证明：考虑到分母比较复杂，我们尝试构造局部不等式，先证明 $1+a^3 \le \left(1+\frac{a^2}{2}\right)^2$，这 $\Leftrightarrow \frac{a^2(a-2)^2}{4} \ge 0$，显然成立。故只需证明

$$\frac{4a^2}{(2-b^2)(2-c^2)}+\frac{4b^2}{(2-c^2)(2-a^2)}+\frac{4c^2}{(2-a^2)(2+b^2)} \ge \frac{4}{3},$$

我们用 Σ、Π 符号简化表达式进行代数变形，上式 $\Leftrightarrow \sum a^2(a^2+2) \ge \frac{1}{3}\prod(a^2+2)$，展开后 $\Leftrightarrow 3\sum a^4+2\sum a^2 \ge 72-2\sum a^2b^2$。注意到 $\sum a^4 \ge \sum a^2b^2$，所以只需证

$\sum a^4+2\sum a^2 \ge 72$。由均值不等式知 $\sum a^4 \ge 3\sqrt[3]{(abc)^4}=48$，$\sum a^2 \ge 3\sqrt[3]{(abc)^2}=12$，所以上式成立，原不等式得证。

对话 23 局部不等式

你可能会问：此题的局部不等式是如何想到的？

局部不等式的目的非常明显：处理表达式的形式，更具体一点，就是消根号。你希望把 $\sqrt{1+b^3}$ 放缩成某个不带根号的表达式，即 $1+b^3 \le f^2(b)$（只能往大的方向放缩，否则没用，参考推荐阅读 3）。

最自然的想法，就是让 $f(b)$ 是一个多项式，并且它的次数应该尽可能小，因为越小你处理起来越简单。最小就是 0 次，即 $f(b)$ 为常数，显然 $1+b^3 \le f^2(b)$ 在 b 很大的时候是不会成立的，0 次是行不通的。其次就是 1 次，此时 $1+b^3 \le f^2(b)$ 在 b 很大的时候也是不会成立的（左边三次右边两次）。所以 $f(b)$ 最小也是个二次多项式。

接下来我们考虑 $1+b^3 \le f^2(b)$ 等价的最终结论：$g(b) \ge 0$，反过来先猜 $g(b)$，再猜出 $f(b)$。这是合理的，因为 $f(b)$ 可取的情况，没有任何限制的信息，我们并没有好的入手点。相反，对于 $g(b) \ge 0$ 而言，它需要在 $b>0$ 时恒成立，并且在 $b=2$ 时取到等号（原命题是在 $a=b=c=2$ 时取等），你就很容易下手了。

你可以很快反应过来：$g(b)$ 应该有因式 $(b-2)$，并且由于 $g(b) \ge 0$ 在 $b>0$ 时恒成立，$b-2$ 应该是以偶数次出现的，即 $g(b)=(b-2)^2 g_1(b)$。最后 $g_1(b)$ 应该取什么呢？出于运算最简便的原则，以及前文说到 $f(b)$ 的次数至少为 2 次，则 $g_1(b)$ 至少 2 次，你自然会猜测 $g(b)=(b-2)^2 g_1(b)=(b-2)^2 b^2$，也就得到了解答中的局部不等式。

事实上，如果你运气没有那么好，那就只能待定参数了：根据 $g(b) \ge 0$ 在 $b>0$ 时恒成立，推出 $g_1(b)$ 应该是 $(b-t)^2$ 的形式，其中 t 为待定参数。接下来的目的，就是让 $(b-2)^2(b-t)^2 \ge 0$ 转化为 $1+b^3 \le f^2(b)$，关键因素是将 $(b-2)^2(b-t)^2$ 展开，一端保留 $1+b^3$，而另一端可以配方。待定系数并求解的过程，请你自己完成。