Introducción a la Lógica y la Computación — Examen Final 07/02/2024

Apellido y Nombre en todas las hojas

1. Sea L un reticulado distributivo. Probar que para todos $a, b, c \in L$,

$$a \vee b = a \vee c$$
$$a \wedge b = a \wedge c$$

implican $b = c$.

2. Sea $X \subseteq D_{3^{24}}$ un subconjunto no vacío. Decidir si el poset $(X, |)$ (con la relación de divisibilidad) es un reticulado distributivo, justificando la respuesta.

3. Encuentre derivaciones que justifiquen:

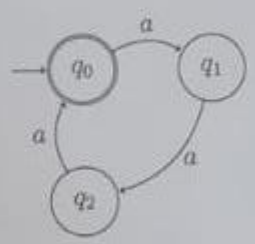
   a) $\vdash \varphi \vee \psi \to \psi \vee \varphi$.

   b) $\{\neg(\varphi \wedge \neg\psi), \varphi\} \vdash \psi$.

4. a) Probar usando derivaciones que para todo $\Gamma \subseteq PROP$ tal que $\Gamma \cup \{\varphi_1, \varphi_2\} \vdash \varphi_3$, se cumple que $\Gamma \cup \{\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \neg\varphi_3\}$ es inconsistente.

   b) Demostrar que si un Γ que satisfaga las hipótesis del ítem anterior es consistente maximal, entonces $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \to \varphi_3 \in \Gamma$.

5. Utilizar el algoritmo del teórico para determinizar el NFA cuyo alfabeto (**¡atención!**) es $\Sigma := \{a, b, c\}$ y tiene el siguiente diagrama de transición:



6. Probar que el lenguaje $\{\alpha \in \{a, b\}^* \mid \exists\beta,\ \alpha = \beta\beta\}$ no es regular.

L. **Sólo para alumnxs libres:**

   a) Demostrar que el reticulado N_5 no es distributivo.

   b) Dar un DFA sobre el alfabeto $\Sigma := \{a, b\}$ cuyo lenguaje aceptado sea el de las palabras con cantidad impar de as y cantidad par de bs.

1. Sea L un reticulado distributivo. Probar que para todos $a, b, c \in L$,

$$a \vee b = a \vee c$$
$$a \wedge b = a \wedge c$$

implican $b = c$.

Como L es un reticulado distributivo se cumple que:
a v (b ^ c) = (a v b) ^ (a v c)
a ^ (b v c) = (a ^ b) v (a ^ c)

Probamos suponiendo el antecedente:
Hipótesis:
a v b = a v c
a ^ b = a ^ c

b = b ^ (b v a)   (absorción)
por hipótesis
b = b ^ (a v c)
aplicamos propiedad de distributivo
b = (b ^ a) v (b ^ c)

c = c ^ (c v a)   (absorción)
por hipótesis
c = c ^ (b v a)
aplicamos propiedad de distributivo
c = (c ^ b) v (c ^ a)
por hipótesis nuevamente
c = (c ^ b) v (b ^ a)

Luego b = (b ^ a) v (b ^ c) = c => b = c

2. Sea $X \subseteq D_{2^{24}}$ un subconjunto no vacío. Decidir si el poset $(X, |)$ (con la relación de divisibilidad) es un reticulado distributivo, justificando la respuesta.

$D_{2^{24}} = D_{2^{2.2.2.3}}$

Podemos formar los siguientes subreticulados

$D_{2^{2}}$, $D_{2^{2.2}}$, $D_{2^{2.2.2}}$, $D_{2^{2.2.2.3}}$

$D_{2^{3}}$, $D_{2^{3.2}}$, $D_{2^{3.2.2}}$

Como todos los elementos son potencias de 2, el orden por divisibilidad forma siempre una cadena. Luego cualquier subconjunto no vacío, será una cadena y por ende distributivo.

3. Encuentre derivaciones que justifiquen:

a) $\vdash \varphi \vee \psi \to \psi \vee \varphi$.

b) $\{\neg(\varphi \wedge \neg\psi), \varphi\} \vdash \psi$.

a)

$$\dfrac{\dfrac{[\varphi\vee\psi] \qquad \dfrac{[\varphi]}{\psi\vee\varphi}\vee I \qquad \dfrac{[\psi]}{\psi\vee\varphi}\vee I}{\psi\vee\varphi}\vee E}{\varphi\vee\psi\to\psi\vee\varphi}\to I_1$$

b)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \qquad [\neg\psi]_1}{\varphi\wedge\neg\psi} \qquad \neg(\varphi\wedge\neg\psi)}{\bot}\to E}{\psi}RAA_1$$

4. a) Probar usando derivaciones que para todo $\Gamma \subseteq PROP$ tal que $\Gamma\cup\{\varphi_1,\varphi_2\} \vdash \varphi_3$, se cumple que $\Gamma \cup \{\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \neg\varphi_3\}$ es inconsistente.

b) Demostrar que si un Γ que satisfaga las hipótesis del ítem anterior es consistente maximal, entonces $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \to \varphi_3 \in \Gamma$.

a) $\exists D$ t.q. $Hip(D) \subseteq \Gamma\cup\{\varphi_1,\varphi_2\}$, $Concl(D) = \varphi_3$

$\exists D'$ t.q. $Hip(D') = \varphi_1\wedge\varphi_2\wedge\neg\varphi_3$, $Concl(D') = \neg\varphi_3$

$$D = \begin{array}{c} \nabla \subseteq \Gamma\cup\{\varphi_1,\varphi_2\} \\ \varphi_3 \end{array} \qquad D' = \dfrac{\dfrac{\varphi_1\wedge\varphi_2\wedge\neg\varphi_3}{\varphi_2\wedge\neg\varphi_3}\wedge E}{\neg\varphi_3}\wedge E$$

$\Longrightarrow$

$$D'' = \dfrac{\begin{array}{c} \nabla \subseteq \Gamma\cup\{\varphi_1,\varphi_2\} \\ \varphi_3 \end{array} \qquad \dfrac{\dfrac{\varphi_1\wedge\varphi_2\wedge\neg\varphi_3}{\varphi_2\wedge\neg\varphi_3}\wedge E}{\neg\varphi_3}\wedge E}{\bot}\to E$$

$$Hip(D'') = Hip(D) \cup Hip(D')$$
$$= \underbrace{\Gamma\cup\{\varphi_1,\varphi_2\}\cup\{\varphi_1\wedge\varphi_2\wedge\neg\varphi_3\}}_{\supseteq}$$
$$\Gamma\cup\{\varphi_1\wedge\varphi_2\wedge\neg\varphi_3\}$$

D'' atestigua $\Gamma\cup\{\varphi_1\wedge\varphi_2\wedge\neg\varphi_3\} \vdash \bot$

b)

Demostremos suponiendo el antecedente:
Γ es consistente maximal y además
Γ U {p1,p2} ⊢ p3
Γ U {p1 ^ p2 ^ ¬p3} ⊢ ⊥ (es inconsistente)

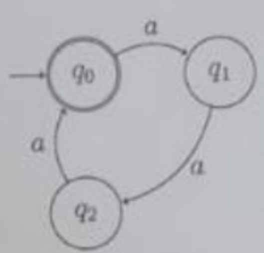
Queremos ver que (p1 ^ p2) -> p3 ∈ Γ

Sabemos que los conjuntos consistentes maximales son cerrados por derivación, es decir, si Γ ⊢ p => p ∈ Γ

Si la unión Γ U {p1,p2} ⊢ p3 preserva la consistencia, entonces {p1,p2} no llevan a una contradicción en Γ ya que {p1,p2} ∈ Γ por maximal y como esto deriva a p3, p3 ∈ Γ. De esto fácilmente se deriva (p1 ^ p2) -> p3

Si la unión Γ U {p1,p2} ⊢ p3 no preserva la consistencia, entonces trivialmente de un conjunto inconsistente se deduce (p1 ^ p2) -> p3

5. Utilizar el algoritmo del teórico para determinizar el NFA cuyo alfabeto (**¡atención!**) es $\Sigma := \{a, b, c\}$ y tiene el siguiente diagrama de transición:



Sea M = ({a,b,c}, Q, q0, F, △)
Q = {q0,q1,q2}
F = {q0}

tomamos M' = ({a,b,c}, P(Q), q0', F', △^)
P(Q) = ({q0}, {q1}, {q2}, {q0,q1}, {q0,q2}, {q1,q2}, {q0,q1,q2}, ∅)
F' = ({q0}, {q0,q1}, {q0,q2}, {q0,q1,q2})

△^({q0}, a) = {q1}
△^({q0}, b) = ∅
△^({q0}, c) = ∅

△^({q1}, a) = {q2}
△^({q1}, b) = ∅
△^({q1}, c) = ∅

△^({q2}, a) = {q0}
△^({q2}, b) = ∅
△^({q2}, c) = ∅

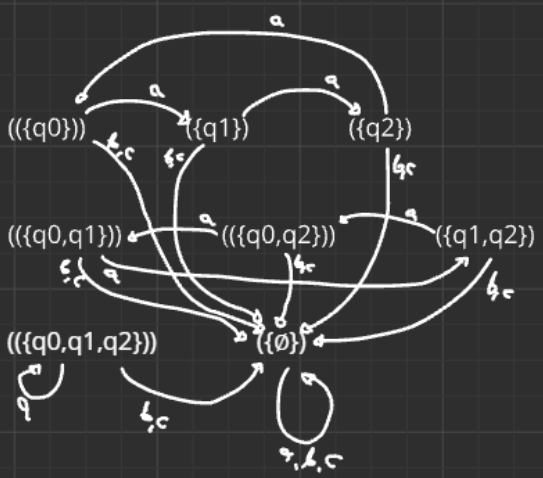
$\Delta^\wedge(\{q0,q1\}, a) = \{q1,q2\}$
$\Delta^\wedge(\{q0,q1\}, b) = \emptyset$
$\Delta^\wedge(\{q0,q1\}, c) = \emptyset$

$\Delta^\wedge(\{q0,q2\}, a) = \{q0,q1\}$
$\Delta^\wedge(\{q0,q2\}, b) = \emptyset$
$\Delta^\wedge(\{q0,q2\}, c) = \emptyset$

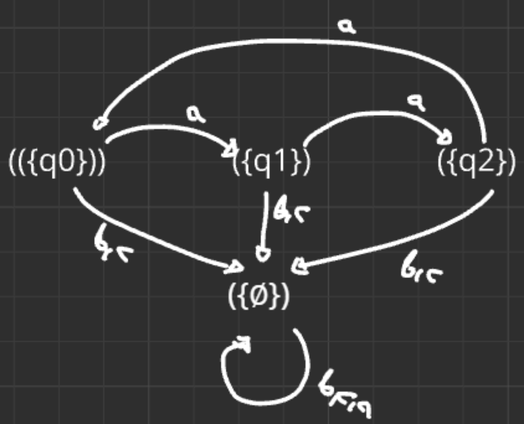
$\Delta^\wedge(\{q1,q2\}, a) = \{q0,q2\}$
$\Delta^\wedge(\{q1,q2\}, b) = \emptyset$
$\Delta^\wedge(\{q1,q2\}, c) = \emptyset$

$\Delta^\wedge(\{q0,q1,q2\}, a) = \{q0,q1,q2\}$
$\Delta^\wedge(\{q0,q1,q2\}, b) = \emptyset$
$\Delta^\wedge(\{q0,q1,q2\}, c) = \emptyset$

Nos queda



Quitando estados no alcanzables



6. Probar que el lenguaje $\{\alpha \in \{a, b\}^* \mid \exists \beta,\ \alpha = \beta\beta\}$ no es regular.

Probar que el lenguaje L = {α∈{a,b}* | ∃β, α=ββ} no es regular.

Supongamos que L es un lenguaje regular, entonces vale el pumping lemma.
Sea n la constante de bombeo y la cadena α = a^n . a^n tq α esta en L y además
|α| = 2n > n.

Por lo tanto podemos descomponer α = α1α2α3 tq:
α1 = a^r, r >= 0
α2 = a^s, s >= 1
α3 = a^(n - (s + r))a^n
Para i = 0
α = α1(α2^0)α3 = a^r . (a^s)^0 . a^(n - (s + r))a^n
= a^r . a^(n - s - r)a^n
= a^(n - s)a^n
Como s >= 1, ya no se cumple que α=ββ pues a^(n - s) no es igual a a^n, absurdo de suponer que
L era un lenguaje regular.

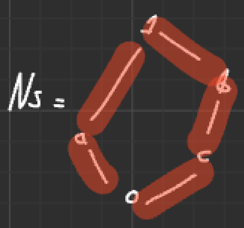
L. **Sólo para alumnxs libres:**

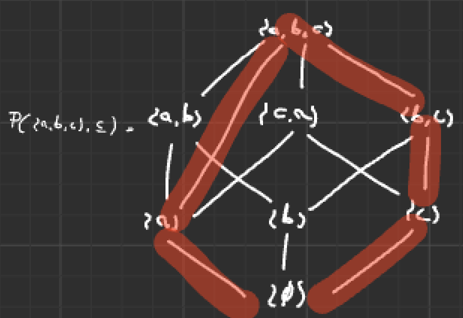
a) Demostrar que el reticulado N_5 no es distributivo.

b) Dar un DFA sobre el alfabeto $\Sigma := \{a, b\}$ cuyo lenguaje aceptado sea el de las palabras con cantidad impar de *a*s y cantidad par de *b*s.

a)

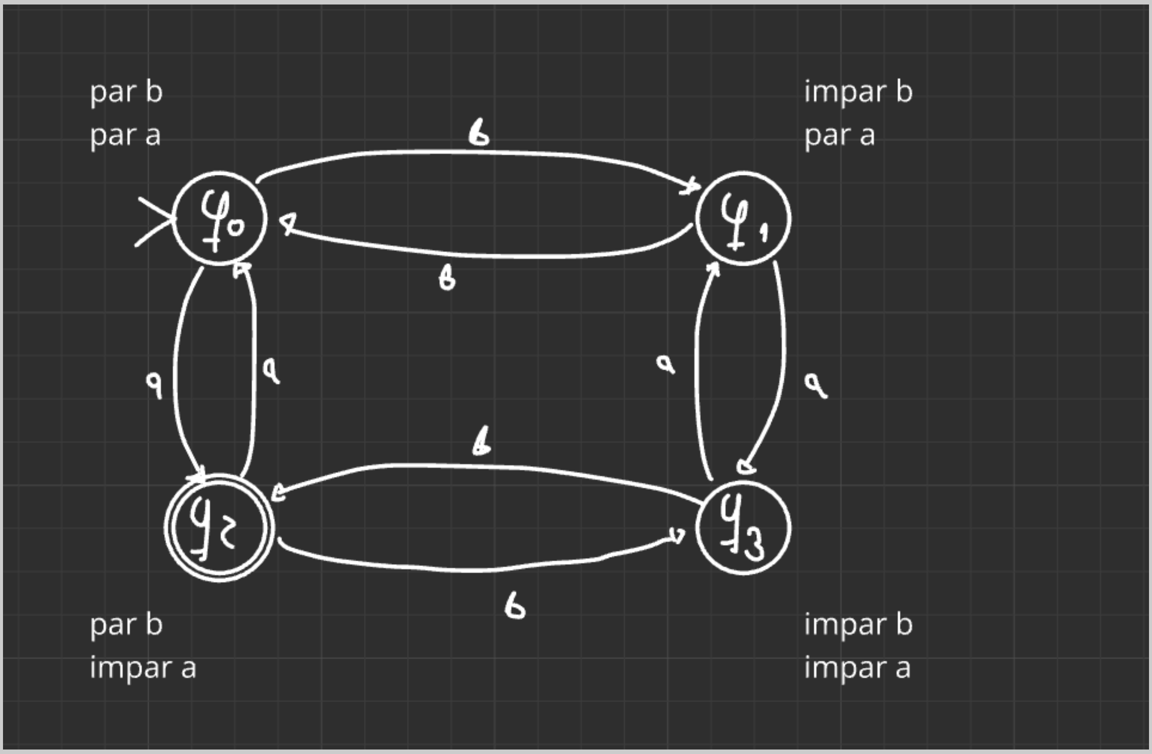
Veamos que N5 es subposet del poset de P(a,b,c) pero no es subreticulado





Tenemos que N5 es isomorfo a un subposet de partes, sin embargo, no es
cerrado con supremo e infimo, pues el supremo entre a y c en N5 en 1,
pero el supremo en partes nos da {a,c} el cual no esta definido en la
biyeccion. No es un subreticulado.

Tampoco cumple la propiedad cancelativa
a v b = a v c
a ^ b = a ^ c
pero b != c


par b
par a
impar b
par a
par b
impar a
impar b
impar a