Projet de simulation: Predator-Prey model with child care

On suppose que les classes sont séparées en deux classes: Les jeunes et les adultes.

Les jeunes sont protégés des prédateurs. De plus, les jeunes croissent proportionnellement au nombre d'adultes et décroissent à cause du taux de décès ou lorsqu'ils deviennent eux-mêmes adultes. Le nombre d'adultes augmente donc lorsque les jeunes grandissent et décroissent à cause de mort naturelle ou mort par prédation. Finalement, les prédateurs meurent de mort naturelle et tirent bénéfice d'une rencontre avec une proie adulte.

Nous utiliserons les paramètres suivants :

Pour les jeunes : Taux de natalité =2, mortalité= ½, passage âge adulte= ½.
Pour les adultes : taux de mort naturelle= ½, taux de mort par prédation = 1.
Pour les prédateurs : Taux de décès = 1, Bénéfice dû à la prédation = 1.

Soit les équations différentielles exprimant ce système :

$dY/dt = 2.A - Y$

$dA/dt = \frac{1}{2} Y - \frac{1}{2} A - A.P$

$dP/dt = A.P - P$

Y = Young
A = Adults
P = Predator

1. Recherche de points stationnaires:

<u>Le système n'évolue plus :</u>

$dY/dt = 0$

$dA/dt = 0$

$dP/dt = 0$

<u>Soit:</u>

1/ $2A - Y = 0$

2/ $\frac{1}{2} Y - \frac{1}{2} A - A.P = 0$

3/ A.P – P = 0

A partir de 1 on peut écrire

Y = 2A

Ce qui, reporté dans 2, donne :

A – ½ A – AP = 0

½ A – AP = 0

P = ½

Et finalement dans 3 :

AP – P = 0

A = 1

Et Y = 2A = 2x1 = 2

Soit le point stationnaire s = (2,1,½)

Puisque le système est représenté par 3 équations différentielle linéaire, le dernier point stationnaire est la combinaison triviale s2 = (0,0,0).

2. Linéarisation du système:

<u>A - Point stationnaire (0,0,0) :</u>

Y = 0+ ɣ ʒϕλβ

A = 0+ ϕ

P = 0 + β

dɣ/dt = 2* ϕ - ɣ

$$\textbf{d}\,\boldsymbol{\phi}\textbf{/dt} = \tfrac{1}{2}*\gamma - \tfrac{1}{2}*\underbrace{\phi - \phi*\beta}_{\text{=0, On ne retient que les termes linéaires}}$$

$$= \tfrac{1}{2}*\gamma - \tfrac{1}{2}*\phi$$

$$\textbf{d}\,\boldsymbol{\beta}\textbf{/dt} = \underbrace{\phi*\beta}_{\text{=0, On ne retient que les termes linéaires}} - \phi$$

$$= -\phi$$

Soit la matrice M1 correspondante :

$$M1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Det}(M1 - \lambda i) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

On peut se passer du calcul manuel des solutions de λ puisque ce sont les valeurs propres de cette matrice.

Eigen(M1) = (2.2807764 -1.0000000 0.2192236)

$$\begin{pmatrix} \gamma \\ \phi \\ \beta \end{pmatrix} = C1.e^{\lambda 1.t} + C2.e^{\lambda 2.t} + C3.e^{\lambda 3.t}$$

Puisque nous avons deux lambdas positifs et un lambda négatifs, le système est une selle instable, les résultats vont tendre vers l'infini.

B - Point stationnaire (2, 1, ½) :

Y = 2 + ɤ

A = 1 + ϕ

P = ½ + β

dɤ/dt = 2 + 2* ϕ - 2 + ɤ

= 2*ϕ + ɤ

d ϕ/dt = ½ * ɤ - ϕ - β

d β /dt = ½ **ϕ**

Soit la matrice M2 correspondante :

$$M1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & -1 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Det(M2 – λi) = $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & -1 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{vmatrix}$ = 0

On peut se passer du calcul manuel des solutions de λ puisque ce sont les valeurs propres de cette matrice.

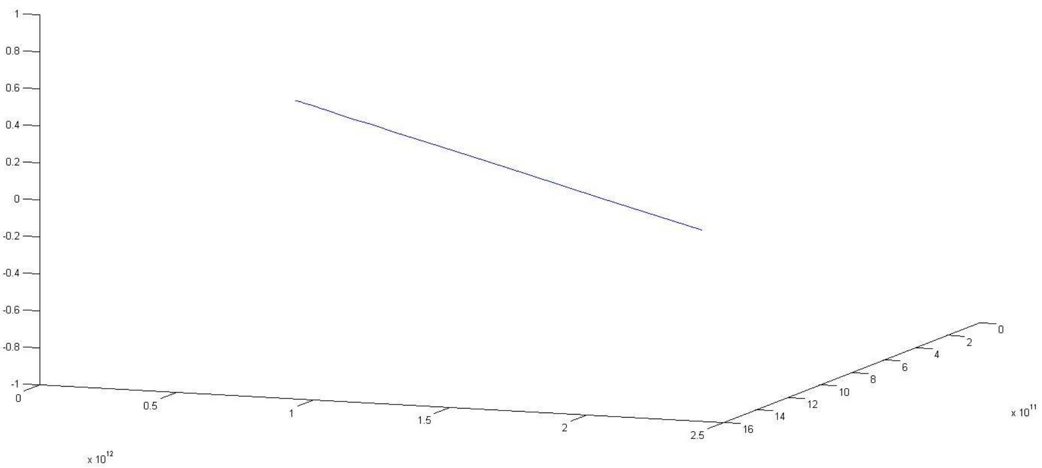
Eigen(M2) = (-1.7548777+0.0000000i -0.1225612+0.7448618i -0.1225612-0.7448618i)

$\begin{pmatrix} \gamma \\ \phi \\ \beta \end{pmatrix}$= C1.$e^{\lambda 1.t}$ + C2.$e^{\lambda 2.t}$ + C3.$e^{\lambda 3.t}$

Les lambda sont de mêmes signes, c'est un point stable. Après les perturbations, le système va osciller et retourner au point stable (2, 1, ½).

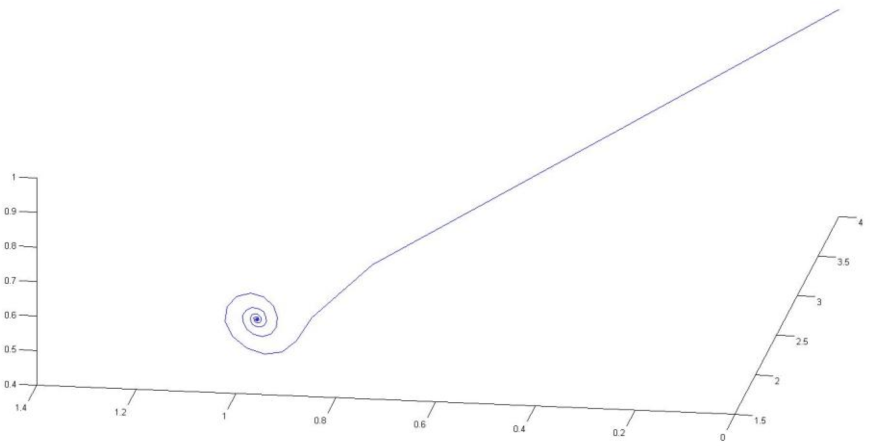
L'utilisation de la fonction ode45 et du plot3D sous Matlab permettent de visualiser l'évolution de ce système :

Conditions initiales [4 0 0] :



Dans le cas où il n'y a pas de prédateurs, nous obtenons un point instable : le système tend vers l'infini. Pas de stabilisation.

Conditions initiales [4 0 1] :



Dans tous les autres cas, le système va osciller pour finalement retourner à un état stable au point (2,1,1/2).