Instituto Politécnico Nacional

Escuela Superior de Cómputo

Practica #1.

Simulación de la serie trigonométrica de Fourier.

Grupo: 3CV16

Integrantes.

Cazares Martínez Maximiliano

Ramos Nieves Adrián

Rivero Enríquez Daniel Alejandro

Profesora.

Jacqueline Arzate Gordillo

1. Objetivo.

El alumno analizará, comprenderá y verificará la serie trigonométrica de Fourier de funciones dadas, empleando circuitos electrónicos simulados con el programa MULTIM o equivalentes.

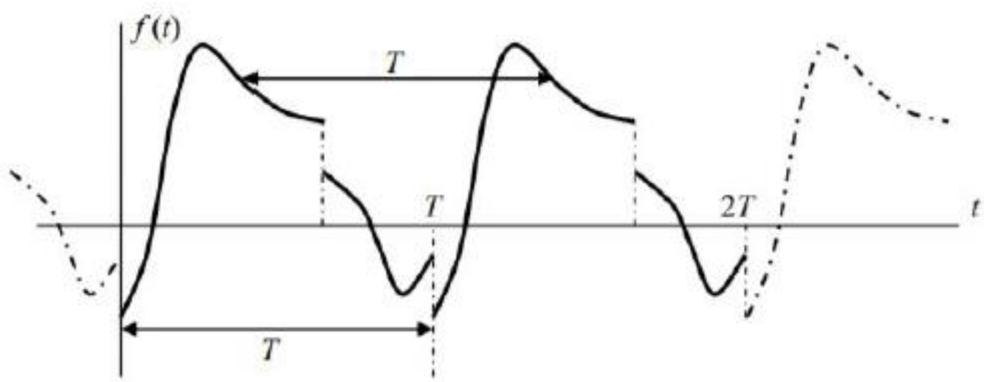
2. Antecedentes.

La serie trigonométrica de Fourier se descubrió en el siglo diecinueve como una solución formal de ecuaciones en derivadas parciales de onda y calor en intervalos espaciales finitos:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < L, \quad t > 0$$

En 1822, cuando el matemático francés (Jean Baptiste) Josehp Fourier (1758-1830) estudiaba problemas de flujo de calor (las aplicaciones eléctricas eran escasas en ese entonces), demostró que las funciones periódicas arbitrarias se podían representar mediante una serie infinita de senoides armónicamente relacionadas. Más tarde fue usada para describir procesos físicos en los que los eventos ocurren en el tiempo según un patrón regular (periódico).

Si una forma de onda $f(t)$ de periodo T, ($f \;\; t + nT = f(t)$, con n entero) cumple con las condiciones llamadas de Dirichlet:



1. Tiene un número finito de discontinuidades en el periodo T, si es discontinua en ese periodo.
2. El valor medio en el periodo T es finito (no tiene asíntotas verticales).
3. Tiene un número finito de máximos y mínimos en T (no oscila infinitamente)

Entonces f (t) puede “aproximarse” por la llamada serie finita trigonométrica de Fourier.

Aplicaciones.

Sus aplicaciones son muy extensas, ya que abarcan diversas ramas de la matemática y la física matemática, desde la teoría de números y geometría hasta óptica y mecánica cuántica, así como otras áreas de la ciencia tales como medicina, comunicaciones, ingeniería biomédica, ingeniería mecánica y de control, campos electromagnéticos, procesamiento de señales de audio y procesamiento de imágenes.

La Transformada de Fourier también se utiliza para:

- Analizar el contenido de frecuencia de las señales.
- Determinar cómo cambia la amplitud y las fases de las señales sinusoidales cuando éstas pasan a través de un sistema lineal e invariante en el tiempo.
- Generar formas de onda de corriente o tensión eléctrica por medio de la
- Superposición de senoides generados por osciladores electrónicos de amplitud variable cuyas frecuencias ya están determinadas.
- Analizar el comportamiento armónico de una señal.

En el campo electromagnético y de microondas la Transformada de Fourier está relacionada con: el cálculo del campo cercano transitorio irradiado por dispositivos electrónicos, el análisis de fenómenos de inspiración óptica novedosos en microondas, el cálculo del campo electromagnético de rayos, la formación de haz y la radiación de microondas solares.

En medicina el análisis de la transformada de Fourier está relacionado con: el análisis espectral del comportamiento global de los cromosomas, el análisis espectral de la variabilidad de la frecuencia cardiaca, el procesamiento de imágenes generadas por escanogramas, resonancias magnéticas y tomografía axial.

En comunicaciones se usa para analizar la frecuencia de señales, diseñar los sistemas de transmisión de señales para transmitir información, diseñar supresores y canceladores de ecos en líneas telefónicas.

En ingeniería mecánica se utiliza para balancear rotores y eliminar la vibración que generan cuando no están balanceados, estudiar los problemas relacionados con vibraciones mecánicas en los motores, generadores y equipos rotatorios en general.

En procesamiento de señales de audio se usa para compactar las señales de audio (MP3 y MP4), Producir efectos de sonido, diseñar sintetizadores de audio y ecualizadores.

En procesamiento de imágenes la FT se utiliza para filtrar imágenes, extraer características de interés, realizar transformaciones de imágenes y compactar imágenes.

3. Desarrollo.

3.1 Observe la función *f(t)* mostrada en la figura *1*. La serie trigonométrica de Fourier de esta función, está dada por la ecuación *(1)*.

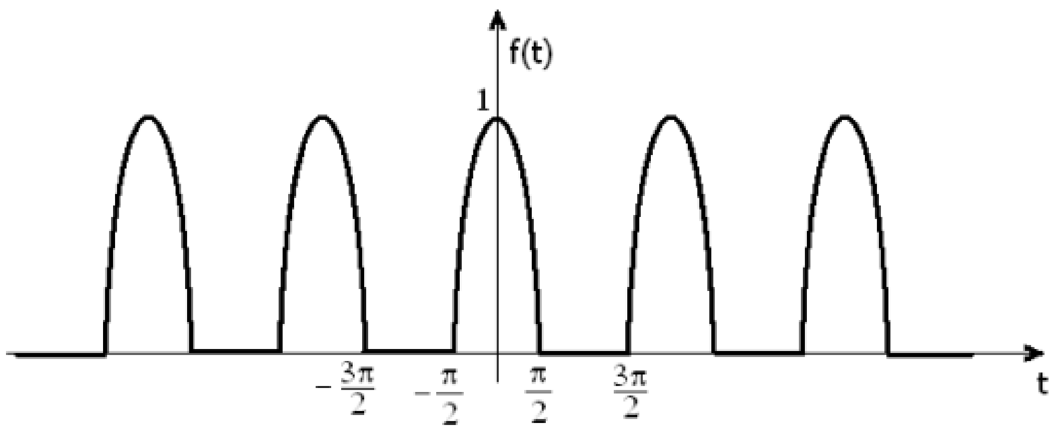


Figura 1

$$f(t) = \left(\frac{1}{\pi}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\cos(t) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{\pi(1-n^2)} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos(nt) \quad \dots \quad (1)$$

La serie trigonométrica de Fourier establece que, cualesquiera funciones *f(t)* periódica está compuesta por un grupo infinito de sinusoides de frecuencias $\omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0, \dots, n\omega_0$

Las sinusoides componentes de *f(t)*, según la ecuación *(1)* son:

$$\frac{1}{\pi}, \frac{1}{2}\cos(t), \frac{2}{3\pi}\cos(2t), -\frac{2}{15\pi}\cos(4t), \frac{2}{35\pi}\cos(6t), -\frac{2}{63\pi}\cos(8t), \dots, \frac{2}{\pi(1-n^2)}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

En la figura 2 se muestra la generación de *f(t)* mediante algunos de estos componentes, usando un circuito electrónico. Estrictamente *f(t)* solo está aproximada, pues tendrían que sumarse un grupo infinito de términos en el sistema para representarla exactamente.

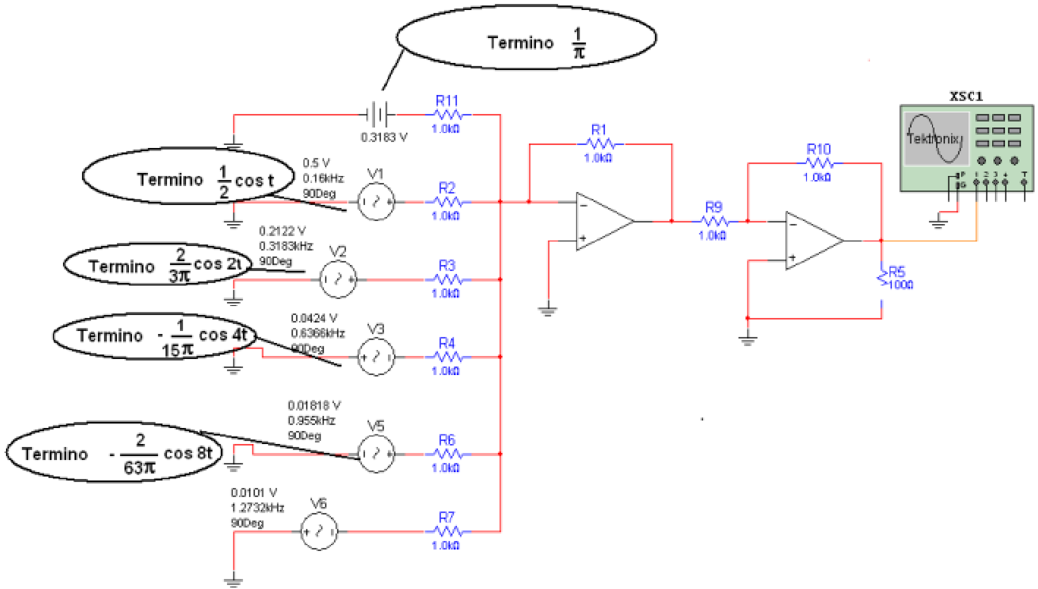


Figura 2. Configuración sumador-inversor-sumador con amplificadores operacionales.

Actividad 3.1

Usando el programa de simulación de circuitos MUTISIM, construya virtualmente el circuito de la figura 2. Para ello siga las indicaciones siguientes:

1) Cada fuente de voltaje alterno (equivalente a un término de en la sumatoria sinusoidal de Fourier), ajustar a una frecuencia en Hz, convirtiendo rad/seg a Hz, usando la formula siguiente:

$$\omega = 2\pi f$$

$$\text{Así para el } n-\text{ésimo término} \quad f_n:$$

$$fn = \frac{n\omega}{2\pi} \qquad con \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\omega = \text{frecuencia en radianes por segundo}$$
$$f = \text{frecuencia en hertz}$$

NOTA: Para facilitar la visualización desde el osciloscopio, se adecuó la frecuencia de cada término (fuente de voltaje alterno) en Hz a KHz. Véase figura *3*.

2) Ajuste en el recuadro de fase el valor de 90, (este significa una función seno desfasada 90 grados, pues cada uno de los términos en la serie son señales coseno). Véase figura *3*.

3) Ajuste la amplitud pico de cada componente según corresponda. Véase figura *3*.

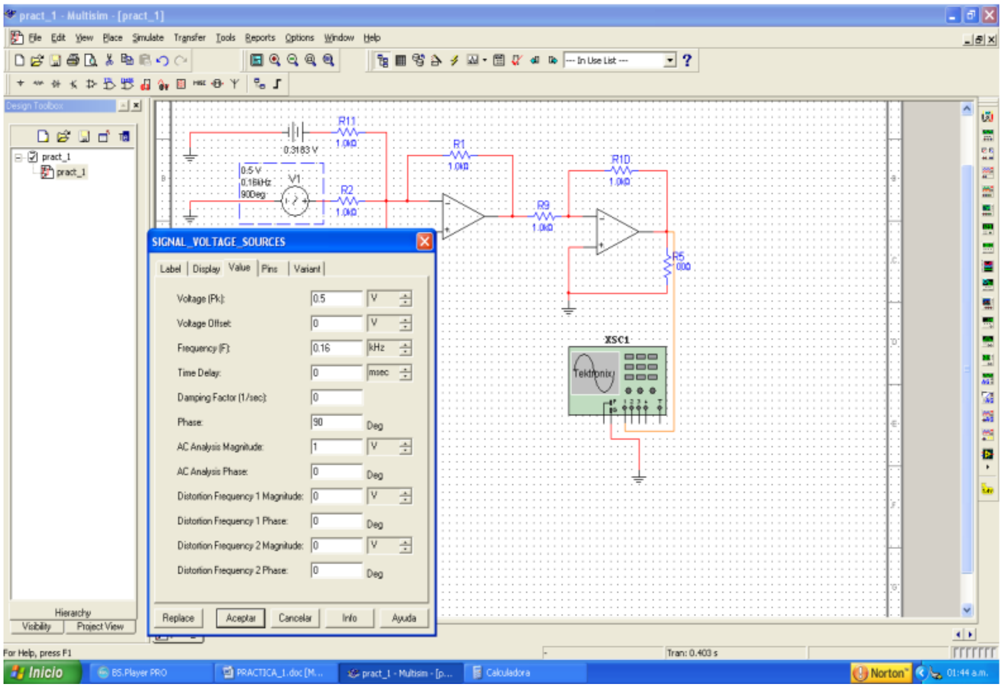


Figura 3.

4) Conecte el osciloscopio tektronix a la salida del circuito y ajuste los controles hasta observar claramente la forma de la señal de voltaje de salida (puede usar el botón auto set ubicado en la carátula del osciloscopio). Véase figura *4*.

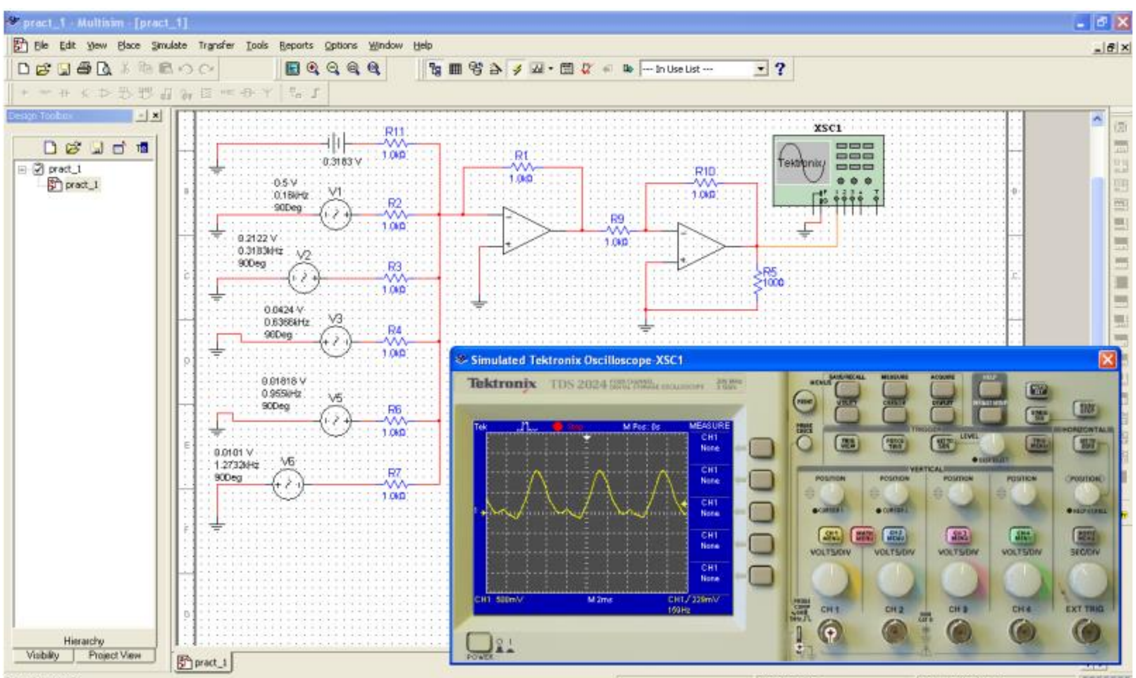


Figura 4(a)

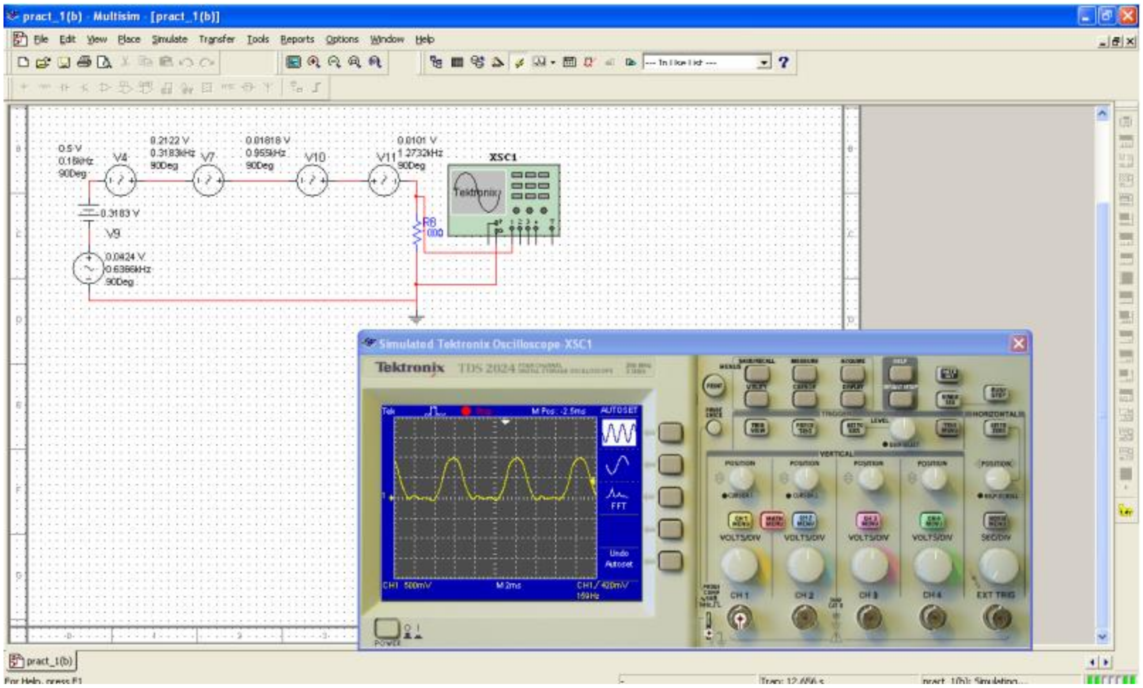


Figura 4(b)

Desarrollo Actividad 3.1

Como la versión que utilizamos de MULTISIM solo cuenta con fuentes de voltaje alterno que manejan V_{rms}, tuvimos que convertir el valor de V_p que las componentes nos arrojan, mediante la siguiente formula: $V_{rms} = \frac{\sqrt{2}}{2} V_p$

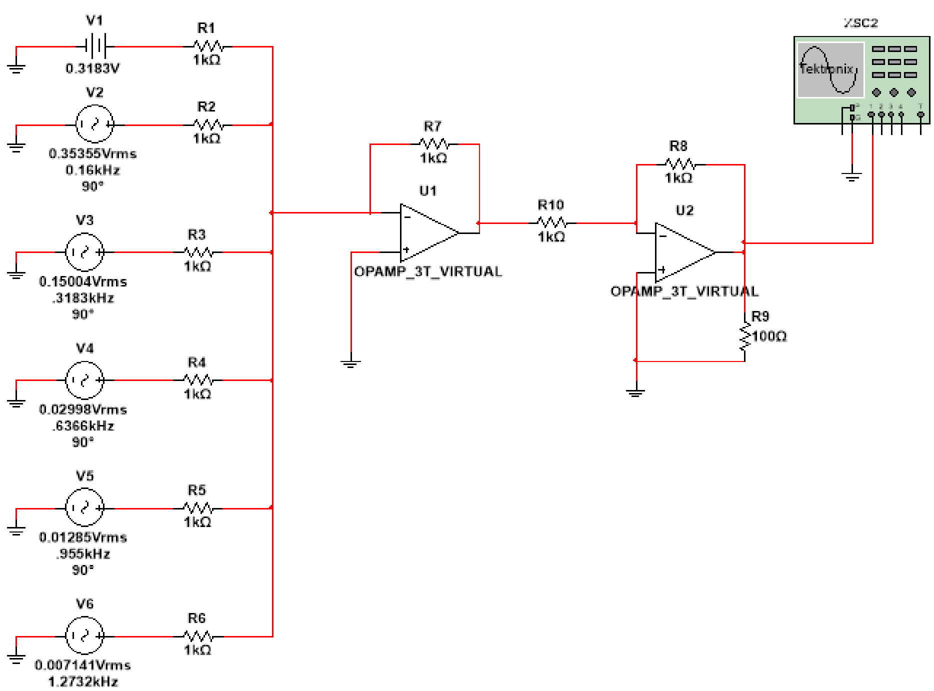


Figura 5. Circuito propio de la figura 2

Actividad 3.2

Compare la señal del osciloscopio con la señal de la figura 1 y escriba sus conclusiones.

Desarrollo de la Actividad 3.2

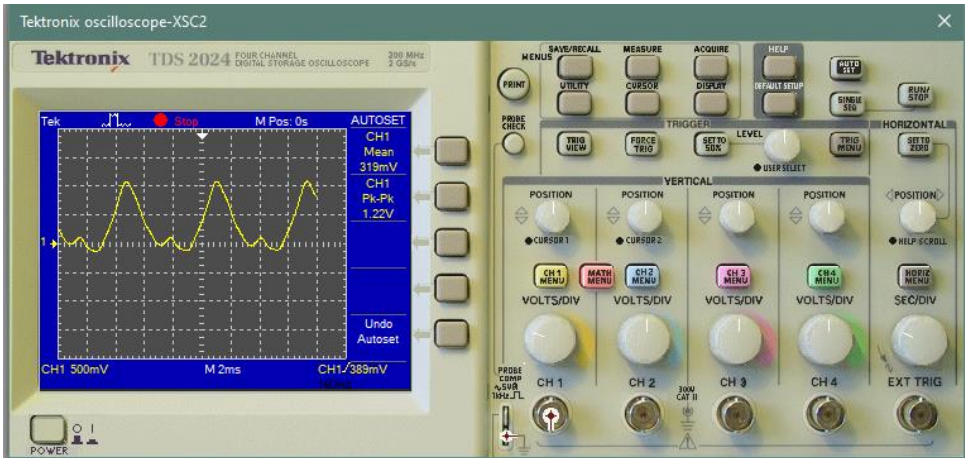


Figura 6. Señal en el osciloscopio de la figura 5

Las formas de ondas de la figura *4(a)* y *6* son bastantes parecidas y casi no presentan diferencias entre ellas. Podemos decir que el armado del circuito de la figura *5* es correcto y representa de forma adecuada la aproximación de la serie trigonométrica de Fourier de la figura *1*.

Actividad 3.3

Modifique el circuito de la figura *1*, de tal manera que solo se sumen unos armónicos seleccionados. Por ejemplo, las primeras 3 componentes (n = 1,2,3) y posteriormente las 3 componentes de mayor frecuencia (por ejemplo, n = 10,15,16).

Desarrollo de la Actividad 3.3

1) En la siguiente imagen se muestra el circuito de la figura *5* que representa a las 3 primeras componentes de la serie trigonométrica de Fourier de la figura *1*.

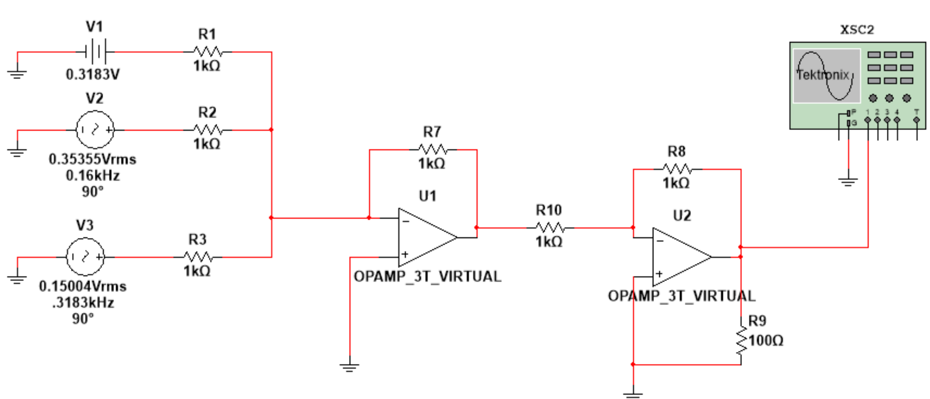


Figura 7. Circuito con los primeros 3 armónicos de la serie de Fourier de la figura 1.

En la figura *8* podemos apreciar la señal en el osciloscopio de la figura *7*. Como podemos observar a simple vista, esta señal es muy parecida a la señal de la figura *6*, por no decir que es la misma.

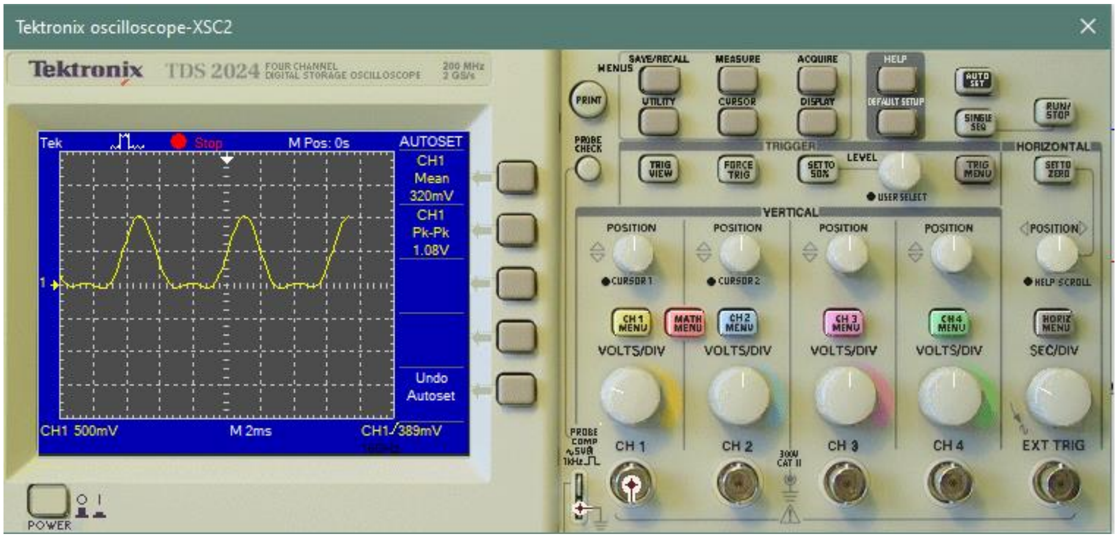


Figura 8. Señal en el osciloscopio de la figura 7.

2) El siguiente circuito se muestran los componentes 4, 6 y 8 de la serie de Fourier de la figura *1*.

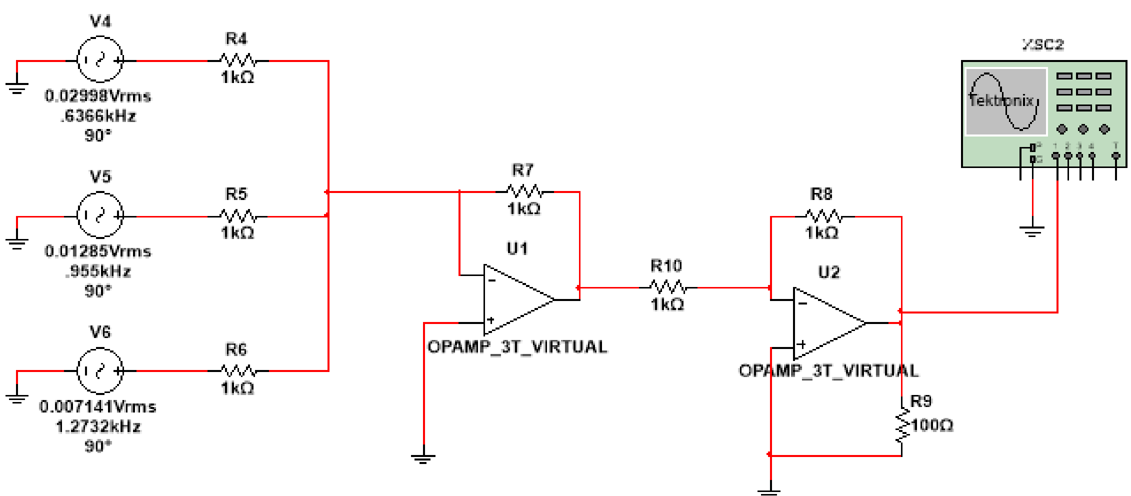


Figura 9. Circuito con los armónicos 4, 6 y 8 de la serie de Fourier de la figura 1.

La señal en el osciloscopio de los armónicos 4, 6 y 8 se parece ligeramente a las señales de las figuras *6* y *8*, pero no llega a lucir completamente como estas.

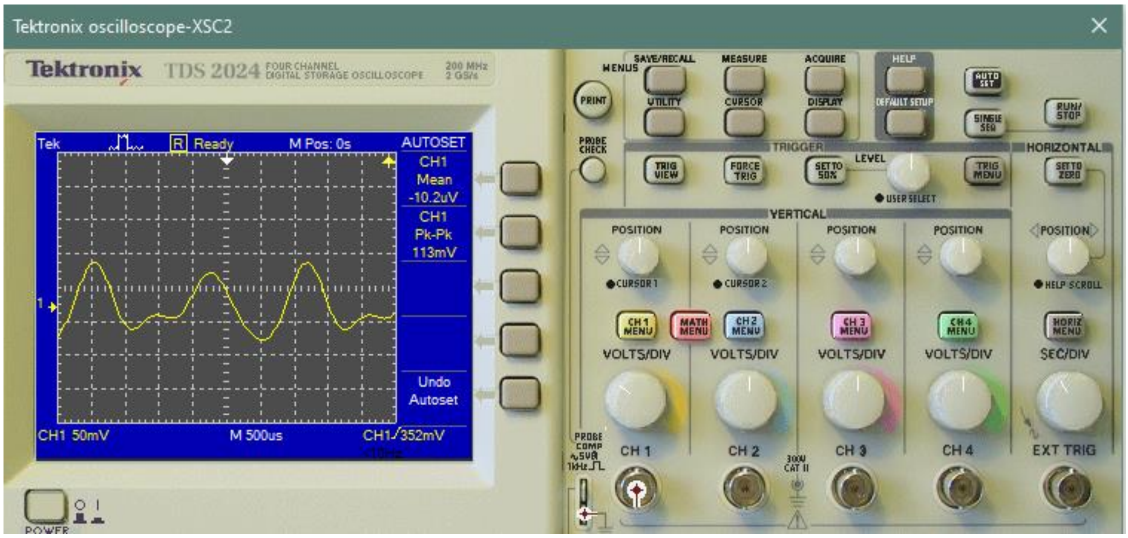


Figura 10. Señal del osciloscopio de la figura 9.

Como pudimos observar, los primeros armónicos de la señal son aquellos que la definen y los armónicos posteriores no modifican la señal en gran medida, es decir los componentes de baja frecuencia son aquellos que dan forma a la señal y en contra parte, los componentes de alta frecuencia la afinan. Para logran una visualización muy cercana a la figura *1* deberíamos de colocar más fuentes de poder para que esos componentes extras afinen en mayor medida a la señal.

Actividad 3.4

3.4.1 Encuentre la serie trigonométrica de Fourier de la señal mostrada en la figura *11*.

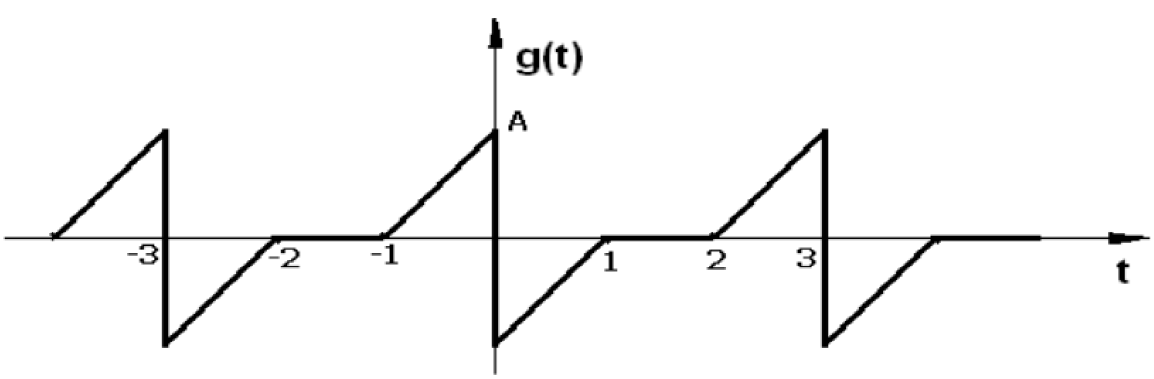
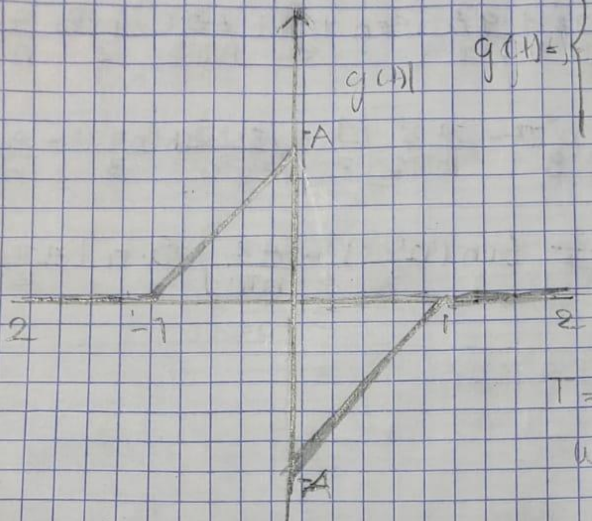


Figura 11.

Cálculos para obtener la serie trigonométrica de Fourier de la figura *11*.

Practica Ejercicio

$$g(t)=\begin{cases} 0 & -2<t<-1 \\ A(t+1) & -1<t<0 \\ A(t-1) & 0<t<1 \\ 0 & 1<t<2 \end{cases}$$



Serie impar

$a_0 = 0$

$a_n = 0$

$T = 3$

$\omega = \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{Sen} \frac{n\pi}{2} t$$

$$b_n = \frac{4}{3}\int_0^1 A(t-1) \operatorname{Sen} \frac{n\pi 2t}{3} = A\int_0^1 t \operatorname{Sen} \frac{n\pi 2t}{3} - A\int_0^1 \operatorname{Sen} \frac{n\pi 2t}{3}$$

$u = t \quad dV = \operatorname{Sen} \frac{n\pi t}{2}$

$du = dt \quad V = -\frac{3}{n\pi} \operatorname{Cos} \frac{n\pi}{3} t$

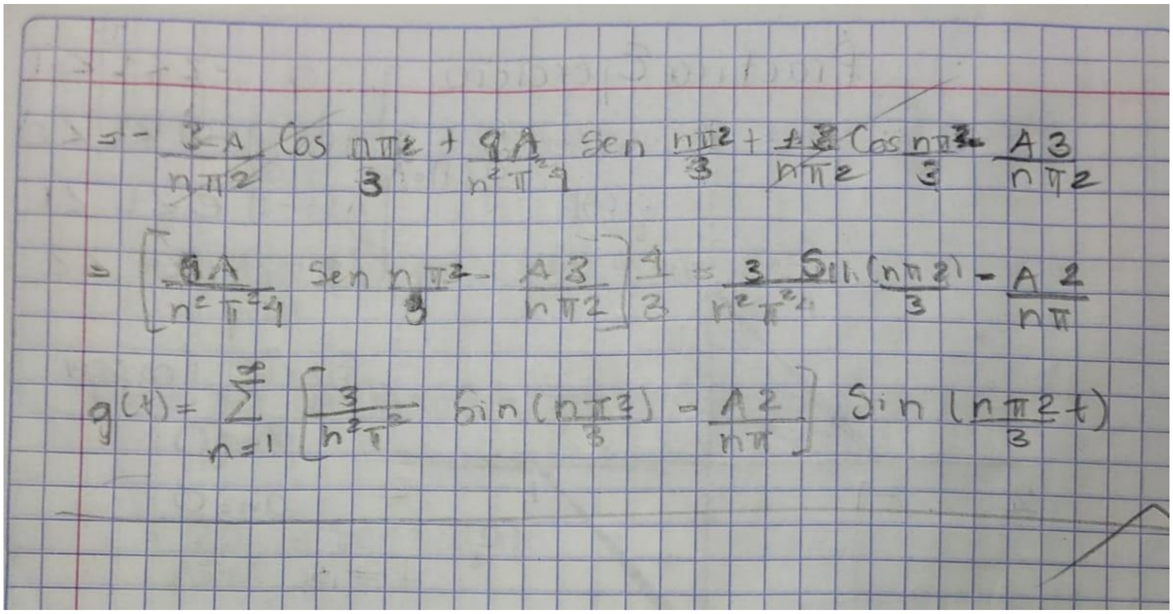
$$= A\left[\frac{-t3}{n\pi 2} \operatorname{Cos} \frac{n\pi}{3} t \Big|_0^1 + \frac{3}{n\pi}\int_0^1 \operatorname{Cos} \frac{n\pi}{3} t\right] + \frac{A3}{n\pi 2} \operatorname{Cos} \frac{n\pi 2t}{3}\Big|_0^{3/2}$$

$$= A\left[\frac{-3}{n\pi 2} \operatorname{Cos} \frac{n\pi 2}{3} - \frac{0}{n\pi 2} \cancel{\operatorname{Cos} \frac{n\pi 2 0}{3}} + \frac{9}{n\pi 4} \operatorname{Sen}\left(\frac{n\pi 2t}{3}\right)\Big|_0^{3/2}\right]$$

$$+ \frac{A3}{n\pi 2} \operatorname{Cos} \frac{n\pi}{3} - \frac{A3}{n\pi 2} \operatorname{Cos} \cancel{0}$$

$$= -A\left[\frac{3}{n\pi 2} \operatorname{Cos} \frac{n\pi 2}{3} + \frac{9}{n^2\pi^2 4}\left[\operatorname{Sen} \frac{n\pi}{3} - \cancel{\operatorname{Sen} 0}\right]\right] + \frac{A3}{n\pi 2} \operatorname{Cos} \frac{n\pi}{3}$$

$$- \frac{A3}{n\pi 2}$$



Serie trigonométrica de Fourier de la figura 11.

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3Asen\left(\frac{2n\pi}{3}\right)}{n^2\pi^2} - \frac{2A}{n\pi}\right)\left(sen\left(\frac{2n\pi}{3}t\right)\right) \ldots (2)$$

3.4.2 Gráfique la expresión resultante en un programa de computadora

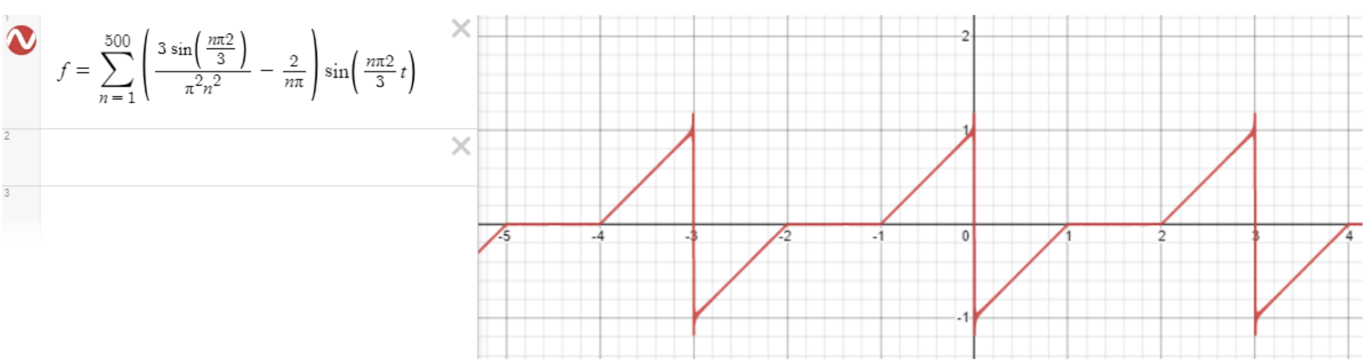


Figura 12. Grafica de la función g(t)

3.4.3 Repita los puntos 3.2 y 3.3 para esta forma de onda g(t).

Desarrollo de los puntos 3.2 y 3.3 para *g(t)*

El siguiente diagrama representa los 6 primeros componentes de la serie trigonométrica de Fourier de la figura *11*.

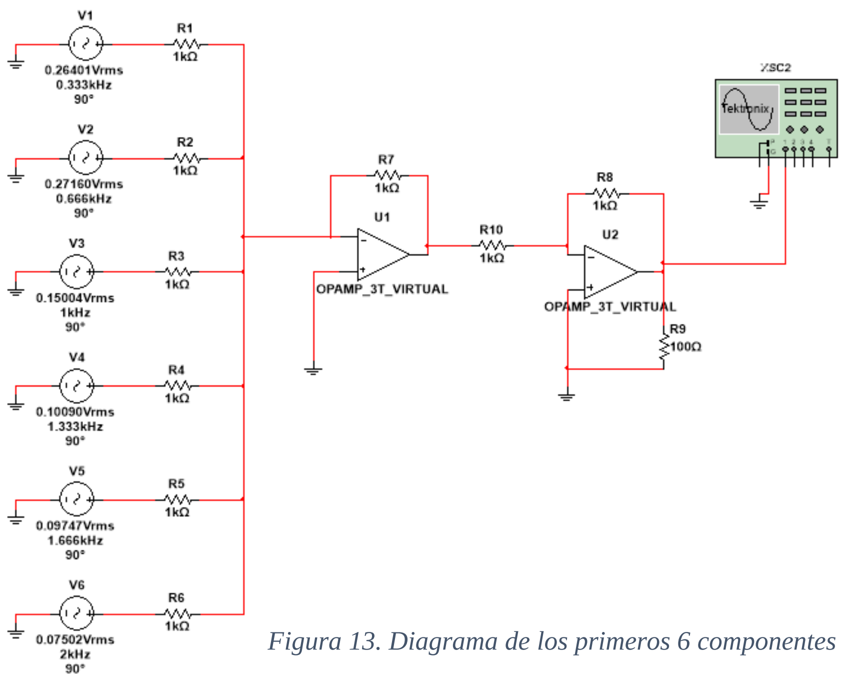


Figura 13. Diagrama de los primeros 6 componentes de g(t).

A continuación, se presenta la señal en el osciloscopio de la figura *11*. Podemos observar que llega a lucir como la función *g(t)* pero no del todo.

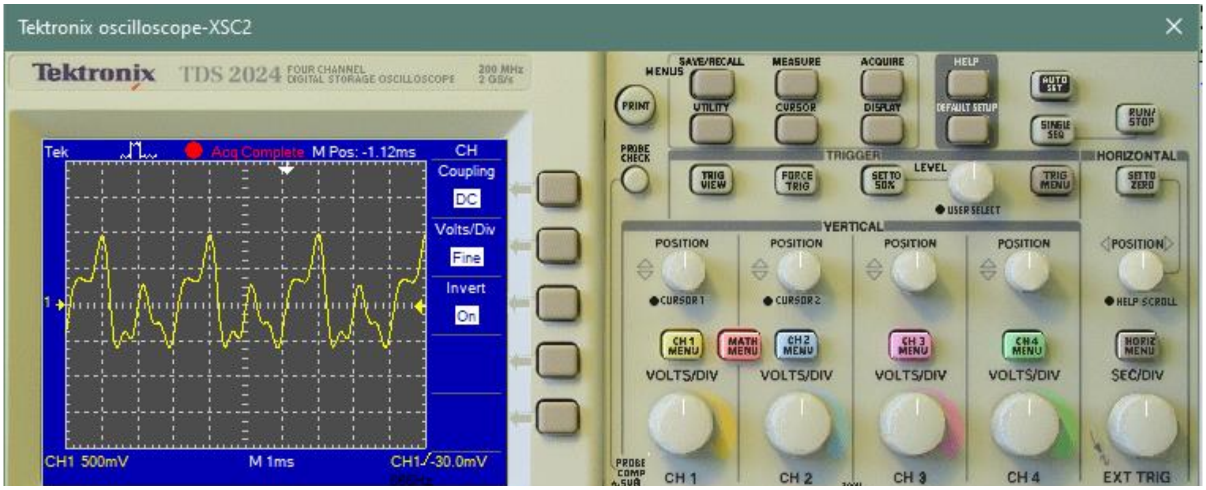


Figura 14. Señal en el osciloscopio del diagrama de la figura 13.

Los primeros 3 armónicos de la serie trigonométrica de Fourier están representados en el siguiente diagrama.

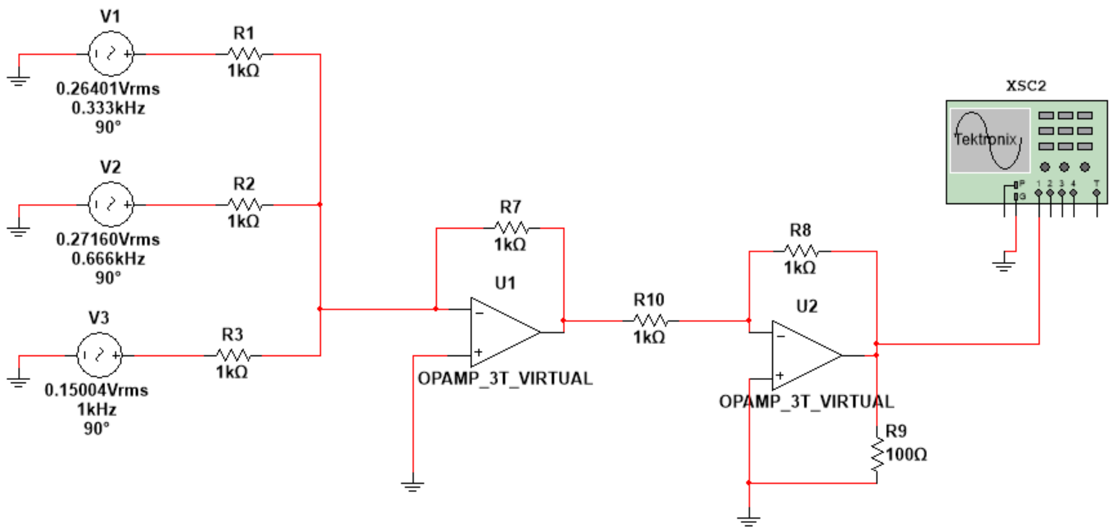


Figura 15. Diagrama con los 3 primeros armónicos de g(t).

La señal del diagrama anterior mostrada en el osciloscopio llega a parecerse un poco más a la que se muestra en la figura *11*, pero aún así no se visualiza exactamente igual.

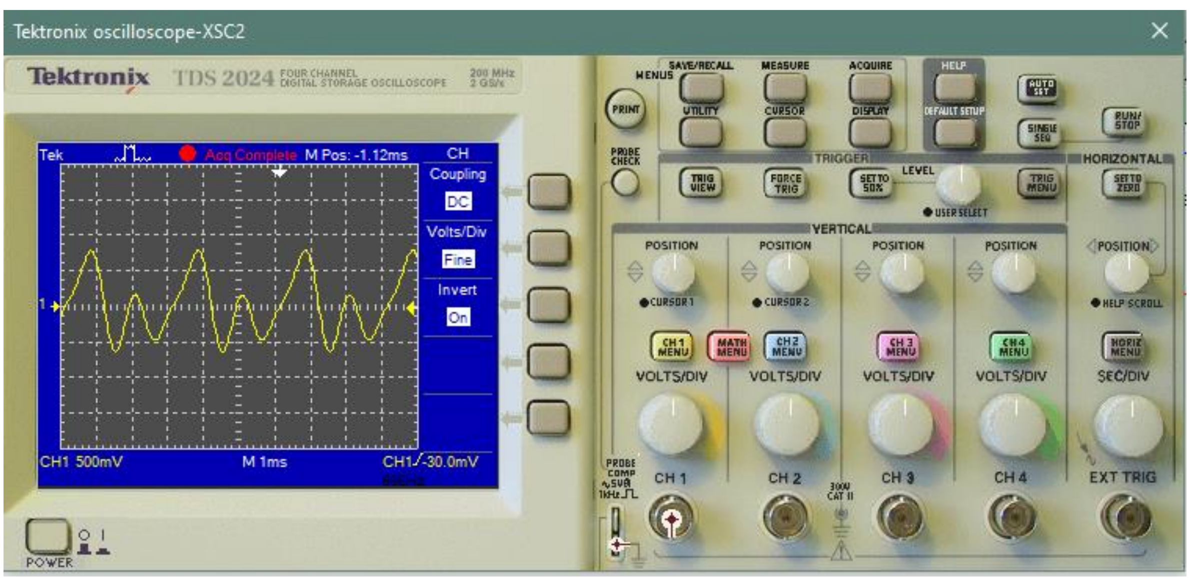


Figura 16. Señal en el osciloscopio de la figura 15.

Los armónicos número 4, 5 y 6 son lo que están representados en el siguiente diagrama.

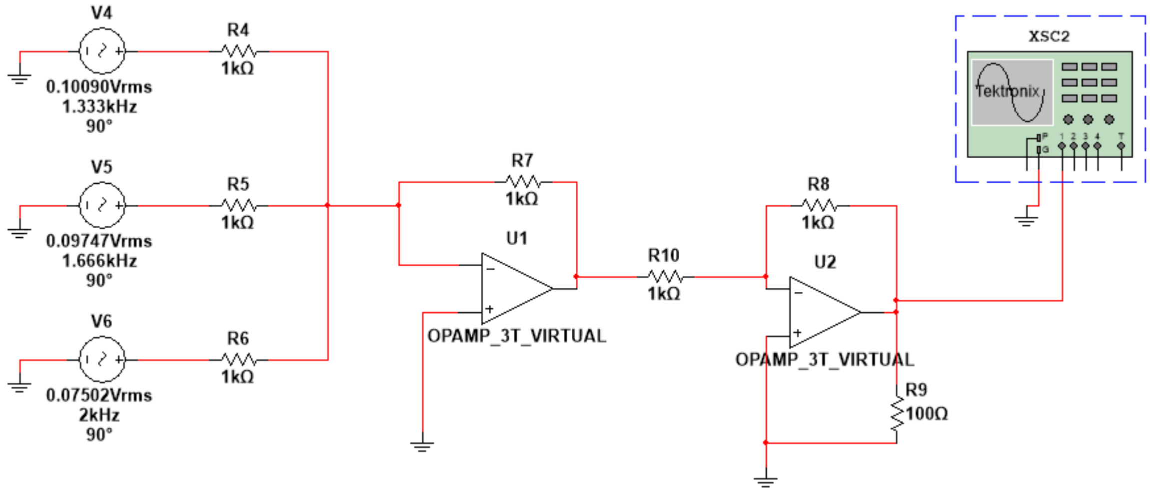


Figura 17. Diagrama con los armónicos 4, 5 y 6 de g(t).

La señal de onda del anterior diagrama no se llega a parecer casi en nada a la serie a la que queremos llegar a simular, pero como mencionamos anteriormente, los armónicos de frecuencias altas solo afinan la señal más no la definen.

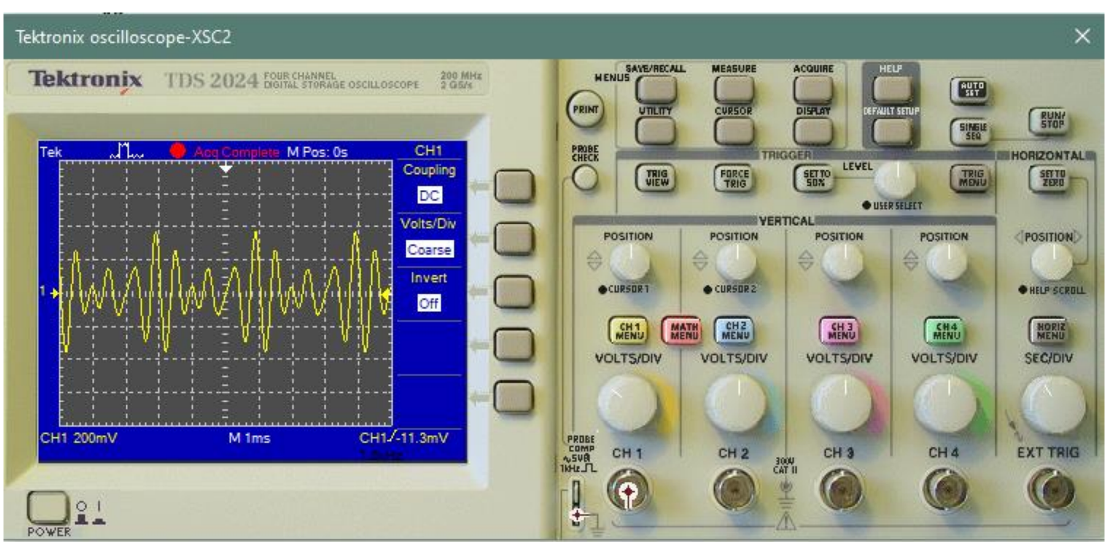


Figura 18. Señal en el osciloscopio de la figura 17.

Actividad 3.5

Usando su creatividad, invente una forma de onda peculiar h(t), desarrolle su serie exponencial de Fourier. A partir de ella encuentre la serie trigonométrica, grafíquela y repita las actividades 3.1 y 3.2

Desarrollo de la actividad 3.5

La función que tomaremos como *h(t)* es la siguiente.

$$\boldsymbol{f(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 1 \\ e^{-t}, & 1 < t < 2 \end{cases}}$$

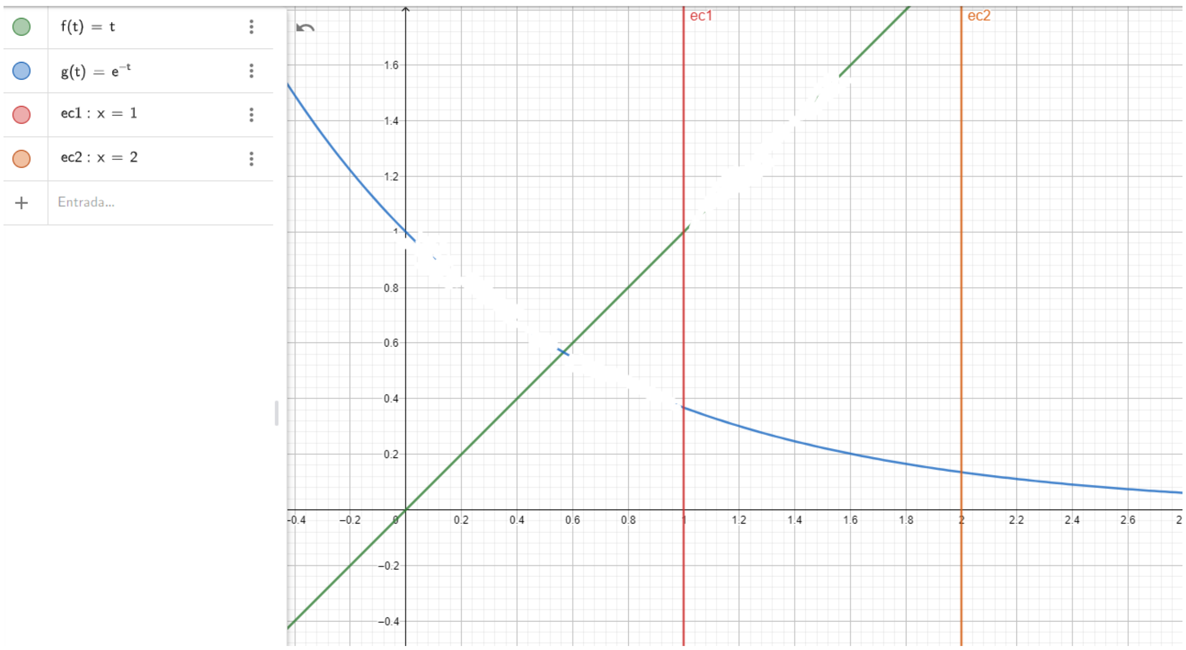


Figura 19. Definición de h(t).

$$\boldsymbol{T = 2}$$

$$\boldsymbol{W0 = \frac{2\pi}{2} = \pi}$$

$$\boldsymbol{Cn = \left[\frac{(in\pi - 1)(cos(n\pi) - e)}{2e(\pi^2n^2 + 1)} + \frac{(in\pi + 1)(cos(n\pi) - 1)}{2\pi^2n^2}\right]}$$

Por lo tanto, su respectiva serie de Fourier seria la siguiente

$$\boldsymbol{f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{(in\pi - 1)(cos(n\pi) - e)}{2e(\pi^2n^2 + 1)} + \frac{(in\pi + 1)(cos(n\pi) - 1)}{2\pi^2n^2}\right]e^{itn\pi}}$$

Después sacando an y bn podemos formar nuestra serie trigonométrica de Fourier, la cual queda de la siguiente manera

$$\boldsymbol{f(t)=\frac{1}{4}+\frac{e^{-1}-e^{-2}}{2}+\sum_{n=1}^{200}\left[\left(\left(\frac{cos(n\pi)-1}{\pi^2n^2}\right)+\left(\frac{e^{-2}(cos(n\pi)-1)}{\pi^2n^2}\right)\right)cos(n\pi t)-\left(\left(\frac{cos(n\pi)}{\pi n}\right)+\left(\frac{n\pi(e^{-2}-e^{-1}cos(n\pi))}{\pi^2n^2+1}\right)\right)sen(n\pi t)\right]}$$

A continuación, se presenta la serie trigonométrica de Fourier de la función h(t).

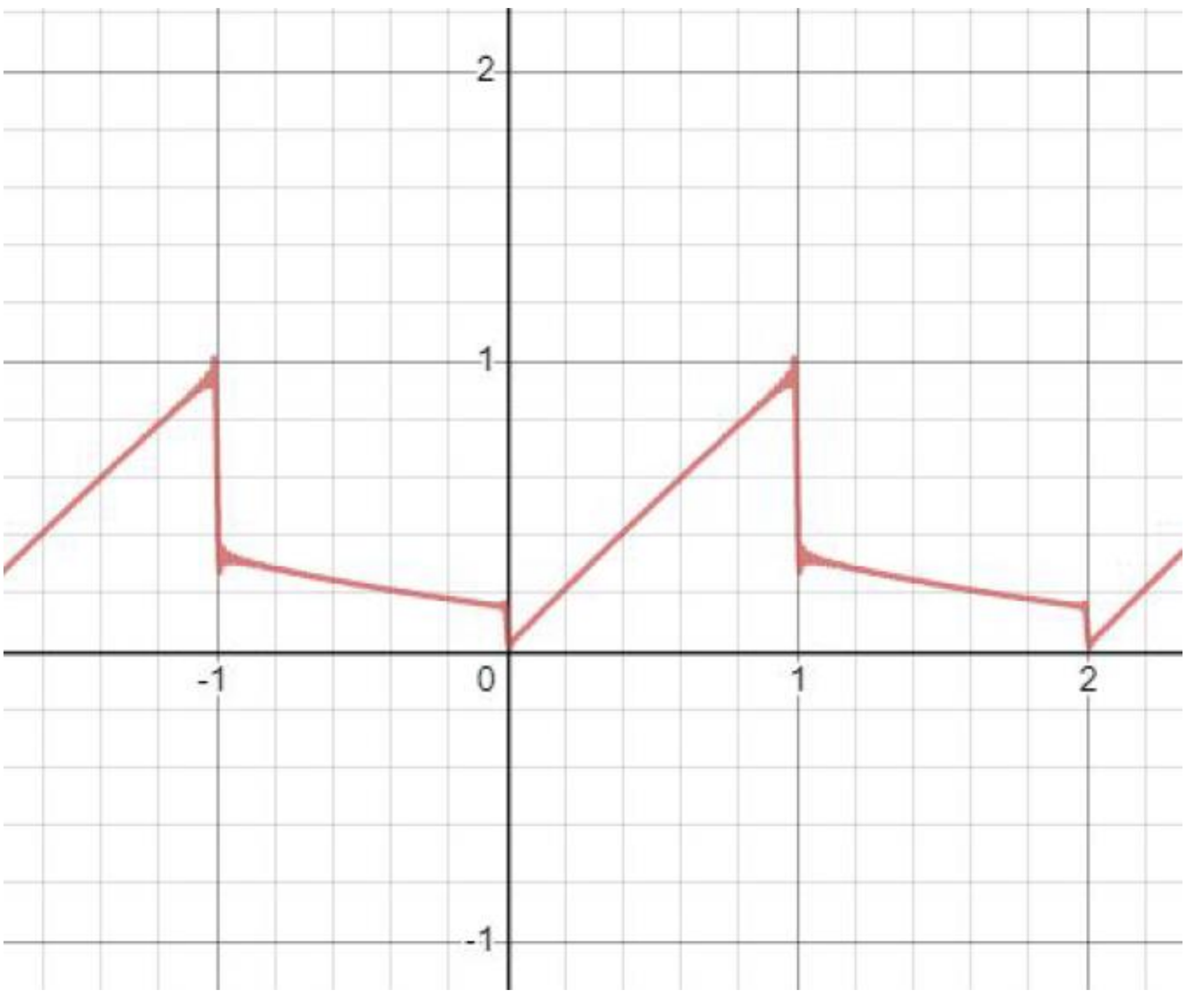


Figura 20. Serie trigonométrica de Fourier de h(t).

Si ponemos la gráfica de la función y la grafica de la serie tenemos lo siguiente

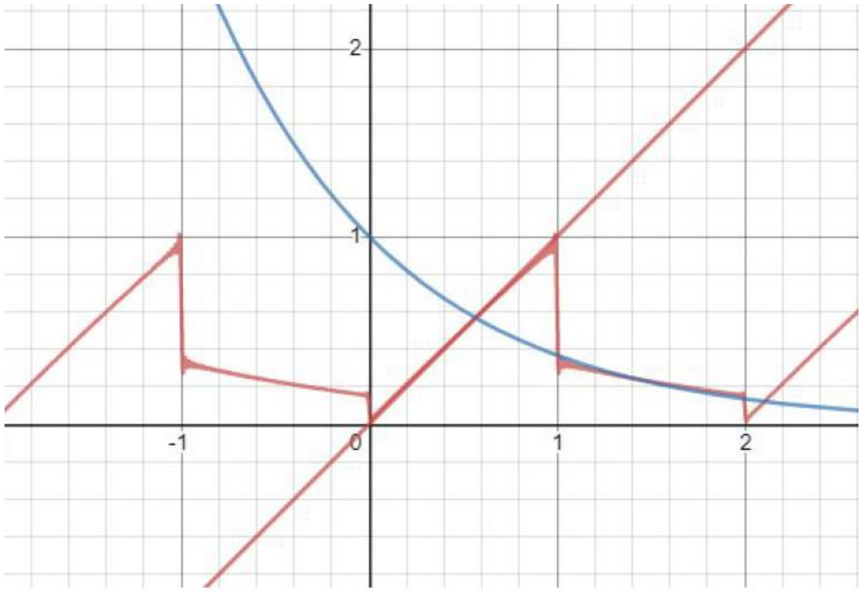


Figura 21. Gráfica y función de h(t).

El circuito que representa a los 10 primeros armónicos de la serie se presenta a continuación con su respectiva señal de onda en el osciloscopio.

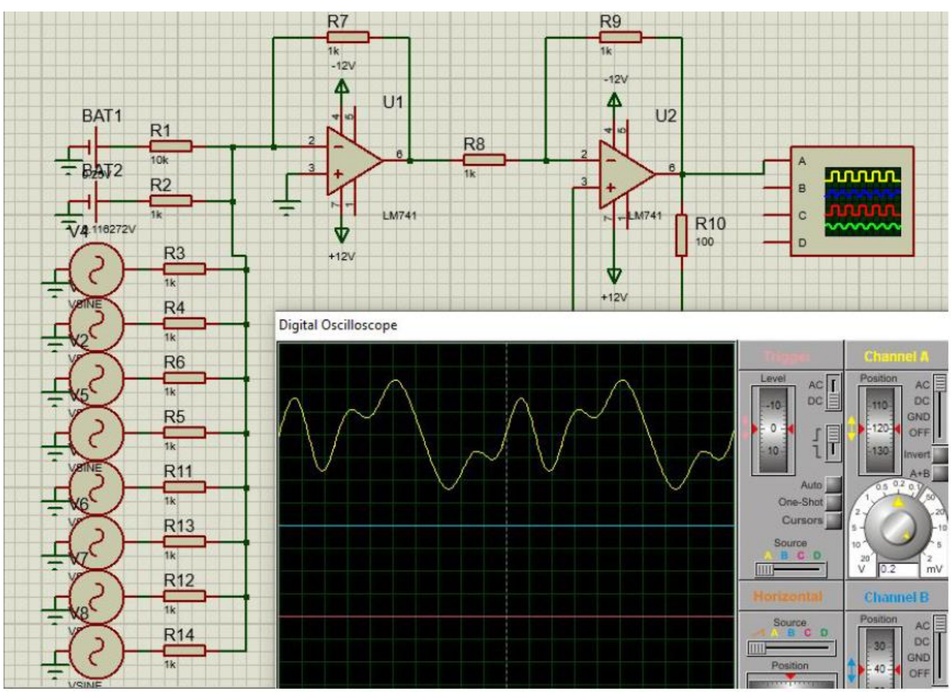
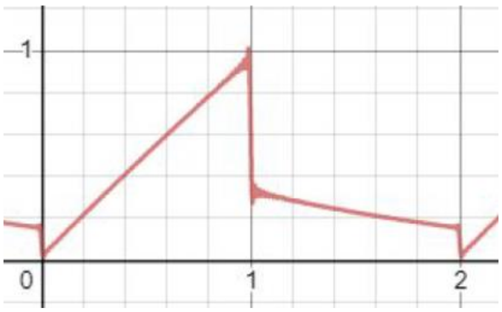


Figura 22. Circuito con los 10 primeros armónicos de h(t).

Analizando tanto la serie de Fourier mostrada en el graficador y la señal en el osciloscopio, podemos llegar a la conclusión de que la señal obtenida en el osciloscopio tiene una aproximación, pero no es muy parecida a la señal, esto se debe a que el simulador de circuitos en el que se implementó el circuito no maneja fuentes de voltaje alterno negativas y esto perturba un poco a la señal resultante.



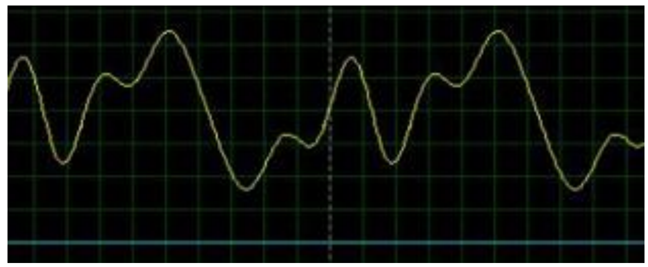


Figura 23. Comparación de la serie de Fourier y la señal de onda de h(t).

Actividad 3.6 Pregunta

Si quisiera usar el concepto de Serie trigonométrica de Fourier para generar señales periódicas cuadradas, triangulares, dientes de sierra y de otro tipo, usando n fuentes de voltaje alterno. ¿Qué parámetro tendría que modificar en la serie trigonométrica de cada una de estas funciones para hacer ajustable el periodo de éstas?

Como sabes que las series trigonométricas de Fourier constan de una suma infinita de funciones seno y coseno que se ven afectadas por un coeficiente diferente para serie. Podemos suponer que al querer generar señales periódicas tendríamos que modificar los coeficientes para generar dichas señales. Es decir, predeterminar coeficientes que modifiquen la serie de Fourier de tal forma que genera las señales que nosotros deseemos.

4. Conclusiones Generales

Las series de Fourier al ser usadas en un gran abanico de áreas en la vida cotidiana hace de que la simulación de estas sea realmente importante, sin embargo, por el método que estas empleando en esta práctica se vuelve un poco complicado debido al número de fuentes de poder que tenemos que usar. Sin embargo, resulta muy interesante poder armar circuitos electrónicos que simulen estas y puedan ser observadas en un osciloscopio con relativa facilidad.

5. Conclusiones Individuales

Cazares Martínez Maximiliano.

El poder crear circuitos eléctricos que nos permitan generar aproximaciones a series de Fourier es una interesante aplicación ya que como señalamos en los antecedentes éstas son utilizadas en una gran mayoría de áreas de la vida diaria. El único inconveniente que pudimos observar es que se necesitan de un número considerable de fuentes de poder para que la señal sea lo más cercana posible a la seria que deseamos simular.

Ramos Nieves Adrián.

Con la presente practica se aprendió a analizar, comprender y verificará las diferentes series trigonométricas de Fourier, además de calcularlas se comprendió como se simulaban con los componentes electrónicos las señales graficadas en cada apartado, por obvios motivos es difícil realizar los circuitos en físico, por lo que se utilizó una herramienta llamada MULTIM para poder simular los componentes. Por lo que finalmente creo que se comprendió el tema, y el realizar las simulaciones para entender cómo se puede llevar estos cálculos a circuitos electrónicos.

Rivero Enríquez Daniel Alejandro.

Con esta práctica puedo llegar a la conclusión de que es posible simular eléctricamente las señales que uno se proponga, al igual de tratar de llegar a una aproximación y entender un poco más a fondo cómo es que estas se comportan a través de sus características fundamentales. Esta práctica me ayudó a comprender un poco más la naturaleza de las señales.

6. Bibliografía

http://mate.ingenieria.usac.edu.gt/archivos/Serie_trig_de_fourier.pdf