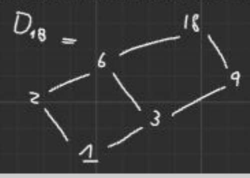
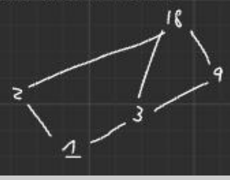
1. Responda V o F

F	a.	Sea P un poset y m ∈ P. Si m es maximal entonces es máximo.
V	b.	Sea P un poset y m ∈ P. Si m es máximo entonces es maximal.
F	c.	$(\{1,2,3,9,18\}, \mid)$ es un subreticulado de $(D_{18}, \mid)$
F	d.	D_{35} es un algebra de Boole.
V	e.	Si Γ es consistente y $\Delta \subseteq \Gamma$ entonces Δ consistente.
F	f.	Si Γ es inconsistente y $\Delta \subseteq \Gamma$ entonces Δ inconsistente.
V	g.	Si Γ es consistente maximal entonces es cerrado por derivaciones
F	h.	Para todo Γ consistente $\exists$ uno y solo un consistente maximal que lo contiene
V	i.	Si $L_1 \in LR^{\Sigma}$ y $\alpha_1, \dots\dots, \alpha_k \in \Sigma^*$, entonces $(L_1 \cup \{\alpha_1, \dots\dots, \alpha_k\}) \in LR^{\Sigma}$
F	j.	Si $L_1 \in LR^{\Sigma}$ y $L_2 \subseteq L_1$, entonces $L_2 \in LR^{\Sigma}$
V	k.	El lenguaje $\{a^i b^j : i, j \in N\}$ es regular
F	l.	El lenguaje $\{a^i b^j : i, j \in N \text{ y } i \neq j\}$ es regular

a) Pueden existir solo dos maximales, entonces no habría máximo.
b) Si m es máximo m >= x para todo x en P, entonces
si existe un t >= m es porque m = t.
c) No se preservan las operaciones de supremo e ínfimo, sup(2,3) = 6 en D_18 pero
en el subreticulado no esta definido.





d) Verdadero.
Todos los D_n son distrivutivos y este es complementado.

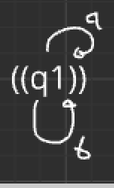
e) Si Γ es consistente y △ ⊆ Γ entonces △ consistente.
Si Γ es consistente entonces Γ /⊢ ⊥
Supongamos que △ inconsistente, entonces △ ⊢ ⊥
es decir existe una derivación D tq:
Hip(D) = △
Concl(D) = ⊥
Como △ ⊆ Γ podemos decir que Γ ⊢ ⊥. Absurdo de suponer que △ es inconsistente.
f) Si Γ es inconsistente y △⊆ Γ entonces △ inconsistente.
Si Γ es inconsistente entonces Γ ⊢ ⊥
Tomemos Γ = {φ, ¬φ} claramente Γ ⊢ ⊥
Ahora tomemos un subconjunto △ = {φ} el cual no tiene forma de derivar ⊥, por lo tanto no es cierto que si Γ es inconsistente y △⊆ Γ entonces △ inconsistente.
g) Si Γ es consistente maximal y Γ ⊢ φ entonces φ esta en Γ

h) Para todo Γ consistente ∃ uno y solo un consistente maximal que lo contiene
Si Γ es consistente, existe un Γ* consistente maximal tq Γ ⊆ Γ*.
Para construir Γ* comenzando con Γ, vamos agregándole proposiciones de una cuidando que no se vuelva inconsistente hasta obtener Γ* = U Γ_n, n >= 0
Dependiendo de como se agreguen las proposiciones, podemos formar diferentes conjuntos maximales consistentes. Por ejemplo, $\{\varphi\}$ se agrego en Γ*, entonces $\{\neg\varphi\}$ no puede estar y viceversa.
i) Si $L1 \in LR\Sigma$ y $\alpha 1$, … … , $\alpha k \in \Sigma^*$, entonces $(L1 \cup \{\alpha 1$, … … , $\alpha k\}) \in LR\Sigma$

veamos si L2 = ($\alpha 1$, … … , αk) con αi ∈ ∑* y k >= 0 es un lenguaje regular:
si k = 0 entonces L2 = Vacio => es regular por caso base.
si k >= 1 entonces L2 = $\{\alpha 1\}$ U, … … , U $\{\alpha k\}$ => L es regular si $\{\alpha$i$\}$ es regular:

- αi = ϵ ∴ {ϵ} ∈ LRΣ por caso base.
- αi = a1…an. con n >= 1, entonces $\{\alpha$i$\}$ = {a1}…{an} luego {ai} ∈ LRΣ por caso base. entonces $\{\alpha$i$\}$ ∈ LRΣ

j) Supongamos L1 = Σ*, ahora tomamos el subconjunto
L2 = $\{\alpha : \alpha$ = a^n . b ^n : n >= 0}
Claramente L2 no es regular.
k) El lenguaje $\{a$^i . b^j : $i,j \in N\}$ es regular. Verdadero.
Existe un AFD que lo acepta



l) El lenguaje $\{a^\wedge i\ .\ b^\wedge j : i,j \in N\ y\ i \neq j\ \}$ es regular

Por tomar la cadena: (con n constante de bombeo)

α = a^n . b^(n - s') con n - s' >= 0, n,s' >= 1

Por pumping lemma la podemos descomponer como $\alpha = \alpha 1 \alpha 2 \alpha 3$

α1 = a^r, r >= 0

α2 = a^s, s >= 1

α3 = a^(n - (s + r))b^

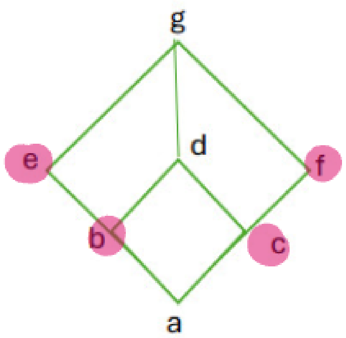
para i = 0 tenemos

$\alpha = \alpha 1 \alpha 2^0\alpha$3 = a^r . a^s^0 . a^(n - (s + r))b^

= a^(n - s) . b^(n - s')

como s, s' >= 1, puede ocurrir que n - s = n - s'. Absurdo.

3. a. Determinar si es distributivo con Birkhoff:

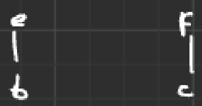


b. Sea L un reticulado distributivo y sea a,b,c ∈ L. Pruebe que:

Si $a \wedge c = b \wedge c$ y $a \vee c = b \vee c$ entonces $a = b$

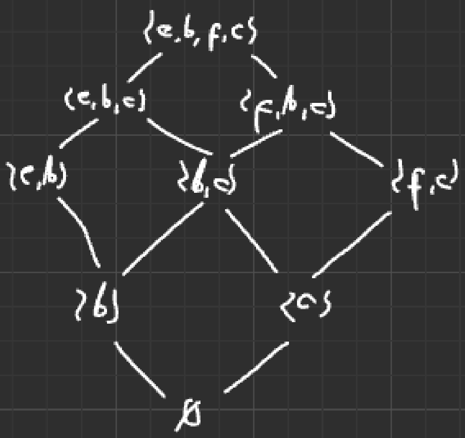
a)

Irr(L) = {e,b,c,f}



D(Irr(L)) =

{e,b,f,c} ✓
{e,b,f} ✗
{e,b,c} ✓
{e,f,c} ✗
{f,b,c} ✓
{e,b} ✓
{e,f} ✗
{b,f} ✗
{b,c} ✓
{c,e} ✗
{f,c} ✓
{f} ✗
{e} ✗
{b} ✓
{c} ✓
ø



$= D(Irr(L), \subseteq)$

Por contra reciproca del teorema de birkhoff:

Si L no es isomorfo a D(Irr(L)) => L no es distributivo

a)
Como L es un reticulado distributivo se da que:
a v (b ^ c) = (a v b) ^ (a v c)
a ^ (b v c) = (a ^ b) v (a ^ c)

a = a ^ (a v c) (absorción)
= a ^ (b v c) (hipótesis)
= (a ^ b) v (a ^ c)

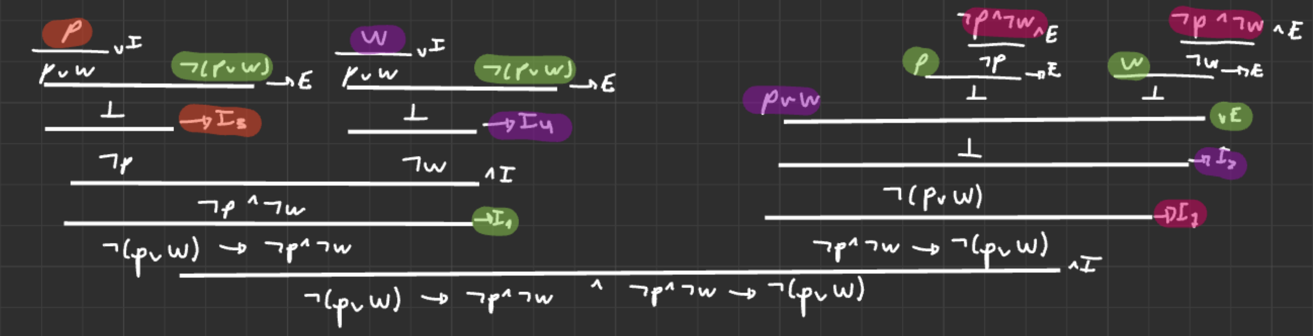
b = b ^ (b v c) (absorción)
= b ^ (a v c) (hipótesis)
= (b ^ a) v (b ^ c)
por hipótesis
= (b ^ a) v (a ^ c)
=> a = b

4. a. Derivar $\vdash \neg(\varphi \vee \omega) \leftrightarrow \neg\varphi \wedge \neg\omega$

b. Sea $\Gamma \subseteq$ PROP. Mediante transformaciones de derivación pruebe que:

$\Gamma \vdash \varphi$ *si y solo si* $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente

a)



$(\Rightarrow)\ \Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \cup \{\neg p\} \vdash \bot$

Existe D tq
Hip$(D) \subseteq \Gamma$
Concl$(D) = \varphi$

$$D = \begin{array}{c} \Gamma \\ \vdots \\ \varphi \end{array}$$

Existe D' tq
Hip$(D') = \neg p$
Cond$(D') = \neg p$

$$D' = \begin{array}{c} \neg\varphi \\ \vdots \\ \neg\varphi \end{array}$$

$$\exists D'' = \dfrac{\begin{array}{c} \Gamma \\ \vdots \\ \varphi \end{array} \qquad \begin{array}{c} \neg p \\ \vdots \\ \neg p \end{array}}{\bot} \to E$$

$$\text{Hip}(D'') = \text{Hip}(D) \cup \text{Hip}(D')$$

Como Hip$(D) \subseteq \Gamma$ y
Hip$(D') = \neg p$ $\Rightarrow$ Hip$(D'') \subseteq \Gamma \cup \{\neg p\}$

$(\Leftarrow)\ \Gamma \cup \{\neg p\} \vdash \bot \Rightarrow \Gamma \vdash p$

$$\left.\begin{array}{l}\exists D \text{ tq } \ Hip(D) \subseteq \Gamma \cup \{\neg p\} \\ \qquad\quad Concl(D) = \bot\end{array}\right\} \quad D = \begin{array}{cc}\Gamma & \{\neg p\} \\ & \vdots \\ & \bot\end{array}$$

$$\Rightarrow \exists D' \text{ tq } \quad D' = \dfrac{\begin{array}{cc}\Gamma & \neg p \\ \vdots & \\ \bot & \end{array}}{p}\ RAA$$

$$Hip(D') = Hip(D) - \{\neg p\}$$

$$Hip(D) \subseteq \Gamma \cup \{\neg p\} \subseteq \Gamma - \{\neg p\} \subseteq \Gamma$$

$\therefore$ D' atestigua $\Gamma \vdash p$

5. Considerando los autómatas con alfabeto $\sum = \{a,b\}$

   a. Para M1 dar un AFD con el mismo lenguaje aceptado por medio de los algoritmos dados en la materia.

M1:

Estado inicial q0, estado final q1

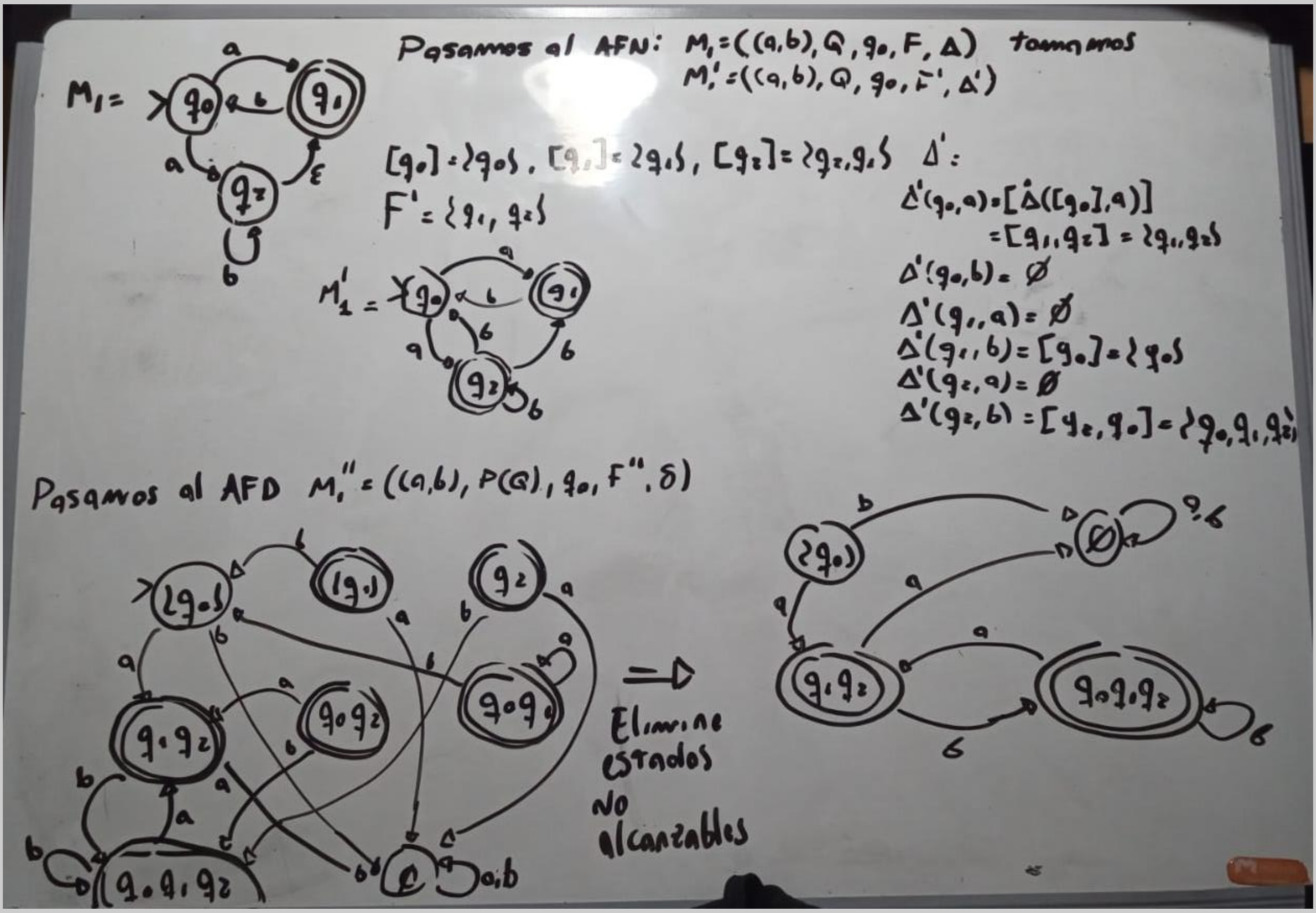
	a	b	ε
q0	q1, q2	---------	---------
q1	---------	q0	---------
q2	---------	q2	q1

   b. Para M2 dar una expresión regular para un lenguaje aceptado por medio del Teorema de Kleene

M2:

Estado inicial q0, estado final q0 y q2

	a	b
q0	q1, q2	---------
q1	q1, q2	q0
q2	---------	q2



b)

$q_0 = aq_1 + aq_2 + e$ (1)

$q_1 = aq_1 + aq_2 + bq_0$ (2)

$q_2 = bq_2 + e$ (3)

Arden en (3)

$q_2 = b^*$

Reemplazo q2 en q1

$q_1 = aq_1 + ab^* + bq_0 = aq_1 + (ab^* + bq_0)$ (por Arden)

$q_1 = a^*(ab^* + bq_0) = a^*ab^* + a^*bq_0$

Reemplazo q1 y q2 en q0

$q_0 = a(a^*ab^* + a^*bq_0) + ab^* + e$

$= aa^*ab^* + aa^*bq_0 + ab^* + e$

$= aa^*bq_0 + (aa^*ab^* + ab^* + e)$ (por Arden)

$= (aa^*b)^*(aa^*ab^* + ab^* + e)$

$= (aa^*b)^*aa^*ab^* + (aa^*b)^*ab^* + (aa^*b)^*$