Introducción a la Lógica y la Computación. Examen Final 08/02/2022.

1. Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando apropiadamente.

   a) Si $(P, \leq)$ es un poset y $a, b \in P$ cumplen $a \nleq b$, entonces $a > b$.

   b) Si $(P, \leq)$ y $(Q, \leq')$ son posets isomorfos, entonces que $(P, \leq)$ tenga un elemento minimal implica que $(Q, \leq')$ tiene uno.

   c) Sea $(P, \leq)$ un poset tal que para cada $a, b \in P$ existe $\sup\{a, b\}$. Entonces para todo $S \subseteq P$ existe $\sup(S)$.

2. ¿Cuántos reticulados distributivos con exactamente un átomo y en total 4 elementos irreducibles existen? No hace falta que los construya explícitamente a todos. Justifique enunciando los resultados teóricos que utilice.

3. Encuentre derivaciones para:

   a) $\vdash \neg(\varphi \vee \psi) \to (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$.

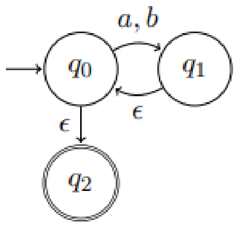
   b) $\{\varphi \vee \psi, \varphi \vee \neg\psi\} \vdash \varphi$.

4. Sea Γ un conjunto de proposiciones.

   a) Probar que si $\Gamma \vdash \neg\varphi$ entonces $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \perp$.

   b) Probar que si $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \perp$ entonces $\Gamma \vdash \neg\varphi$.

5. Considere el autómata M dado por el diagrama de la derecha. Encuentre una expresión regular que denote $L(M)$ utilizando el algoritmo dado por el Teorema de Kleene.



6. Probar que el lenguaje $\{a^n b^m \mid m \text{ es múltiplo de } n\}$ no es regular.

L. **Sólo para alumnxs libres:** Determine (y justifique) si el siguiente conjunto es consistente:

$$\{\neg p_1 \to \neg p_0, p_0, p_1 \to p_0, \neg p_1, (p_1 \vee p_0) \to p_0\}.$$

1. Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando apropiadamente.

   a) Si $(P, \leq)$ es un poset y $a, b \in P$ cumplen $a \not\leq b$, entonces $a > b$. F

   b) Si $(P, \leq)$ y $(Q, \leq')$ son posets isomorfos, entonces que $(P, \leq)$ tenga un elemento minimal implica que $(Q, \leq')$ tiene uno. V

   c) Sea $(P, \leq)$ un poset tal que para cada $a, b \in P$ existe $\sup\{a, b\}$. Entonces para todo $S \subseteq P$ existe $\sup(S)$. F

a) Falso, contraejemplo:

$a \not\leq b$ pero $a \not> b$

b) Verdadero, supongamos que no se cumple, entonces para un elemento mínima m en P. Como P y Q son isomorfos, si m esta en P, f(m) esta en Q absurdo de suponer que Q no tiene minimal.

c) Falso, contraejemplo:

En el poset D_12 tomemos el subconjunto S = {1,2,3} y claramente no existe el supremo de este subconjunto.

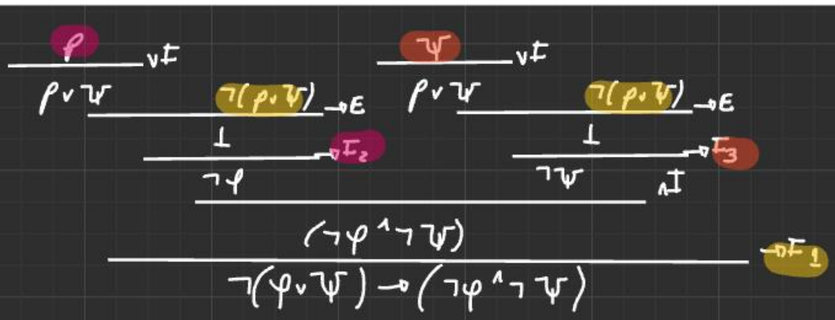
2. ¿Cuántos reticulados distributivos con exactamente un átomo y en total 4 elementos irreducibles existen? No hace falta que los construya explícitamente a todos. Justifique enunciando los resultados teóricos que utilice.

3. Encuentre derivaciones para:

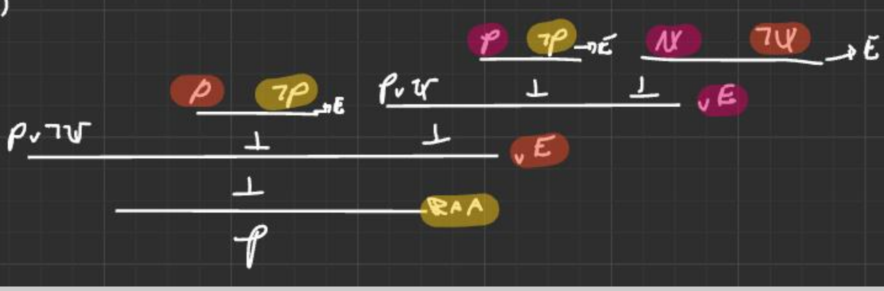
   a) $\vdash \neg(\varphi \vee \psi) \rightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$.

   b) $\{\varphi \vee \psi, \varphi \vee \neg\psi\} \vdash \varphi$.

a)



b)



4. Sea Γ un conjunto de proposiciones.

a) Probar que si $\Gamma \vdash \neg\varphi$ entonces $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \bot$.

b) Probar que si $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \bot$ entonces $\Gamma \vdash \neg\varphi$.

a, b

a)

Existe una derivación D tq:

Hip(D) ⊆ Γ y Concl(D) = ¬p

$$D = \begin{array}{c} \nabla^{\subseteq \Gamma} \\ \neg p \end{array} \Rightarrow \exists D' \text{ tq } D' = \dfrac{\begin{array}{c} \nabla^{\subseteq \Gamma} \\ \neg p \end{array} \qquad p}{\bot} \to E$$

$$Hip(D') = Hip(D) \cup \{p\} \subseteq \Gamma \cup \{p\}$$

D' atestigua $\Gamma \cup \{p\} \vdash \bot$

b)

Existe una derivación D tq:

Hip(D) ⊆ Γ U {p} y Concl(D) = $\bot$

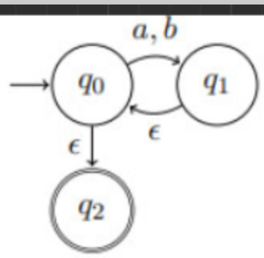
$$D = \begin{array}{c} \nabla^{\subseteq \Gamma \cup \{p\}} \\ \bot \end{array} \qquad D' = \dfrac{\begin{array}{c} \nabla^{\subseteq \Gamma \cup \{p\}} \\ \bot \end{array}}{\neg p} \to I$$

$$Hip(D') = Hip(D) \setminus \{p\}$$

$$\subseteq \Gamma \cup \{p\} \subseteq \Gamma \setminus \{p\} \subseteq \Gamma$$

D' atestigua $\Gamma \vdash \neg p$

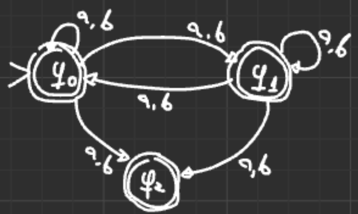
5. Considere el autómata M dado por el diagrama de la derecha. Encuentre una expresión regular que denote $L(M)$ utilizando el algoritmo dado por el Teorema de Kleene.



El estado inicial y el conjunto de estados se preserva.
Eliminamos las transiciones espontaneas:
[q0] = {q0,q2}
[q1] = {q0,q1,q2}
[q2] = {q2}
Calculamos los estados finales (estados tq su clausura contiene un estado final):
F' = ({q0, q1, q2})
Calculamos las nuevas transiciones del AFN:
△'(q0,a) = [△^([q0], a)] = [△^({q0,q2}, a)] = [q1] = {q0,q1,q2}
△'(q0,b) = [△^([q0], b)] = [△^({q0,q2}, b)] = [q1] = {q0,q1,q2}

△'(q1,a) = [△^([q1], a)] = [△^({q0,q1,q2}, a)] = [q1] = {q0,q1,q2}
△'(q1,b) = [△^([q1], b)] = [△^({q0,q1,q2}, b)] = [q1] = {q0,q1,q2}

△'(q2,a) = [△^([q2], a)] = [△^({q2}, a)] = [∅] = ∅
△'(q2,b) = [△^([q2], b)] = [△^({q2}, b)] = [∅] = ∅



= AFN_M

Luego con el teorema de Kleene y el Lema de Arden:
q0 = (a + b)q0 + (a + b)q1 + (a + b)q2 + e
q1 = (a + b)q1 + (a + b)q0 + (a + b)q2 + e
q2 = e

Reemplazamos en q1 el valor de q2
q1 = (a + b)q1 + (a + b)q0 + (a + b)e + e
= (a + b)q1 + (a + b)q0 + (a + b) + e
Por Lema de Arden:
q1 = (a + b)*((a + b)q0 + (a + b) + e)
= (a + b)*(a + b)q0 + (a + b)*(a + b) + (a + b)*
Reemplazamos el valor de q1 y q2 en q0
q0 = (a + b)q0 + (a + b)((a + b)*(a + b)q0 + (a + b)*(a + b) + (a + b)*) + (a + b) + e
= (a + b)q0 + (a + b)(a + b)*(a + b)q0 + (a + b)(a + b)*(a + b) + (a + b)(a + b)* + (a + b) + e
= ((a + b) + (a + b)(a + b)*(a + b))q0 + (a + b)(a + b)*(a + b) + (a + b)(a + b)* + (a + b) + e
Por Lema de Arden:
q0 = ((a + b) + (a + b)(a + b)*(a + b))*((a + b)(a + b)*(a + b) + (a + b)(a + b)* + (a + b) + e)
= ((a + b) + (a + b)(a + b)*(a + b))*(a + b)(a + b)*(a + b) + ((a + b) + (a + b)(a + b)*(a + b))*(a + b)(a + b)*
+ ((a + b) + (a + b)(a + b)*(a + b))*(a + b) + ((a + b) + (a + b)(a + b)*(a + b))*
Esta ultima solución es la expresión regular que denota al lenguaje aceptado por el autómata M

6. **Probar que el lenguaje $\{a^n b^m \mid m \text{ es múltiplo de } n\}$ no es regular.**

Queremos ver que L = {a^n . b^m | m es multiplo de n} no es un lenguaje regular.
Suponemos que L si es un lenguaje regular.
Sea n la cte. de bombeo y sea α = a^n . b^n una cadena aceptada por L tq |α|= 2n > n

Por pumping lemma:
α = α1α2α3 en donde
α1 = a^r, r >= 0
α2 = a^s, s >= 1
α3 = a^(n - (s + r))b^n
Para i = 2 tenemos que:
α = α1(α2^2)α3
= a^r . (a^s)^2 . a^(n - (s + r))b^n
= a^r . a^2s . a^(n - s - r)b^n
= a^(n + s)b^n
Como s >= 1, no se cumple para todos los casos de s que n sea múltiplo de n, absurdo de suponer que L era un lenguaje regular.

L. **Sólo para alumnxs libres:** Determine (y justifique) si el siguiente conjunto es consistente:

$$\{\neg p_1 \to \neg p_0, p_0, p_1 \to p_0, \neg p_1, (p_1 \vee p_0) \to p_0\}.$$

si Γ consistente $\Rightarrow \exists v : [\![\Gamma]\!]_v = 1$

$v(p_0) = 1$

$v(p_1) = 0$

Esto debe valer si o si para que las proposiciones ¬p1 y p0 sean validas, sin embargo, cuando tenemos ¬p1 -> ¬p0, esta proposición nos da invalida pues ¬p1 vale 1, y ¬p0 vale 0, el único caso en donde una implicación es falsa. Entonces no existe v que valide al conjunto, por lo que no es consistente.