a) $(\{1,3,4,6,12\},|)$ es un subreticulo de $(D_{12},|)$.

b) Si **L** es un reticulado distributivo entonces para todo $a, b \in L$ se satisface $a \leq b$ o $b \leq a$.

c) Si **L** es un reticulado complementado es distributivo.

d) $\mathbf{D}_{21}$ es un álgebra de Boole.

e) $\{p_0 \to p_1, p_1 \to p_2, p_2 \to p_3, p_3 \to \neg p_0\}$ es consistente.

f) Si Γ y Δ son consistentes maximales entonces $\Gamma \cup \Delta$ consistente maximal.

g) El conjunto de los teoremas es consistente maximal.

h) $\{p_2 \vee p_1, p_2 \to p_1\} \models p_2$.

i) Si L es un lenguaje regular entonces $\{\alpha : \alpha \notin L\}$ es regular.

j) En el alfabeto $\{a, b\}$, el lenguaje de las palabras que empiezan con "a" y terminan con b" es regular.

k) El lenguaje $\{a^i bba^i : i \in \mathbb{N}\}$ es regular.

l) El conjunto de las palabras capicúas de seis letras es un lenguaje regular.

a) Falso, no se preservan las operaciones de ^ y v. Pues el inf(6,4) = 2 en D_12 pero en el subreticulado no esta.
b) Falso, contraejemplo: en D_12 3 <=/ 2 y 2 <=/ 3
c) Falso, M3 es reticulado complementado pero no distributivo.
d) Verdadero, es reticulado, distributivo y complementado.
e) Verdadero, existe una asignación v tq:
v(p_0) = 0
v(p_1) = 1
v(p_2) = 1
v(p_3) = 1
que valida al conjunto
f) Falso, si un conjunto es consistente maximal, no se le puede agregar nada sin que deje de ser consistente.
g) Falso, le agregamos una proposición p0 y no rompemos consistencia, entonces no era maximal.
h) Falso, no toda asignación que valida a (p1 v p2), p2 => p1 valida a p2, por ejemplo, v(p_1) = 1 y v(p_2) = 0
i) Verdadero, los lenguajes regulares son cerrados por complemento.
j) Verdadero, existe un AFD que lo acepta.
k) Falso, por lema de bombeo.
l) Verdadero, existe un AFD que lo acepta.

2. Justifique los items 1a, 1e y 1j.

a) Falso, no se preservan las operaciones de ^ y v. Pues el inf(6,4) = 2 en D_12 pero en el subreticulado no esta.

e) Verdadero, existe una asignación v tq:

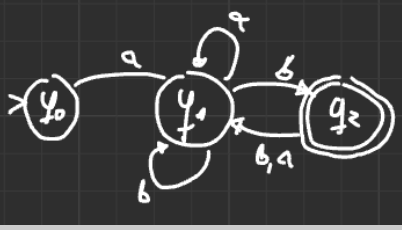
v(p_0) = 0

v(p_1) = 1

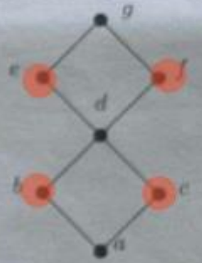
v(p_2) = 1

v(p_3) = 1

j) Verdadero, existe un AFD que lo acepta.



3. a) Determine si el siguiente reticulado es distributivo, mediante la construcción de la función dada en el Teorema de Birkhoff para reticulados distributivos finitos. Justifique su respuesta.

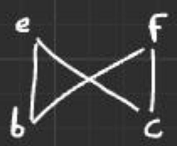


b) Sea **L** un reticulado. Pruebe que, para todo $x, y, z \in L$ se satisface

$$x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

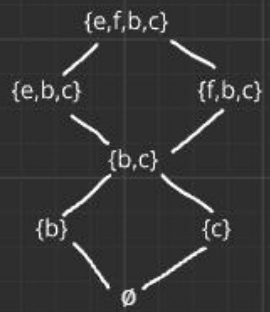
a)

Irr(L) = {e,f,b,c}



D(Irr(L)) = {{e,f,b,c}, {e,b,c}, {f,b,c}, {b}, {c}, {b,c}, ø }

D(Irr(L), ⊆) =



La función esta definida como:

F(g) = {e,f,b,e}

F(e) = {e,b,c}

F(f) = {f,b,c}

F(d) = {b,c}

F(b) = {b}

F(c) = {c}

F(a) = vacío

Por birkhoff, como L es isomorfo a un poset de decrecientes, el cual es distributivo, entonces L es distributivo.

b) Sea $\mathbf{L}$ un reticulado. Pruebe que, para todo $x, y, z \in L$ se satisface

$$x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

Como L es reticulado distributivo se cumple que:
a v (b ^ c) = (a v b) ^ (a v c)
a ^ (b v c) = (a ^ b) v (a ^ c)

Propiedades de supremo e infimo:
x v y <= z <=> x <= z && y <= z (1)
z <= x ^ y <=> z <= x && z <= y (2)

queremos ver que
x v (y ^ z) <= (x v y) ^ (x v z) <=> ✓
por (1)
x <= (x v y) ^ (x v z) && (y ^ z) <= (x v y) ^ (x v z) ✓

x <= (x v y) ^ (x v z) <=> ✓
por (2)
x <= (x v y) && x <= (x v z) ✓
por definición del supremo se cumple.

(y ^ z) <= (x v y) ^ (x v z) <=> ✓
por (2)
(y ^ z) <= (x v y) && (y ^ z) <= (x v z) ✓

(y ^ z) <= y <= (x v y) ✓
(y ^ z) <= z <= (x v z) ✓

4. *a)* Dé una derivación que pruebe $\vdash (\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi)$.
b) Sea $\Gamma \subseteq PROP$. Mediante transformación de derivaciones pruebe que si $\Gamma \vdash \varphi \vee \psi$ y $\Delta \vdash \neg\psi$ entonces $\Gamma \cup \Delta \vdash \varphi$.

b)

$$\Gamma \vdash \varphi \vee \psi \;\;\&\&\;\; \Delta \vdash \neg\psi \Rightarrow \Gamma \cup \Delta \vdash \varphi$$

$\exists D$ tq $\mathrm{Hip}(D) \subseteq \Gamma$, $\mathrm{Concl}(D) = \varphi \vee \psi$

$\exists D'$ tq $\mathrm{Hip}(D') \subseteq \Delta$, $\mathrm{Concl}(D') = \neg\psi$

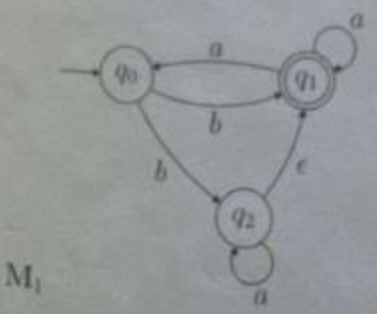
$$D = \begin{array}{c}\nabla^{\subseteq \Gamma}\\ \varphi \vee \psi\end{array} \qquad\qquad D' = \begin{array}{c}\nabla^{\subseteq \Delta}\\ \neg\psi\end{array}$$

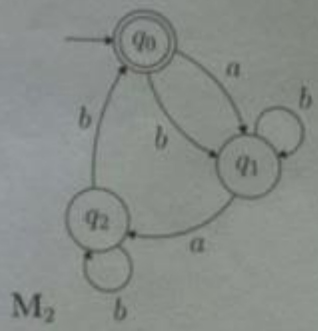
$$\Rightarrow \quad \exists D'' = \dfrac{\begin{array}{c}\nabla^{\subseteq \Gamma}\\ \varphi \vee \psi\end{array} \qquad [\varphi]_1 \qquad \dfrac{\dfrac{[\psi]_2 \quad \begin{array}{c}\nabla^{\subseteq \Delta}\\ \neg\psi\end{array}}{\bot}\,\neg E}{\varphi}\,\bot}{\varphi}\,\vee E_{1,2}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Hip}(D'') &= \mathrm{Hip}(D) \cup \mathrm{Hip}(\{\varphi\}) \setminus \{\varphi\} \cup \mathrm{Hip}(\{\psi\} \cup D') \setminus \{\psi\} \\ &= \Gamma \cup \mathrm{Hip}(\{\psi\} \cup D') \setminus \{\psi\} \\ &= \Gamma \cup \mathrm{Hip}(D') \setminus \{\psi\} \subseteq \Gamma \cup \Delta\end{aligned}$$

D'' atestigua $\Gamma \cup \Delta \vdash \varphi$

5. Considere los siguientes autómatas con alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$.





a) Para el AFN-ε M_1 dé un AFD con el mismo lenguaje aceptado, por medio de los algoritmos dados en la materia.

b) Para el AFN M_2 dé una expresión regular para su lenguaje aceptado por medio del Teorema de Kleene.

a)

Pasamos de AFN-e a AFN:

M1 = ((a,b), Q, q0, F, △)

Q = {q0,q1,q2}

F = {q1}

Tomamos el nuevo autómata M1' = ((a,b), Q', q0, F', △')

Calculamos la clausura de cada estado:

[q0] = {q0}

[q1] = {q1}

[q2] = {q1,q2}

Q' = Q

F' = { q **∈ Q : [q] ∩ F != ø} = {q1, q2}**

Calculamos las nuevas transiciones:

△'(q0,a) = [△^([q0],a)] = [△^({q0},a)] = [ø] = ø

△'(q0,b) = [△^([q0],b)] = [△^({q0},b)] = [{q1,q2}] = {q1,q2}

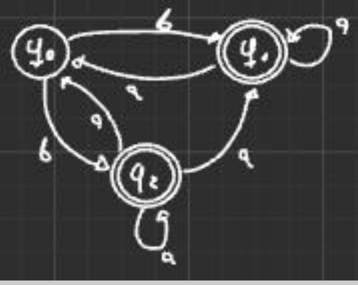
△'(q1,a) = [△^([q1],a)] = [△^({q1},a)] = [{q0,q1}] = {q0,q1}

△'(q1,b) = [△^([q1],b)] = [△^({q1},b)] = [ø] = ø

△'(q2,a) = [△^([q2],a)] = [△^({q1,q2},a)] = [{q0,q1,q2}] = {q0,q1,q2}

△'(q2,b) = [△^([q2],b)] = [△^({q1,q2},b)] = [ø] = ø

Nos queda el siguiente AFN:



Pasamos de AFN a AFD:

M1' = ((a,b), Q', q0, F', △')

Q' = Q

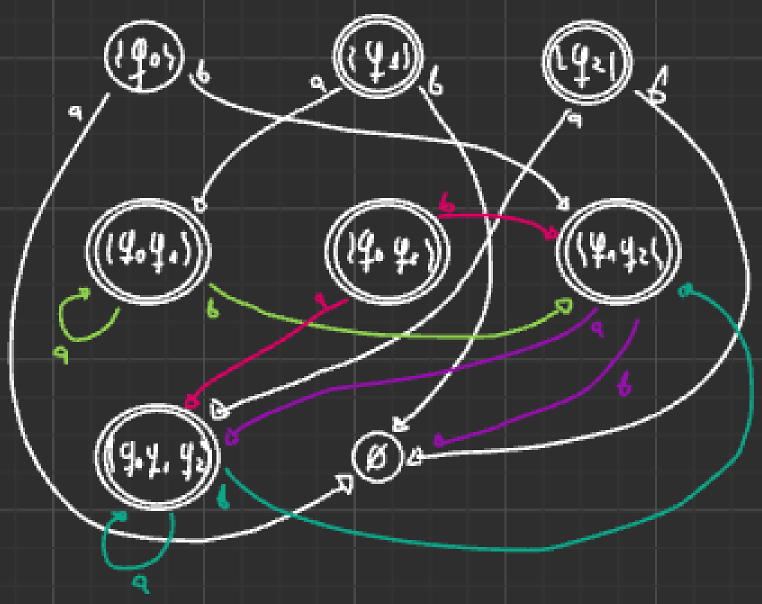
F' = { q ∈ Q : [q] ∩ F != ø} = {q1, q2}

Tomamos el nuevo autómata M1'' = ((a,b), Q'', q0, F'', △'')

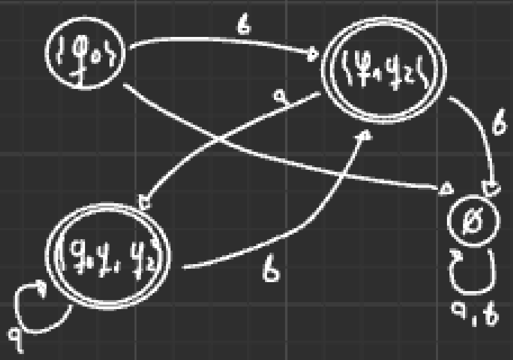
Q'' = P(Q') = {{q0}, {q1}, {q2}, {q0,q1}, {q0,q2}, {q1,q2}, {q0,q1,q2}, ø}

F'' = { X ⊆ Q' : X ∩ F' != ø} = {{q1}, {q2}, {q0,q1}, {q0,q2}, {q1,q2}, {q0,q1,q2}}

Calculando las nuevas transiciones nos queda el siguiente AFD:



Eliminando estados no alcanzables nos queda:



q0 = aq1 + bq1 + e

q1 = bq1 + aq2

q2 = bq2 + bq0

q2 = b*bq0

q1 = bq1 + aq2 = bq1 + ab*bq0 = b*ab*bq0

q0 = aq1 + bq1 + e = ab*ab*bq0 + bb*ab*bq0 + e

= (ab*ab*b + bb*ab*b)q0 + e = (ab*ab*b + bb*ab*b)*

Esta ultima solución es la expresión regular que denota el lenguaje aceptado por el autómata M2

L(M2) = (ab*ab*b + bb*ab*b)*