Aufgabe H1.2: Gaußsche Integrale (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass für die Gaußschen Integrale die folgenden Identitäten gelten:

(a)
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad \mathrm{Re}(\alpha) > 0.$$

(b)
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2+\beta x}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}}, \quad \mathrm{Re}(\alpha) > 0.$$

Hinweis: Für den Fall (a) berechnen Sie zuerst das Quadrat des Integrals in Polarkoordinaten.

Lösung

(a) Berechnung des Integrals $I(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\, dx$

Zunächst betrachten wir das Quadrat des Integrals:

$$I(\alpha)^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\, dx\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha(x^2+y^2)}\, dx\, dy.$$

Wechseln wir nun in Polarkoordinaten:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad \text{und} \quad dx\, dy = r\, dr\, d\theta.$$

Damit erhalten wir:

$$I(\alpha)^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-\alpha r^2}\, r\, dr\, d\theta.$$

Das θ-Integral lässt sich direkt berechnen:

$$\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi.$$

Für das r-Integral führen wir die Substitution $u = \alpha r^2$ durch, woraus $du = 2\alpha r\, dr$ folgt, also:

$$r\, dr = \frac{du}{2\alpha}.$$

Somit:

$$\int_0^{\infty} r\, e^{-\alpha r^2}\, dr = \frac{1}{2\alpha}\int_0^{\infty} e^{-u}\, du = \frac{1}{2\alpha}.$$

Es ergibt sich:

$$I(\alpha)^2 = 2\pi \cdot \frac{1}{2\alpha} = \frac{\pi}{\alpha}.$$

Daraus folgt nach Wurzelziehung (und unter Beachtung, dass $I(\alpha) > 0$):

$$I(\alpha) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

(b) Berechnung des Integrals $J(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2 + \beta x}\, dx$

Wir schreiben zunächst den Exponenten um:

$$-\alpha x^2 + \beta x = -\alpha \left(x^2 - \frac{\beta}{\alpha} x \right).$$

Um das Quadrat zu vervollständigen, beachten wir:

$$x^2 - \frac{\beta}{\alpha} x = \left(x - \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta^2}{4\alpha^2}.$$

Somit kann der Exponent geschrieben werden als:

$$-\alpha x^2 + \beta x = -\alpha \left(x - \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 + \frac{\beta^2}{4\alpha}.$$

Einsetzen in das Integral liefert:

$$J(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha\left(x - \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{\beta^2}{4\alpha}}\, dx = e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha\left(x - \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2}\, dx.$$

Mit der Substitution $u = x - \frac{\beta}{2\alpha}$ (wobei $du = dx$) ändert sich das Integral zu:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha u^2}\, du,$$

welches nach (a) den Wert

$$\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

hat. Somit erhalten wir:

$$J(\alpha, \beta) = e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Zusammenfassung

$$\boxed{\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\, dx &= \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad \mathrm{Re}(\alpha) > 0, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2 + \beta x}\, dx &= \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}}, \quad \mathrm{Re}(\alpha) > 0. \end{aligned}}$$