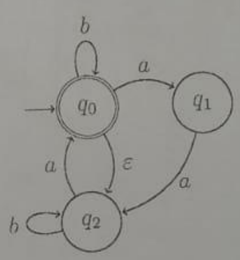
Facundo Torres

Entrego 6 hojas

Introducción a la Lógica y la Computación — Examen Final 20/12/2023

Apellido y Nombre en todas las hojas

1. Demostrar que en toda álgebra de Boole, se da $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$.
2. Decidir si el reticulado L formado por el conjunto $\{1, 2, 6, 4, 24, 48\}$ ordenado por la relación de divisibilidad es distributivo.
3. Encuentre derivaciones que justifiquen:
   a) $\vdash (\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$.
   b) $\{\varphi \vee \psi\} \vdash \gamma \to ((\varphi \wedge \gamma) \vee \neg\neg\psi)$.
4. a) Probar que el conjunto $\{\bot \to (p_n \vee p_{n+1}) \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ es consistente.
   b) Decidir si es consistente maximal, justificando la respuesta.
5. Utilizar el algoritmo del teórico para determinizar el siguiente ε-NFA:



6. Probar que el lenguaje $\{\alpha \in \{a, b\}^* \mid \alpha$ tiene el doble de as que de bs$\}$ no es regular.

L. **Sólo para alumnxs libres:**
   a) Demostrar usando derivaciones: $\{\psi\} \vdash (\psi \to \varphi) \to \varphi \vee \theta$.
   b) Utilizando el algoritmo del teórico, dar un autómata finito $\mathbb{A}$ tal que $L(\mathbb{A})$ sea el lenguaje generado por esta gramática:

$$S \longrightarrow dS \mid aA \mid \epsilon$$
$$A \longrightarrow bA \mid aB$$
$$B \longrightarrow bB \mid aS$$

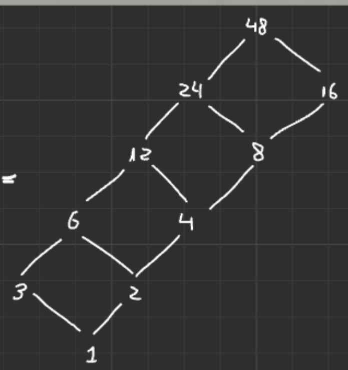
1. Demostrar que en toda álgebra de Boole, se da $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$.

Demostrar que en toda algebra de boole se da:
¬(x v y) = ¬x ^ ¬y
queremos ver que el complemento de (x v y) es ¬x ^ ¬y, por definición se debe cumplir que:
(x v y) v (¬x ^ ¬y) = 1 (1)
&&
(x v y) ^ (¬x ^ ¬y) = 0 (2)

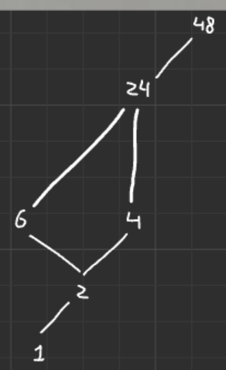
Demostramos 1 usando propiedades distributivas:
(x v y) v (¬x ^ ¬y) = ((x v y) v ¬x) ^ ((x v y) v ¬y)
= ((x v ¬x) v y) ^ (x v (y v ¬y)) = (1 v y) ^ (x v 1) = 1 ^ 1 = 1
Demostramos 2 usando propiedades distributivas:
(x v y) ^ (¬x ^ ¬y)
por asociatividad
(x v y) ^ (¬x ^ ¬y) = ((x v y) ^ ¬x) ^ ¬y
distributiva
((x ^ ¬x) v (y ^ ¬x)) ^ ¬y = (0 v (y ^ ¬x)) ^ ¬y =
((0 ^ ¬y) v ((y ^ ¬x) ^ ¬y)) = (0 v ((y ^ ¬x) ^ ¬y)) =
(0 v (y ^ ¬x ^ ¬y)) = (0 v (¬x ^ 0)) = = (0 v 0) = 0

2. Decidir si el reticulado L formado por el conjunto $\{1, 2, 6, 4, 24, 48\}$ ordenado por la relación de divisibilidad es distributivo.

D_{48} =



({1,2,6,4,24,48}, |) =



El reticulado L es subposet de D_48, pero no es subreticulado, pues no preserva operaciones de ínfimo ni supremo. sup(6,4) = 12 en D_48 pero en {1,2,6,4,24,48} es 24.

3. Encuentre derivaciones que justifiquen:

a) $\vdash (\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$.

b) $\{\varphi \vee \psi\} \vdash \gamma \to ((\varphi \wedge \gamma) \vee \neg\neg\psi)$.

a)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \qquad \dfrac{\neg\psi \qquad \neg\psi \to \neg\varphi}{\neg\varphi}}{\bot}\,\to E}{\psi}\,RAA_3}{(\varphi \to \psi)}\,\to I_2}{(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)}\,\to I_1$$

b)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\gamma}{(\varphi \wedge \gamma)}\,\wedge I}{(\varphi \wedge \gamma) \vee \neg\neg\psi}\,\vee I \qquad \neg((\varphi \wedge \gamma) \vee \neg\neg\psi)}{\bot}\,\to E}{(\varphi \wedge \gamma) \vee \neg\neg\psi}\,RAA_2}{\gamma \to ((\varphi \wedge \gamma) \vee \neg\neg\psi)}\,\to I_1$$

4. a) Probar que el conjunto $\{\perp \to (p_n \vee p_{n+1}) \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ es consistente.

b) Decidir si es consistente maximal, justificando la respuesta.

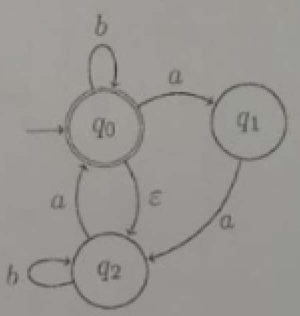
a) Probar que el conjunto $\{\perp \to (p_n \vee p_{n+1}) \mid n \in N0\}$ es consistente.

Por el siguiente teorema
si R es consistente => existe v asignación que lo valide.

Notemos que para $\perp \to (p_n \vee p_{n+1})$, se da siempre $v(\perp) = 0$.
entonces, por el antecedente falso, no hay forma de que no sean validas las proposiciones del conjunto.

b) No es maximalmente consistente porque no impone suficiente estructura sobre los p_n, lo que permite agregar más proposiciones sin generar contradicción.

5. Utilizar el algoritmo del teórico para determinizar el siguiente ε-NFA:



Pasamos del AFN-e al AFN:

dado M = ((a,b), {q0,q1,q2}, q0, q0, △) tomamos a M' = ((a,b), {q0,q1,q2}, q0, F', △')

F' = {q0}

Calculamos la clausura:

[q0] = {q0,q2}

[q1] = {q1}

[q2] = {q2}

Calculamos la función de transición:

△'(q0, a) = [△^([q0], a)] = [△^({q0,q2}, a)] = [{q1,q0}] = {q0,q1,q2}

△'(q0, b) = [△^([q0], b)] = [△^({q0,q2}, b)] = [{q2,q0}] = {q0,q2}

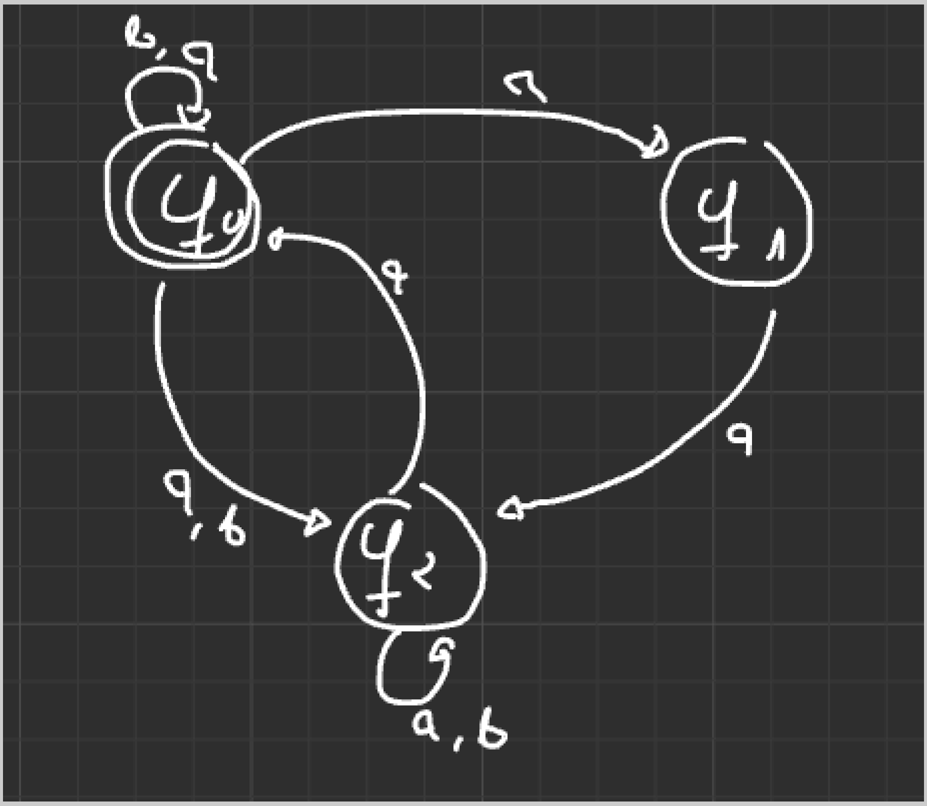
△'(q1, a) = [△^([q1], a)] = [△^({q1}, a)] = [{q2}] = {q2}

△'(q1, b) = [△^([q1], b)] = [△^({q1}, b)] = vacio

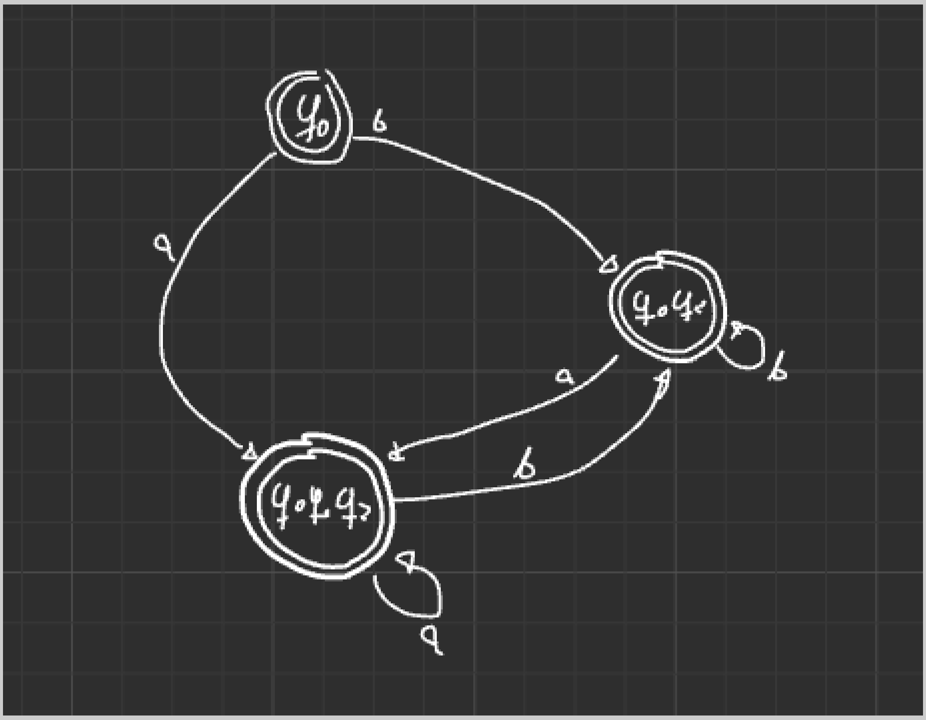
△'(q2, a) = [△^([q2], a)] = [△^({q2}, a)] = [{q0}] = {q0,q2}

△'(q2, b) = [△^([q2], b)] = [△^({q2}, b)] = [{q2}] = {q2}

Obtenemos el siguiente AFN:



b, a
a
q0
q1
a
a
a, b
q2
a, b



q0
b
a
q0q1
b
a
b
q0q1q2
a

6. Probar que el lenguaje $\{\alpha \in \{a, b\}^* \mid \alpha$ tiene el doble de as que de $bs\}$ no es regular.

$L = \{ \alpha \in \{a,b\}^* \mid \alpha$ tiene el doble de as que de bs$\}$

Veamos que $L = \{ \alpha \in \{a,b\}^* \mid \alpha$ tiene el doble de as que de bs$\} \notin LR_\Sigma$.

Sup. L es regular y sea n la cte de bombeo de L.

Tomamos la cadena $\alpha = a^{2n} . b^n \in L$, luego $|\alpha| = 3n >= n$.

Por Pumping Lema, $\alpha = \alpha_1\alpha_2\alpha_3$
donde:
$\alpha_1 = a^r$ con $r \geq 0$
$\alpha_2 = a^s$ con $s \geq 1$
$\alpha_3 = a^{2n-(s+r)}b^n$
Para $i = 0$, tenemos que:
$\alpha_1(\alpha_2^0)\alpha_1 = a^r . (a^s)^0 . a^{2n-(s+r)}b^n$
$= a^r . \epsilon . a^{2n-(s+r)}b^n$
$= a^r . a^{(2n - s - r)}b^n$
$= a^{(2n - s)}b^n$
Como $s >= 1$, entonces ya no se cumple que α tenga el doble de as que de bs.
$\therefore$ Absurdo. $\therefore L \notin LR_\Sigma$.

L. **Sólo para alumnxs libres:**

a) Demostrar usando derivaciones: $\{\psi\} \vdash (\psi \to \varphi) \to \varphi \vee \theta$.

b) Utilizando el algoritmo del teórico, dar un autómata finito $\mathbb{A}$ tal que $L(\mathbb{A})$ sea el lenguaje generado por esta gramática:

$$S \longrightarrow dS \mid aA \mid \epsilon$$
$$A \longrightarrow bA \mid aB$$
$$B \longrightarrow bB \mid aS$$

a)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\psi \qquad \psi \to \varphi}{\varphi}\to E}{\varphi \vee \theta}\vee I}{(\psi \to \varphi) \to \varphi \vee \theta}\to I_1$$

b)