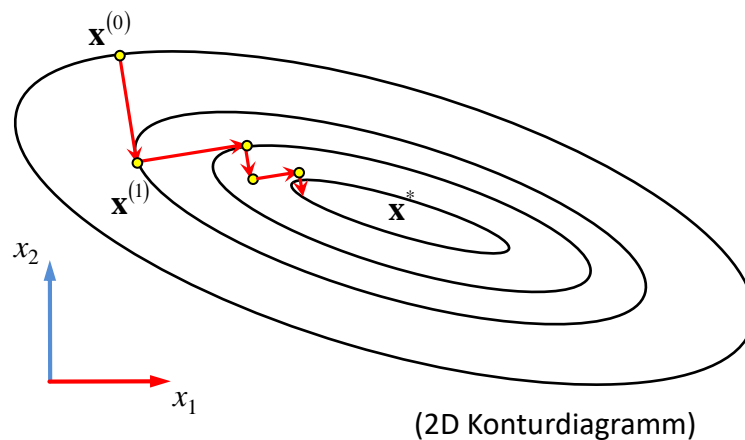
## Verfahren des Steilsten Abstiegs

- Iterationsverfahren (mit Startwert  $\mathbf{x}^{(0)}$ )
  - 1)  $\mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)}$
  - 2)  $\alpha^{(k)} = \frac{(\mathbf{r}^{(k)})^T \mathbf{r}^{(k)}}{(\mathbf{r}^{(k)})^T \mathbf{A} \mathbf{r}^{(k)}}$
  - 3)  $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha^{(k)} \mathbf{r}^{(k)}$
- Konvergenz eher langsam für schlecht konditionierte Matrizen  $\mathbf{A}$ , (d.h. wenn betragsmäßig das Verhältnis von größtem zu kleinstem Eigenwert groß)



## Visualisierung

- Beispiel Gradientensuche in  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$



## Verfahren der Konjugierten Gradienten

- Initialisierung:  $\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(0)}$ ,  $\mathbf{p}^{(0)} = \mathbf{r}^{(0)}$
- Iterationsverfahren
  - 1)  $\alpha^{(k)} = (\mathbf{r}^{(k)})^T \mathbf{r}^{(k)} / (\mathbf{p}^{(k)})^T \mathbf{A} \mathbf{p}^{(k)}$
  - 2)  $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha^{(k)} \mathbf{p}^{(k)}$
  - 3)  $\mathbf{r}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k)} - \alpha^{(k)} \mathbf{A} \mathbf{p}^{(k)}$
  - 4)  $\beta^{(k+1)} = (\mathbf{r}^{(k+1)})^T \mathbf{r}^{(k+1)} / (\mathbf{r}^{(k)})^T \mathbf{r}^{(k)}$
  - 5)  $\mathbf{p}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k+1)} + \beta^{(k+1)} \mathbf{p}^{(k)}$
- Lösung nach maximal  $n$  Schritten für  $n \times n$  Matrix



## Matrixnormen

- Eine Matrixnorm ist eine Abbildung auf dem Vektorraum der (reellen)  $n \times m$  Matrizen

$$\|\cdot\|: \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}_0^+, \mathbf{A} \rightarrow \|\mathbf{A}\|$$

- Eigenschaften (für  $n \times m$  Matrizen  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ , Skalare  $c$ ):

$$\|\mathbf{A}\| = 0 \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{0}^{n \times m}$$

$$\|c \cdot \mathbf{A}\| = c \cdot \|\mathbf{A}\|$$

$$\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\| \quad (\text{Dreiecksungleichung})$$

- Häufig wird auch Submultiplikativität gefordert

$$\|\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{B}\| \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times k}$$



## Matrixnormen

- Verschiedene Matrixnormen finden Anwendung, u.a.

- Frobeniusnorm  $\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |a_{ij}|^2}$

- Spaltensummennorm  $\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{j=1,\dots,m} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$

- Zeilensummennorm  $\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^m |a_{ij}|$

- Spektralnrm  $\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})}$   
(wobei  $\lambda_{\max}$  der betragsmäßig größte Eigenwert ist)



## Konditionszahl

- Die Konditionszahl einer reellen invertierbaren  $n \times n$  Matrix  $\mathbf{A}$  ist (für eine spezifische Matrixnorm):

$$\kappa(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\|$$

- Für symmetrische Matrizen  $\mathbf{A}$  ergibt sich, mit der Spektralnrm,  $\kappa(\mathbf{A})$  als Verhältnis des betragsmäßig größten zum betragsmäßig kleinsten Eigenwert

$$\kappa(\mathbf{A}) = |\lambda_{\max}(\mathbf{A}) / \lambda_{\min}(\mathbf{A})|$$

- Die Konditionszahl gibt z.B. Aufschluss darüber wie stark sich  $\mathbf{x}$  ändert, wenn eine Störung  $\Delta \mathbf{b}$  der rechten Seite  $\mathbf{b}$  vorliegt



## Spektralradius und Konvergenz

- Der Spektralradius einer reellen  $n \times n$  Matrix  $\mathbf{A}$  ist der Betrag des betragsmäßig größten Eigenwerts

$$\rho(\mathbf{A}) = \max_{i=1, \dots, n} |\lambda_i|$$

- Je näher  $\rho(\mathbf{A})$  bei 0, umso schneller die Konvergenz
- Konvergenz ist gegeben bei folgenden Verfahren:
  - Jacobi-Verfahren, wenn  $\rho(\mathbf{I} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}) < 1$
  - Gauß-Seidel-Verfahren, wenn  $\rho(\mathbf{I} - (\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}\mathbf{A}) < 1$
  - SOR-Verfahren, wenn  $\rho(\mathbf{I} - \omega((\mathbf{D} + \omega\mathbf{L}))^{-1}\mathbf{A}) < 1$



## Einige Hilfreiche Weblinks

- Basic Linear Algebra Subprograms (BLAS) – Bibliothek mit grundlegenden Operationen der linearen Algebra  
<http://www.netlib.org/blas/>
- Linear Algebra PACKage (LAPACK) – Bibliothek mit Implementierungen numerischer linearer Algebra  
<http://www.netlib.org/lapack/>
- Blitz++ (wissenschaftliches Rechnen in C++)  
<https://github.com/blitzpp/blitz>



## Vorlesungsplan

Datum	Thema	Proseminar
11.03.22	Einführung, Grundlagen, Funktionen	<i>(Beginn zuvor am 8.3.)</i>
18.03.22	Differentialrechnung	
25.03.22	Integralrechnung	
01.04.22	Differentialgleichungen	
08.04.22	Weitere Funktionen	
<i>Osterferien</i>		
29.04.22	Reihen und Folgen	
06.05.22	Numerische Auswertung von Funktionen	
13.05.22	Lösung von Gleichungssystemen	
20.05.22	Interpolation	
27.05.22	Zufallszahlen	
03.06.22	Komplexe Zahlen	
10.06.22	Klausurvorbereitung	
<b>01.07.22</b>	<b>Klausur</b>	