

Politechnika Warszawska
Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych



Modelowanie i identyfikacja

Maksymilian Łuc

rok akademicki 2024/25

Contents

1	Wprowadzenie	2
1.1	Cel projektu	2
1.2	Badany obiekt	2
2	Przebieg projektu	3
2.1	Identyfikacja modeli statycznych	3
2.1.1	Dane statyczne	3
2.1.2	Statyczny model liniowy	4
2.1.3	Statyczne modele nieliniowe	6
2.2	Identyfikacja modeli dynamicznych	11
2.2.1	Dane dynamiczne	11
2.2.2	Dynamiczne modele liniowe	12
3	Wnioski	18



1 Wprowadzenie

1.1 Cel projektu

1.2 Badany obiekt

2 Przebieg projektu

W tej sekcji został opisany przebieg projektu.

2.1 Identyfikacja modeli statycznych

W tej podsekcji opisane zostały modele statyczne.

2.1.1 Dane statyczne

Poniżej przedstawione zostały dane ze zbioru uczącego i weryfikującego. Danymi weryfikującymi zostały określone poprzez 30% losowo wybranych próbek z początkowego zbioru danych (danestat49.txt). Pozostałą część zbioru stanowiły dane uczące.

Poniżej przedstawiona została funkcja odpowiedzialna za podział danych.

```
1 def train_test_split_manual(u, y, test_size=0.3, random_state=None):
2     # obsługa zlych danych pomineta
3     if random_state is not None:
4         np.random.seed(random_state)
5
6     n_samples = len(u)
7     indices = np.arange(n_samples)
8     np.random.shuffle(indices)
9
10    split_idx = int(n_samples * (1 - test_size))
11
12    train_indices = indices[:split_idx]
13    val_indices = indices[split_idx:]
14
15    u_train = u[train_indices]
16    y_train = y[train_indices]
17    u_val = u[val_indices]
18    y_val = y[val_indices]
19
20    return u_train, u_val, y_train, y_val
```

Listing 1: Podział danych

Poniżej przedstawione zostały zbiory danych uczących i weryfikujących.

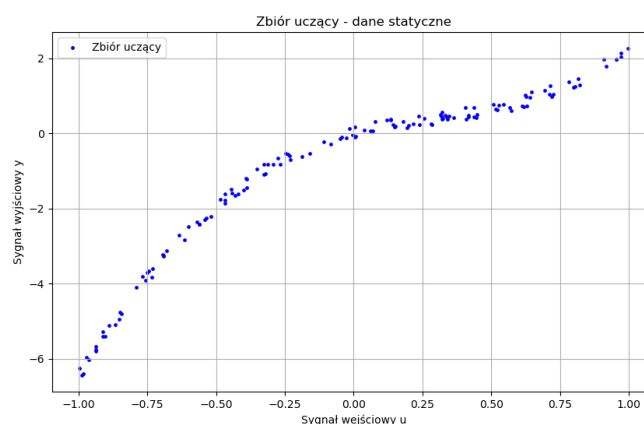


Figure 1: Dane ze zbioru uczącego

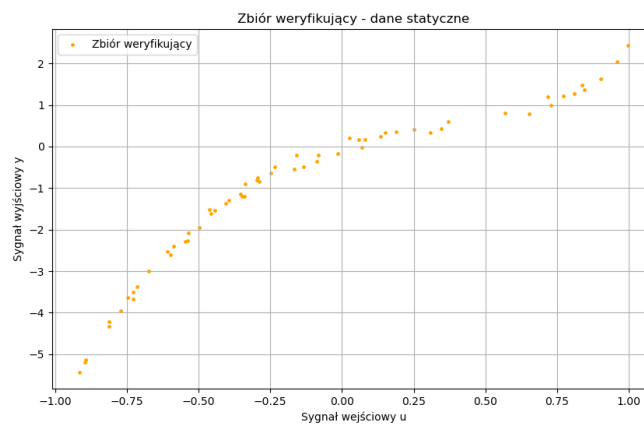


Figure 2: Dane ze zbioru weryfikującego

2.1.2 Statyczny model liniowy

W tej sekcji opisany został model liniowy obiektu.

Na podstawie uzyskanych parametrów a_0 i a_1 , model liniowy stara się przybliżyć zależność $y(u)$. Wykres charakterystyki modelu (czerwona linia) pokazuje, jak ta prosta dopasowuje się do danych. Można zauważyć, że dane wykazują pewną nieliniowość, której model liniowy z natury nie jest w stanie odwzorować. Wykresy dla danych uczących i weryfikujących przedstawione zostały poniżej.

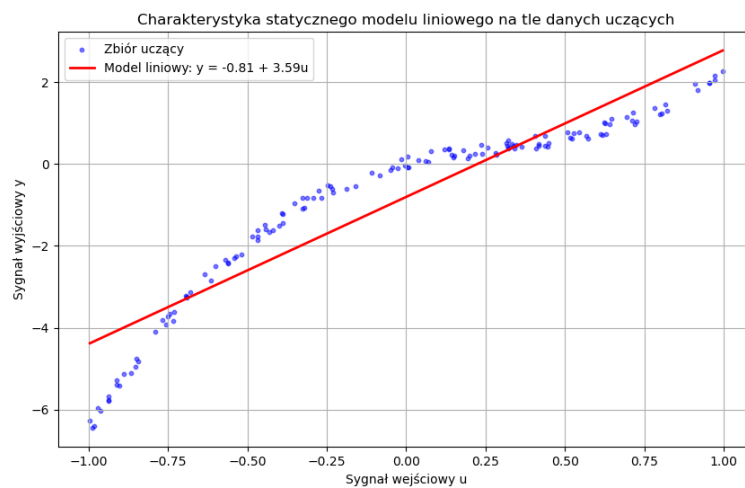


Figure 3: Wyjście modelu liniowego na tle danych uczących

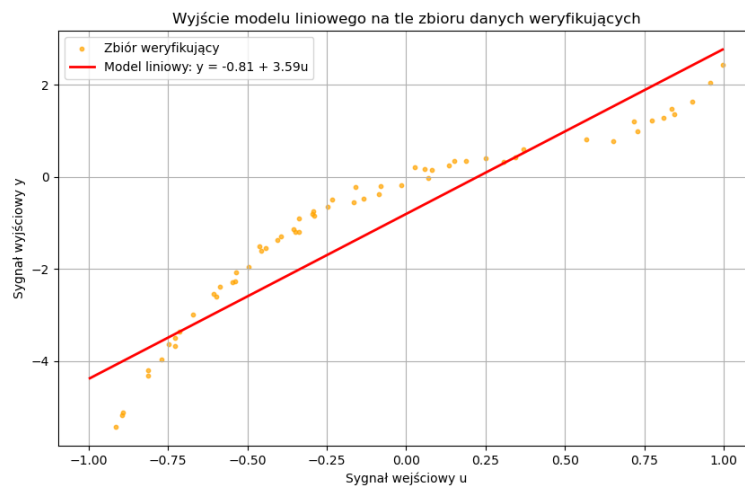


Figure 4: Wyjście modelu liniowego na tle danych weryfikujących

Poniżej przedstawiona została relacja danych weryfikujących i wyjścia modelu liniowego. Wykres ten pokazuje, jak blisko predykcje modelu leżą idealnej linii $y = x$. Rozrzut punktów wokół tej linii świadczy o niedoskonałościach modelu.

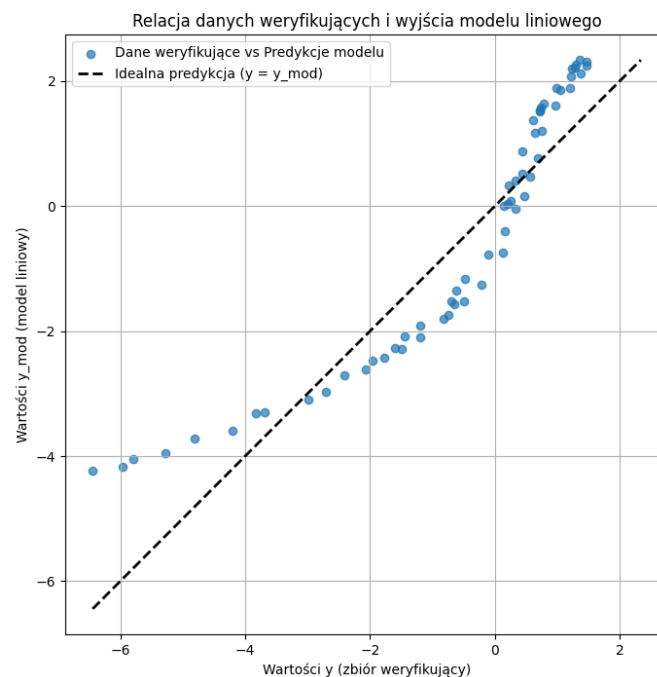


Figure 5: Relacja danych weryfikujących i wyjścia modelu liniowego

Błędy MSE wynoszą 0.5581 dla zbioru uczącego oraz 0.6664 dla weryfikującego.

Model zasymulowany został za pomocą poniższego kodu.

```
1 X_train = np.vstack([np.ones_like(u_train), u_train]).T
2 Y_train_col = y_train.reshape(-1, 1)
3
4 A_static_linear = np.linalg.solve(X_train.T X\_train, X\_train.T Y_train_col)
5 a0_linear = A_static_linear[0, 0]
6 a1_linear = A_static_linear[1, 0]
7
8 def predict_linear(u, a0, a1):
9     return a0 + a1 * u
```

Listing 2: Podział danych

2.1.3 Statyczne modele nieliniowe

W tej podsekcji opisane zostały statyczne modele nieliniowe. Poniżej przedstawione zostały modele nieliniowe kolejnych rzędów (od 2 do 5). Przedstawione zostały charakterystyki modeli nieliniowych dla danych wejściowych ze zbioru weryfikacyjnego na tle wyjściowych danych weryfikacyjnych.

Model 2 rzędu

Na poniższym wykresie przedstawiony został model nieliniowy drugiego rzędu.

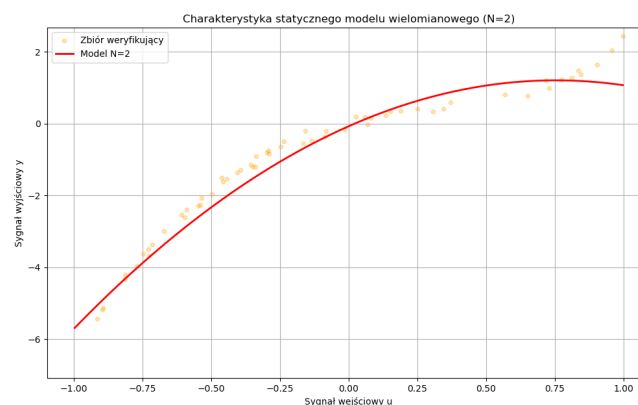


Figure 6: Charakterystyka statycznego modelu wielomianowego stopnia 2

Można zauważyć, że model nieliniowy drugiego rzędu prowadzi do lepszej generalizacji danych niż model liniowy, ale nie odzwierciedla w pełni charakterystyki modelu w pełnym zakresie danych. Poniżej przedstawiona została relacja y vs y_{mod} .

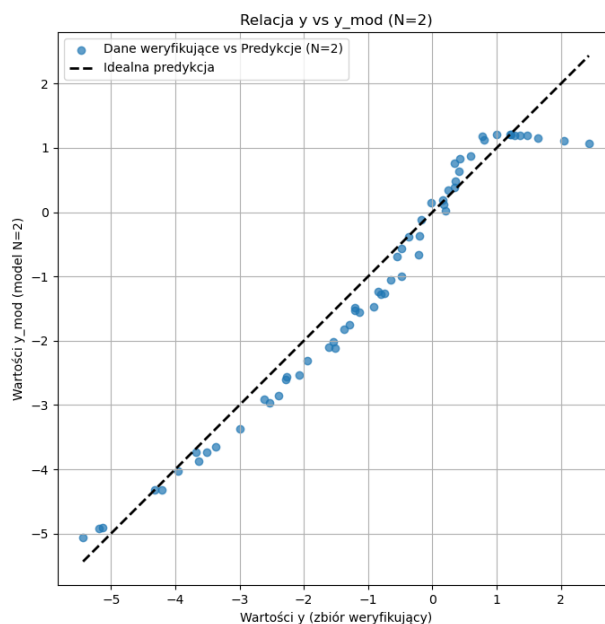


Figure 7: Relacja rzeczywistego wyjścia obiektu do przewidzianego modelem rzędu 2

Na powyższym wykresie zauważyć można wysoką niedokładność modelu w końcowym fragmencie danych.

Model 3 rzędu

Na poniższym wykresie przedstawiona została charakterystyka modelu nieliniowego 3. rzędu na tle danych weryfikujących.

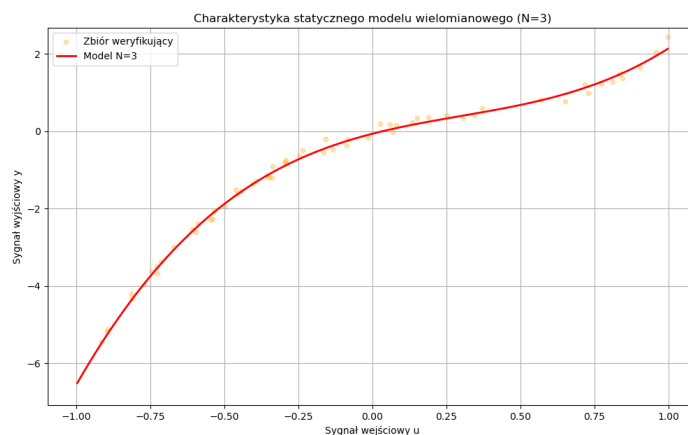


Figure 8: Charakterystyka statycznego modelu wielomianowego stopnia 3

Model ten znacznie dokładniej odzwierciedla zachowanie modelowanego obiektu. Zauważyć można znaczne zmniejszenie odchyłek pomiarów względem charakterystyki modelu.

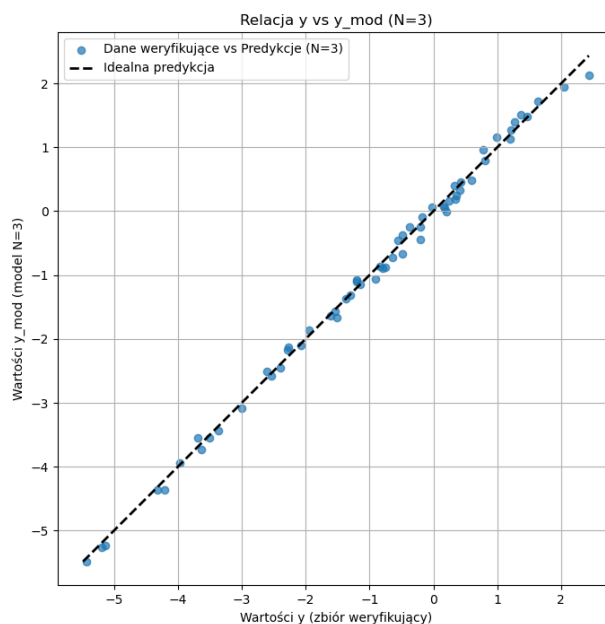


Figure 9: Relacja rzeczywistego wyjścia obiektu do przewidzianego modelem rzędu 3

Na powyższym wykresie zaobserwować można sporą poprawę względem poprzedniego wykresu relacji. Dane odbiegają w bardzo małym stopniu od idealnej predykcji.

Model 4 rzędu

Poniżej przedstawiona została charakterystyka modelu 4. rzędu na tle danych weryfikacyjnych.

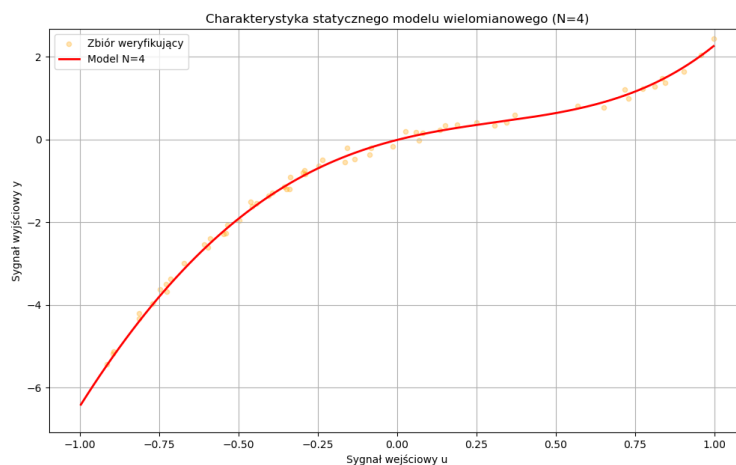


Figure 10: Charakterystyka statycznego modelu wielomianowego stopnia 4

Model ten bardzo dokładnie odzwierciedla zachowanie modelowanego obiektu. Poniżej przedstawiony został wykres relacji danych weryfikujących do predykcji. Zaobserwować można bardzo niskie odchyłki od prostej idealnej predykcji.

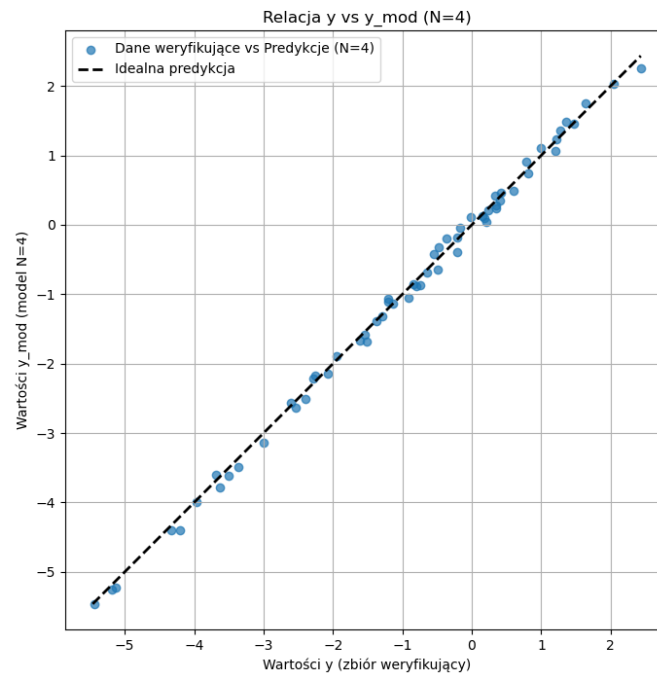


Figure 11: Relacja rzeczywistego wyjścia obiektu do przewidzianego modelem rzędu 4

Model 5 rzędu

Poniżej przedstawione zostały wykresy dla modelu 5. rzędu. Nie da się gołym okiem porównać dokładności między tym a poprzednio omawianym modelem.

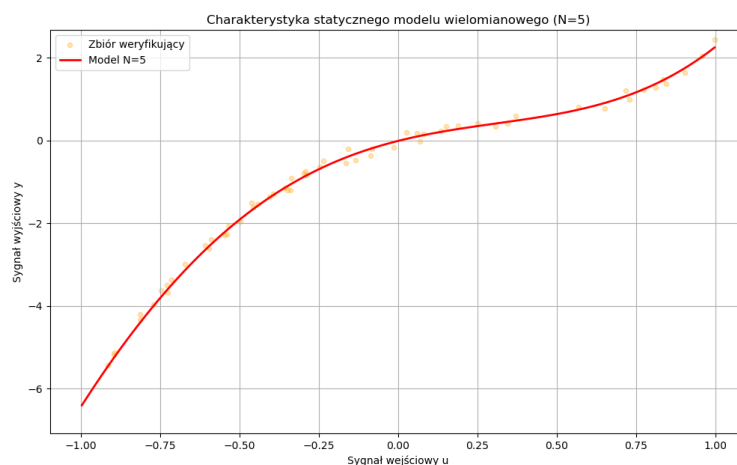


Figure 12: Charakterystyka statycznego modelu wielomianowego stopnia 5

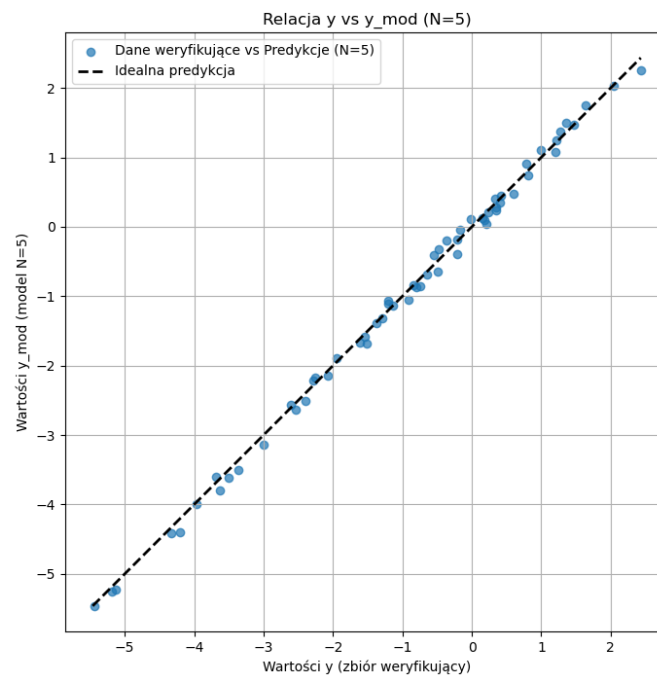


Figure 13: Relacja rzeczywistego wyjścia obiektu do przewidzianego modelem rzędu 5

Poniżej przedstawiona została tabela MSE dla rzędów modelu nieliniowego od 2 do 7. Jako najlepszy model można określić model rzędu 4.

Table 1: Tabela błędów MSE dla modeli nieliniowych

Stopień N	MSE (uczący)	MSE (weryfikujący)
2	0.160071	0.147076
3	0.013520	0.012157
4	0.011442	0.010801
5	0.011428	0.011051
6	0.011324	0.011429
7	0.011320	0.011349

Model ten został wybrany, ponieważ osiągnął najniższą wartość błędu średniokwadratowego (MSE) na zbiorze weryfikującym. Niski błąd na zbiorze weryfikującym sugeruje, że model dobrze generalizuje na nowe, nieznane dane, unikając jednocześnie znaczącego przeuczenia (*overfittingu*), które mogłoby się objawiać niskim błędem na zbiorze uczącym, ale znacznie wyższym na zbiorze weryfikującym dla bardziej złożonych modeli.

Parametry najlepszego modelu, a więc modelu 4. rzędu to:

- $a_0 = -0.0092$
- $a_1 = 1.9552$
- $a_2 = -2.6656$
- $a_3 = 2.4154$
- $a_4 = 0.5844$

2.2 Identyfikacja modeli dynamicznych

W tej podsekcji opisane zostały modele dynamiczne.

2.2.1 Dane dynamiczne

Poniżej przedstawione zostały wykresy danych dynamicznych uczących i weryfikujących.

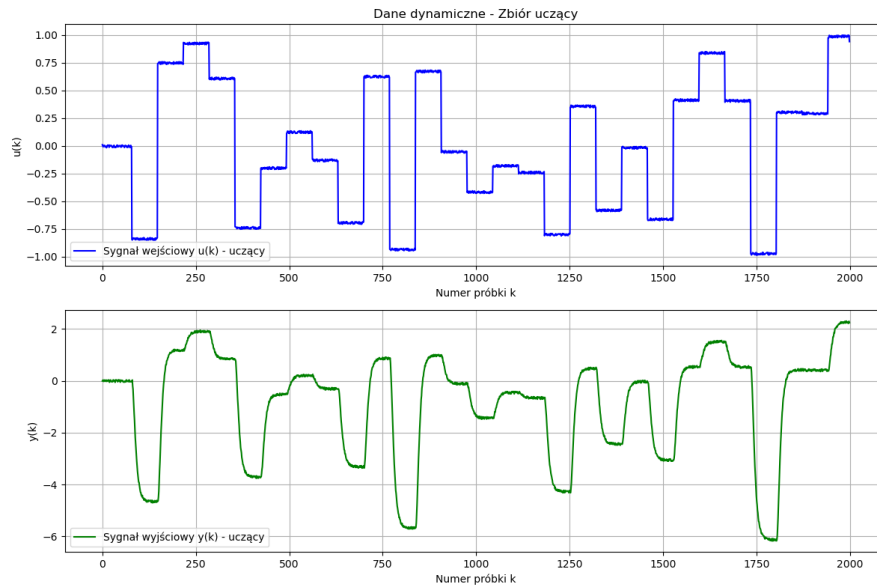


Figure 14: Dane uczące modelu dynamicznego

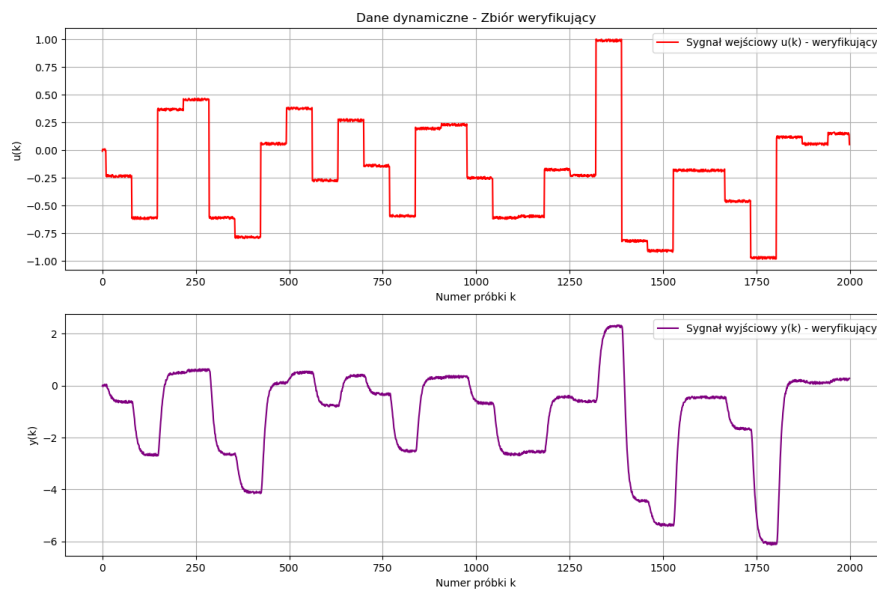


Figure 15: Dane weryfikujące modelu dynamicznego

2.2.2 Dynamiczne modele liniowe

Poniżej przedstawione zostały wykresy dynamicznych modeli liniowych bez rekurencji pierwszego, drugiego i trzeciego rzędu. Błędy dla tych modeli nie są porównywalne gołym okiem.

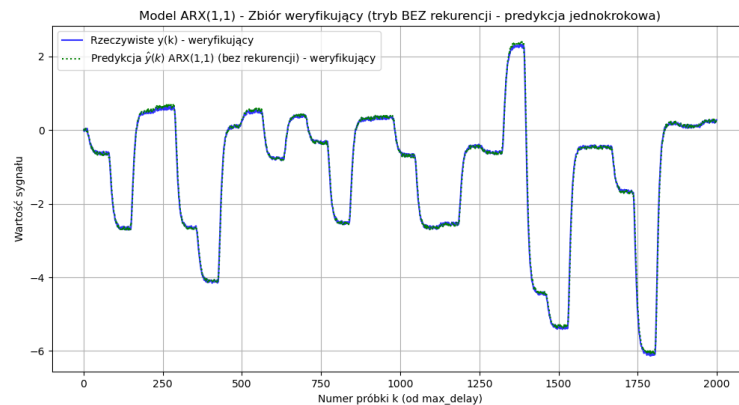


Figure 16: Dynamiczny model liniowy pierwszego rzędu bez rekurencji

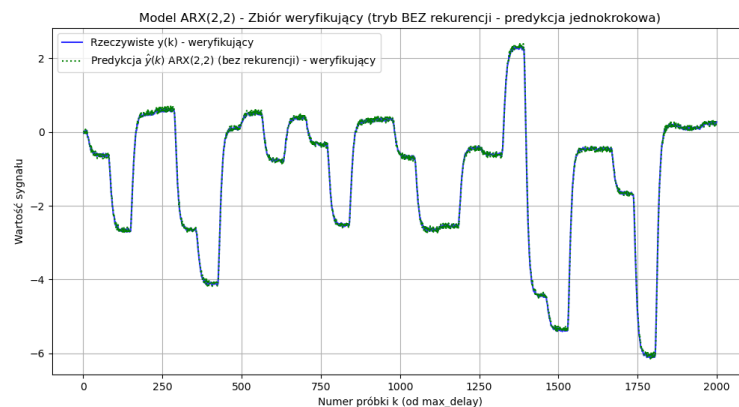


Figure 17: Dynamiczny model liniowy drugiego rzędu bez rekurencji

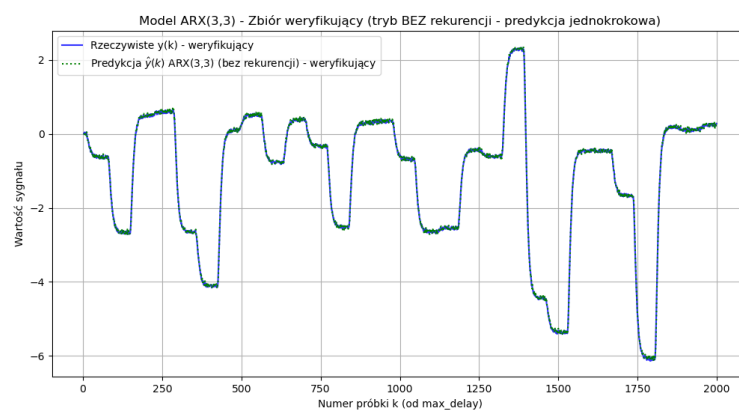


Figure 18: Dynamiczny model liniowy trzeciego rzędu bez rekurencji

Poniżej przedstawione zostały dynamiczne modele liniowe z rekurencją.

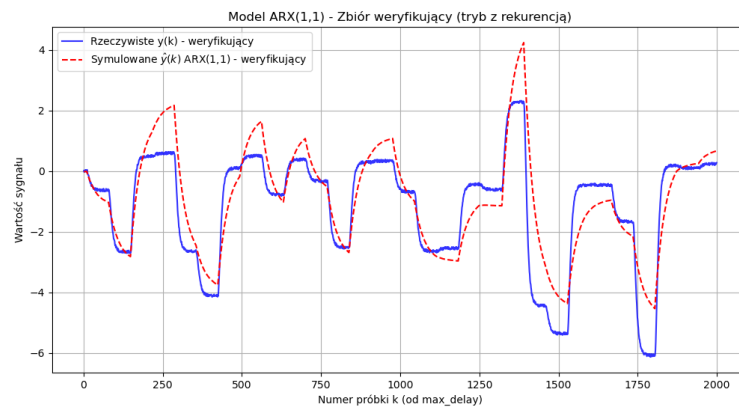


Figure 19: Dynamiczny model liniowy pierwszego rzędu z rekurencją

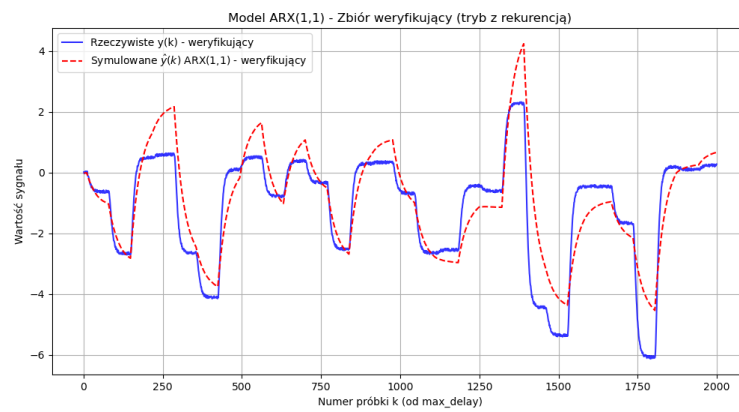


Figure 20: Dynamiczny model liniowy drugiego rzędu z rekurencją

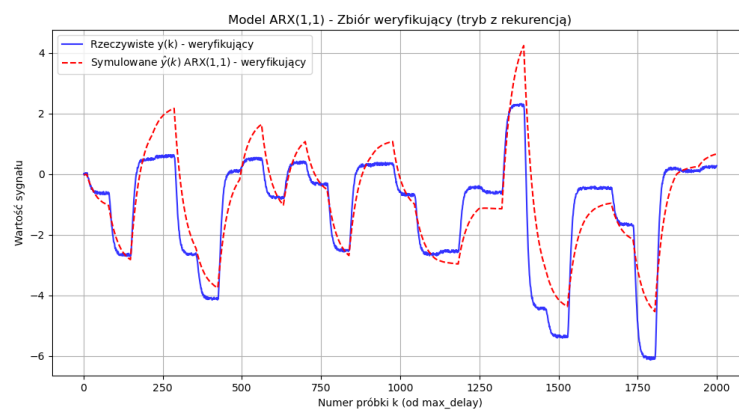


Figure 21: Dynamiczny model liniowy trzeciego rzędu z rekurencją

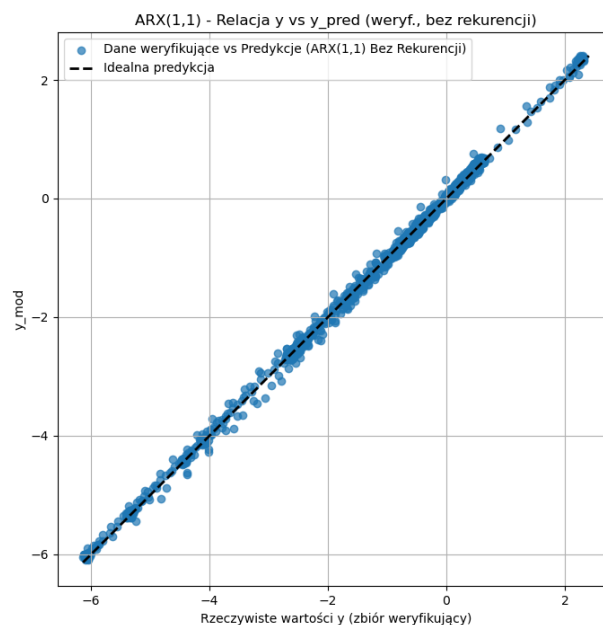
Table 2: Tabela błędów MSE dla modeli ARX

$n_A = n_B$	Ucz. (bez rek.)	Weryf. (bez rek.)	Ucz. (z rek.)	Weryf. (z rek.)
1	0.006453	0.004261	1.929046	0.876898
2	0.004077	0.003544	1.689956	0.762356
3	0.002991	0.002687	1.460668	0.699566

Najlepszy model z rekurencją (na podstawie najniższego MSE na zbiorze weryfikującym) to model trzeciego rzędu. Jego MSE to 0.699566.

Najlepszym modelem bez rekurencji jest również model trzeciego rzędu, a jego MSE na zbiorze weryfikującym wynosi 0.002687.

Poniżej przedstawione zostały wykresy relacji danych weryfikujących oraz wyjścia modelu bez rekurencji.

**Figure 22:** Relacja danych weryfikujących oraz wyjścia modelu pierwszego rzędu bez rekurencji

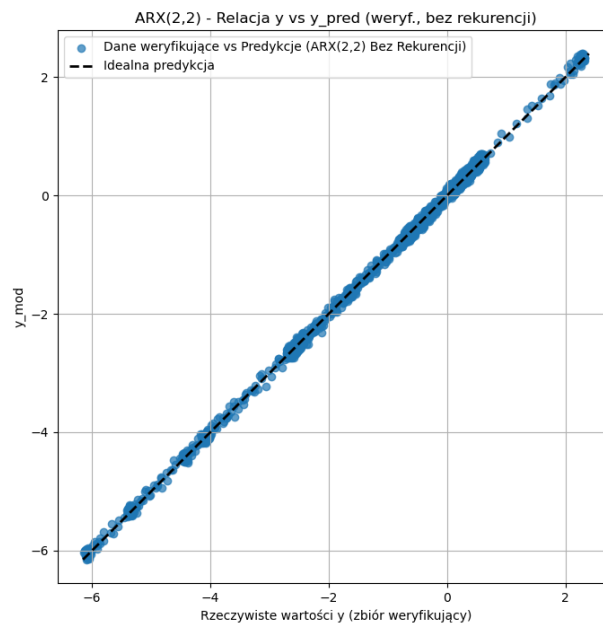


Figure 23: Relacja danych weryfikujących oraz wyjścia modelu drugiego rzędu bez rekurencji

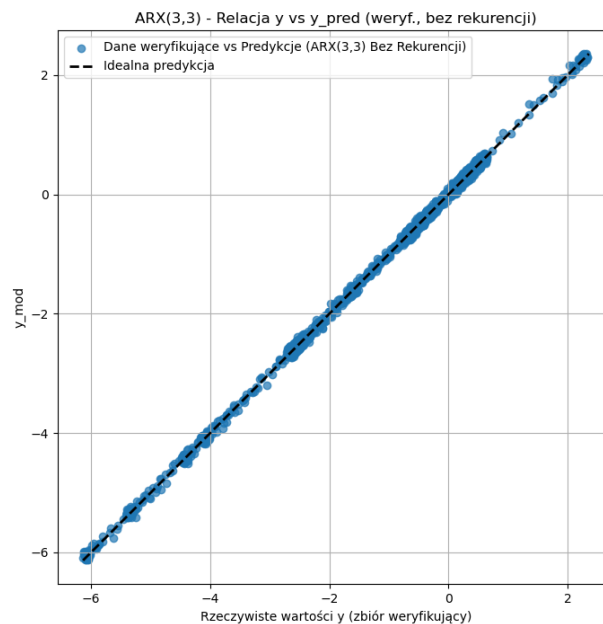


Figure 24: Relacja danych weryfikujących oraz wyjścia modelu trzeciego rzędu bez rekurencji

Poniżej przedstawione zostały wykresy dla modeli z rekurencją.

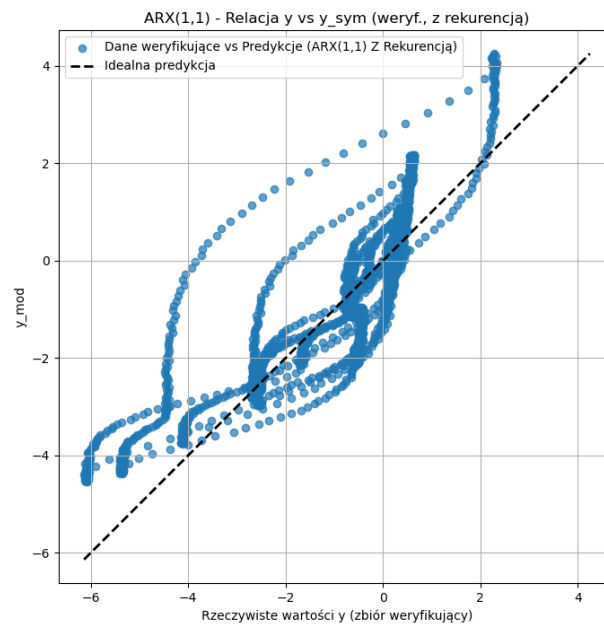


Figure 25: Relacja danych weryfikujących oraz wyjścia modelu pierwszego rzędu z rekurencją

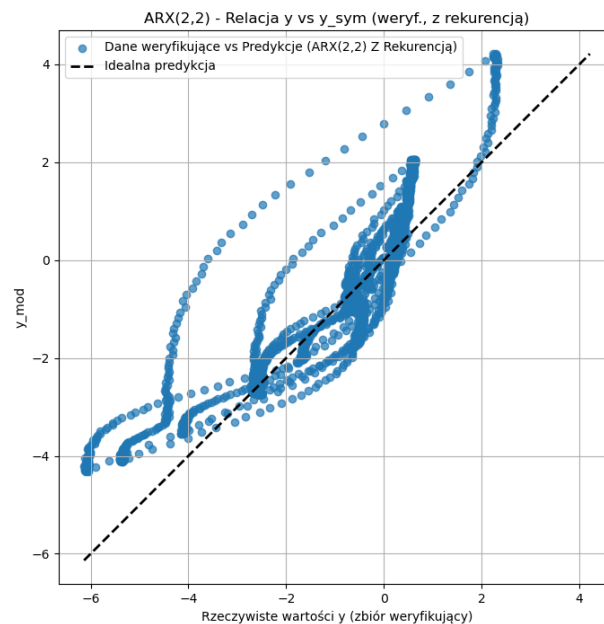


Figure 26: Relacja danych weryfikujących oraz wyjścia modelu drugiego rzędu z rekurencją

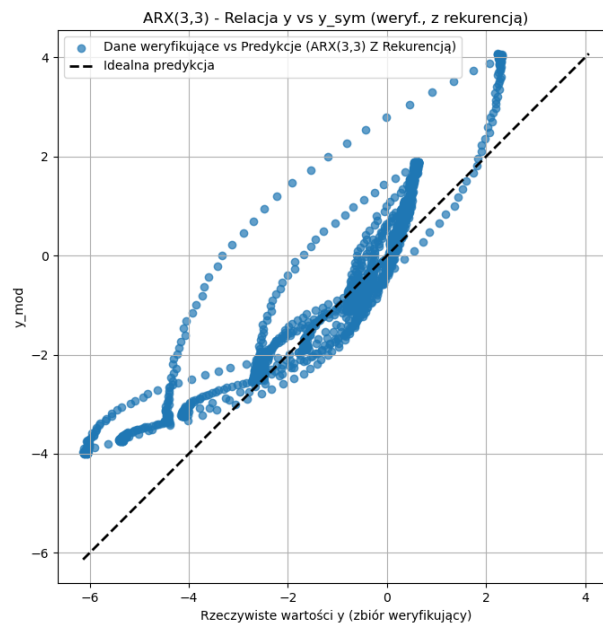


Figure 27: Relacja danych weryfikujących oraz wyjścia modelu trzeciego rzędu z rekurencją

Modele wykazują bardzo dobre dopasowanie w trybie predykcji jednokrokowej, co potwierdzają niskie wartości błędu MSE oraz punkty blisko linii idealnej na wykresie relacji wartości rzeczywistych i przewidywanych. Jednak w trybie symulacji swobodnej model traci stabilność, co objawia się gwałtownym wzrostem błędu MSE i charakterystycznym rozproszeniem punktów na wykresie relacji. Oznacza to, że model nie potrafi poprawnie odtwarzać dynamiki procesu autonomicznie, a błędy predykcji kumulują się i narastają. Sugeruje to potrzebę zastosowania bardziej zaawansowanych modeli, np. nieliniowych, lub modyfikację struktury modelu liniowego.

3 Wnioski

Projekt dotyczył identyfikacji i modelowania obiektu statycznego oraz dynamicznego z wykorzystaniem danych pomiarowych, z oceną modeli liniowych i nieliniowych poprzez błąd średniokwadratowy (MSE).

Analiza modeli statycznych wykazała, że model liniowy (MSE weryfikacyjne ≈ 0.666) był niewystarczający do dokładnego opisu obiektu, wskazując na jego nieliniową naturę. Zastosowanie modeli wielomianowych przyniosło znaczną poprawę. Model wielomianowy 4. rzędu okazał się najlepszy, osiągając MSE na zbiorze weryfikującym na poziomie ≈ 0.0108 , przy jednoczesnym uniknięciu przeuczenia obserwowanego dla modeli wyższych rzędów.

W zakresie identyfikacji modeli dynamicznych, analizowano liniowe modele ARX rzędów od 1 do 3. W trybie predykcji jednokrokowej (bez rekurencji) modele te wykazały bardzo dobre dopasowanie do danych weryfikujących, z najlepszym wynikiem dla ARX(3,3) (MSE ≈ 0.0027). Jednakże, w trybie symulacji swobodnej (z rekurencją), te same modele charakteryzowały się drastycznym wzrostem błędu (dla ARX(3,3) MSE ≈ 0.6996) i niestabilnością, co świadczy o kumulacji błędów predykcji i niezdolności do poprawnego odtwarzania długoterminowej dynamiki procesu.

Zaobserwowane ograniczenia liniowych modeli ARX w trybie rekurencyjnym silnie sugerują, że dynamika badanego obiektu posiada cechy nieliniowe, wymagające zastosowania bardziej zaawansowanych struktur modelowych. Realizacja etapu identyfikacji dynamicznych modeli nieliniowych oraz końcowej weryfikacji najlepszego modelu dynamicznego nie została objęta przedstawionym zakresem prac.

Podsumowując, udało się efektywnie zamodelować statyczną charakterystykę obiektu. Analiza dynamiczna wykazała potrzebę eksploracji nieliniowych modeli dynamicznych w celu pełniejszego i stabilniejszego odwzorowania zachowania systemu. Dalsze prace powinny skoncentrować się na tej właśnie klasie modeli.