

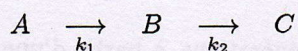
Mathématiques pour la biologie

Examen (1ère session) - 2h

L'épreuve comporte trois exercices indépendants. Les notes de cours sont autorisées.

Exercice 1 (sur 8 points)

On considère les réactions successives suivantes :



où k_1 et k_2 désignent des nombres réels strictement positifs.

On désigne par $a - x$, y et z les concentrations en $\text{mol} \cdot \text{l}^{-1}$ à l'instant t des produits A , B et C (t est exprimé en minutes), a désignant la concentration à l'instant $t = 0$ du produit A , seul présent au début de la réaction.

x , y et z sont des fonctions de t définies sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

D'après la conservation de la matière on a : $x = y + z$. Les lois cinétiques donnent :

$$\frac{dx}{dt} = k_1(a - x) \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = k_1(a - x) - k_2 y \quad (2)$$

$$z = x - y \quad (3)$$

1. L'équation (1) s'écrit aussi :

$$x' + k_1 x = k_1 a \quad (E_1)$$

où k_1 est un nombre réel positif non nul.

- Résoudre l'équation homogène (E_0) : $x' + k_1 x = 0$.
- Déterminer une solution particulière $x_p(t)$ de (E_1) sous la forme d'une fonction constante.
- En déduire la solution générale de (E_1).
- Sachant que la solution de (E_1) cherchée vérifie $x(0) = 0$, montrer que :

$$x(t) = a(1 - e^{-k_1 t})$$

2. On suppose, dans cette question, que k_1 et k_2 sont des nombres réels positifs distincts.

- Montrer que l'équation (2) équivaut à (E_2) : $y' + k_2 y = k_1 a e^{-k_1 t}$
- Résoudre l'équation homogène (E'_0) : $y' + k_2 y = 0$
- Déterminer une solution particulière $y_p(t)$ de (E_2) sous la forme :

$$y_p(t) = \lambda e^{-k_1 t}$$

où λ est une constante réelle à déterminer.

- En déduire la solution générale de (E_2).
- Sachant que $y(0) = 0$, montrer que :

$$y(t) = \frac{a k_1}{k_2 - k_1} (e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}).$$

3. Donner l'expression de $z(t)$.

Exercice 2 (sur 4 points)

On mesure en microlitres la quantité de trois types de substances émises par des roses qui subissent trois traitements différents. On obtient les données suivantes :

	Substance 1	Substance 2	Substance 3
Rose 1	4	3	6
Rose 2	2	5	8
Rose 3	0	1	7

1. Calculer l'individu moyen de cette matrice.
2. Calculer la matrice de variance-covariance Σ .
3. En déduire les variances et les covariances.

Exercice 3 (sur 8 points)

On s'intéresse à l'évolution d'un gène au fil des générations, à partir d'une population initiale d'individus. Ce gène peut prendre deux formes (allèles) a et b . On suppose que la formation des couples se fait au hasard (appariement aléatoire) et que chaque enfant hérite, à sa naissance, d'un allèle de chaque parent, chacun d'eux étant choisi au hasard. Un individu peut donc présenter l'un des 3 génotypes suivants : aa , ab ou bb . Dans la population initiale, les proportions de ces 3 génotypes valent respectivement $1/4$, $1/2$ et $1/4$.

1. Donner une interprétation simple du fait que ab apparaît 2 fois plus souvent que les deux autres génotypes.
2. Quelle est la probabilité pour qu'un individu de la population initiale soit porteur du gène a ?
3. Si tous les couples formés aléatoirement ont la même probabilité d'avoir des enfants, que peut-on prédire de la répartition des génotypes pour les générations futures ?
4. On suppose maintenant que les individus de génotype bb sont stériles. Pour un enfant de la première génération de descendants, calculer les fréquences des différents types de paires de parents : $\{aa, aa\}$, $\{aa, ab\}$, $\{aa, bb\}$, $\{ab, ab\}$, $\{ab, bb\}$ et $\{bb, bb\}$.
5. En calculant la somme de ces fréquences, calculer les probabilités correspondantes.
6. En déduire la probabilité pour qu'un individu de la première génération de descendants soit porteur du gène a . Comparer cette probabilité à la probabilité calculée à la question 2.
7. On note $n \in \mathbb{N}$ le numéro d'une génération : $n = 0$ pour la population initiale, $n = 1$ pour la première génération de descendants, etc. Si p_n désigne la probabilité qu'un individu de la génération numéro n soit porteur du gène a , ~~calculer p_{n+1} en fonction de p_n . Vérifier cette expression dans le cas de p_1 .~~
8. Quelle semble être la limite de la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$? Interpréter ce résultat en termes biologiques.