Introducción a la Lógica y la Computación. Examen Final 23/02/2022.

1. Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando apropiadamente.

    (a) Sean $(L, \vee, \wedge)$ un reticulado, $x, y \in L$ distintos. Entonces $x \vee y \notin Irr(L)$.

    (b) Sea L un reticulado acotado finito tal que $Irr(L) = At(L)$. Entonces L admite estructura de álgebra de Boole.

    (c) Sean $(B, \vee, \wedge, ^c, 0, 1)$ y $(\bar{B}, \bar{\vee}, \bar{\wedge}, ^{\bar{c}}, \bar{0}, \bar{1})$ álgebras de Boole, y sea $F : (B, \vee, \wedge) \to (\bar{B}, \bar{\vee}, \bar{\wedge})$ un isomorfismo de reticulados. Entonces $F : (B, \vee, \wedge, ^c, 0, 1) \to (\bar{B}, \bar{\vee}, \bar{\wedge}, ^{\bar{c}}, \bar{0}, \bar{1})$ es un isomorfismo de álgebras de Boole.

2. ¿Cuáles de los siguientes posets son reticulados? De ellos: ¿cuáles son distributivos? ¿Cuáles complementados? Justifique.

    (a) $(\{1, 2, 3, 6, 9, 27.54\}, |)$.

    (b) $(\mathcal{P}(\{a, b, c\}), \supseteq)$.

    (c) $(\{1, 3, 5, 30, 45, 90\}, |)$.

    (d) $(\{\{1\}, \{7\}, \{5\}, \{1, 2\}, \{5, 6\}, \{7, 8\}, \{1, 2, \ldots, 8\}\}, \subseteq)$.

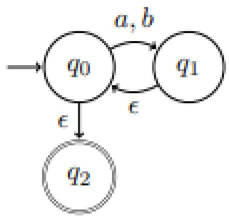
3. Encuentre derivaciones para:

    (a) $\neg\psi \to \varphi \vdash \neg\varphi \to \psi$.

    (b) $\varphi \vdash ((\varphi \to \psi) \vee \neg\varphi) \to \psi$.

4. Determinar si el conjunto $\{\varphi \in PROP : \{p_0, \neg p_1\} \vdash \varphi\}$ es consistente. Justificar la respuesta.

5. Considere el autómata M dado por el diagrama de la derecha. Usando el algoritmo del teórico, construya un autómata determinista que acepte el mismo lenguaje. No omita estados ni transiciones, aún cuando contribuyan a las palabras aceptadas.



6. Dar una gramática regular que genere el lenguaje formado por todas las palabras sobre el alfabeto $\{a, b\}$ que tienen una cantidad par de a y una cantidad impar de b.

L. **Sólo para alumnxs libres:** Dé una gramática regular que genere el lenguaje aceptado por el autómata del Ejercicio 5.

Introducción a la Lógica y la Computación. Examen Final 23/02/2022.

1. Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando apropiadamente.

   (a) Sean $(L, \vee, \wedge)$ un reticulado, $x, y \in L$ distintos. Entonces $x \vee y \notin Irr(L)$. V

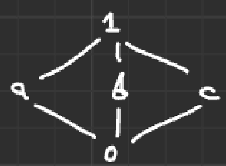
   (b) Sea L un reticulado acotado finito tal que $Irr(L) = At(L)$. Entonces L admite estructura de álgebra de Boole. F

   (c) Sean $(B, \vee, \wedge, ^c, 0, 1)$ y $(\bar{B}, \bar{\vee}, \bar{\wedge}, ^{\bar{c}}, \bar{0}, \bar{1})$ álgebras de Boole, y sea $F : (B, \vee, \wedge) \to (\bar{B}, \bar{\vee}, \bar{\wedge})$ un isomorfismo de reticulados. Entonces $F : (B, \vee, \wedge, ^c, 0, 1) \to (\bar{B}, \bar{\vee}, \bar{\wedge}, ^{\bar{c}}, \bar{0}, \bar{1})$ es un isomorfismo de álgebras de Boole. V

a) Def de v-irreducibles:
Si x no es el primer elemento y para todo y,z si x = y v z => x = z o x = y

dado x,y e L distintitos, suponemos que x v y están en Irr(L)
x v y no es el primer elemento (se cumple)
x v y = a v b => x v y = a o x v y = b para todo a,b en L
en particular para a = x y b = y
entonces
x v y = x v y => x v y = x o x v y = y
Supongamos que x v y = x entonces x >= y, lo cual es absurdo pues no son comparables

b) Contraejemplo:



≅ M_3

a) Por definición.

2. ¿Cuáles de los siguientes posets son reticulados? De ellos: ¿cuáles son distributivos? ¿Cuáles complementados? Justifique.

   (a) $(\{1, 2, 3, 6, 9, 27.54\}, |)$.

   (b) $(\mathcal{P}(\{a, b, c\}), \supseteq)$.

   (c) $(\{1, 3, 5, 30, 45, 90\}, |)$.

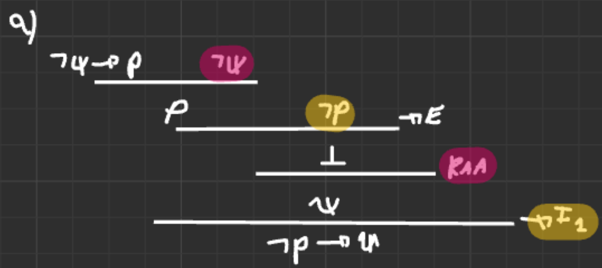
   (d) $(\{\{1\}, \{7\}, \{5\}, \{1, 2\}, \{5, 6\}, \{7, 8\}, \{1, 2, \ldots, 8\}\}, \subseteq)$.

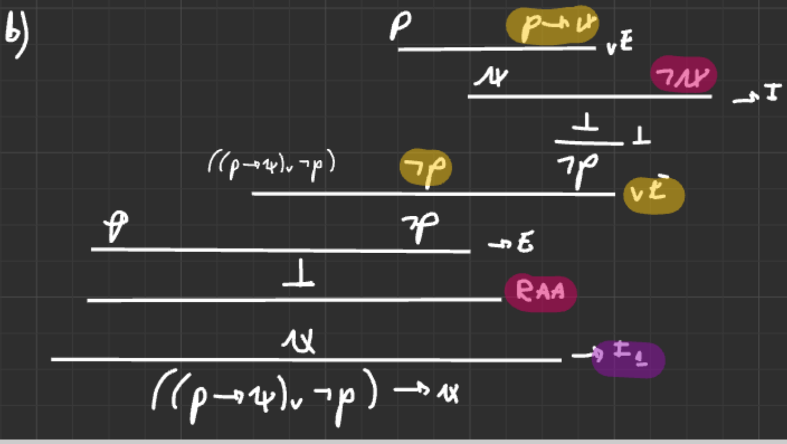
a) No es reticulado pues no todo elemento tiene sup. e inf.
b) Es reticulado, distributivo por teorema de birkhoff, es complementado.
c) Es reticulado, existe sup e inf para todo elemento, distributivo por teorema de birkhoff, no es complementado.
d) No es reticulado, pues no existe ínfimo para {1},{7}

3. **Encuentre derivaciones para:**

(a) $\neg\psi \to \varphi \vdash \neg\varphi \to \psi$.

(b) $\varphi \vdash ((\varphi \to \psi) \vee \neg\varphi) \to \psi$.





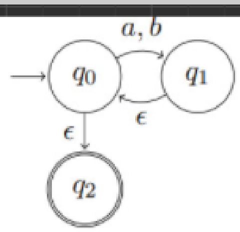
4. Determinar si el conjunto $\{\varphi \in PROP : \{p_0, \neg p_1\} \vdash \varphi\}$ es consistente. Justificar la respuesta.

a, b

El conjunto es consistente si existe alguna función v que valide al mismo conjunto, como el conjunto esta formado por las proposiciones derivables de p0 y !p1, buscamos una función que valide este mini conjunto:

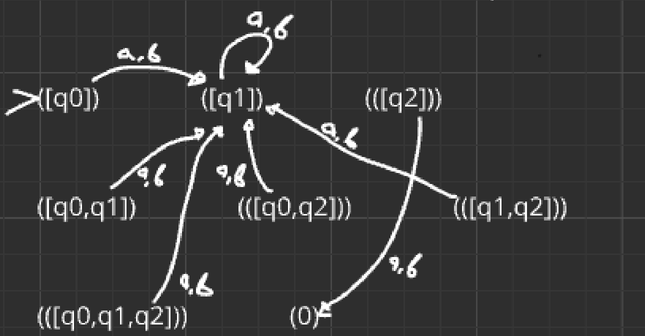
f(p0) = 1 y f(p1) = 0

5. Considere el autómata M dado por el diagrama de la derecha. Usando el algoritmo del teórico, construya un autómata determinista que acepte el mismo lenguaje. No omita estados ni transiciones, aún cuando contribuyan a las palabras aceptadas.

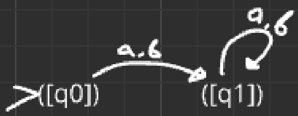


Eliminamos transiciones espontaneas:
[q0] = {q0,q2}
[q1] = {q0,q1,q2}
[q2] = {q2}
[q1,q2] = {q1,q2,q0}
[q0,q2] = {q0,q2}
[q0,q1] = {q0,q1,q2}
[0] = 0
[q0,q1,q2] = {q0,q1,q2}

Calculando las nuevas transiciones nos queda el AFD:



Eliminando los estados no alcanzables:



6. Dar una gramática regular que genere el lenguaje formado por todas las palabras sobre el alfabeto $\{a, b\}$ que tienen una cantidad par de a y una cantidad impar de b.

G = (V, {a,b}, S, P)
V = {S,F,M,N,H,U}
P =

G : S -> aF | M
F -> aM
M -> bN | S
N -> bH | S |e
H -> bU
U -> N | S | e

L. **Sólo para alumnxs libres:** Dé una gramática regular que genere el lenguaje aceptado por el autómata del Ejercicio 5.

G = (V,{a,b},S,P)

V = (S)

G : S -> aS | bS | e