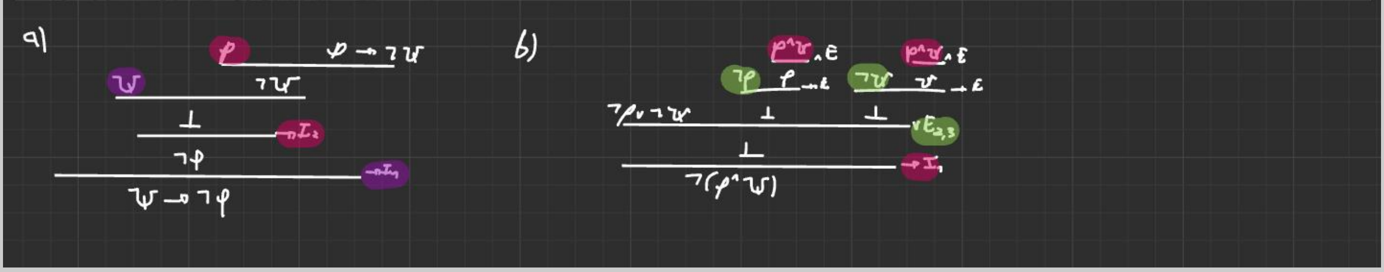
1. Pruebe (sin usar el Teorema de Completitud y Corrección) que

   a) $\{\varphi \to \neg\psi\} \vdash \psi \to \neg\varphi$.

   b) $\{\neg\varphi \vee \neg\psi\} \vdash \neg(\varphi \wedge \psi)$.



2. Sea $\Gamma \subseteq PROP$. Pruebe (sin usar el Teorema de Completitud y Corrección) que

$$\Gamma \vdash \neg\varphi \iff \Gamma \cup \{\varphi\} \text{ es inconsistente.}$$

Justifique su respuesta.

($\Rightarrow$) Sup $\Gamma \vdash \neg p$

Existe D tq

$$\left.\begin{array}{l} Hip(D) = \Gamma \\ Concl(D) = \neg p \end{array}\right\} \Rightarrow D = \dfrac{\begin{array}{c}\Gamma \\ \vdots \end{array}}{\neg p}$$

y

Existe D' tq

$$\left.\begin{array}{l} Hip(D') = p \\ Concl(D') = p \end{array}\right\} \Rightarrow D' = \begin{array}{c} p \\ \vdots \\ p \end{array}$$

Luego $D'' = \dfrac{p \quad \begin{array}{c}\Gamma \\ \vdots \\ \neg p\end{array}}{\perp} \to E$

$$\left\{\begin{array}{l} Hip(D'') = Hip(D') \cup Hip(D) = \{p\} \cup \Gamma \\ Concl(D'') = \perp \end{array}\right.$$

$\therefore\ \Gamma \vdash \neg p \Rightarrow \Gamma \cup \{p\} \vdash \perp$

($\Leftarrow$) Sup $\Gamma \cup \{p\} \vdash \perp$

Existe D tq

$$\left.\begin{array}{l} Hip(D) = \Gamma \cup \{p\} \\ Conc(D) = \perp \end{array}\right\} \Rightarrow D = \begin{array}{c} \Gamma \quad \{p\} \\ \vdots \\ \perp \end{array}$$

Luego Existe $D' = \dfrac{\begin{array}{c}\Gamma \quad [\{p\}]_1 \\ \vdots \\ \perp\end{array}}{\neg p} RRA_1$

$Hip(D') = Hip(D) \setminus \{p\} = \Gamma$

$Concl(D') = \neg p$

$\therefore\ \Gamma \vdash \neg p$

Ej3)

Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son **verdaderas**.

Γ es consistente si y sólo si $\perp \notin \Gamma$

a) Falso.

El implica (si bottom no está en R => R es consistente) es falso, pues R = {p1, !p1} deriva bottom y sin embargo bottom no está en R.

Si Γ es inconsistente y $\Delta \subseteq \Gamma$ entonces Δ es inconsistente.

b) Falso.
R = (p1, !p1) inconsistente, pero B = (p1) consistente.

Si Γ es consistente y $\Delta \subseteq \Gamma$ entonces Δ es consistente.

c) Verdadero.

Si Γ es consistente maximal y $\{p_7, \neg(p_1 \to p_2), p_3 \vee p_2\} \subseteq \Gamma$, entonces $p_1 \in \Gamma$

d) Verdadero.
Por criterio de consistencia, si existe v que valida a R entonces R es consistente. Podemos usar esto para ver si el subconjunto de R es validado por algún v.
Tenemos que para
[[!(p1 -> p2)]]_v = 1 si y sólo si [[p1]] = 1 y [[p2]] = 0.
Por lo tanto si !p1 está en R, esto nos vuelve inconsistente el conjunto R, y como !p1 no puede estar, por consistencia maximal, p1 está en R.

Si Γ y Δ son consistentes maximales entonces $\Gamma \cap \Delta$ es consistente maximal.

e) Falso.
Perdemos elementos.

Sean Δ y Γ subconjuntos de PROP.
Si $\Delta \subseteq \Gamma$ y $\Delta \vdash \varphi$ entonces $\Gamma \vdash \varphi$.

f) Verdadero.
Existe un D tq Hip(D) $\subseteq \Delta \subseteq \Gamma$ y Concl(D) = φ
entonces $\Gamma \vdash \varphi$

Sean Δ y Γ subconjuntos de PROP. Si $\Delta \vdash \varphi$ y $\Gamma \vdash \varphi$ entonces $\Delta \subseteq \Gamma$ o $\Gamma \subseteq \Delta$

g) Falso.
Que deriven lo mismo no significa que se contengan.

Si f es una asignación entonces Th(f) es consistente maximal.

h) Verdadero.
Por definición.

Si Γ el conjunto de los teoremas entonces Γ es consistente maximal.

i) Falso.
Agregamos p1 y no se vuelve inconsistente.

Ej4)

Considere el conjunto $\{ \neg p_1 \rightarrow (p_2 \vee (p_0 \leftrightarrow p1)), \neg(p_0 \rightarrow p_1) \}$. Determine cuál de las siguientes asignaciones lo valida.

a. $f(p_0)=0$, $f(p_1)=0$, $f(p_2)=0$ y $f(p_i)=1$ para $i \geq 3$

b. $f(p_0)=0$, $f(p_1)=0$, $f(p_2)=1$ y $f(p_i)=1$ para $i \geq 3$

c. $f(p_0)=0$, $f(p_1)=1$, $f(p_2)=0$ y $f(p_i)=1$ para $i \geq 3$

d. $f(p_0)=0$, $f(p_1)=1$, $f(p_2)=1$ y $f(p_i)=1$ para $i \geq 3$

e. $f(p_0)=1$, $f(p_1)=0$, $f(p_2)=0$ y $f(p_i)=1$ para $i \geq 3$

f. $f(p_0)=1$, $f(p_1)=0$, $f(p_2)=1$ y $f(p_i)=1$ para $i \geq 3$

g. $f(p_0)=1$, $f(p_1)=1$, $f(p_2)=0$ y $f(p_i)=1$ para $i \geq 3$

h. $f(p_0)=1$, $f(p_1)=1$, $f(p_2)=1$ y $f(p_i)=1$ para $i \geq 3$

$[\![\neg(p_0 \rightarrow p_1)]\!]_v = 1$ si $p_0 = 1$ y $p_1 = 0$

$[\![\neg p_1 \rightarrow (p_2 \vee (p_0 \leftrightarrow p_1))]\!] = 1$

$\neg p_1 = 1 \Rightarrow [\![(p_2 \vee (p_0 \leftrightarrow p_1))]\!] = 1$

$\max([\![p_2]\!], [\![p_0 \leftrightarrow p_1]\!])$

$p_2 = 1, 0$

$p_0 \rightarrow p_1$ && $p_1 \rightarrow p_0$

$1 \quad 0 \qquad 0 \quad 1 = 1$

$= 0 \qquad \Rightarrow [\![p_0 \leftrightarrow p_1]\!]_v = 0$

$\Rightarrow \max([\![p_2]\!], [\![p_0 \leftrightarrow p_1]\!]) = 1$

si

$[\![p_2]\!]_v = 1$

Ej5)

Determine cuáles de los siguientes conjuntos son **consistentes**.

a. $\{(p_1 \wedge \neg p_0 \wedge p_2) \vee (p_0 \wedge \neg p_2), (p_1 \rightarrow p_0), (p_0 \leftrightarrow p_2)\}$

[[(p1 -> p0)]]_v = 1 si
p1 = 0 y p0 = 1
p1 = 1 y p0 = 1
p1 = 0 y p0 = 0
[[(p0 -> p2)]]_v = 1 si
p0 = 0 y p2 = 1
p0 = 1 y p2 = 1
p0 = 0 y p2 = 0
[[(p1 ^ ¬p0 ^ p2) v (p0 ^ ¬p2)]] = max([[(p1 ^ ¬p0 ^ p2)]], [[(p0 ^ ¬p2)]])
[[(p0 ^ ¬p2)]] = min([[p0]], [[¬p2]]) = 1 sii p0 = 1 y p2 = 0 (no puede ser por p0 -> p2)
[[(¬p0 ^ p1 ^ p2)]] = min([[¬p0]], [[p2]], [[p1]]) = 1 si p0 = 0, p2 = 1 y p1 = 1 (no puede suceder por p0 -> p2)
Entonces no existe v que valide a todo el conjunto, por lo tanto es inconsistente.

b. $\{(p_0 \rightarrow p_1), (p_2 \rightarrow (p_3 \rightarrow \neg p_1)), (p_0 \wedge p_3), p_2\}$

[[p0 -> p1]] = 1 si
p0 = 1, p1 = 1
p0 = 0, p1 = 0
p0 = 0, p1 = 1
[[p0 ^ p3]] = min([[p0]], [[p3]]) = 1 sii p0 = 1 y p3 = 1
[[p2]] = 1 si p2 = 1

[[p2 -> (p3 -> ¬p1)]] = 1 si
p2 = 1, (p3 -> ¬p1) = 1
[[(p3 -> ¬p1)]] = 1 si
p3 = 1, p1 = 0
pero si p1 = 0 entonces p0 -> p1 implica que p0 debe ser 0, pero por p0 ^ p3 p0 = 1 si o si.
Entonces no existe v que valide el conjunto, es inconsistente.

c. $\{p_{2i} \wedge \neg p_{2i+1} : i = 0, 1, \dots\}$

v(p_k) = 1 si k = 2i
v(p_k) = 0 si k = 2i + 1
Es consistente.

d. $\{(\neg p_1 \vee \neg p_2) \to \neg p_0,\ p_1 \wedge p_0,\ p_1 \to (\neg p_0 \vee p_2),\ \neg p_0 \leftrightarrow \neg p_2\}$

[[p0 ^ p1]]_v = 1 si y solo si [[p0]] = 1 y [[p1]] = 1

[[¬p0 -> ¬p2 ^ ¬p2 -> ¬p0]] = 1 si y solo si
[[¬p0 -> ¬p2]] = 1
[[¬p2 -> ¬p0]] = 1
Se cumple si [[p0]] = 0 y [[p2]] = 0 o [[p0]] = 1 y [[p2]] = 1

Por ahora todo se valida con
[[p0]] = 1, [[p2]] = 1, [[p1]] = 1

[[p1 -> (¬p0 v p2)]] = 1 si
[[p1]] = 1, [[¬p0 v p2)]] = 1
[[¬p0 v p2)]] = max([[¬p0]], [[p2]]) = 1 ya que [[p2]] = 1

[[(¬p1 v ¬p2) -> ¬p0]] = 1
[[(¬p1 v ¬p2)]] = 0, [[¬p0]] = 0 pues [[p0]] = 1
[[(¬p1 v ¬p2)]] = max([[¬p1]], [[¬p2]]) ambos [[p1]] y [[p2]] = 1 entonces se cumple que para:
v(p0) = 1
v(p1) = 1
v(p2) = 1
se valida el conjunto, por lo tanto es consistente.

Ej6)

Determine cuáles de las siguientes relaciones de consecuencia lógica se dan.

a. $\{p_0 \vee \neg p_1\} \models p_0 \to p_1$ F

max (1 0) = 1, 1, 0

b. $\{(p_1 \to p_2)\} \models ((p_2 \to p_0) \to (p_1 \to p_0))$ ✓

0 0 0 1 0 1

v(p₁) = 0
v(p₂) = 0
v(p₀) = 1

c. $\{\overbrace{\neg(p_0 \to p_1)}^{1}\} \models p_0 \vee p_3$ Max(1, 0) = 1 = 1

1 0 ✓

d. $\{p_2 \vee p_1, p_2 \to p_1\} \models p_2$

max(1/0, 1/1) = 1

v(p2) = 1
v(p1) = 1 ⟹ v(p2) = 1

v(p2) = 0
v(p1) = 1 ⟹ v(p2) = 0

F