Introducción a la Lógica y la Computación - Examen Final 26/7/2023

Apellido y Nombre:

nota

1	2	3	4	5	6

(1) Considere el conjunto parcialmente ordenado $(D, |)$, donde $D = \{1, 2, 3, 6, 9, 12, 18, 36\}$, y $a|b$ si y sólo si a es divisor de b.

(a) De el diagrama de Hasse $(Irr(L), |)$.

(b) Sea $F : D \to \mathcal{D}(Irr(L))$ la función definida en el Teorema de Birkhoff. Dé explícitamente $F(x)$ para cada $x \in D$.

(c) ¿Es $(D, |)$ un reticulado distributivo? Justifique su respuesta.

(d) ¿Es L un Álgebra de Boole? Justifique su respuesta.

(2) Sea L un reticulado. Pruebe que:

$$(x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (x \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$$

(3) Obtenga una derivación para: $\vdash \neg(\varphi \to \psi) \to (\gamma \to \neg\psi)$

(4) Suponga que Γ es consistente maximal. Suponga que $(p_0 \wedge p_1 \to \neg p_1) \in \Gamma$ y que $p_1 \in \Gamma$. ¿Contiene Γ a p_0? Justifique su respuesta.

(5) Sea el NFA $M = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_2\})$ donde δ viene dada por la siguiente tabla de transición:

	0	1	ϵ
q_0	$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
q_1	$\{q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_0\}$
q_2	$\emptyset$	$\{q_0\}$	$\{q_1\}$

(a) Hacer el diagrama de transición de M.

(b) Hallar una expresión que denote el mismo lenguaje que M. (Use el algoritmo del teorema de Kleene.)

(6) Determine si el siguiente lenguaje es regular. Justifique su respuesta.

$$L = \{a^k b^j : k, j \geq 0,\ k < j\}$$

Ejercicios para alumnos libres:

(7) Decida si el siguiente conjunto es consistente. Justifique su respuesta.

$\{p_0, \neg p_1 \to p_0, \neg p_2 \to (p_0 \wedge p_1), \neg p_3 \to (p_0 \wedge p_1 \wedge p_2), ...\}$.

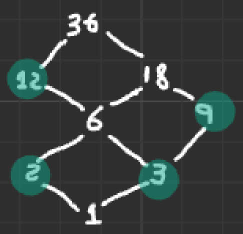
(1) Considere el conjunto parcialmente ordenado $(D, |)$, donde $D = \{1, 2, 3, 6, 9, 12, 18, 36\}$, y $a|b$ si y sólo si a es divisor de b.

(a) De el diagrama de Hasse $(Irr(L), |)$.

(b) Sea $F : D \to \mathcal{D}(Irr(L))$ la función definida en el Teorema de Birkhoff. Dé explícitamente $F(x)$ para cada $x \in D$.

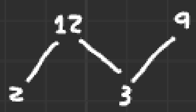
(c) ¿Es $(D, |)$ un reticulado distributivo? Justifique su respuesta.

(d) ¿Es L un Álgebra de Boole? Justifique su respuesta.



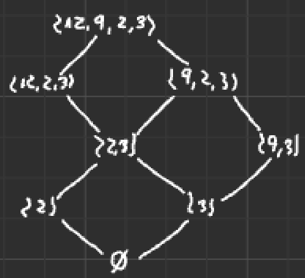
$Irr(L) = \{2,3,9,12\}$

a)

$(Irr(L), |) =$ 

b)

F(36) = {12,9,2,3}
F(12) = {12,2,3}
F(18) = {9,2,3}
F(6) = {2,3}
F(9) = {9,3}
F(2) = {2}
F(3) = {3}
F(1) = Vacío

$D(Irr(L), \subseteq) =$ 

c)

Como |L| >= |D(Irr(L))| L es distributivo.
Pues |L| = 8 y |D(Irr(L))| = 8

d)

No es un algebra de boole, no todos los elementos tienen complemento, por ejemplo el 3, 3 v x = 38, no esta definido el x.

(2) Sea L un reticulado. Pruebe que:

$$(x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (x \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$$

Si L es un reticulado entonces existe infimo y supremo para cada par a,b en L.

(x ^ y) v (x ^ z) v (y ^ z) <= (x v y) ^ (y v z) ^ (x v z)

(x ^ y) v (x ^ z) v (y ^ z) <= (x v y)
- (x ^ y) <= x <= (x v y) => (x ^ y) <= (x v y)
- (x ^ z) <= x <= (x v y) => (x ^ z) <= (x v y)
- (y ^ z) <= y <= (x v y) => (y ^ z) <= (x v y)

Dado que cada termino es <= (x v y), entonces el supremo de estos es menor a (x v y)

(x ^ y) v (x ^ z) v (y ^ z) <= (y v z)
- (x ^ y) <= y <= (y v z) => (x ^ y) <= (y v z)
- (x ^ z) <= z <= (y v z) => (x ^ z) <= (y v z)
- (y ^ z) <= y <= (y v z) => (y ^ z) <= (y v z)

Dado que cada termino es <= (y v z), entonces el supremo de estos es menor a (y v z)

(x ^ y) v (x ^ z) v (y ^ z) <= (x v z)
- (x ^ y) <= x <= (x v z) => (x ^ y) <= (x v z)
- (x ^ z) <= x <= (x v z) => (x ^ z) <= (x v z)
- (y ^ z) <= z <= (x v z) => (y ^ z) <= (x v z)

Dado que cada termino es <= (x v z), entonces el supremo de estos es menor a (x v z)

Demostramos que (x ^ y) v (x ^ z) v (y ^ z) es menor igual a cada termino del ínfimo de la derecha, entonces se cumple que (x ^ y) v (x ^ z) v (y ^ z) <= (x v y) ^ (y v z) ^ (x v z).

(3) Obtenga una derivación para: $\vdash \neg(\varphi \to \psi) \to (\gamma \to \neg\psi)$

5) φ
4) $\neg(\varphi \to \psi)$
1) $\neg(\varphi \to \psi)$
2) γ
3) ψ

$$\dfrac{\psi}{\varphi \to \psi}\ \to I$$

$$\dfrac{\varphi \to \psi \qquad \neg(\varphi \to \psi)}{\perp}\ \to I_4$$

$$\dfrac{\neg(\varphi \to \psi) \qquad \neg(\neg(\varphi \to \psi)}{\perp}\ \to E$$

$$\dfrac{\perp}{\neg\psi}\ \to I_3$$

$$\dfrac{\neg\psi}{\gamma \to \neg\psi}\ \to I_2$$

$$\dfrac{\gamma \to \neg\psi}{\neg(\varphi \to \psi) \to (\gamma \to \neg\psi)}\ \to I_1$$

(4) Suponga que Γ es consistente maximal. Suponga que $(p_0 \wedge p_1 \rightarrow \neg p_1) \in \Gamma$ y que $p_1 \in \Gamma$. ¿Contiene Γ a p_0? Justifique su respuesta.

Γ es consistente maximal.
(p0 ^ p1 -> ¬p1) ∈ Γ
p1 ∈ Γ

¿p0 esta en Γ?

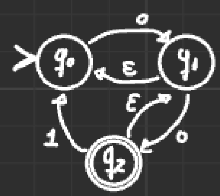
Supongamos que p0 ∈ Γ. Como Γ consistente maximal y p0 esta, entonces ¬p0 no debe estar en Γ. Como un conjunto consistente maximal es cerrado por derivaciones, tenemos que, si Γ ⊢ φ => φ ∈ Γ, su contrarrecíproca nos dice que si φ /∈ Γ => Γ /⊢ φ.

Luego como p0 y p1 ambos están en Γ, por introducción de la conjunción p0 ^ p1 también es derivable por Γ, en particular ¬p1, pues p0 ^ p1 junto a (p0 ^ p1 -> ¬p1) ∈ Γ, por eliminación del implica deriva a ¬p1. Esto es absurdo pues p1 ∈ Γ. Si p1 ∈ Γ entonces ¬p1 /∈ Γ por maximalidad.

(5) Sea el NFA $M = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0,1\}, \delta, q_0, \{q_2\})$ donde δ viene dada por la siguiente tabla de transición:

	0	1	ϵ
q_0	$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
q_1	$\{q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_0\}$
q_2	$\emptyset$	$\{q_0\}$	$\{q_1\}$

(a) Hacer el diagrama de transición de M.
(b) Hallar una expresión que denote el mismo lenguaje que M. (Use el algoritmo del teorema de Kleene.)

a)


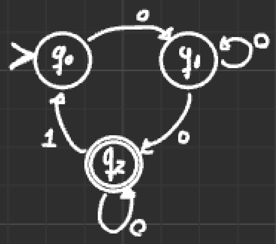
b) Eliminamos transiciones vacías y obtenemos el AFN:
Calculamos la clausura de cada estado;

M' := (L, {0,1}, △, q0, {q2})
L := {[q0], [q1], [q2]}
[q0] = {q0}
[q1] = {q0,q1}
[q2] = {q1,q2}
△ esta definida como:
△(q0, 0) = △^([q0], 0) = △^({q0}, 0) = {q1}
△(q0, 1) = △^([q0], 1) = △^({q0}, 1) = ...

△(q1, 0) = △^([q1], 0) = △^({q0,q1}, 0) = {q1,q2}
△(q1, 1) = △^([q1], 1) = △^({q0,q1}, 1) = ...

△(q2, 0) = △^([q2], 0) = △^({q1,q2}, 0) = {q2}
△(q2, 1) = △^([q2], 1) = △^({q1,q2}, 1) = {q0}

El AFN resultante es:



La ecuación resultante es:
X0 = 0X1
X1 = 0X1 + 0X2
X2 = 0X2 + 1X0 + e

Por lema de Arden X2 tiene solución:
X2 = 0*(1X0 + e)

Reemplazando en X1 obtenemos:
X1 = 0X1 + 0(0*(1X0 + e)) = 0X1 + 0(0*1X0 + 0*)) = 0X1 + 00*1X0 + 00*
Por lema de Arden esto tiene solución:
X1 = 0*(00*1X0 + 00*) = 0*00*1X0 + 0*00*
Reemplazando en X0 obtenemos:
X0 = 0(0*00*1X0 + 0*00*) = 00*00*1X0 + 00*00*
Por lema de Arden esto tiene solución:
X0 = (00*00*1)*(00*00*)
Esta ultima solución es la expresión regular que denota el lenguaje aceptado por el autómata M:
L(M) = (00*00*1)*(00*00*)

(6) Determine si el siguiente lenguaje es regular. Justifique su respuesta.

$$L = \{a^k b^j : k, j \geq 0,\ k < j\}$$

L = {a^k . b^j : k,j >= 0, k < j}

Supongamos que L pertenece a los lenguajes regulares.
Tomemos la cadena y sea n la cte de bombeo de L.

Tomamos α = a^(n-1) . b^n, luego |α| = n + (n - 1) > n
Por pumping lemma:
α = α1α2α3
donde
α1 = a^r, r >= 0
α2 = a^s, s >= 1
α3 = a^(n-1) - (s+r)b^n
Para i = 2 tenemos que:
α = α1(α2)^2α3 = a^r . (a^s)^2 . a^(n-1) - (s+r)b^n
= a^r . a^2s . a^(n-1 - s - r)b^n
= a^(r + 2s + n - 1 - s - r) . b^n
= a^(n - 1 + s) . b^n
Absurdo, pues como s >= 1, no se cumple que n - 1 + s < n, por lo cual L no es un lenguaje regular.

Ejercicios para alumnos libres:

(7) Decida si el siguiente conjunto es consistente. Justifique su respuesta.

$$\{\overset{1}{p_0}, \neg \overset{6}{p_1} \to p_0, \neg \overset{0}{p_2} \to (p_0 \wedge p_1), \neg \overset{0}{p_3} \to (p_0 \wedge p_1 \wedge p_2), \dots\}.$$

$$\Gamma \nvdash \bot \iff \Gamma \not\models \bot$$

Por existencia de modelos si: $\Gamma \nvdash \bot \Rightarrow \exists v : [\![\Gamma]\!]_v = 1$

$v(p_i) = 1$ Cumple $\therefore$ Γ consistente