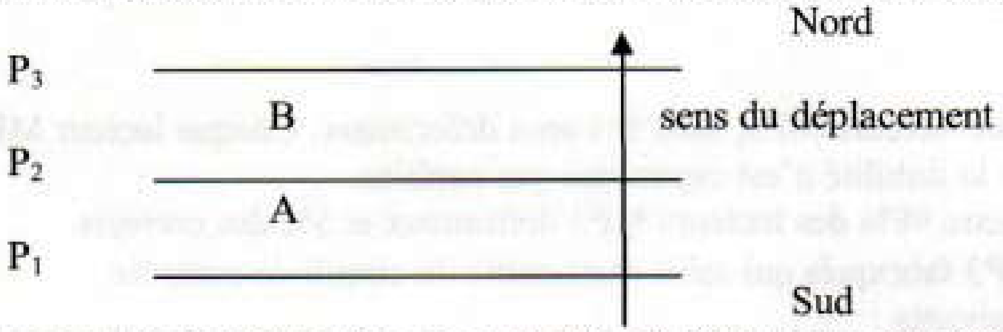
UE Math pour la biologie - M1 MABS BioInfo - 5 janvier 2012

Partie Résolution de systèmes d'équations linéaires

A cause du réchauffement climatique, l'aire de répartition de certains insectes se déplace vers le nord. On s'intéresse à une espèce particulière qui était répartie de façon homogène entre les parallèles P_1 et P_3, en 1980. Le parallèle P_2 est au centre (voir dessin) et délimite deux zones d'étude A et B. On s'intéresse à l'évolution de l'effectif de cette espèce dans les deux zones : a_n (resp. b_n) est l'effectif de cette espèce, à l'instant *n*, dans la zone A (resp. B). L'unité de temps correspond à 5 années, et en 1980, $a_0=b_0= 1$ (millions d'individus)

On suppose que le déplacement se fait de manière unilatérale et uniquement du Sud vers le Nord. On a observé qu'au bout d'une unité de temps, 20% des individus de la zone A franchissent le parallèle P_2 vers le Nord, et 10% de ceux de la zone B franchissent le parallèle P_3.Aucun mouvement vers le Sud n'est constaté.

1) Reproduire le schéma suivant en indiquant les mouvements dans et entre les différentes zones.



$b_0 = 100$

$b_1 = 100 + 80\% a_1 - 1$

$a_0 = 100$

$a_1 = 80\, a_0 - 10$

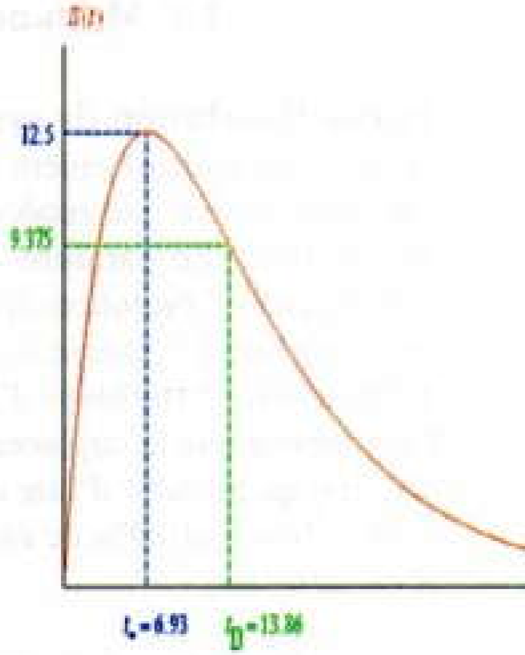
2) En supposant que le phénomène se reproduise à l'identique sur chaque unité de temps, écrire le système d'équations linéaires régissant les mouvements de cette population sous la forme : $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$
3) On pose $M = \begin{pmatrix} 0.8 & 0 \\ 0.2 & 0.9 \end{pmatrix}$. Calculer les valeurs propres de M.
4) Trouver les vecteurs propres associés à chacune des valeurs propres et montrer que vous pouvez les choisir égaux à $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
5) Soit la matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer P^{-1}.
6) Montrer que $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale D.
7) En déduire l'écriture de M^n en fonction de P^{-1}, D^n et P.
8) En déduire a_n et b_n en fonction de n.
9) Au bout de combien de temps (en unités de temps, et en années), la population de A ne sera plus que de 5% celle de 1980. (Aide Calcul : $\log(0,05) = -2.9957$; $\log(0.8) = -0.2231$)
10) En faisant tendre n vers l'infini et en supposant que les conditions deviennent défavorables au nord du parallèle P3, qu'en concluez vous pour cette espèce ?

Partie Equations différentielles

Une maladie génétique provoque l'absence d'une substance A nécessaire à l'organisme. On doit injecter une quantité M_0 à t=0 par piqure intramusculaire. La substance passe ensuite dans le sang avant d'atteindre son site actif. Soit M, la quantité de substance dans le muscle et S la quantité dans le sang..

1) La vitesse d'élimination de la substance du muscle est proprotionnelle à la quantité présente, soit $\frac{dM}{dt} = M' = -k_1 M$, avec $k_1 > 0$.
   Résoudre cette équation après l'avoir justifiée.
   Tracer approximativement la courbe M(t).
2) La vitesse d'accumulation de la substance dans le sang est proportionnelle à la quantité présente dans le muscle et la vitesse d'élimination de la substance dans le sang est proportionnelle à la quantité présente dans le sang. Justifier la formule suivante :
   $\frac{dS}{dt} = S' = k_2 M - k_3 S$ avec $k_2 M_0 > k_1 > k_3 > 0$ et à t=0, $S_0 = 0$.

3) Résoudre cette équation en deux étapes
   - **a.** Trouver la solution générale de l'équation sans second membre $\frac{dS}{dt} = S' = -k_3 S$ (une constante C intervient)
   - **b.** Trouver une solution particulière de l'équation totale sous la forme $S(t) = ke^{-k_1 t}$ (il faut remplacer dans l'équation totale et trouver k)
   - **c.** La solution est la somme des deux solutions ; déterminer la constante C en utilisant que S= 0 à t=0.



A titre d'info, avec $k_2 M_0 = 5$, $k_1 = 0.2$, $k_3 = 0.1$, on obtient la courbe ci-contre, commenter.

Partie Probabilités

Une entreprise fabrique des lecteurs MP3, dont 6% sont défectueux. Chaque lecteur MP3 est soumis à une unité de contrôle dont la fiabilité n'est cependant pas parfaite.
Cette unité de contrôle rejette 98% des lecteurs MP3 défectueux et 5% des corrects.
Soit Ω un ensemble de MP3 fabriqués qui subit l'ensemble du circuit de contrôle.
On note les événements suivants :
D = {MP3 défectueux}, R = {MP3 rejetés par l'unité de contrôle}

1) Quelles sont les probabilités dont vous disposez à partir des données de l'énoncé ? en particulier, quelles sont les probabilités conditionnelles dont vous disposez ?

2) a. Calculer la probabilité pour que le MP3 soit défectueux et ne soit pas rejeté. P(R|

   b. On dit qu'il y a une erreur de contrôle lorsque le MP3 est rejeté et qu'il n'est pas défectueux (« faux rejet ») ou qu'il n'est pas rejeté et qu'il est défectueux (fausse acceptation). Calculer la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle.

$P(\bar{R}/D)$

3) Montrer que la probabilité qu'un MP3 ne soit pas rejeté est égale à 0,8942

4) Quatre contrôles successifs sont maintenant réalisés de manière indépendante pour savoir si un lecteur peut être commercialisé. Un lecteur MP3 est :
   - Commercialisé avec le logo de l'entreprise s'il subit avec succès les quatre contrôles successifs,
   - Détruit s'il est rejeté au moins deux fois sur les quatre,
   - Commercialisé sans le logo sinon.

   Le coût de fabrication d'un lecteur MP3 est de 50€. Son prix de vente est de 120€ pour un lecteur avec logo, 60€ sans logo. On désigne par G la variable aléatoire qui, à chaque MP3 fabriqué, associe le gain algébrique en € (éventuellement négatif) réalisé par l'entreprise. Compte tenu des valeurs précédentes, on montre que la loi de probabilité de la variable G est donnée par les valeurs suivantes : P(G= -50€) = 0,639; P(G=10€) = 0,303; P(G= 70€) = 0,058

   -3,14 -16 3,03 9 4,06 16

   - Déterminer P(G $\geq$ 0).
   - Calculer l'espérance et la variance de cette variable aléatoire.
   - Donner une interprétation de ces résultats.

403 268 521