M1 BBS - EM8BBSEM

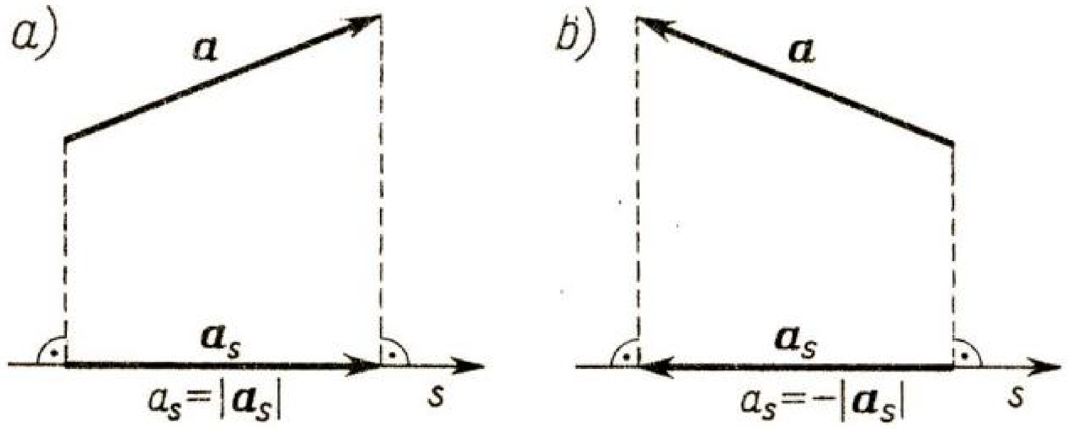
Simulation de Systèmes Biologiques

(#2)

Georges Czaplicki, UPS / IPBS-CNRS
Tél. : 05.61.17.54.04, email : cgeorge@ipbs.fr

Rappel des éléments d'algèbre linéaire

1. Vecteurs :



a) coordonnées

$$\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$$

b) norme (longueur)

$$|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} a_i^2}$$

c) opérations sur vecteurs

- égalité

$$\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z), \qquad \mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} \quad \text{uniquement si} \quad a_x = b_x, \quad a_y = b_y, \quad a_z = b_z$$

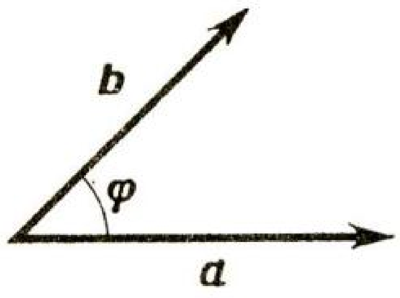
- produit d'un scalaire et un vecteur

$$r\mathbf{a} = (ra_x, ra_y, ra_z)$$

- somme de deux vecteurs

$$\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$$

- produit scalaire de deux vecteurs



$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |a|\cdot|b|\cdot\cos(\varphi)$$

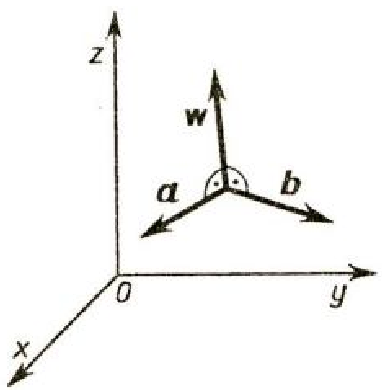
$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i$$

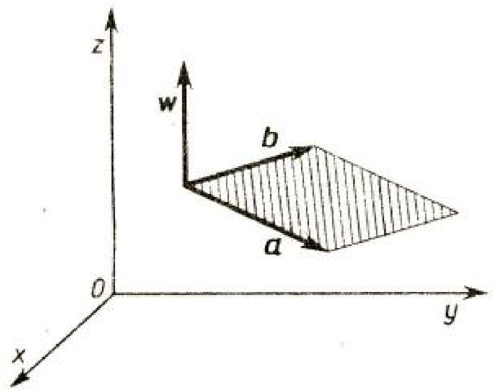
$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$$

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$$

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow \varphi = 90°$$

- produit vectoriel de deux vecteurs





$$\mathbf{w} = \mathbf{a}\times\mathbf{b}$$

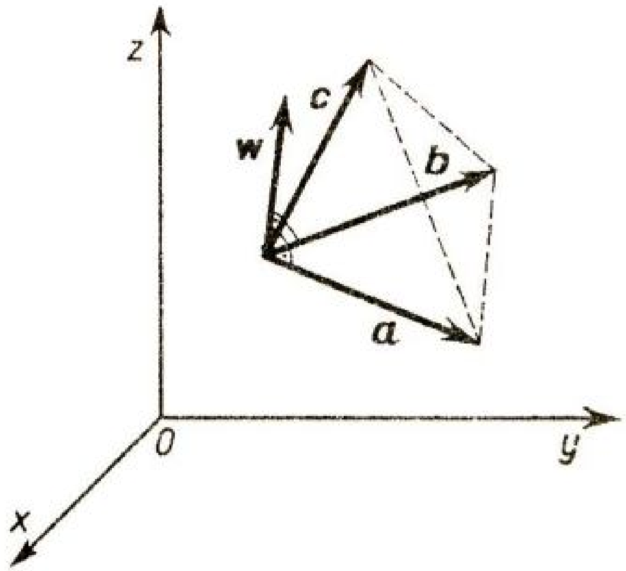
$$|w| = |a|\cdot|b|\cdot\sin(\varphi)$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a}$$

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}$$

$$S = |w| = |\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$$

- produit mixte

 	$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$ $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{a}=(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}$ $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=-(\mathbf{c}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{a}$ $V=\frac{1}{6}\left\|(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}\right\|=\frac{1}{6}\det\begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{bmatrix}$

- angle entre deux vecteurs

$$\cos(\varphi) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|a|\,|b|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} = \frac{\sum_{i=1}^{3} a_i b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{3} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{3} b_i^2}}$$

- dépendance linéaire des vecteurs

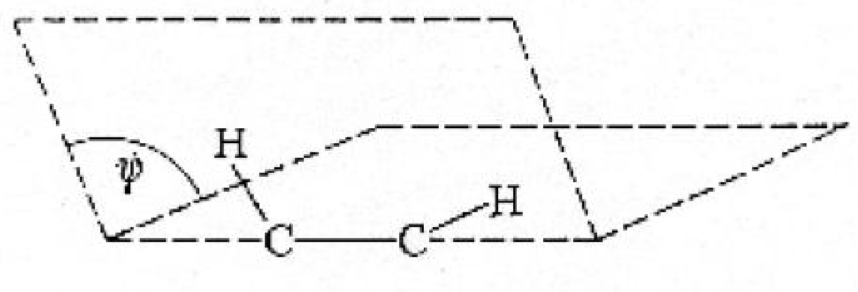
$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n = 0, \qquad \lambda_i \neq 0$$

- vecteurs de base (n pour l'espace n-dimensionnelle, linéairement indépendants)

$$\mathbf{e_1} = (1,0,0) \quad \mathbf{e_2} = (0,1,0) \quad \mathbf{e_3} = (0,0,1)$$

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{e_1} + v_2\mathbf{e_2} + v_3\mathbf{e_3}$$

d) exemple : angle dièdre



2. Matrices

a) définition d'une matrice rectangulaire

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

b) cas spéciaux

matrice carrée	$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{bmatrix} \qquad n = m$
matrice diagonale	$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$
matrice unitaire (**1**)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

matrice zéro (**0**)	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
matrice symétrique	$\begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix} \qquad A_{ij} = A_{ji}$
matrice transposée $(A^T)^T = A$ $(AB)^T = B^T A^T$ $(A+B)^T = A^T + B^T$	$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}^\mathbf{T} = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & j \end{bmatrix}$

c) opérations matricielles

- égalité

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \Leftrightarrow A_{ij} = B_{ij} \qquad (i = 1,\ldots,n \qquad j = 1,\ldots,m)$$

- somme de deux matrices

$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \qquad C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$	$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1+4 & 2-2 & 3+1 \\ 0+3 & 1+0 & 4-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ $\mathbf{A}-\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1-4 & 2-(-2) & 3-1 \\ 0-3 & 1-0 & 4-(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 2 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

- produit de deux matrices

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}\,, \qquad C_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \ldots + A_{in}B_{nj} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj} = \mathbf{a_i} \cdot \mathbf{b_j}$$

$$(\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA})$$

Exemple 1 :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 12 & 16 & 20 \\ 22 & 24 & 26 \\ 7 & 10 & 13 \end{bmatrix} \qquad B \cdot A = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 11 \\ 18 & 17 & 9 \\ 20 & 30 & 22 \end{bmatrix}$$

Exemple 2 :

$$A_n^m \rightarrow \text{matrice avec } m \text{ lignes et } n \text{ colonnes}$$

$$A_n^m \cdot B_k^n = C_k^m \qquad \text{Ex.}: A_3^4 \cdot B_2^3 = C_2^4$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 12 & 5 \\ 23 & 21 \\ 33 & 28 \\ 26 & 16 \end{bmatrix} \qquad B \cdot A = \begin{bmatrix} \text{??? Error : Inner matrix} \\ \text{dimensions must agree} \end{bmatrix}$$

- rang d'une matrice

Le nombre maximal des vecteurs (lignes, colonnes) linéairement indépendants. (Opérations permises : changement d'ordre, d'échelle et combinaison linéaire)

d) déterminant d'une matrice

- définition

det(A) = |A| ***: une fonction de tous les éléments de la matrice A***

- propriétés

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^{T})$$

det(**A**) = 0 s'il y a des lignes (colonnes) linéairement dépendantes
det(**A**) se calcule aisément d'après le développement de Laplace

e) matrice inverse

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I} \qquad \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 10 & -8 \\ -2 & -6 & 5 \\ -1 & -5 & 4 \end{bmatrix} \qquad A \cdot B = B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

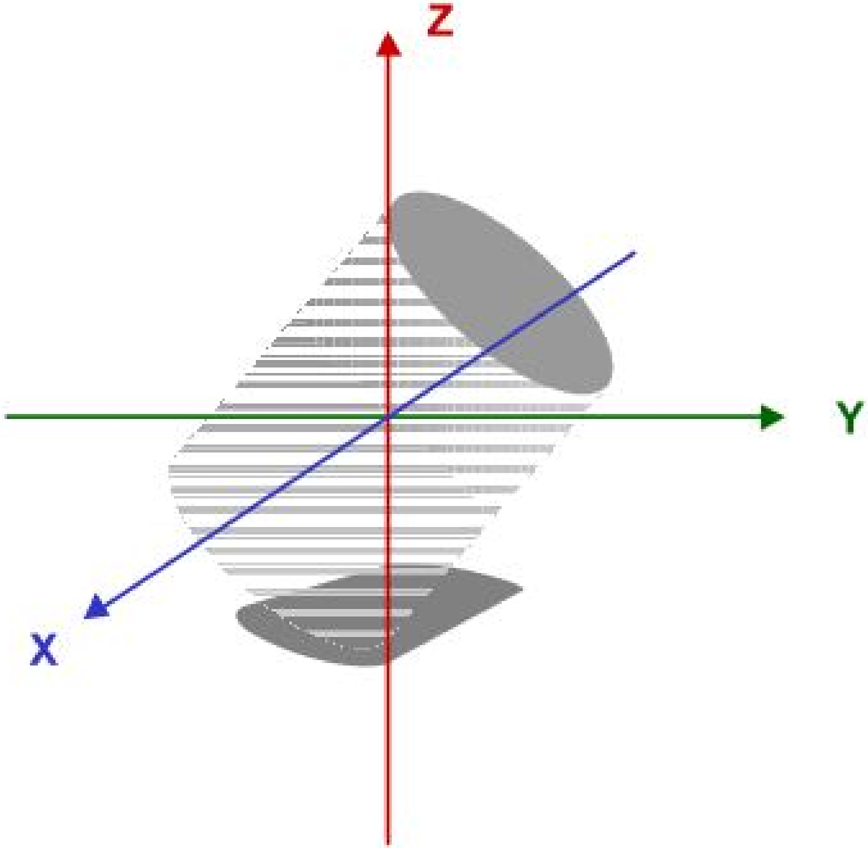
f) le polynôme caractéristique

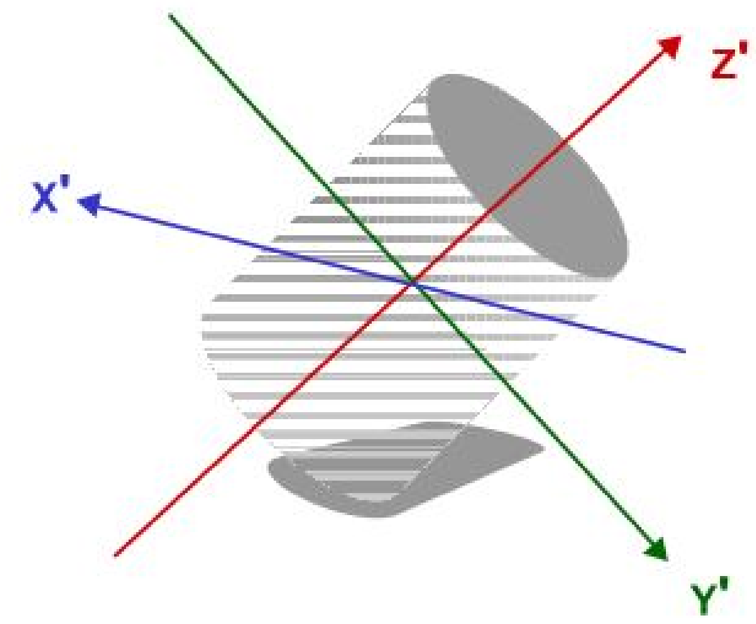
$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0$$

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Les racines de cette équation représentent les valeurs propres du système.

g) diagonalisation, valeurs et vecteurs propres

	$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{VDV}^{-1} \qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{pmatrix}$$

3. Exemple : solution des équations algébriques linéaires

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{B} \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Solution formelle : $\mathbf{Ax} = \mathbf{B} \;\Rightarrow\; \mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \;\Rightarrow\; \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$

Règles de Cramer :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{|\mathbf{A}|} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{|\mathbf{A}|} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{|\mathbf{A}|}$$

Exemple :

$$\left.\begin{aligned} 3x + 2y &= 7 \\ 5x - y &= 3 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A}) = 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 5 = -13 \qquad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 13 \\ 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}{-13} = \frac{-13}{-13} = 1 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}}{-13} = \frac{-26}{-13} = 2$$

Comment calcule-t-on une fonction d'une matrice ?

$$A \xrightarrow{diag} D = S \cdot A \cdot S^{-1}$$

$$DS = SA$$

$$\boxed{f(A) = S \cdot f(D) \cdot S^{-1}}$$

Exemple :

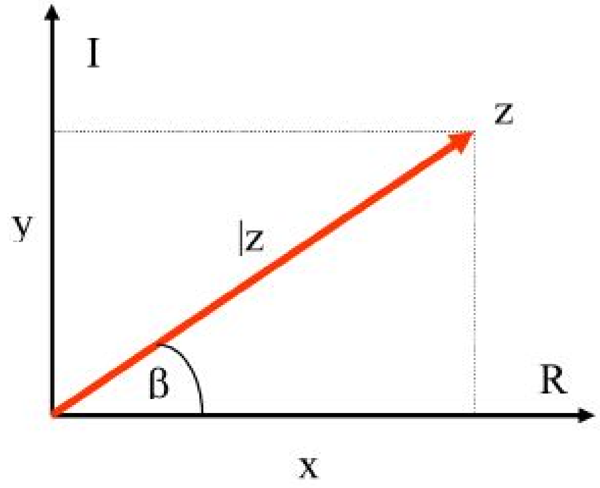
$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad e^{Dx} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 x} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 x} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n x} \end{bmatrix}$$

Math Reminder: complex numbers

A complex number:

$$\boxed{z = x + i \cdot y}$$

can be graphically represented as follows:



A complex number is fully determined when both of its components ***x*** & ***y*** are known, or when its modulus **|z|** and angle β are known:

$$x = |z| \cdot \cos \beta$$
$$y = |z| \cdot \sin \beta$$

Hence, we can write:

$$z = |z| \cdot \cos \beta + i \cdot |z| \cdot \sin \beta = |z| \cdot (\cos \beta + i \cdot \sin \beta)$$

From Euler's formula:

$$e^{i\beta} = \cos \beta + i \cdot \sin \beta$$

we finally get:

$$z = |z| \cdot e^{i\beta}$$

Développement en série de Taylor

$$f(x) \approx f(x_0) + A_1 \cdot (x - x_0) + A_2 \cdot (x - x_0)^2 + A_3 \cdot (x - x_0)^3 + ... + A_k \cdot (x - x_0)^k + ...$$

$$A_1 = \frac{df(x_0)}{dx}$$

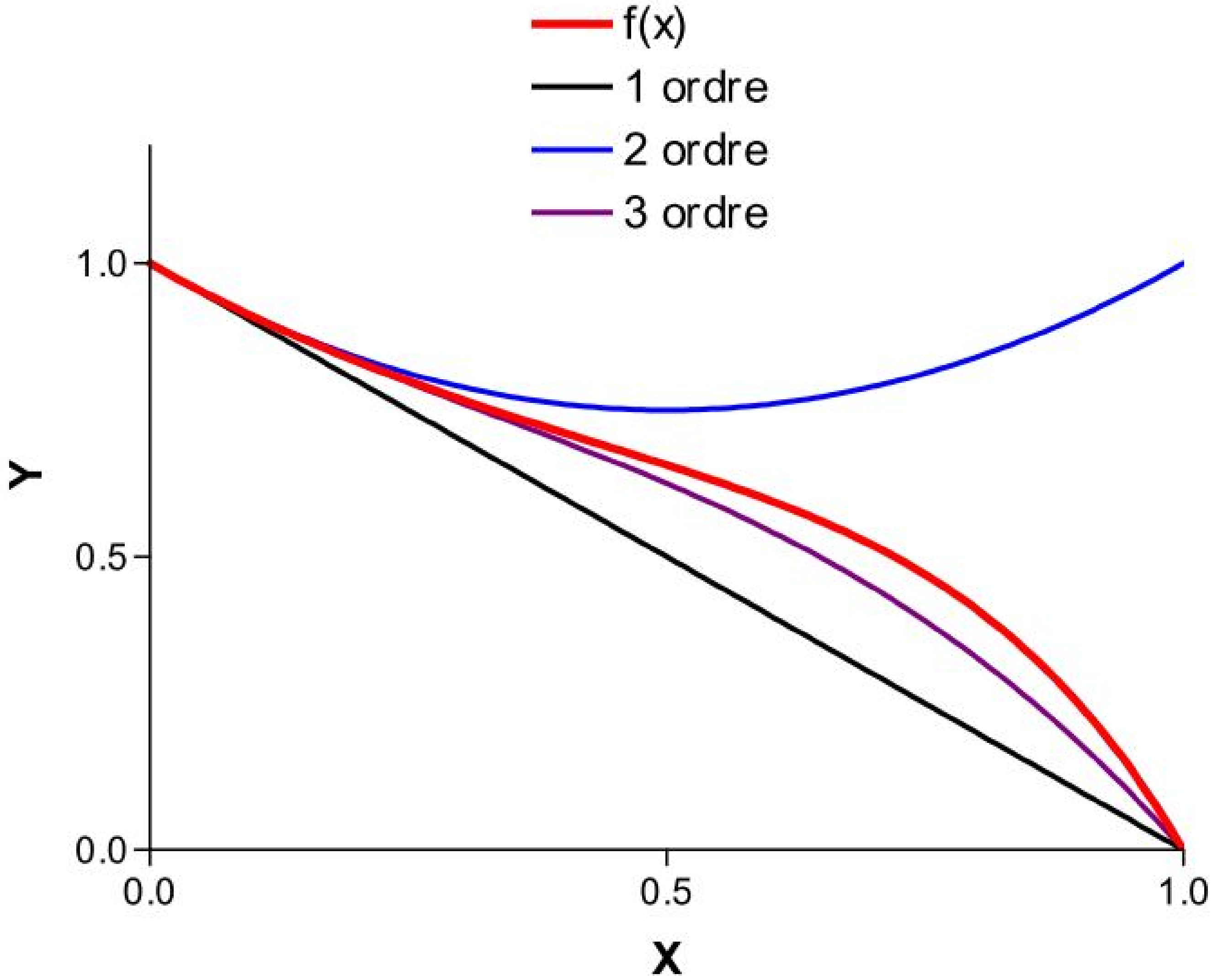
$$A_2 = \frac{1}{2} \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2}$$

$$A_3 = \frac{1}{6} \frac{d^3 f(x_0)}{dx^3}$$

$$...$$

$$A_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k f(x_0)}{dx^k}$$

Les approximations successives d'une fonction :

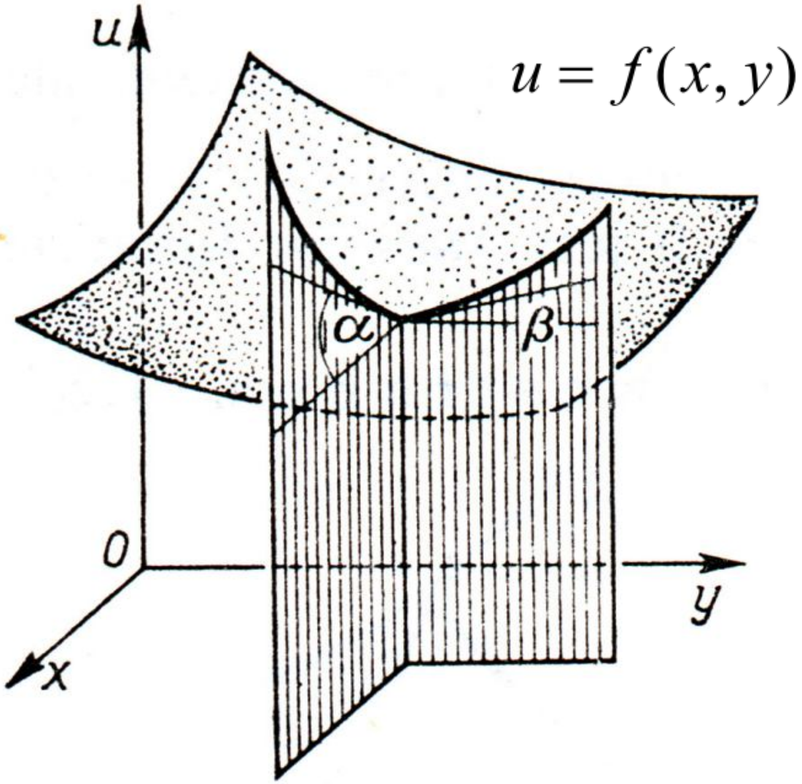


Les dérivées partielles :

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

L'interprétation géométrique des dérivées partielles



$$\frac{\partial u}{\partial x} = \tan\alpha$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \tan\beta$$

Les fonctions de plusieurs variables

$$
\begin{aligned}
f(x,y) \approx f(x_0,y_0) &+ \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x_0}\cdot(x-x_0) \\
&+ \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y_0}\cdot(y-y_0) \\
&+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x_0^2}\cdot(x-x_0)^2 \\
&+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y_0^2}\cdot(y-y_0)^2 \\
&+ \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x_0 \partial y_0}\cdot(x-x_0)\cdot(y-y_0) \\
&+ \ldots
\end{aligned}
$$

Introduction aux équations différentielles

A *differential equation* refers to any equation involving derivatives.

$$\boxed{\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 4y = e^{-t}}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = y - \frac{y^2}{2 + \sin t}}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = f(t,y) \quad \text{and} \quad y(0) = y_0}$$

Separable variables:

The idea is to modify the differential equation algebraically in such a way that all instances of the independent variable are on one side of the equation and all those of the dependent variable are on the other. Then the solution results as the integral of the two sides. For example, consider

$$\frac{dy}{dt} = ay - by^2.$$

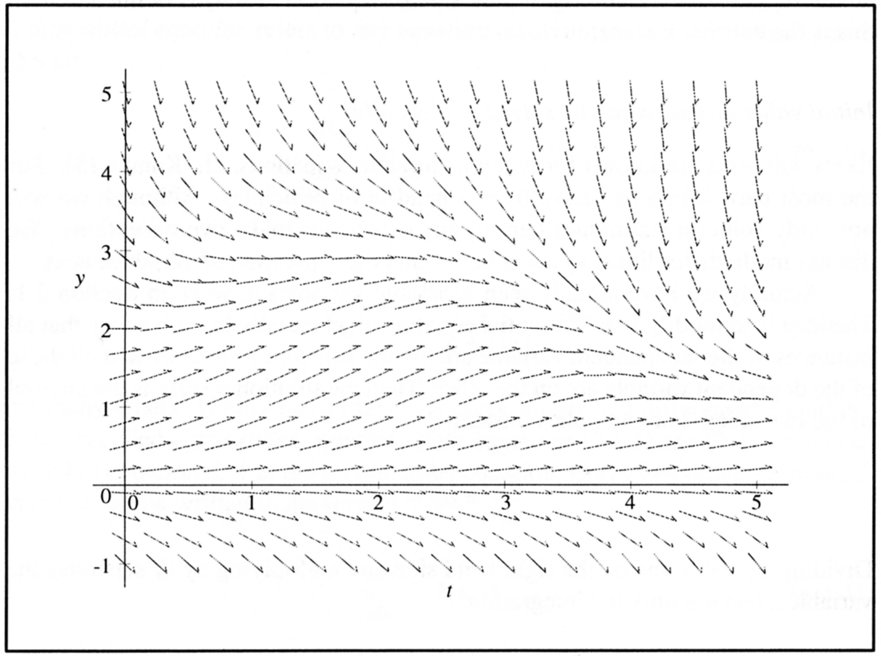
Dividing by the terms on the right hand side and multiplying by dt separates the variables, leaving only the integration:

$$\int \frac{dy}{y(a - by)} = \int dt.$$

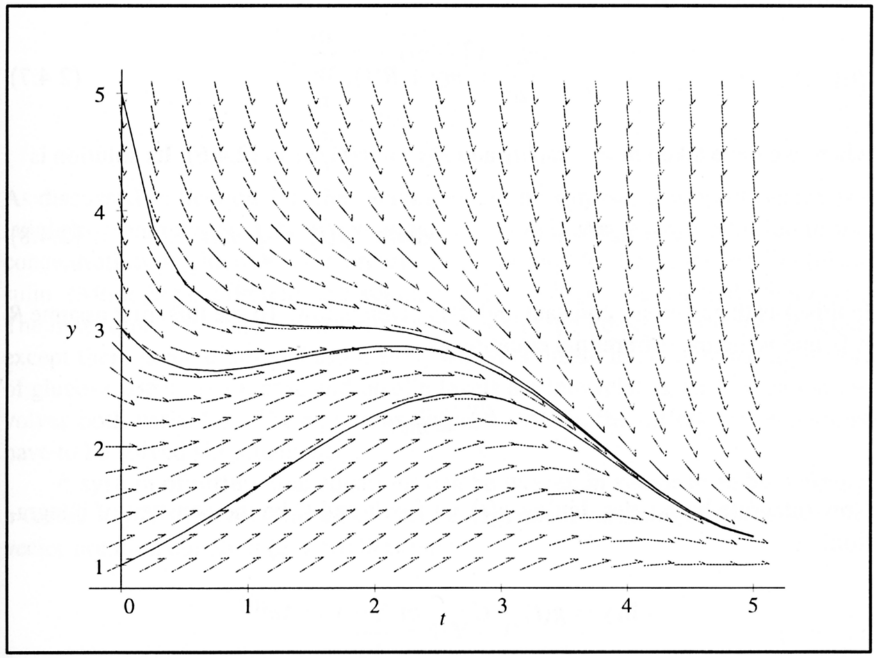
Solution of $\boxed{\dfrac{dy}{dt} = y - \dfrac{y^2}{2 + \sin t}}$

is [redacted]

Direction field :



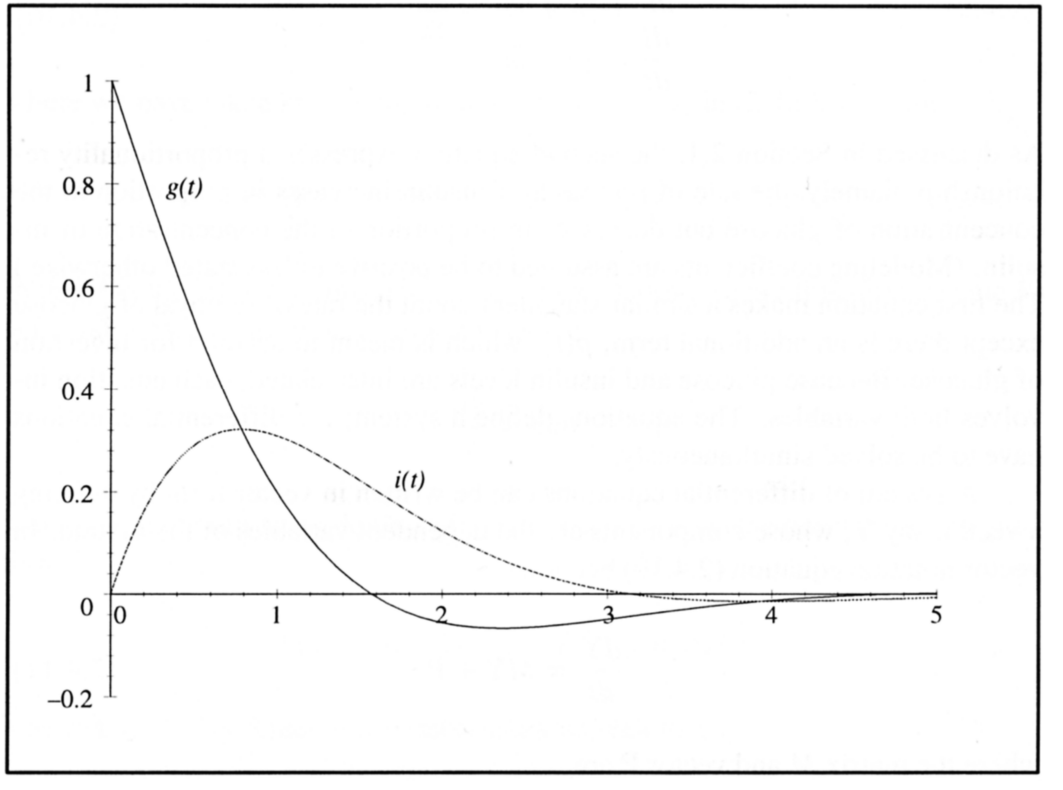
Solutions and direction field :



Exemple des équations linéaires : glucose et insuline

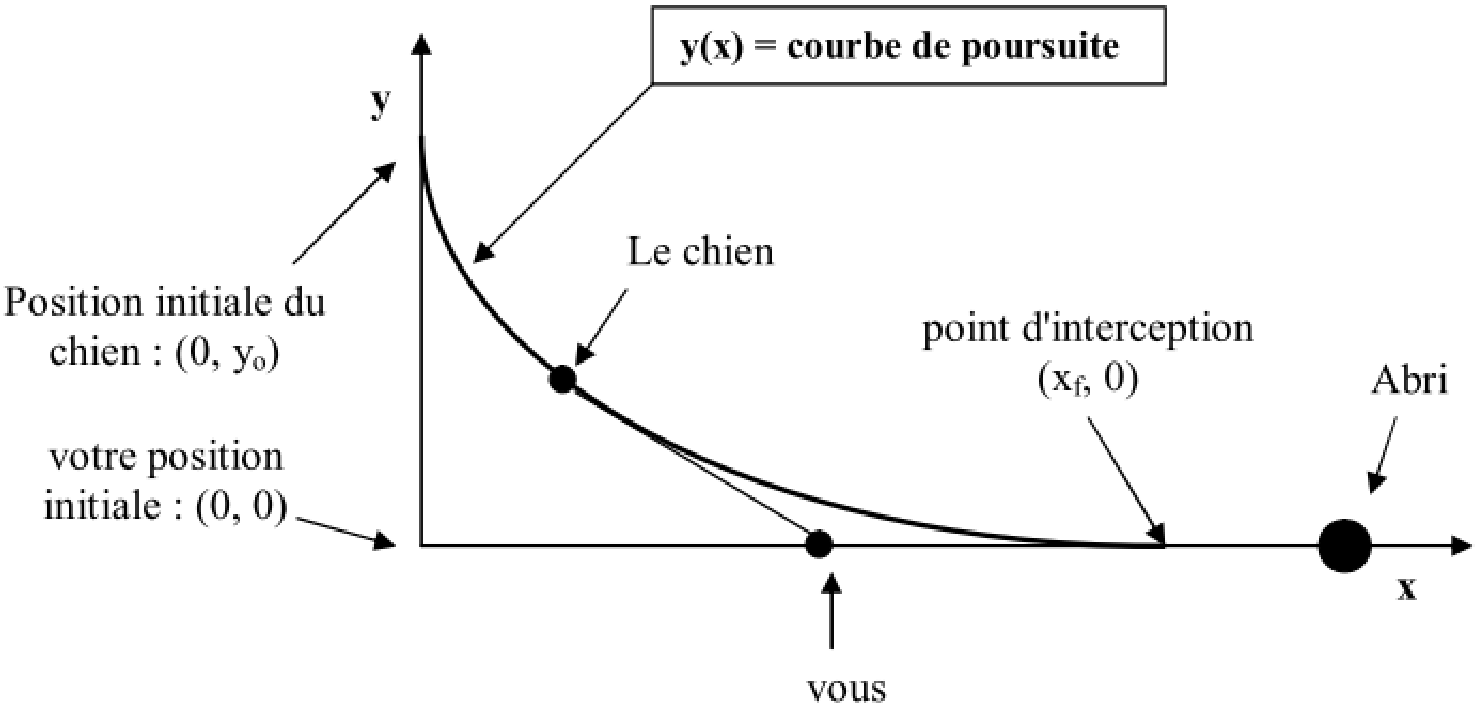
$$\frac{dg}{dt} = -\alpha g - \beta i + p(t)$$
$$\frac{di}{dt} = \gamma g - \delta i.$$

Solutions analytiques :



Exemple pratique : courbe de poursuite

Vous faites une promenade, marchant le long d'une voie menant droit vers un abri. Soudain, vous apercevez un chien à une certaine distance. Pire, le chien vous aperçoit aussi, et commence à courir vers vous avec l'intention de vous mordre ! Vous commencez à courir vers l'abri, espérant d'y arriver avant que le chien ne vous rattrape. Voici le diagramme de la situation :



Votre vitesse est ***v***, celle du chien ***u*** (***u > v***). En courant, le chien fixe ses yeux sur vous et se dirige toujours dans votre direction. Trouvez l'équation de la courbe et sa solution.
Où exactement va se terminer la poursuite ? Après quel temps ?

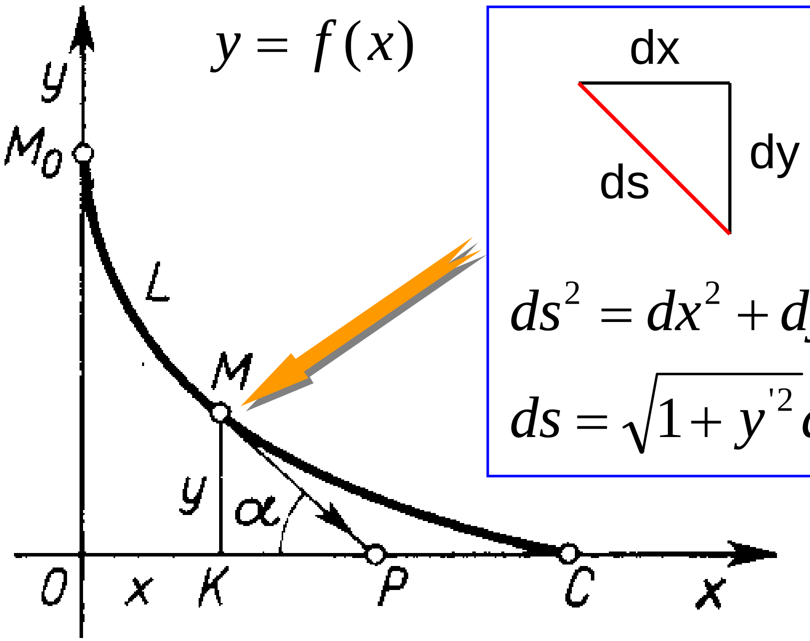
L'équation de la courbe de poursuite

$$\tan\alpha = -y'$$

$$\tan\alpha = \frac{KM}{KP} = \frac{y}{vt - x}$$

$$y' = \frac{y}{x - vt} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{xy' - y}{vy'}$$

$$y = f(x)$$



$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\,dx$$

La dérivée de *t* par rapport à *x* donne :

$$\frac{dt}{dx} = \frac{yy''}{vy'^2}$$

D'autre côté, nous avons :

$$u = \frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{1 + y'^2}\,dx}{dt}$$

ce qui donne :

$$\frac{dt}{dx} = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{u}$$

Finalement, par comparaison de [jaune] et [cyan] :

$$\frac{yy''}{vy'^2} = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{u}$$

$$yy'' = ky'^2\sqrt{1 + y'^2}$$

$$\left(k = \frac{v}{u} < 1\right)$$

Pour résoudre l'équation : $\boxed{\begin{array}{l} yy'' = ky'^2\sqrt{1+y'^2} \\ (k = \dfrac{v}{u} < 1) \end{array}}$ on substitue : $\boxed{\begin{array}{l} y' = z \\ z = z(y) \end{array}}$

On obtient : $\boxed{y\dfrac{dz}{dy} = kz\sqrt{1+z^2}}$ d'où : $\boxed{\displaystyle\int \frac{dz}{z\sqrt{1+z^2}} = \int k\frac{dy}{y}}$

Intégration donne : $\boxed{\ln\left(\dfrac{1}{z} + \sqrt{1+\dfrac{1}{z^2}}\right) = k\ln y + C}$ ou $\boxed{\dfrac{1}{z} + \sqrt{1+\dfrac{1}{z^2}} = C_1 y^k}$

La solution par rapport à 1/z = dx/dy :

$$\boxed{\frac{1}{z} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{y}{y_0}\right)^k - \left(\frac{y}{y_0}\right)^{-k}\right]}$$

condition initiale :

$$z \to \infty \quad si \quad y \to y_0$$

L'intégration finale donne :

$$x = \frac{y_0}{2}\left[\frac{1}{1+k}\left(\frac{y}{y_0}\right)^{1+k} - \frac{1}{1-k}\left(\frac{y}{y_0}\right)^{1-k}\right] + C_2$$

En imposant la condition initiale : $x = 0 \quad si \quad y = y_0$ on obtient :

$$x = \frac{y_0}{2}\left[\frac{1}{1+k}\left(\frac{y}{y_0}\right)^{1+k} - \frac{1}{1-k}\left(\frac{y}{y_0}\right)^{1-k}\right] + \frac{ky_0}{1-k^2}$$

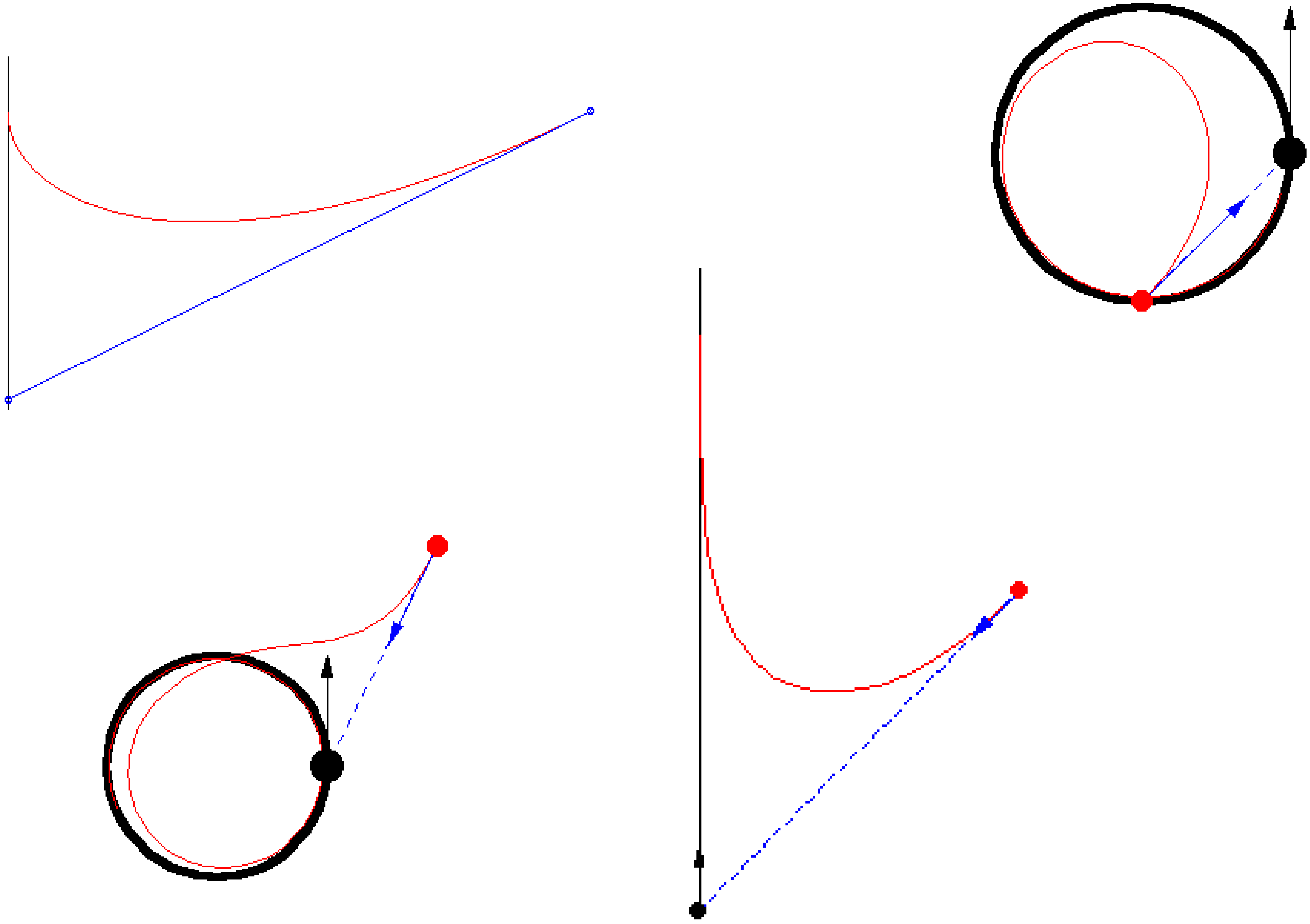
Où se termine la poursuite ? (il suffit de substituer y=0)

$$x_f = \frac{ky_0}{1-k^2} = \frac{uvy_0}{u^2-v^2}$$

Combien de temps dure la poursuite ?

$$x_f = vT \quad \Rightarrow \quad T = \frac{x_f}{v} \longrightarrow T = \frac{uy_0}{u^2-v^2}$$

Exemples de courbes de poursuite :



Méthode matricielle de l'intégration d'un jeu d'équations différentielles

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dy_1}{dx} = a_{11}(x)\cdot y_1 + a_{12}(x)\cdot y_2 + ... + a_{1n}(x)\cdot y_n \\
&\frac{dy_2}{dx} = a_{21}(x)\cdot y_1 + a_{22}(x)\cdot y_2 + ... + a_{2n}(x)\cdot y_n \\
&... \\
&\frac{dy_n}{dx} = a_{n1}(x)\cdot y_1 + a_{n2}(x)\cdot y_2 + ... + a_{nn}(x)\cdot y_n
\end{aligned}\right\}$$

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{l=1}^{n} a_{kl}(x)\cdot y_l + b_k$$

$$(k = 1, 2, ..., n)$$

Analogie par rapport à une seule équation :

$$\frac{dY}{dx} = AY + B \qquad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{bmatrix}$$

La solution générale du système non-homogène peut être trouvée comme la somme de la solution du système **homogène** et d'une solution particulière du système **non-homogène** :

$$\frac{dY_0}{dx} = AY_0$$

$$\frac{dY_s}{dx} = AY_s + B$$

La preuve est facile : si on ajoute à $\boldsymbol{Y_s}$ une fonction quelconque $\boldsymbol{Z}$:

$$\frac{dY_s}{dx} + \frac{dZ}{dx} = AY_s + AZ + B$$

$$\frac{dZ}{dx} = AZ$$

$$d'où$$

$$Z \equiv Y_0$$

On transforme le système en forme canonique :

$$\boxed{\frac{d(SY)}{dx} = \frac{dS}{dx}Y + S\frac{dY}{dx}}$$

$$\frac{dY}{dx} = AY + B \quad \Longrightarrow \quad S\frac{dY}{dx} = SAY + SB$$

$$\frac{d(SY)}{dx} = \left(SA + \frac{dS}{dx}\right)\left(S^{-1}S\right)Y + SB$$

$$S \neq S(x) \;\; \Rightarrow \;\; \frac{dS}{dx} = 0$$

$$\frac{d(SY)}{dx} = \left(SAS^{-1}\right)SY + SB$$

$$\frac{d(SY)}{dx} = D \cdot SY + SB$$

Introduisons deux nouveaux symboles : $\begin{cases} SY = Z \\ SB = E \end{cases}$

pour obtenir la forme canonique des équations : $\dfrac{dZ}{dx} = DZ + E$

Tout d'abord, la solution du système homogène : $\dfrac{dZ_0}{dx} = DZ_0$

$$\frac{dZ_0}{Z_0} = Ddx$$

$$\int \frac{dZ_0}{Z_0} = \int Ddx$$

$$\ln(Z_0) = Dx + C$$

$$Z_0 = C \cdot e^{Dx}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{bmatrix}$$

La solution du système **non-homogène** (même forme que le terme libre) :

$$Z_s = const$$
$$0 = DZ_s + E$$
$$Z_s = -D^{-1}E$$

D'où la forme générale de la solution :

$$Z = Ce^{Dx} - D^{-1}E$$
$$(D = SAS^{-1}, E = SB)$$

La solution finale du système :

$$\boxed{Y = S^{-1}Z}$$