Aufgabenstellung

Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, die absolut integrierbar ist, und deren Fourier-Transformation $\hat{f}$ im eindimensionalen Fall durch

$$\hat{f}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ipx} \, dx$$

definiert ist.

Berechnen Sie die Fourier-Transformierten der folgenden Funktionen:

(a) $f(x-a)$ mit $a \in \mathbb{R}$,

(b) $f(ax)$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

(c) $f(-x)$,

(d) $f^{(n)}(x)$, sofern f n-mal stetig differenzierbar ist und

$$\lim_{x \to \pm\infty} f^{(m)}(x) = 0 \quad \text{für } m < n,$$

gilt.

Betrachten Sie ferner die GauSS-Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), \quad \sigma > 0.$$

(e) Berechnen Sie zunächst die Fourier-Transformierte dieser Funktion. Bestimmen Sie anschlieSSend das Produkt

$$\langle \Delta x^2 \rangle \cdot \langle \Delta p^2 \rangle,$$

wobei

$$\langle \Delta x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle x \rangle)^2 \, |f(x)|^2 \, dx, \quad \langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x \, |f(x)|^2 \, dx,$$

und

$$\langle \Delta p^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (p - \langle p \rangle)^2 \, |\hat{f}(p)|^2 \, dp, \quad \langle p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} p \, |\hat{f}(p)|^2 \, dp.$$

Lösung

(a) Fourier-Transformation von $f(x-a)$

Wir betrachten

$$\mathcal{F}\{f(x-a)\}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-a) e^{-ipx} \, dx.$$

Setzen wir die Substitution $y = x - a$ (wobei $dy = dx$) ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{f(x-a)\}(p) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-ip(y+a)} \, dy \\
&= \frac{e^{-ipa}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-ipy} \, dy \\
&= e^{-ipa} \, \hat{f}(p).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\widehat{f(x-a)}(p) = e^{-ipa}\,\hat{f}(p).}$$

(b) Fourier-Transformation von $f(ax)$ mit $a \neq 0$

Wir berechnen

$$\mathcal{F}\{f(ax)\}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(ax) e^{-ipx}\, dx.$$

Mit der Substitution $u = ax$ gilt $x = \frac{u}{a}$ und $dx = \frac{du}{a}$. Damit wird

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{f(ax)\}(p) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-ip\frac{u}{a}} \frac{du}{a} \\
&= \frac{1}{|a|} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\frac{p}{a}u}\, du \\
&= \frac{1}{|a|}\, \hat{f}\Big(\frac{p}{a}\Big).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\widehat{f(ax)}(p) = \frac{1}{|a|}\, \hat{f}\Big(\frac{p}{a}\Big).}$$

(c) Fourier-Transformation von $f(-x)$

Wir haben:

$$\hat{g}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(-x) e^{-ipx}\, dx.$$

Mit der Substitution $y = -x$ (d.h. $x = -y$ und $dx = -dy$) erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\hat{g}(p) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{-\infty} f(y) e^{-ip(-y)} (-dy) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{ipy}\, dy \\
&= \hat{f}(-p).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\widehat{f(-x)}(p) = \hat{f}(-p).}$$

(d) Fourier-Transformation von $f^{(n)}(x)$

Unter der Annahme, dass f n-mal stetig differenzierbar ist und dass für $m < n$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f^{(m)}(x) = 0,$$

folgt durch mehrmaliges partielles Integrieren:

$$\mathcal{F}\{f^{(n)}(x)\}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(x) e^{-ipx}\, dx = (ip)^n \hat{f}(p).$$

$$\boxed{\widehat{f^{(n)}}(p) = (ip)^n\, \hat{f}(p).}$$

(e) Fourier-Transformation der GauSS-Funktion und Berechnung des Unschärfeprodukts

Die gegebene GauSS-Funktion lautet

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), \quad \sigma > 0.$$

Fourier-Transformation der GauSS-Funktion: Nach Definition gilt

$$\hat{f}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) e^{-ipx}\, dx.$$

Bekanntlich führt die Integration eines exponentiellen Quadrats (nach quadratischer Vervollständigung) zu einem weiteren Ausdruck im exponentiellen Bereich. Man erhält

$$\boxed{\hat{f}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\sigma^2 p^2}{2}\right).}$$

Berechnung des Unschärfeprodukts $\langle \Delta x^2 \rangle \langle \Delta p^2 \rangle$: Wir definieren

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x\, |f(x)|^2\, dx, \qquad \langle \Delta x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle x \rangle)^2\, |f(x)|^2\, dx,$$

und

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} p\, |\hat{f}(p)|^2\, dp, \qquad \langle \Delta p^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (p - \langle p \rangle)^2\, |\hat{f}(p)|^2\, dp.$$

Betrachte die gauSSförmige Wellenfunktion:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

Da $x \cdot |f(x)|^2$ ungerade ist, gilt:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x |f(x)|^2 dx = 0$$

Normierung von $f(x)^2$:

$$A \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sigma^2 2\pi} e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}}\right) dx = 1 \quad \Rightarrow \quad A = 2\sigma\sqrt{\pi}$$

Berechnung der Ortsunschärfe:

$$\langle \Delta x^2 \rangle = A \int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle x \rangle)^2 |f(x)|^2 dx = A \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2 dx = 2\sigma\sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sigma^2 2\pi} e^{-x^2/\sigma^2} dx$$

Substitution: $u = \frac{x}{\sigma} \Rightarrow x = \sigma u, dx = \sigma du$

$$= 2\sigma\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma^2 u^2 \cdot \frac{1}{\sigma^2 2\pi}e^{-u^2}\,du = 2\sigma\sqrt{\pi}\cdot\frac{\sigma}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u^2 e^{-u^2}\,du = 2\sigma\sqrt{\pi}\cdot\frac{\sigma}{2\pi}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sigma^2}{2}$$

Fouriertransformierte Wellenfunktion:

$$\hat{f}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{p^2\sigma^2}{2}}$$

Da $p \cdot |\hat{f}(p)|^2$ ungerade ist:

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} p|\hat{f}(p)|^2 dp = 0$$

Normierung von $|\hat{f}(p)|^2$:

$$B\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi}e^{-\sigma^2 p^2}\right)dp = 1 \quad \Rightarrow \quad B = 2\sqrt{\pi}\,\sigma$$

Impulsunschärfe:

$$\langle \Delta p^2 \rangle = B\int_{-\infty}^{\infty}p^2|\hat{f}(p)|^2 dp = 2\sqrt{\pi}\,\sigma\int_{-\infty}^{\infty}p^2\frac{1}{2\pi}e^{-\sigma^2 p^2}dp$$

Substitution: $u = \sigma p \Rightarrow p = \frac{u}{\sigma}, dp = \frac{du}{\sigma}$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u^2}{\sigma^2}e^{-u^2}\cdot\frac{du}{\sigma} = \frac{1}{\sigma^2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u^2 e^{-u^2}\,du = \frac{1}{\sigma^2\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2\sigma^2}$$

Unschärferelation:

$$\langle \Delta x^2 \rangle \cdot \langle \Delta p^2 \rangle = \frac{\sigma^2}{2}\cdot\frac{1}{2\sigma^2} = \frac{1}{4}$$

$$\boxed{\langle \Delta x^2 \rangle \cdot \langle \Delta p^2 \rangle = \frac{1}{4}}$$

Bemerkung:
Unter Verwendung der hier gewählten Fourier-Transformationskonventionen und normierungen erfüllt die Gauss-Funktion (nach entsprechender Normierung) die untere Schranke der Heisenbergschen Unschärferelation.