Introducción a la Lógica y la Computación. Examen Final 09/08/2023.

Apellido y Nombre en todas las hojas

1. Sea L un reticulado finito. Determinar cuáles de las siguientes propiedades son válidas. Si lo son, demostrarlas; sino, dar un contraejemplo.

   a) $x \leq z \implies x \wedge (y \vee z) = x$.

   b) No hay ningún elemento con dos complementos.

   c) $|\mathcal{D}(Irr(L))| = |L|$.

2. Sea L un reticulado. Supongamos que vale la Propiedad Cancelativa:

   Para todos $a, b, c \in L$, $a \vee b = a \vee c$ *y* $a \wedge b = a \wedge c$ *implican* $b = c$.

   Demostrar que L es distributivo.

3. Demostrar usando derivaciones:

   a) $\{\varphi \vee \theta, \neg\theta, \varphi \to \psi\} \vdash \psi$.

   b) Para todo $\Gamma \subseteq PROP$, $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ implica que $\Gamma \cup \{\neg(\varphi \to \psi)\}$ es inconsistente.

4. Suponga que Γ es consistente maximal y que no contiene a $\neg\varphi \wedge \neg\psi$ ni a φ. Probar que $\psi \in \Gamma$.

5. Sea el NFA $M = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0,1\}, \delta, q_0, \{q_1, q_2\})$ donde δ viene dada por la siguiente tabla de transición:

	0	1	ϵ
q_0	$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
q_1	$\{q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_0\}$
q_2	$\emptyset$	$\{q_0\}$	$\{q_1\}$

   Utilizar el algoritmo dado en el teórico para encontrar un autómata determinista que acepte el mismo lenguaje que M.

6. Determinar si el siguiente lenguaje L es regular. Justificar la respuesta.

   $L = \{a^n b^k c^m : n, k, m > 0 \text{ y } n + k + m = 10\}$.

L. **Sólo para alumnxs libres:**

   a) Demostrar usando derivaciones: $\vdash \varphi \vee \neg\varphi$.

   b) Defina una gramática regular que genere exactamente el lenguaje denotado por la expresión regular $a^*(b + c)a^*$.

1. Sea L un reticulado finito. Determinar cuáles de las siguientes propiedades son válidas. Si lo son, demostrarlas; sino, dar un contraejemplo.

   a) $x \leq z \implies x \wedge (y \vee z) = x$.

   b) No hay ningún elemento con dos complementos.

   c) $|\mathcal{D}(Irr(L))| = |L|$.

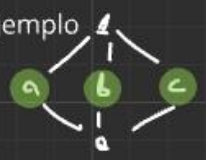
a)
Verdadero
x <= z => x ^ (y v z) = x

Supongamos antecedente:
z <= y v z
=>
x <= z <= y v z
Luego como x <= x && x <= y v z =>
x ^ (y v z) = x

b) Falso
Contraejemplo M3.

c) Falso
Contraejemplo

M_3



$D(Irr(M_3)) =$

$|M_3| = 5 \neq |D(Irr(M_3))| = 8$

2. Sea L un reticulado. Supongamos que vale la Propiedad Cancelativa:

Para todos $a, b, c \in L$, $a \vee b = a \vee c$ *y* $a \wedge b = a \wedge c$ *implican* $b = c$.

Demostrar que L es distributivo.

Sea L un reticulado. Supongamos que vale la propiedad cancelativa:
a v b = a v c && a ^ b = a ^ c => b = c

Tenemos que demostrar que se cumple lo siguiente:
a v (b ^ c) = (a v b) ^ (a v c) (1)
a ^ (b v c) = (a ^ b) v (a ^ c) (2)

(1)
(a v b) ^ (a v c) = (a v c) ^ (a v c) (Hipótesis (a v c) = (a v b))
(a v c) ^ (a v c) = (a v c) (Idempotencia)
(a v c) = a v (c ^ c) (Idempotencia)
a v (c ^ c) = a v (b ^ c) (Hipótesis b = c)

(2)
(a ^ b) v (a ^ c) = (a ^ b) v (a ^ b)
(a ^ b) v (a ^ b) = (a ^ b)
(a ^ b) = a ^ (b v b)
a ^ (b v b) = a ^ (b v c)

3. Demostrar usando derivaciones:

a) $\{\varphi \vee \theta, \neg\theta, \varphi \to \psi\} \vdash \psi$.

b) Para todo $\Gamma \subseteq PROP$, $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ implica que $\Gamma \cup \{\neg(\varphi \to \psi)\}$ es inconsistente.

a)

$$\dfrac{\varphi \vee \theta \qquad \dfrac{\dfrac{[\theta] \quad \neg\theta}{\bot}\,{\to}E}{\psi}\,\bot \qquad \dfrac{[\varphi] \quad \varphi \to \psi}{\psi}\,{\to}E}{\psi}\,\vee E$$

b)

$\exists D \in \mathcal{D}$ tq $Hip(D) \subseteq \Gamma \cup \{\varphi\}$
$Concl(D) = \psi$

$$D = \begin{array}{c} \nabla^{\subseteq \Gamma \cup \{\varphi\}} \\ \psi \end{array}$$

$\exists D'$ tq

$$D' = \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c} \nabla^{\subseteq \Gamma \cup \{\varphi\}} \\ \psi \end{array}}{\varphi \to \psi}\,{\to}I \qquad \neg(\varphi \to \psi)}{\bot}\,{\to}E$$

$$\begin{aligned} Hip(D') &= Hip(D) \setminus \{\varphi\} \cup \{\neg(\varphi \to \psi)\} \\ &\subseteq \Gamma \cup \{\varphi\} \setminus \{\varphi\} \cup \{\neg(\varphi \to \psi)\} \\ &\subseteq \Gamma \cup \{\neg(\varphi \to \psi)\} \end{aligned}$$

$\therefore$ D' atestigua $\Gamma \cup \{\neg(\varphi \to \psi)\} \vdash \bot$

4. Suponga que Γ es consistente maximal y que no contiene a $\neg\varphi \wedge \neg\psi$ ni a φ. Probar que $\psi \in \Gamma$.

Suponga que Γ es consistente maximal y que no contiene a ¬φ ∧ ¬ψ ni a φ.
Probar que ψ ∈ Γ.

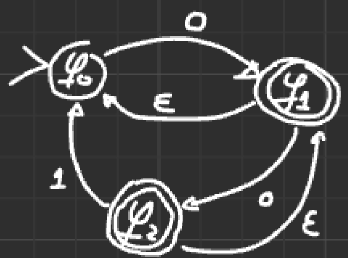
Como un conjunto consistente maximal es cerrado por derivaciones se da que
si Γ ⊢ ψ => ψ ∈ Γ

Supongamos que ψ /∈ Γ, entonces como Γ es un conjunto maximal ¬ψ ∈ Γ.
Luego como φ /∈ Γ, entonces ¬φ ∈ Γ.

Entonces ¬ψ, ¬φ ∈ Γ por lo que Γ podría deducir a ¬φ ∧ ¬ψ, lo cual es absurdo,
pues ¬φ ∧ ¬ψ /∈ Γ => Γ /⊢ ¬φ ∧ ¬ψ. De suponer que ψ /∈ Γ

5)

M =



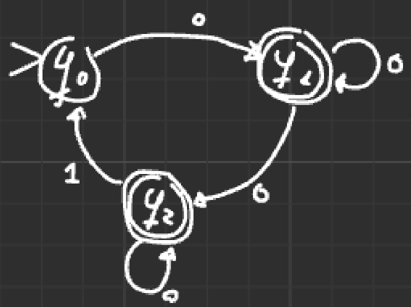
Calculamos la clausura de cada estado:
[q0] = {q0}
[q1] = {q1,q0}
[q2] = {q2, q1}

Q0' = q0
F' = {q1,q2}
La función de transición esta dada por:
Δ'(q0,1) = Δ^([q0], 1) = Δ^({q0}, 1) = 0
Δ'(q0,0) = Δ^([q0], 0) = Δ^({q0}, 0) = {q1}

Δ'(q1,1) = Δ^([q1], 1) = Δ^({q0,q1}, 1) = 0
Δ'(q1,0) = Δ^([q1], 0) = Δ^({q0,q1}, 0) = {q1,q2}

Δ'(q2,1) = Δ^([q2], 1) = Δ^({q2,q1}, 1) = {q0}
Δ'(q2,0) = Δ^([q2], 0) = Δ^({q2,q1}, 0) = {q2}

Obtenemos el siguiente autómata AFN:



5. Sea el NFA $M = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0,1\}, \delta, q_0, \{q_1, q_2\})$ donde δ viene dada por la siguiente tabla de transición:

	0	1	ϵ
q_0	$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
q_1	$\{q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_0\}$
q_2	$\emptyset$	$\{q_0\}$	$\{q_1\}$

Utilizar el algoritmo dado en el teórico para encontrar un autómata determinista que acepte el mismo lenguaje que M.

Eliminamos las transiciones espontaneas:

Tomamos M' = ({q0,q1,q2}, {0,1}, △', q0, F')

[q0] = {q0}

[q1] = {q0,q1}

[q2] = {q1,q2}

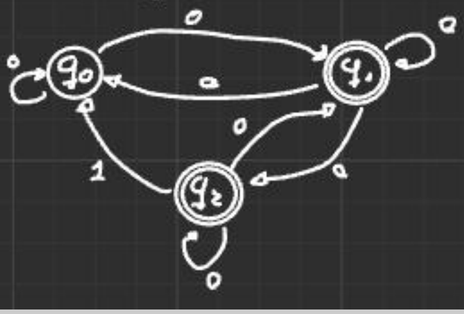
F' = {q1,q2}

△'(q0,0) = [△^([q0],0)] = [△^({q0},0)] = [q1] = {q0,q1}
△'(q0,1) = [△^([q0],1)] = [△^({q0},1)] = [ø] = ø

△'(q1,0) = [△^([q1],0)] = [△^({q0,q1},0)] = [q1,q2] = {q0,q1,q2}
△'(q1,1) = [△^([q1],1)] = [△^({q0,q1},1)] = [ø] = ø

△'(q2,0) = [△^([q2],0)] = [△^({q1,q2},0)] = [q2] = {q1,q2}
△'(q2,1) = [△^([q2],1)] = [△^({q1,q2},1)] = [q0] = {q0}

Nos da el siguiente AFN:



Tomamos M'' = (P(Q'), {0,1}, △'', q0, F'')

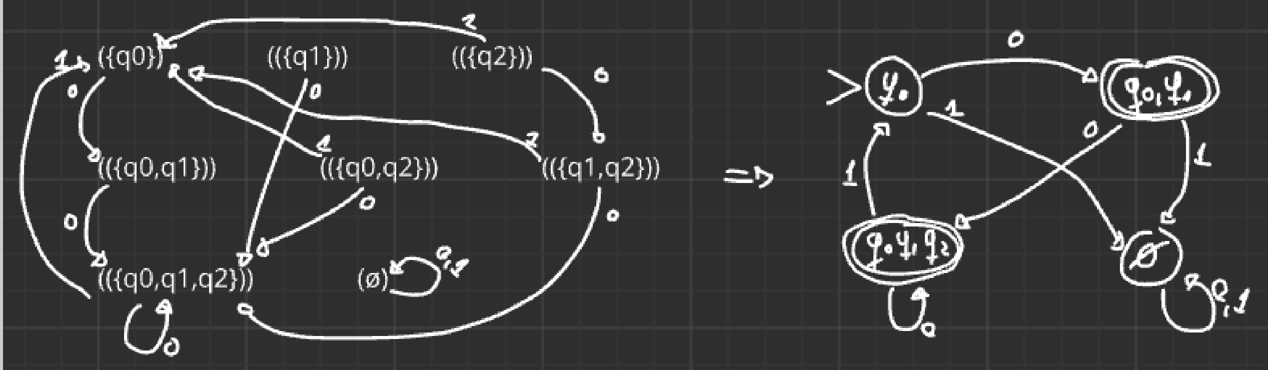
Q' = {q0,q1,q2}

P(Q') = {{q0}, {q1}, {q2}, {q0,q1}, {q0,q2}, {q1,q2}, {q0,q1,q2}, ø}

F'' = {{q1}, {q2}, {q0,q1}, {q0,q2}, {q1,q2}, {q0,q1,q2}}

△'' ...

Obtenemos el siguiente AFD:



6. Determinar si el siguiente lenguaje L es regular. Justificar la respuesta.

$$L = \{a^n b^k c^m : n, k, m > 0 \text{ y } n + k + m = 10\}.$$

Queremos ver que $L = \{a^n b^k c^m : n, k, m > 0 \text{ y } n + k + m = 10\}$ es regular.

Supongamos que L si es regular, y sea j la constante de bombeo.
Tomamos la cadena $\alpha = a^j . b^4 . c^j$, luego $|\alpha| = 2j + 3$, con $j = 3$ entonces $j + j + 4 = 10$.

Por pumping lema descomponemos $\alpha = \alpha1\alpha2\alpha3$

$\alpha1 = a^r, r >= 0$

$\alpha2 = a^s, s >= 1$

$\alpha3 = a^{(j - (s + r))} . b^4 . c^j$

para $i = 0$ tenemos:

$\alpha = \alpha1(\alpha2^0)\alpha3 = \alpha1\alpha3$

$= a^r . a^{(j - (s + r))} . b^4 . c^j$

$= a^{(j - s)} . b^4 . c^j$

Como $s >= 1$, ya no se cumple que $j - s + 4 + j = 10$. Absurdo de suponer que L es regular

7)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[p]}{p \vee \neg p} \qquad [\neg(p \vee \neg p)]}{\perp}}{\neg p}\neg I}{p \vee \neg p} \qquad [\neg(p \vee \neg p)]}{\perp}\neg E}{p \vee \neg p}\,\text{RAA}$$

b)

G = ((S,B,C), (a,b,c), S, P)

G : S -> aS | bB | cC

B -> aB | e

C -> aC | e