$$\left(a^2+b^2+c^2\right)^2>2\left(a^4+b^4+c^4\right)$$

求证：a、b、c可以作为某个三角形的三边长；

（2）设$n\ (n\geq 3)$个正实数$a_1,a_2,\cdots,a_n$满足

$$\left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\right)^2>(n-1)\left(a_1^4+a_2^4+\cdots+a_n^4\right)$$

求证：$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$中任意三个数都可以作为某个三角形的三边长.

证明：（1）原式等价于

$$2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)-\left(a^4+b^4+c^4\right)>0$$

上式左边$=4a^2b^2-\left(a^2+b^2-c^2\right)^2=\left(2ab-c^2+a^2+b^2\right)\left(2ab+c^2-a^2-b^2\right)$

$=\left((a+b)^2-c^2\right)\left(c^2-(a-b)^2\right)=(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)>0$

由对称性不妨设$a\geq b\geq c>0$，则上述乘积中前三项均大于0，故$b+c>a$，从而a、b、c可以作为某个三角形的三边长.

（2）由对称性只需对a_1,a_2,a_3证明即可，为此我们待定参数λ，由柯西不等式

$$\begin{aligned}(n-1)\left(a_1^4+a_2^4+\cdots+a_n^4\right)&<\left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\right)^2\\&=\left(\lambda\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)\cdot\frac{1}{\lambda}+a_4^2+\cdots+a_n^2\right)^2\\&\leq\left(\lambda^2\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)^2+a_4^2+\cdots+a_n^2\right)\left(\frac{1}{\lambda^2}+n-3\right)\end{aligned}$$

为使整理后能消去$a_4,\cdots,a_n$，取$\frac{1}{\lambda^2}+n-3=n-1$，即$\lambda=\frac{\sqrt{2}}{2}$，代入整理得

$$2\left(a_1^4+a_2^4+a_3^4\right)<\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)^2$$

这正是（1）的条件，从而a_1,a_2,a_3可以作为某个三角形的三边长，由对称性知原命题得证。

你可能已经注意到了，例 11（2）和例 7 有着相似之处，它们的题设条件是关于全体变量的不等式，得到的却是对部分变量的估计。两道题的解法也很相似，都是对要估计的变量单独处理，其余部分作为一个整体，是应当被消去的。

问题是，怎么消掉其余部分，只保留你要的a_1,a_2,a_3呢？解答是怎么想到的呢？

其实，解答来自于一个没啥用的放缩尝试：

$$(n-1)\left(a_1^4+a_2^4+\cdots+a_n^4\right)<\left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\right)^2\leq n\left(a_1^4+a_2^4+\ldots+a_n^4\right)$$

在这个放缩的基础上，你希望把除了a_1,a_2,a_3的部分全部抵消掉，这就需要放缩的结果是$(n-1)\left(a_1^4+a_2^4+\ldots+a_n^4\right)$，但这是不可能的，需要稍作一些改进：

$$(n-1)\left(a_1^4+a_2^4+\cdots+a_n^4\right)<\left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\right)^2\leq(n-1)\left(f\left(a_1,a_2,a_3\right)+a_4^4+\ldots+a_n^4\right)$$

结合你需要证明的命题，你当然希望$f\left(a_1,a_2,a_3\right)$包含类似$\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)^2$的式子，而且在柯西不等式中，$\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)^2$配给一个常数，开根号刚好就是$a_1^2+a_2^2+a_3^2$的形式，和$\left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\right)^2$比较接近。故$f\left(a_1,a_2,a_3\right)$可考虑取$\lambda\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)^2$。

将$\left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\right)^2\leq(n-1)\left(\lambda\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)^2+a_4^4+\ldots+a_n^4\right)$进一步凑成柯西不等式的形式，显然$a_4^4+\ldots+a_n^4$配给的常数都是1，于是得到下述变形：

$$\begin{aligned}\left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\right)^2&\leq(n-1)\left(\lambda\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)^2+a_4^4+\ldots+a_n^4\right)\\&=\left(2+\underbrace{1+1\ldots+1}_{n-3}\right)\left(\lambda\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)^2+a_4^4+\ldots+a_n^4\right)\end{aligned}$$

所以观察就能得到$\lambda=\frac{1}{2}$了。这是一个非常顺畅的柯西放缩。