Mathématiques pour la biologie
Examen (1ère session) - 2h

L'épreuve comporte trois exercices indépendants. Les notes de cours sont autorisées.

Exercice 1 (sur 8 points)

On considère les réactions successives suivantes :

$$A \xrightarrow[k_1]{} B \xrightarrow[k_2]{} C$$

où k_1 et k_2 désignent des nombres réels strictement positifs.
On désigne par $a-x$, y et z les concentrations en $mol \cdot l^{-1}$ à l'instant t des produits A, B et C (t est exprimé en minutes), a désignant la concentration à l'instant $t=0$ du produit A, seul présent au début de la réaction.
x, y et z sont des fonctions de t définies sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
D'après la conservation de la matière on a : $x = y + z$. Les lois cinétiques donnent :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k_1(a-x) \qquad (1)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = k_1(a-x) - k_2\,y \qquad (2)$$

$$z = x - y \qquad (3)$$

1. L'équation (1) s'écrit aussi :

$$x' + k_1\,x = k_1\,a \quad (E_1)$$

où k_1 est un nombre réel positif non nul.

   (a) Résoudre l'équation homogène (E_0) : $x' + k_1\,x = 0$.
   (b) Déterminer une solution particulière $x_p(t)$ de (E_1) sous la forme d'une fonction constante.
   (c) En déduire la solution générale de (E_1).
   (d) Sachant que la solution de (E_1) cherchée vérifie $x(0)=0$, montrer que :

$$x(t) = a\,(1 - e^{-k_1 t})$$

2. On suppose, dans cette question, que k_1 et k_2 sont des nombres réels positifs distincts.

   (a) Montrer que l'équation (2) équivaut à (E_2) : $y' + k_2\,y = k_1\,a\,e^{-k_1 t}$
   (b) Résoudre l'équation homogène (E_0') : $y' + k_2\,y = 0$
   (c) Déterminer une solution particulière $y_p(t)$ de (E_2) sous la forme :

$$y_p(t) = \lambda\,e^{-k_1 t}$$

   où λ est une constante réelle à déterminer.
   (d) En déduire la solution générale de (E_2).
   (e) Sachant que $y(0)=0$, montrer que :

$$y(t) = \frac{a\,k_1}{k_2 - k_1}\,(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}).$$

3. Donner l'expression de $z(t)$.

Exercice 2 (sur 4 points)

On mesure en microlitres la quantité de trois types de substances émises par des roses qui subissent trois traitements différents. On obtient les données suivantes :

	Substance 1	Substance 2	Substance 3
Rose 1	4	3	6
Rose 2	2	5	8
Rose 3	0	1	7

1. Calculer l'individu moyen de cette matrice.
2. Calculer la matrice de variance-covariance Σ.
3. En déduire les variances et les covariances.

Exercice 3 (sur 8 points)

On s'intéresse à l'évolution d'un gène au fil des générations, à partir d'une population initiale d'individus. Ce gène peut prendre deux formes (allèles) a et b. On suppose que la formation des couples se fait au hasard (appariement aléatoire) et que chaque enfant hérite, à sa naissance, d'un allèle de chaque parent, chacun d'eux étant choisi au hasard. Un individu peut donc présenter l'un des 3 génotypes suivants : aa, ab ou bb. Dans la population initiale, les proportions de ces 3 génotypes valent respectivement $1/4$, $1/2$ et $1/4$.

1. Donner une interprétation simple du fait que ab apparaît 2 fois plus souvent que les deux autres génotypes.
2. Quelle est la probabilité pour qu'un individu de la population initiale soit porteur du gène a ?
3. Si tous les couples formés aléatoirement ont la même probabilité d'avoir des enfants, que peut-on prédire de la répartition des génotypes pour les générations futures ?
4. On suppose maintenant que les individus de génotype bb sont stériles. Pour un enfant de la première génération de descendants, calculer les fréquences des différents types de paires de parents : $\{aa, aa\}$, $\{aa, ab\}$, $\{aa, bb\}$, $\{ab, ab\}$, $\{ab, bb\}$ et $\{bb, bb\}$.
5. En calculant la somme de ces fréquences, calculer les probabilités correspondantes.
6. En déduire la probabilité pour qu'un individu de la première génération de descendants soit porteur du gène a. Comparer cette probabilité à la probabilité calculée à la question 2.
7. On note $n \in \mathbb{N}$ le numéro d'une génération : $n = 0$ pour la population initiale, $n = 1$ pour la première génération de descendants, etc. Si p_n désigne la probabilité qu'un individu de la génération numéro n soit porteur du gène a, ~~calculer p_{n+1} en fonction de p_n. Vérifier cette expression dans le cas de p_1.~~
Calculer p_2
8. Quelle semble être la limite de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Interpréter ce résultat en termes biologiques.