1. Para cada uno de las siguientes afirmaciones determine si es verdadera o falsa.

   a) Si R es una relación de equivalencia sobre A entonces R no es una relación de orden sobre A.

   b) Si R no es una relación de equivalencia sobre A entonces R es una relación de orden sobre A.

   c) Sea $(P, \leq)$ un poset reticulado y a, b y c en P tales que $a \leq b$. Entonces se da necesariamente alguna de las siguientes situaciones:
   $a \leq b \leq c$ o $a \leq c \leq b$ o $c \leq a \leq b$.

   d) Para todo poset $(P, \leq)$ y todo $S \subseteq P$, $(S, \leq |_S)$ es un subposet de $(P, \leq)$.

   e) Para todo poset $\mathbf{P}$ y todo $S \subseteq P$, S es un subuniverso de $\mathbf{P}$.

   f) $(\{1, 3, 6, 4, 12\}, |)$ es un subreticulo de $(D_{12}, |)$.

   g) $(\mathbb{N}, |)$ es una cadena.

   h) $(D_8, |)$ es una cadena.

   i) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{D_n}$ es un reticulado distributivo.

   j) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{D_n}$ es un álgebra de Boole.

   k) Sea $(P, \leq)$ un poset y sea $m \in P$. Si m es máximo entonces es maximal.

   l) Sea $(P, \leq)$ un poset y sea $m \in P$. Si m es el único minimal entonces es mínimo.

   m) Sea $(P, \leq)$ un poset finito y sea $m \in P$. Si m es el único maximal entonces es máximo.

   n) Todo poset finito tiene al menos un maximal.

   ñ) Si $\mathbf{P}$ es un poset finito entonces tiene máximo.

   o) Si $\mathbf{P}$ es un poset reticulado finito entonces tiene mínimo.

   p) $(\{1, 2, 3, 5, 30\}, |)$ es un álgebra de Boole.

q) Si **L** es un reticulado distributivo entonces todo elemento tiene a lo sumo un complemento.

r) Si **L** es un reticulado distributivo entonces todo elemento tiene exactamente un complemento.

s) Si **L** es un reticulado tal que todo elemento tiene a lo sumo un complemento entonces es distributivo.

2. Considere el reticulado $\mathbf{L} = (\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 36\}, |)$.
   a) Dé el diagrama de Hasse de **L**.
   b) Dé el diagrama de Hasse de $\mathbf{Irr}(\mathbf{L}) = (Irr(\mathbf{L}), |)$.
   c) Sea $F : L \to \mathcal{D}(\mathbf{Irr}(\mathbf{L}))$ la función definida en el Teorema de Birkhoff. Dé explícitamente $F(x)$ para cada $x \in L$.
   d) Dé el diagrama de Hasse de $(\mathcal{D}(\mathbf{Irr}(\mathbf{L})), \subseteq)$.
   e) ¿Es **L** un reticulado distributivo? Justifique su respuesta.
   f) ¿Es **L** un álgebra de Boole? Justifique su respuesta.

1a) Falso.

Si R es una relación de equivalencia, entonces R es simétrica, transitiva, reflexiva y antisimétrica. Una relación de orden no es simétrica.

1b) Falso.

Sólo si R es todo menos simétrica. Contraejemplo ”<”, no es de equivalencia ni de orden.

1c) Falso.

contraejemplo ({x,y}, ⊆)

a = {x}, b = {x,y}, c = {y}

a ⊆ b ⊆ c, falso porque b /⊆ c

a ⊆ c ⊆ b, falso porque a /⊆ c

c ⊆ a ⊆ b, falso porque c /⊆ a

1d) Verdadero.

Hereda el orden inducido por P.

1e) Falso.

No cualquier subconjunto hereda las relaciones de orden inducidas por P, ejemplo en f.

1f) Falso.

No es cerrado por operaciones de ínfimo y supremo.

1g) Falso.

No todos los elementos son comparables entre sí.

1h) Verdadero.

Todos los elementos son comparables entre sí.

1i) Verdadero.

Tiene primer y último elemento, satisface las leyes distributivas.

1j) Falso.

D_12 no es complementado.

1k) Verdadero.

Si m es máximo => m es maximal.
m es maximal sii para todo t en P, m ≤ t => t = m, luego como m es un máximo de P
t ≤ m y nos queda m ≤ t ≤ m => t = m

l) Sea $(P, \leq)$ un poset y sea $m \in P$. Si m es el único minimal entonces es mínimo.

1l) Verdadero.

Si m es minimal, entonces para todo t en P, t ≤ m => t = m.
Como es el único minimal, no hay nadie con quien no pueda compararse m, por lo tanto es mínimo. Supongamos que existe algún x ∈ P tal que x<m. Esto implicaría que x es otro elemento minimal, lo cual contradice la unicidad de m.

1m) Verdadero.

Sea (P, <=) un poset
t e P, con P finito.
Si P tiene un único elemento maximal t entonces t es el máximo
Demostración suponiendo el antecedente y por el absurdo:
Suponemos:
P tiene único elemento maximal t
t no es máximo -> Existe un x en P tq t < x
{ Sea a e P tq a > t }
a e {x e P : a <= x} (t < a ≤ x)
->
|{x e P : a <= x}| >= 1
{ Todo poset finito tiene maximal }
 {x e P : a <= x} tiene maximal
{ Sea t' un maximal de {x e P : a <= x} }
a > t ^ a <= t'
--> t' != t
{ t' también es maximal de P }
t es maximal de P y t' es maximal de P
pero t != t'
Absurdo de suponer que t no es máximo.

1n) Verdadero.

Supongamos que un poset finito no tiene maximal, entonces, para todo elemento máximo a en P, siempre existe un $x > a$, ya que a no puede ser maximal, absurdo ya que P es finito.

1ñ) Falso.

D_16 no tiene máximo.

1o) Verdadero.

Supongamos que P es un poset reticulado finito y no tiene mínimo.

Por definición existe un ínfimo de P, es decir, la mayor cota inferior de todos los elementos de P
debe existir. Un x tq $x \leq a$ para todo a en P, Esto es la definición del mínimo.

1p) Falso.

Es isomorfo a M3 y no cumple las leyes de Morgan (propiedad cancelativa). Si no es distributivo
directamente no puede ser un álgebra de boole.

q) Si **L** es un reticulado distributivo entonces todo elemento tiene a lo sumo un complemento.

1q) Verdadero.

Supongamos que b y c son dos complementos de a. Entonces:

- Por definición del complemento se tiene que:
  $a \wedge b = 0$, $a \vee b = 1$, $a \wedge c = 0$, $a \vee c = 1$.
  Usando la distributividad se puede mostrar que:
  $b \leq b \vee a = 1 = c \vee a$ por transitividad $b \leq a \vee c$
  $b = b \wedge (a \vee c) = (b \wedge a) \vee (b \wedge c) = 0 \vee (b \wedge c) = (b \wedge c)$
  Análogamente con c:
  $c = c \wedge (a \vee b) = (c \wedge a) \vee (b \wedge c) = 0 \vee (b \wedge c) = (b \wedge c)$
  Finalmente $b = c$.

1r) Falso.

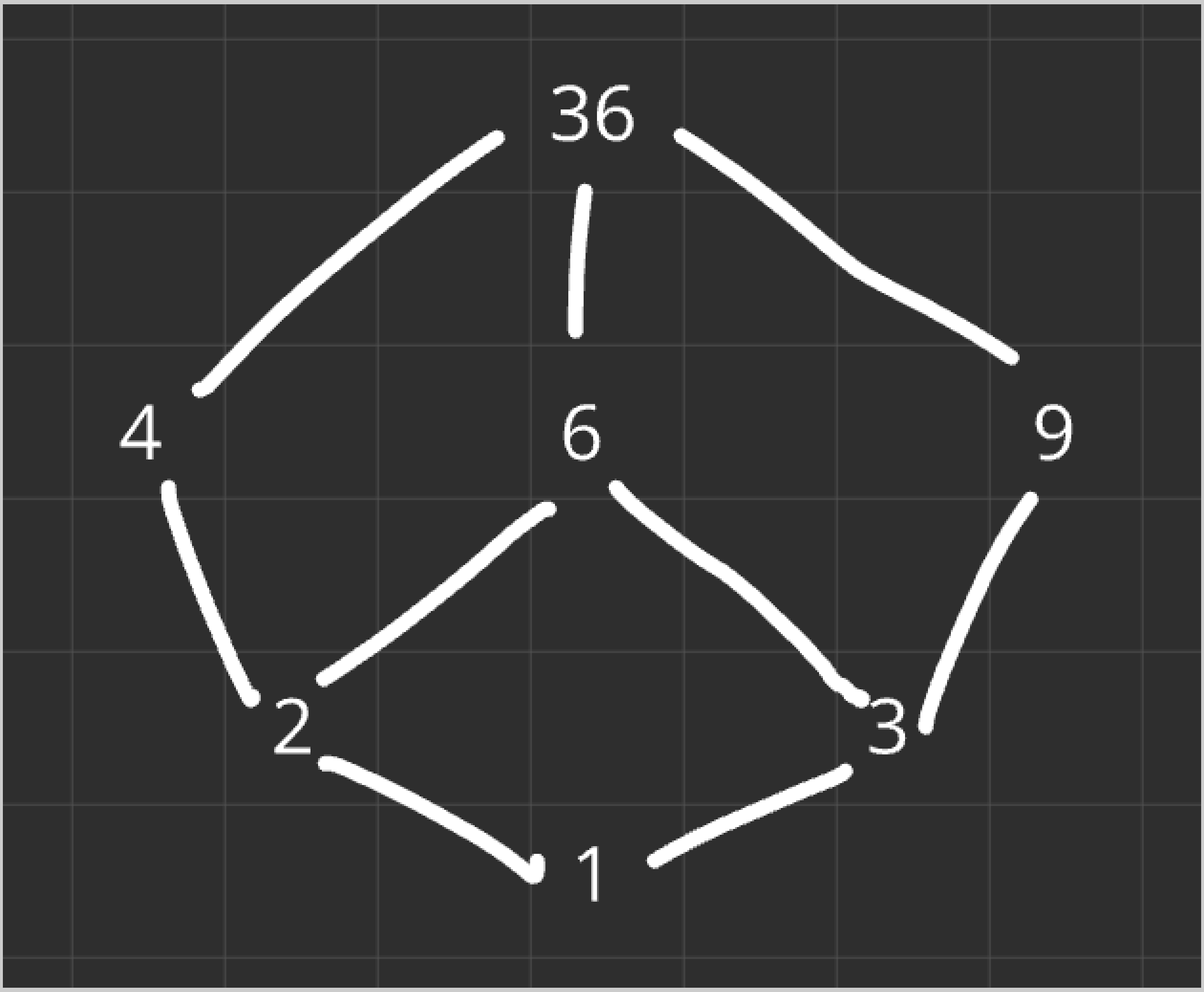
Los D_n son retículos distributivos, pero D_12 no tiene complemento para todos los elementos del
mismo.

s) Si **L** es un reticulado tal que todo elemento tiene a lo sumo un complemento entonces es distributivo.

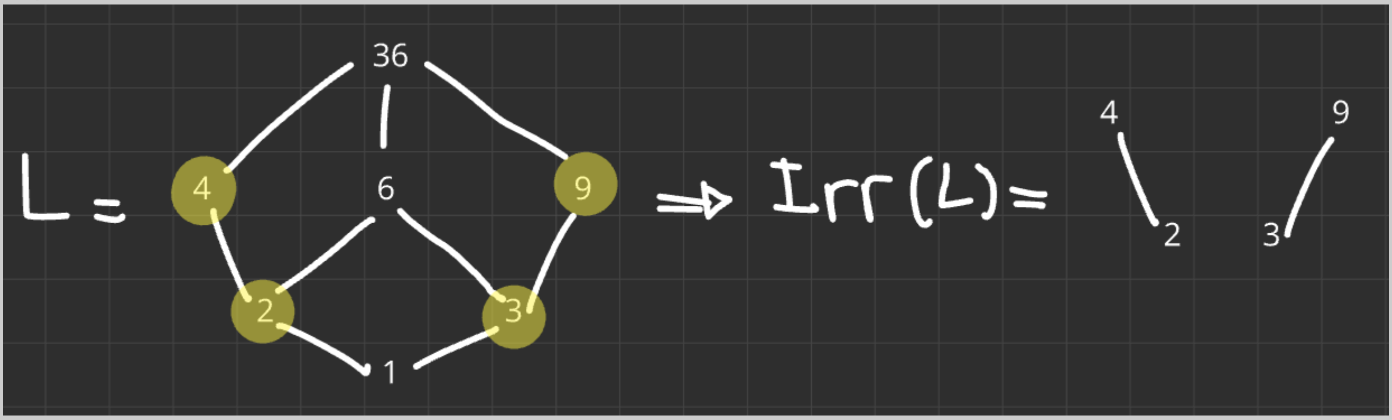
1s) Verdadero.

Suponiendo que L no es distributivo, entonces algún subretículo debe ser isomorfo a M3 o N5, en
ambos casos existe más de un complemento para el mismo elemento. Sin embargo, nuestra hipótesis es que cada elemento de L tiene a lo sumo un complemento. Por lo tanto ni M3 ni N5 pueden incrustarse, L es distributivo.

2a)



2b)

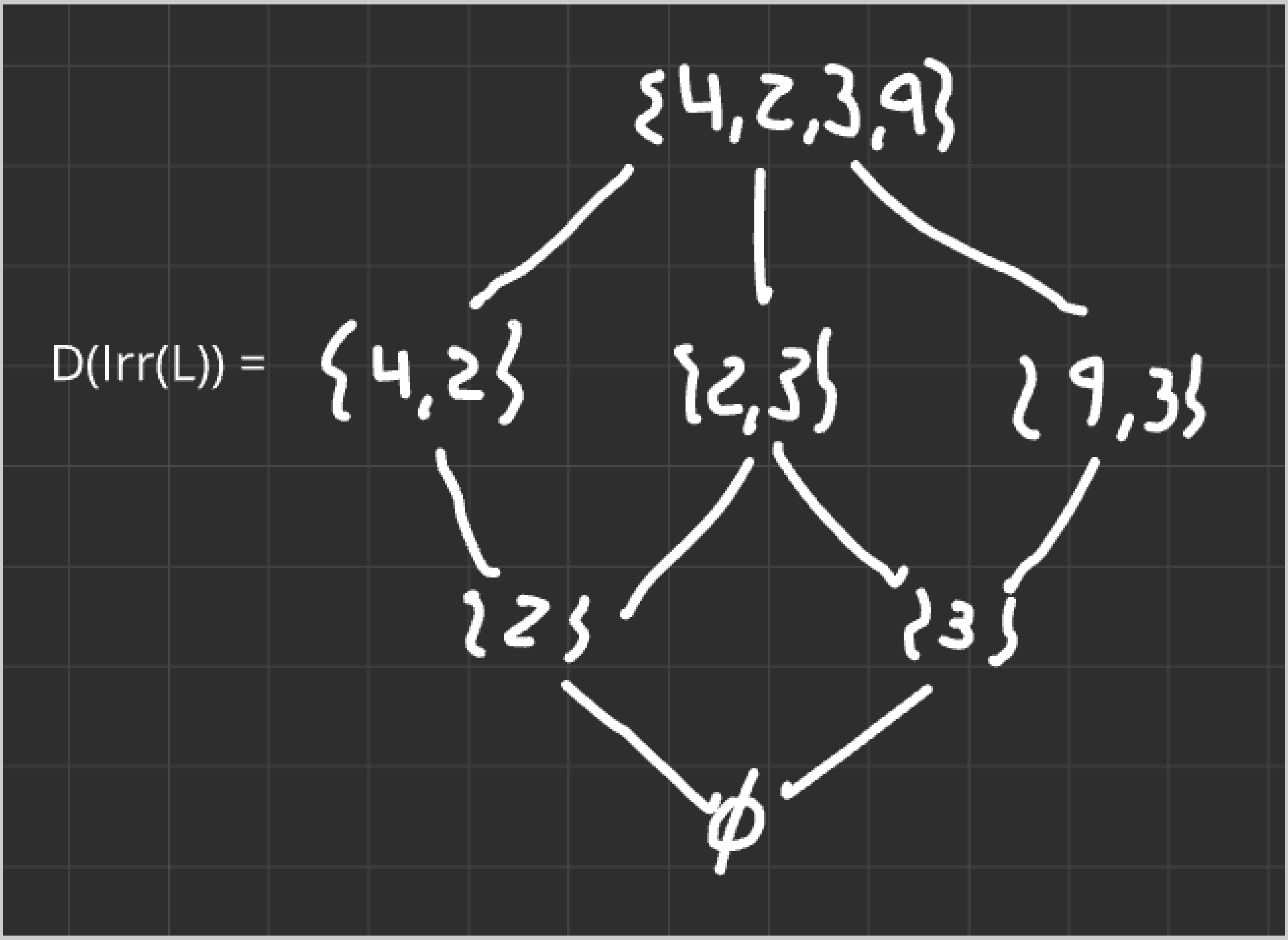


2c)

Irr(L) = (2,3,4,9)
F(1) = vacío
F(2) = 2
F(3) = 3
F(4) = 4,2
F(6) = 2,3

F(9) = 9,3
F(36) = 4,9,2,3

2d)



2e)
Si, por el teorema de Birkhoff sabemos que si |L| ≥ |D(Irr(L))| entonces L es un retículo distributivo.
En este caso |L| = 7 y |D(Irr(L))| = 7 así que si se cumple.

2f)
No es un álgebra de boole pues el elemento 2 no tiene complemento para obtener 2 v x = 36.

1. Para cada uno de las siguientes afirmaciones determine si es verdadera o falsa.

   a) Si R es una relación de equivalencia sobre A entonces R no es una relación de orden sobre A.

   b) Si R no es una relación de equivalencia sobre A entonces R es una relación de orden sobre A.

   c) Sea $(P, \leq)$ un poset reticulado y a, b y c en P tales que $a \leq b$. Entonces se da necesariamente alguna de las siguientes situaciones:
   $a \leq b \leq c$ o $a \leq c \leq b$ o $c \leq a \leq b$.

   d) Para todo poset $(P, \leq)$ y todo $S \subseteq P$, $(S, \leq|_S)$ es un subposet de $(P, \leq)$.

   e) Para todo poset $\mathbf{P}$ y todo $S \subseteq P$, S es un subuniverso de $\mathbf{P}$.

   f) $(\{1, 3, 6, 4, 12\}, |)$ es un subreticulo de $(D_{12}, |)$.

   g) $(\mathbb{N}, |)$ es una cadena.

   h) $(D_8, |)$ es una cadena.

   i) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{D_n}$ es un reticulado distributivo.

   j) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{D_n}$ es un álgebra de Boole.

   k) Sea $(P, \leq)$ un poset y sea $m \in P$. Si m es máximo entonces es maximal.

   l) Sea $(P, \leq)$ un poset y sea $m \in P$. Si m es el único minimal entonces es mínimo.

   m) Sea $(P, \leq)$ un poset finito y sea $m \in P$. Si m es el único maximal entonces es máximo.

   n) Todo poset finito tiene al menos un maximal.

   ñ) Si $\mathbf{P}$ es un poset finito entonces tiene máximo.

   o) Si $\mathbf{P}$ es un poset reticulado finito entonces tiene mínimo.

   p) $(\{1, 2, 3, 5, 30\}, |)$ es un álgebra de Boole.

q) Si $\mathbf{L}$ es un reticulado distributivo entonces todo elemento tiene a lo sumo un complemento.

r) Si $\mathbf{L}$ es un reticulado distributivo entonces todo elemento tiene exactamente un complemento.

s) Si $\mathbf{L}$ es un reticulado tal que todo elemento tiene a lo sumo un complemento entonces es distributivo.

2. Considere el reticulado $\mathbf{L} = (\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 36\}, |)$.
   a) Dé el diagrama de Hasse de $\mathbf{L}$.
   b) Dé el diagrama de Hasse de $\mathbf{Irr}(\mathbf{L}) = (Irr(\mathbf{L}), |)$.
   c) Sea $F : L \to \mathcal{D}(\mathbf{Irr}(\mathbf{L}))$ la función definida en el Teorema de Birkhoff. Dé explícitamente $F(x)$ para cada $x \in L$.
   d) Dé el diagrama de Hasse de $(\mathcal{D}(\mathbf{Irr}(\mathbf{L})), \subseteq)$.
   e) ¿Es $\mathbf{L}$ un reticulado distributivo? Justifique su respuesta.
   f) ¿Es $\mathbf{L}$ un álgebra de Boole? Justifique su respuesta.

1. Para cada uno de las siguientes afirmaciones determine si es verdadera o falsa.

   a) Si R es una relación de equivalencia sobre A entonces R no es una relación de orden sobre A. V

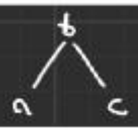
Como R es una relación de equivalencia, se cumple que R es:
Antisimétrica
Simétrica
Reflexiva
Transitiva
Pero una relación de orden es todo esto menor Simétrica.

b) Si R no es una relación de equivalencia sobre A entonces R es una relación de orden sobre A. F

Supongamos que R es antisimétrica, simétrica y reflexiva. Esto nos indica que R no es una relación de equivalencia, pero tampoco es una relación de orden, porque es simétrica y no es transitiva.

c) Sea $(P, \leq)$ un poset reticulado y a, b y c en P tales que $a \leq b$. Entonces se da necesariamente alguna de las siguientes situaciones:
$a \leq b \leq c$ o $a \leq c \leq b$ o $c \leq a \leq b$. F

Contraejemplo:



d) Para todo poset $(P, \leq)$ y todo $S \subseteq P$, $(S, \leq\ )$ es un subposet de $(P, \leq)$. V

Hereda el orden inducido por P

e) Para todo poset **P** y todo $S \subseteq P$, S es un subuniverso de **P**. F

No necesariamente cualquier subconjunto S preserva operaciones de ínfimo y supremo.

f) $(\{1, 3, 6, 4, 12\}, |)$ es un subreticulo de $(D_{12}, |)$. F

No preserva operaciones de ínfimo y supremo. inf(4,6) = 2, pero 2 no esta en el subconjunto.

g) $(\mathbb{N}, |)$ es una cadena. F

No satisface la ley de dicotomía, por ejemplo para dos números primos.

h) $(D_8, |)$ es una cadena. V

Para cada par a,b se da a <= b o b <= a

$i)$ Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{D_n}$ es un reticulado distributivo. V

$j)$ Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{D_n}$ es un álgebra de Boole. F

En D_12 el elemento 2 no tiene complemento.

$k)$ Sea $(P, \leq)$ un poset y sea $m \in P$. Si m es máximo entonces es maximal. V

Como m es máximo en P, se da que para todo x en P, x <= m.
Supongamos que m no es maximal
=>
m es maximal si para todo x >= m => x = m (no hay nadie arriba de m)
Negando esto:
Existe un x tq x >= m => x != m
Por hipótesis x <= m para todo x, absurdo de suponer que m no es maximal.

$l)$ Sea $(P, \leq)$ un poset y sea $m \in P$. Si m es el único minimal entonces es mínimo. V

Como m es minimal se da que:
Si existe un x <= m => x = m (no hay nadie debajo de m)
además es el único.

Supongamos que m no es mínimo
Def de mínimo: m es mínimo si para todo x' en P se da que m <= x'
Negando esto: Existe un x' tq m <=/ x' (x' no esta por encima de m)
Como m es minimal, si existe tal x' entonces x' = m.
Es decir no existe x' tq x' < m. Absurdo de suponer que m no es mínimo.

$m)$ Sea $(P, \leq)$ un poset finito y sea $m \in P$. Si m es el único maximal entonces es máximo. V

Análogo.

$n)$ Todo poset finito tiene al menos un maximal. V

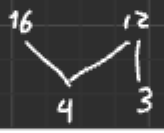
Supongamos que existe un poset finito (P,≤) sin ningún elemento maximal.
Esto significa que para cada elemento x ∈ P, existe algún y ∈ P tal que x < y

Para cualquier elemento x0 ∈ P.
Como x0 no es maximal, existe x1 tal que x0 < x1.
Como x1 tampoco es maximal, existe x2 tal que x1 < x2.
Repetimos este proceso, generando una secuencia infinita x0 < x1 < x2 <... x_0...

El conjunto P es finito, por lo que no puede haber una cadena estrictamente creciente infinita.
Esto contradice nuestra suposición de que el poset no tiene elementos maximales.

$\tilde{n})$ Si **P** es un poset finito entonces tiene máximo. F

Contraejemplo:



= ({16,12,4,3}

$o)$ Si **P** es un poset reticulado finito entonces tiene mínimo. V

Si P es un reticulado finito, entonces para Todo par a,b en P existe sup(a,b) e inf(a,b).
Supongamos que P no tiene mínimo.
Es decir no existe un m tq m <= x para todo x en P.
Sabemos que todo poset finito tiene almenos un minimal, y si es único es minimo.
Por lo tanto, deben de existir por lo menos 2 minimales en P.
Sea m1 y m2 los dos minimales de P, como no hay nadie debajo de ambos, no existe inf(m1,m2)
Absurdo de suponer que P no tiene minimo.

$p)$ $(\{1, 2, 3, 5, 30\}, |)$ es un álgebra de Boole. F

Es isomorfo a M3, no es distributivo entonces no puede ser un algebra de boole

$q)$ Si **L** es un reticulado distributivo entonces todo elemento tiene a lo sumo un complemento. V

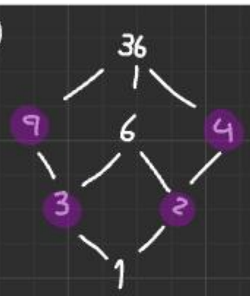
Supongamos que existen 2 complementos distintos para un mismo elemento a.
Es decir existe a,b,c tq:
a v b = 1 && a ^ b = 0
a v c = 1 && a ^ c = 0
Entonces tenemos que:
a v b = a v c && a ^ b = a ^ c
Por la propiedad cancelativa de un poset distributivo entonces debe cumplirse que
b = c.
Esto contradice la existencia de dos complementos distintos.

r) Si **L** es un reticulado distributivo entonces todo elemento tiene exactamente un complemento. F

El elemento 2 en D_12 no tiene complemento tq 2 v x = 12

2. Considere el reticulado $\mathbf{L} = (\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 36\}, |)$.
   a) Dé el diagrama de Hasse de **L**.
   b) Dé el diagrama de Hasse de $\mathbf{Irr}(\mathbf{L}) = (Irr(\mathbf{L}), |)$.
   c) Sea $F : L \to \mathcal{D}(\mathbf{Irr}(\mathbf{L}))$ la función definida en el Teorema de Birkhoff. Dé explícitamente $F(x)$ para cada $x \in L$.
   d) Dé el diagrama de Hasse de $(\mathcal{D}(\mathbf{Irr}(\mathbf{L})), \subseteq)$.
   e) ¿Es **L** un reticulado distributivo? Justifique su respuesta.
   f) ¿Es **L** un álgebra de Boole? Justifique su respuesta.

a)



b)

$Irr(L) = \{9, 3, 2, 4\}$

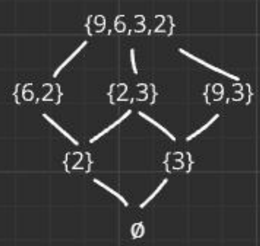
$(Irr(L), |) =$

c)

F(36) = {9,4,3,2}
F(9) = {9,3}
F(4) = {4,2}
F(6) = {3,2}
F(3) = {3}
F(2) = {2}
F(1) = Ø

d) $D(Irr(L)) =$ {{9,6,3,2}, {9,3}, {6,2}, {3}, {2}, {3,2}, Ø}

$(D(Irr(L)), |) =$



e) Si, L es un reticulado distributivo porque es isomorfo a un poset de decrecientes, el cual siempre es distributivo.

f) No es un algebra de boole ya que no es complementado, el elemento 6 no tiene complemento.