SSB

EM8BBSEM - Simulation de systèmes biologiques – examen mai 2013

Certaines populations (algues, bactéries...) produisent les déchets qui, en fonction de leur concentration, peuvent devenir toxiques pour la population elle-même. Voici un modèle typique d'un système d'une population **x** et d'un produit toxique **y**:

$$\frac{dx}{dt} = A \cdot x - K \cdot x \cdot y$$

$$\frac{dy}{dt} = \gamma \cdot x - \delta \cdot y$$

où les coefficients **A, K, γ** et **δ** sont tous > 0.

1. Expliquez la signification de chaque terme dans les équations.

2. Trouvez les points stationnaires et déterminez la stabilité de chacun d'eux.

3. Créez un portrait de phase complet du système et dessinez plusieurs trajectoires dans le cas où $\delta < 4A$. Qu'est-ce qui change si $\delta > 4A$?

Rappel 1 :
Les valeurs propres d'une matrice représentent les racines d'un polynôme, qui résulte de l'équation $\det|A - \lambda I| = 0$. Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors $\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0$ donne le polynôme :

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

Rappel 2 :
Les racines d'un polynôme d'ordre 2 ($Ax^2 + Bx + C = 0$) se calculent de façon suivante :

$$x_1 = \frac{-B - \sqrt{\Delta}}{2A}$$

$$x_2 = \frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2A}$$

$$\Delta = B^2 - 4AC$$