Краткая монографія: О двухъ замечательныхъ свойствахъ сбалансірованныхъ графовъ

Кодрянъ Максімъ Станіславовічъ, 517 группа, ВМиК МГУ

12 ноября 1818 гъ.

Рассматріваются графы съ пометками «+» и «−» на рёбрахъ. Будемъ полагать, что колічество вершінъ не менее трёхъ.

Напомнімъ кратко, что размеченный полный графъ $G = (V, E)$ называется *сбалансірованнымъ*, если все его треугольнікі суть сбалансірованы, то бішь имеются только лішь треугольнікі изъ всехъ плюсовъ да треугольнікі изъ двухъ мінусовъ и одного плюса.

Лемма 1. *Полный размеченный графъ $G = (V, E)$ сбалансірованъ $\Longleftrightarrow$ G лібо весь (такой изъ себя) положітельный, лібо разбітъ на две компоненты, связанные между собою рёбрами съ мінусами, а внутри — съ плюсами.*

Доказательство.

$\boxed{\Rightarrow}$

Докажемъ съ использованіемъ замечательного пріёма индукціи по чіслу вершінъ.

Вніматeльный чітатель безъ труда рассмотрітъ самостоятельно на досуге случай $n = 3$ и убедітся въ верности утвержденія.

Пускай теперь мы знаемъ, что утвержденіе верно для графа съ n вершінами, и намъ милостівый Богъ послалъ графъ съ $n+1$ вершіной. Удалімъ изъ него любую вершіну $v \in V$ вместе съ инцідентными ей рёбрами. Получімъ **сбалансірованный полный** графъ (а ведь иначе исходный графъ не былъ бы таковымъ) съ n вершінами, для которого сіе утвержденіе является вернымъ, а потому который суть разбітъ на не более чемъ две упомянутые компоненты. В такомъ случае, вернувъ пропавшую вершіну v съ её рёбрами, мы обнаружімъ, что, во-первыхъ, соедіняться со всеми вершінами одной компоненты v обязана рёбрами одного знака (іначе нетрудно понять, что найдётся треугольнікъ съ двумя «+»-ми и однімъ «−»-омъ: (v, v_+^i, v_-^i)[1]), а во-вторыхъ, (въ случае подграфа изъ двухъ компонентъ) v обязана соедіняться съ разными компонентами разными знаками (ибо иначе найдётся треугольнікъ съ тремя мінусами: (v, v_-^1, v_-^2), или съ двумя «+»-ми и однімъ «−»-омъ: (v, v_+^1, v_+^2)). В обоіхъ случаяхъ графъ G выходітъ удовлетворяющімъ утвержденію: чісло компонентъ лібо остаётся прежнімъ, лібо увелічівается на одну, но лішь только въ случае положітельного подграфа и отріцательных рёберъ, исходящіхъ от v.

Необходімое условіе счітаемъ доказаннымъ.

$\boxed{\Leftarrow}$

Очевіднымъ образомъ вытекаетъ изъ свойства графа G: для треугольніка изъ одной компоненты все рёбра обязательно окажутся со знакомъ плюсъ; если же две вершіны въ треугольнікe изъ одной, а одна — изъ другой компоненты, то очевідно наблюдать второй случай сбалансірованного треугольніка. Другіхъ треугольніковъ въ рассматріваемомъ графе встретіть невозможно.

Достаточное условіе также счітаемъ доказаннымъ. ■

[1] Здесь и далее v_*^i суть вершіна из компоненты i, связанная съ v ребромъ знака «*»

Перейдёмъ же къ понятію *слабой сбалансірованности.* Отлічается оно отъ понятія обычной сбалансірованности лішь тем, что допускаются также треугольники изъ всехъ мінусовъ.

Лемма 2. *Полный размеченный графъ* $G = (V, E)$ *слабо сбалансірованъ* $\Longleftrightarrow$ G *можно разбіть на «+»-компоненты, связанные между собою мінусами.*

Доказательство.

$\boxed{\Rightarrow}$

Доказывается совершенно аналогічно при помощи пріёма математіческой индукціи. Дабы не заставлять чітателя скучать, перечітывая суть одно и то же дважды, отметім, что въ шаге индукціи возвращённая въ исходный графъ вершіна v обязана всё также соедіняться со всеми вершінами одной компоненты однімъ знакомъ, а къ тому же лібо иметь инцідентными всего только «$-$»-рёбра ($+1$ компонента), лібо лішь съ одной компонентой иметь связь плюсами, въ то время какъ съ остальными — мінусами, ведь иначе немінуемо пріходімъ къ нежелаемому случаю треугольніка съ двумя положітельными рёбрами и однімъ отріцательнымъ: (v, v_+^i, v_+^j) для различныхъ компонентъ i и j, съ которыми v поддержіваетъ положітельные связи.

$\boxed{\Leftarrow}$

И снова чітай доказательство достаточности предыдущей леммы, рассмотревъ вдобавокъ случай треугольніка изъ вершінъ, жівущіхъ въ разныхъ компонентахъ: тогда получімъ, очевідно, «$-$»-треугольнік. ∎

Таковы удівітельные свойства полных размеченныхъ (слабо) сбалансірованныхъ графовъ. Вотъ ужъ да-а-а... Кто бы зналъ!