Simulation de systèmes biologiques – examen mai 2012

Certaines populations (algues, bactéries…) produisent les déchets qui, en fonction de leur concentration, peuvent devenir toxiques pour la population elle-même. Voici un modèle typique d'un système d'une population **x** et d'un produit toxique **y**:

$$\frac{dx}{dt} = A \cdot x - K \cdot x \cdot y$$
$$\frac{dy}{dt} = \gamma \cdot x - \delta \cdot y$$

où les coefficients **A**, **K**, $\boldsymbol{\gamma}$ et $\boldsymbol{\delta}$ sont tous > 0.

1. Expliquez la signification de chaque terme dans les équations.

2. Trouvez les points stationnaires et déterminez la stabilité de chacun d'eux.

3. Créez un portrait de phase complet du système et dessinez plusieurs trajectoires dans le cas où $\delta < 4A$. Qu'est-ce qui change si $\delta > 4A$?

Simulation de systèmes biologiques – examen mai 2012

<u>Solution :</u>

Il y a deux points stationnaires : (0,0) et $\left(\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{A}{K},\frac{A}{K}\right)$. Pour le premier, la stabilité est obtenu de : $\det|A-\lambda I|=0$, où $A=\begin{pmatrix} A & 0 \\ \gamma & -\delta \end{pmatrix}$. On obtient $\lambda=\begin{Bmatrix} A \\ -\delta \end{Bmatrix}$, ce point est une selle. Pour le deuxième, $A=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{\delta}{\gamma}A \\ \gamma & -\delta \end{pmatrix}$, d'où l'équation : $\lambda^2+\delta\lambda+\delta A=0$. Les deux racines sont données par : $\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}\left\{-\delta\mp\delta\sqrt{1-\frac{4A}{\delta}}\right\}$. Si $\delta<4A$, les deux racines sont complexes et indiquent une spirale convergeant vers le point stationnaire, qui est stable. Si $\delta>4A$, les deux racines sont négatives et indiquent aussi un point stable, mais le retour au point stationnaire est exponentiel.

L'isocline horizontale est donnée par $y=\frac{\gamma}{\delta}x$, verticale par $y=\frac{A}{K}$. La dérivée $\frac{dy}{dx}$ est positive dans les régions délimitées par les équations : ($y<\frac{\gamma}{\delta}x$ et $y<\frac{A}{K}$) ou ($y>\frac{\gamma}{\delta}x$ et $y>\frac{A}{K}$). La dérivée est négative pour ($y>\frac{\gamma}{\delta}x$ et $y<\frac{A}{K}$) ou ($y<\frac{\gamma}{\delta}x$ et $y>\frac{A}{K}$).

Le portrait de phase peut être construit comme suit :