Справочный материал

Определение и описание метода Гаусса

Метод преобразований Гаусса (также известный как преобразование методом последовательного исключения неизвестных переменных из уравнения или матрицы) для решения систем линейных уравнений представляет собой классический методом решения системы алгебраических уравнений (СЛАУ). Также этот классический метод используют для решения таких задач как получение обратных матриц и определения ранговости матрицы. Преобразование с помощью метода Гаусса заключается в совершении небольших (элементарных) последовательных изменениях системы линейных алгебраических уравнений, приводящих к исключению переменных из неё сверху вниз с образованием новой треугольной системы уравнений, являющейся равносильной исходной. Эта часть решения носит название прямого хода решения Гаусса, так как весь процесс осуществляется сверху вниз.

После приведения исходной системы уравнений к треугольной осуществляется нахождение всех переменных системы снизу вверх (то есть первые найденные переменные занимают находятся именно на последних строчках системы или матрицы). Эта часть решения известна также как обратный ход решения методом Гаусса. Заключается его алгоритм в следующем: сначала вычисляется переменные, находящиеся ближе всего к низу системы уравнений или матрицы, затем полученные значения подставляются выше и таким образом находится ещё одна переменная и так далее.

Описание алгоритма метода Гаусса

Последовательность действий для общего решения системы уравнения методом Гаусса заключается в поочередном применении прямого и обратного хода к матрице на основе СЛАУ. Пусть исходная система уравнений имеет следующий вид:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ \ldots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{cases}$$

Чтобы решить СЛАУ методом Гаусса, необходимо записать исходную систему уравнений в виде матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Матрица ***A*** называется основной матрицей и представляет собой записанные по порядку коэффициенты при переменных, а ***b*** называется столбцом её свободных членов. Матрица ***A***, записанная через черту со столбцом свободных членов называется расширенной матрицей:

$$A = \begin{array}{ccc|c} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ldots & \vdots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}$$

Теперь необходимо с помощью элементарных преобразований над системой уравнений (или над матрицей, так как это удобнее) привести её к следующему виду:

$$
\begin{cases}
\alpha_{1j_1} \cdot x_{j_1} + \alpha_{1j_2} \cdot x_{j_2} \ldots + \alpha_{1j_r} \cdot x_{j_r} + \ldots \alpha_{1j_n} \cdot x_{j_n} = \beta_1 \\
\alpha_{2j_2} \cdot x_{j_2} \ldots + \alpha_{2j_r} \cdot x_{j_r} + \ldots \alpha_{2j_n} \cdot x_{j_n} = \beta_2 \\
\ldots \\
\alpha_{rj_r} \cdot x_{j_r} + \ldots \alpha_{rj_n} \cdot x_{j_n} = \beta_r \\
0 = \beta_(r + 1) \\
\ldots \\
0 = \beta_m
\end{cases} \qquad (1)
$$

Матрица, полученная из коэффициентов преобразованной системы уравнения (1), называется ступенчатой, вот так обычно выглядят ступенчатые матрицы:

$$
A = \begin{array}{ccc|c}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\
0 & a_{22} & a_{23} & b_2 \\
0 & 0 & a_{33} & b_3
\end{array}
$$

Для этих матриц характерен следующий набор свойств:

1. Все её нулевые строки стоят после ненулевых
2. Если некоторая строка матрицы с номером ***k*** ненулевая, то в предыдущей строчке этой же матрицы нулей меньше, чем в этой, обладающей номером ***k***.

После получения ступенчатой матрицы необходимо подставить полученные переменные в оставшиеся уравнения (начиная с конца) и получить оставшиеся значения переменных.

Основные правила и разрешаемые преобразования при использовании метода Гаусса

При упрощении матрицы или системы уравнений этим методом нужно использовать только элементарные преобразования.

Таким преобразованиями считаются операции, которые возможно применять к матрице или системе уравнений без изменения её смысла:

- Перестановка нескольких строк местами,

- Прибавление или вычитание из одной строчки матрицы другой строчки из неё же,
- Умножение или деление строчки на константу, не равную нулю,
- Строчку, состоящую из одних нулей, полученную в процессе вычисления и упрощения системы, нужно удалить,
- Также нужно удалить лишние пропорциональные строчки, выбрав для системы единственную из них с более подходящими и удобными для дальнейших вычислений коэффициентами.

Все элементарные преобразования являются обратимыми.

Разбор трёх основных случаев, возникающих при решении линейных уравнений используя метод простых преобразований Гаусса

Различают три возникающих случая при использовании метода Гаусса для решения систем:

1. Когда система несовместная, то есть у неё нет каких-либо решений
2. У системы уравнений есть решение, причём единственное, а количество ненулевых строк и столбцов в матрице равно между собой.
3. Система имеет некое количество или множество возможных решений, а количество строк в ней меньше, чем количество столбцов

Исход решения с несовместной системой

Для этого варианта при решении матричного уравнения методом Гаусса характерно получение какой-то строчки с невозможностью выполнения равенства. Поэтому при возникновении хотя бы одного неправильного равенства полученная и исходная системы не имеют решений вне зависимости от остальных уравнений, которые они содержат. Пример несовместной матрицы:

$$
\left.\begin{array}{ccc|c}
2 & -1 & 3 & 0 \\
1 & 0 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right.
$$

В последней строчке возникло невыполняемое равенство***: 0*x_{31} + 0*x_{32} = 1***

Система уравнений, у которой есть только одно решение

Данные системы после приведения к ступенчатой матрице и удаления строчек с нулями имеют одинаковое количество строк и столбцов в основной матрице. Вот простейший пример такой системы:

$$
\begin{cases} x_1 - x_2 = -5 \\ 2 \cdot x_1 + x_2 = -7 \end{cases}
$$

Запишем её в виде матрицы:

$$
\left.\begin{array}{cc|c}
1 & -1 & -5 \\
2 & 1 & -7
\end{array}\right.
$$

Чтобы привести первую ячейку второй строчки к нулю, домножим верхнюю строку на **-2** и вычтем её из нижней строчки матрицы, а верхнюю строчку оставим в исходном виде, в итоге имеем следующее:

$$
\left.\begin{array}{cc|c}
1 & -1 & -5 \\
0 & 3 & 10
\end{array}\right.
$$

Этот пример можно записать в виде системы:

$$
\begin{cases} x_1 - x_2 = -5 \\ 3 \cdot x_2 = 10 \end{cases}
$$

Из нижнего уравнения выходит следующее значение: ***x_2 = 10/3; x_1 = 5/3***

Система, обладающая множеством возможных вариантов решений

Для этой системы характерно меньшее количество значащих строк, чем количество столбцов в ней (учитываются строки основной матрицы). Переменные в такой системе делятся на два вида: базисные и свободные. При преобразовании такой системы содержащиеся в ней основные переменные необходимо оставить в левой области до знака “=”, а остальные переменные перенести в правую часть равенства. У такой системы есть только некое общее решение. Разберём следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 + y_4 = 1 \\ 5y_3 - 4y_4 = 1 \end{cases}$$

Запишем в виде матрицы:

$$\left.\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & 1 \end{array}\right.$$

Наша задача найти общее решение системы. Для этой матрицы базисными переменными будут y_1 и y_3 (для y_1 - так как он стоит на первом месте, а в случае y_3 - располагается после нулей). В качестве базисных переменных выбираем именно те, которые первые в строке не равны нулю. Оставшиеся переменные называются свободными, через них нам необходимо выразить базисные. Используя так называемый обратный ход, разбираем систему снизу вверх, для этого сначала выражаем y_3 из нижней строчки системы:

$$5y_3 - 4y_4 = 1$$

$$5y_3 = 4y_4 + 1$$

$$y_3 = \frac{4/5}{y}{}_4 + \frac{1}{5}.$$

Теперь в верхнее уравнение системы $2y_1 + 3y_2 + y_4 = 1$ подставляем выраженное y_3: y_3: $2y_1 + 3y_2 - (\frac{4}{5}y_4 + \frac{1}{5}) + y_4 = 1$

Выражаем y_1 через свободные переменные y_2 и y_4 :

$$2y_1 + 3y_2 - \frac{4}{5}y_4 - \frac{1}{5} + y_4 = 1$$

$$2y_1 = 1 - 3y_2 + \frac{4}{5}y_4 + \frac{1}{5} - y_4$$

$$2y_1 = -3y_2 - \frac{1}{5}y_4 + \frac{6}{5}$$

$$y_1 = -1.5x_2 - 0.1y_4 + 0.6$$

Решение готово!