(1) Considere el poset $P = \{p, e, d, a\}$ de la figura.

(a) Dé el diagrama de Hasse de $\mathcal{D}(P)$.

(b) ¿Es $\mathcal{D}(P)$ distributivo? Justifique su respuesta.

(c) ¿Existe X conjunto tal que $\mathcal{D}(P)$ es isomorfo a $\mathcal{P}(X)$?

(2) Sea B un álgebra de Boole. Pruebe que para todo $x, y, z \in B$ vale la propiedad:

$$z \leq x \wedge y \implies x^c \wedge y \leq z^c \wedge y$$

(3) Obtenga una derivación para cada ítem:

(a) $\vdash \neg(\varphi \to \psi) \to \neg\psi$

(b) $\vdash \neg(\psi \wedge \neg\varphi) \to (\psi \to \varphi)$

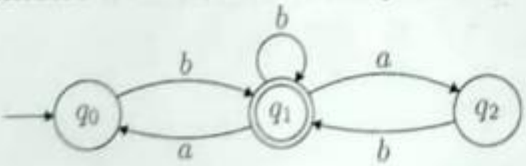
(4) Determine si es verdadero o falso. Justifique su respuesta.

(a) Si Γ es un conjunto consistente, entonces $\{\neg\varphi : \varphi \in \Gamma\}$ es también consistente.

(b) Si Γ es un conjunto consistente cerrado por derivaciones, entonces Γ es consistente maximal. (Un conjunto Γ es cerrado por derivaciones si para toda φ vale: $\Gamma \vdash \varphi$ implica $\varphi \in \Gamma$.)

(5) Definir un ε-NFA que acepte exactamente el lenguaje formado por todas las palabras del alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$ que **no contienen** un segmento igual a aa.

(6) Considere el autómata M dado por el siguiente diagrama.



Encuentre una expresión regular que denote $L(M)$. Utilice el algoritmo dado por el teorema de Kleene.

Ejercicios para alumnos libres:

Decida los siguientes conjuntos son consistentes. Para cada uno construya, en caso de ser consistente, una asignación que lo valide, y en caso de no serlo, una derivación con conclusión $\perp$.

(1) $\{p_0, \neg p_1 \to p_0, \neg p_2 \to (p_0 \wedge p_1), \neg p_3 \to (p_0 \wedge p_1 \wedge p_2), \dots\}$.

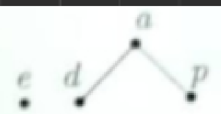
(2) $\{(p_0 \wedge p_1) \vee p_0, \neg p_0\}$.

(1) Considere el poset $P = \{p, e, d, a\}$ de la figura.

(a) Dé el diagrama de Hasse de $\mathcal{D}(P)$.

(b) ¿Es $\mathcal{D}(P)$ distributivo? Justifique su respuesta.

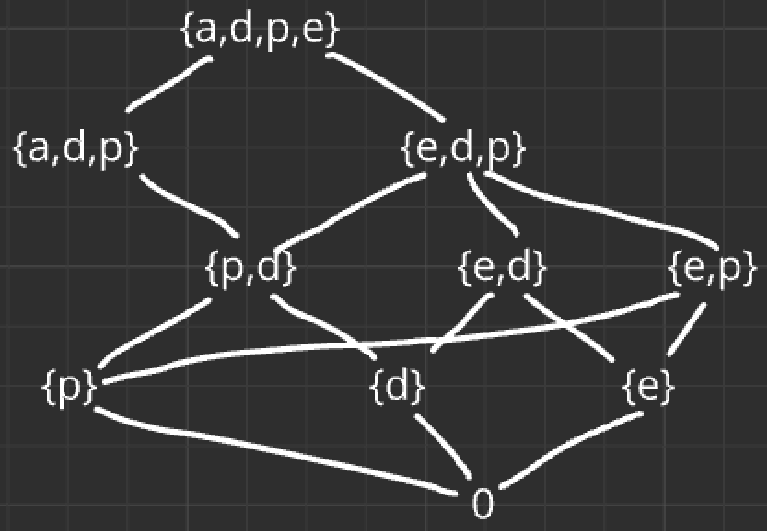
(c) ¿Existe X conjunto tal que $\mathcal{D}(P)$ es isomorfo a $\mathcal{P}(X)$?



a)

D(P) = { P, {d}, {p}, {e}, {a,d,p}, {e,d}, {e,p}, vacio, {d,p}, {e,d,p} }

No decrecientes: {e,a}, {a}, {a,e,d}, {a,e,p}, {d,a}, {p,a}



b) Si es distributivo porque D(P) es isomorfo a un subreticulo de partes de {a,d,p,e}

c) No, |D(P)| = 10, un poset de partes va en potencias de 2 así que no es posible un isomorfismo, no tenemos biyección

(2) Sea B un álgebra de Boole. Pruebe que para todo $x, y, z \in B$ vale la propiedad:

$$z \leq x \wedge y \implies x^c \wedge y \leq z^c \wedge y$$

z <= x ^ y => x' ^ y <= z' ^ y

Suponemos el antecedente y demostramos el consecuente:
Hipótesis z <= x ^ y => z <= x && z <= y

x' ^ y <= z' ^ y
un ínfimo es mayor a algo si y solo si cada termino del ínfimo es mayor a eso.
x' ^ y <= y (trivial)
&&
x' ^ y <= z'

veamos que
x' ^ y <= z'
Por hipótesis z <= x && z <= y
entonces aplicando complemento (invierto desigualdades)
z' >= x' && z' >= y'
Luego
x' ^ y <= x' <= z'
por transitividad
=> x' ^ y <= z'
queda demostrado que:
z <= x ^ y => x' ^ y <= z' ^ y

(3) Obtenga una derivación para cada ítem:

(a) $\vdash \neg(\varphi \to \psi) \to \neg\psi$

(b) $\vdash \neg(\psi \wedge \neg\varphi) \to (\psi \to \varphi)$

a)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\psi}{\varphi \to \psi}\to I_3 \qquad \neg(\varphi \to \psi)}{\bot}\to E}{\neg\psi}\to I_2}{\neg(\varphi \to \psi) \to \neg\psi}\to I_1$$

b)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\psi \qquad \neg\varphi}{\psi \wedge \neg\varphi}\wedge I \qquad \neg(\psi \wedge \neg\varphi)}{\bot}}{\varphi}RAA_3}{\psi \to \varphi}\to I_2}{\neg(\psi \wedge \neg\varphi) \to (\psi \to \varphi)}\to I_1$$

(4) Determine si es verdadero o falso. Justifique su respuesta.

(a) Si Γ es un conjunto consistente, entonces $\{\neg\varphi : \varphi \in \Gamma\}$ es también consistente.

(b) Si Γ es un conjunto consistente cerrado por derivaciones, entonces Γ es consistente maximal. (Un conjunto Γ es cerrado por derivaciones si para toda φ vale: $\Gamma \vdash \varphi$ implica $\varphi \in \Gamma$.)

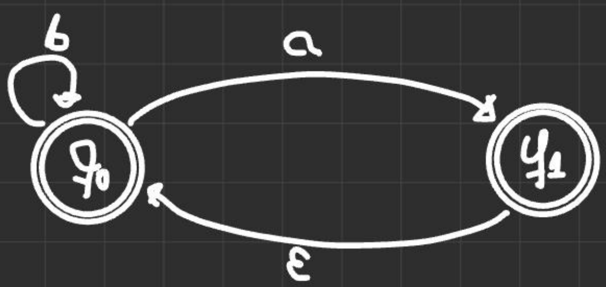
a) Si Γ es un conjunto consistente, entonces $\{ \neg\varphi : \varphi \in \Gamma \}$ es también consistente.

Falso, pues si $\neg\varphi$ y $\varphi \in \Gamma$, llegamos a una contradicción y $\Gamma \vdash \bot$, lo cual es absurdo.

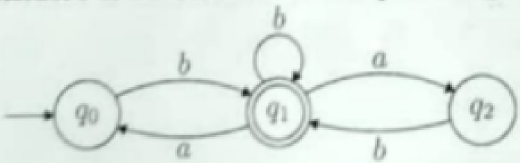
b) si Γ es un conjunto cerrado por derivaciones, entonces Γ es consistente maximal. (Un conjunto Γ es cerrado por derivaciones si para toda φ cale: $\Gamma \vdash \varphi$ implica $\varphi \in \Gamma$)

Falso, no todo conjunto consistente Γ cerrado por derivaciones, implica que sea consistente maximal. Puede pasar que falten proposiciones para que sea maximal.

(5) Definir un ε-NFA que acepte exactamente el lenguaje formado por todas las palabras del alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$ que **no contienen** un segmento igual a aa.



(6) Considere el autómata M dado por el siguiente diagrama.



Encuentre una expresión regular que denote $L(M)$. Utilice el algoritmo dado por el teorema de Kleene.

$X0 = bX1$

$X1 = bX1 + aX0 + aX2 + e$

$X2 = bX1$

Por lema de Arden X1 tiene solución:

$X1 = b^*(aX0 + aX2 + e) = b^*aX0 + b^*aX2 + b^*$

Reemplazamos en X2:

$X2 = b(b^*aX0 + b^*aX2 + b^*) = bb^*aX2 + bb^*aX0 + bb^*$

Por lema de Arden X2 tiene solución:

$X2 = (bb^*a)^*(bb^*aX0 + bb^*)$

$\quad = (bb^*a)^*bb^*aX0 + (bb^*a)^*bb^*$

Reemplazamos en X0:

$X0 = b((bb^*a)^*bb^*aX0 + (bb^*a)^*bb^*)$

$\quad = b(bb^*a)^*bb^*aX0 + b(bb^*a)^*bb^*$

Por lema de Arden esto tiene solución:

$X0 = (b(bb^*a)^*bb^*a)^*b(bb^*a)^*bb^*$

Luego esta ultima solución es la expresión regular que denota el lenguaje aceptado por el autómata M:

$L(M) = (b(bb^*a)^*bb^*a)^*b(bb^*a)^*bb^*$

Ejercicios para alumnos libres:

Decida los siguientes conjuntos son consistentes. Para cada uno construya, en caso de ser consistente, una asignación que lo valide, y en caso de no serlo, una derivación con conclusión $\bot$.

(1) $\{p_0, \neg p_1 \to p_0, \neg p_2 \to (p_0 \wedge p_1), \neg p_3 \to (p_0 \wedge p_1 \wedge p_2), \dots\}$.

(2) $\{(p_0 \wedge p_1) \vee p_0, \neg p_0\}$. $\vdash \bot$

1)

$v(p_i) = 1$

2)

$$\dfrac{(p_0 \wedge p_1) \vee p_0 \qquad \dfrac{[p_0] \qquad \neg p_0}{\bot}\,{\to}E \qquad \dfrac{\dfrac{[p_0 \wedge p_1]}{p_0} \qquad \neg p_0}{\bot}\,{\to}E}{\bot}\,\vee E$$