Aufgabe H1.1: de-Broglie-Wellenlänge (3 Punkte)

Aufgabenstellung:

(a) Die Ionisationsenergie des Wasserstoffatoms im Grundzustand ist

$$E_{\text{ion}} = 13.6\,\text{eV}.$$

Berechnen Sie Frequenz, Wellenlänge und Wellenzahl für ionisierende elektromagnetische Strahlung.

(b) Leiten Sie den relativistischen, klassischen und ultrarelativistischen Ausdruck für die Abhängigkeit der de-Broglie-Wellenlänge von der kinetischen Energie E_{kin} her. Bestimmen Sie die de-Broglie-Wellenlänge für:

(i) ein Elektron mit $E_{\text{kin}} = 10\,\text{eV}$,

(ii) ein Elektron mit $E_{\text{kin}} = 1\,\text{GeV}$,

(iii) ein Higgs-Boson $\left(m_H = 125\,\text{GeV}/c^2\right)$ mit $E_{\text{kin}} = 1\,\text{GeV}$,

(iv) ein Staubkorn der Masse $1 \times 10^{-12}\,\text{kg}$ mit einer Geschwindigkeit von $1\,\text{m/s}$.

Gegeben:

$$e = -1.6 \times 10^{-19}\,\text{C}, \quad m_e = 511\,\text{keV}/c^2, \quad h = 4.14 \times 10^{-15}\,\text{eV} \cdot \text{s}.$$

Lösung

Teil (a): Ionisierende Strahlung

Die Energie eines Photons ist durch

$$E = h\nu$$

gegeben. Setzt man $E_{\text{ion}} = 13.6\,\text{eV}$ ein, so erhält man

$$\nu = \frac{E_{\text{ion}}}{h} = \frac{13.6\,\text{eV}}{4.14 \times 10^{-15}\,\text{eV} \cdot \text{s}} \approx 3.29 \times 10^{15}\,\text{Hz}.$$

Die Wellenlänge λ berechnet sich über

$$\lambda = \frac{c}{\nu},$$

wobei $c \approx 3 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$ die Lichtgeschwindigkeit ist:

$$\lambda = \frac{3 \times 10^8\,\mathrm{m/s}}{3.29 \times 10^{15}\,\mathrm{Hz}} \approx 9.11 \times 10^{-8}\,\mathrm{m} \quad (91\,\mathrm{nm}).$$

Die Wellenzahl k (als der Betragswert des Wellenvektors) ist definiert als

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Damit folgt:

$$k \approx \frac{2\pi}{9.11 \times 10^{-8}\,\mathrm{m}} \approx 6.89 \times 10^7\,\mathrm{m}^{-1}.$$

Teil (b): Herleitung der de-Broglie-Wellenlänge in Abhängigkeit von E_{kin}

Der de-Broglie Zusammenhang lautet

$$\lambda = \frac{h}{p},$$

wobei p der Impuls des Teilchens ist.

Relativistischer Fall

Die Energie-Impuls-Relation in der speziellen Relativitätstheorie lautet:

$$E^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2,$$

wobei die Gesamtenergie

$$E = E_{\mathrm{kin}} + m_0c^2.$$

Daraus folgt für den Impuls:

$$p = \frac{\sqrt{(E_{\mathrm{kin}} + m_0c^2)^2 - (m_0c^2)^2}}{c} = \frac{\sqrt{E_{\mathrm{kin}}^2 + 2m_0c^2\,E_{\mathrm{kin}}}}{c}.$$

Somit ist die de-Broglie-Wellenlänge

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{\sqrt{E_{\mathrm{kin}}^2 + 2m_0c^2\,E_{\mathrm{kin}}}}.$$

Klassischer (nicht-relativistischer) Fall

Für Teilchen, bei denen $E_{\mathrm{kin}} \ll m_0 c^2$ gilt, ist die klassische Beziehung

$$E_{\mathrm{kin}} = \frac{p^2}{2m_0},$$

also

$$p = \sqrt{2m_0 E_{\mathrm{kin}}}.$$

Dann folgt:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_0 E_{\mathrm{kin}}}}.$$

Ultrarelativistischer Fall

Im ultrarelativistischen Fall, bei dem $E_{\mathrm{kin}} \gg m_0 c^2$ (die Ruheenergie ist vernachlässigbar), gilt näherungsweise:

$$p \approx \frac{E_{\mathrm{kin}}}{c}.$$

Daraus folgt:

$$\lambda = \frac{h}{p} \approx \frac{hc}{E_{\mathrm{kin}}}.$$

Berechnung der de-Broglie-Wellenlänge für die gegebenen Fälle:

(i) Elektron mit $E_{\mathrm{kin}} = 10\,\mathrm{eV}$

Da $10\,\mathrm{eV} \ll m_e c^2 \approx 511\,\mathrm{keV}$ gilt, verwendet man den klassischen Ausdruck:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_e E_{\mathrm{kin}}}}.$$

Dabei ist zu beachten, dass

$$m_e = 511\,\mathrm{keV}/c^2 = 511 \times 10^3\,\mathrm{eV}/c^2.$$

Berechnen wir den Impuls:

$$p = \sqrt{2m_e E_{\mathrm{kin}}} = \sqrt{2 \cdot 511 \times 10^3\,\mathrm{eV}/c^2 \cdot 10\,\mathrm{eV}} = \sqrt{1.022 \times 10^7\,\mathrm{eV}^2/c^2} \approx \frac{3195\,\mathrm{eV}}{c}.$$

Damit folgt:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{4.14 \times 10^{-15}\,\mathrm{eV}\cdot\mathrm{s}}{3195\,\mathrm{eV}/c} = \frac{4.14 \times 10^{-15}\,\mathrm{eV}\cdot\mathrm{s}\cdot c}{3195\,\mathrm{eV}}.$$

Mit $c \approx 3 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$:

$$\lambda \approx \frac{4.14 \times 10^{-15} \cdot 3 \times 10^8}{3195}\,\mathrm{m} \approx 3.89 \times 10^{-10}\,\mathrm{m} \quad (\approx 0.389\,\mathrm{nm}).$$

(ii) Elektron mit $E_{\mathrm{kin}} = 1\,\mathrm{GeV}$

Hier gilt $E_{\mathrm{kin}} \gg m_e c^2$, sodass der ultrarelativistische Ausdruck verwendet wird:

$$\lambda \approx \frac{hc}{E_{\mathrm{kin}}}.$$

Einsetzen der Werte:

$$\lambda \approx \frac{4.14 \times 10^{-15}\,\mathrm{eV}\cdot\mathrm{s}\cdot 3 \times 10^8\,\mathrm{m/s}}{1 \times 10^9\,\mathrm{eV}} = \frac{1.242 \times 10^{-6}\,\mathrm{eV}\cdot\mathrm{m}}{1 \times 10^9\,\mathrm{eV}} \approx 1.242{\times}10^{-15}\,\mathrm{m}.$$

(iii) Higgs-Boson mit $m_H = 125\,\mathrm{GeV}/c^2$ und $E_{\mathrm{kin}} = 1\,\mathrm{GeV}$

Da für das Higgs-Boson $E_{\mathrm{kin}} \ll m_H c^2$ gilt, nutzen wir auch hier den klassischen Ausdruck:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2 m_H E_{\mathrm{kin}}}}.$$

Hierbei ist

$$m_H = 125\,\mathrm{GeV}/c^2 = 125 \times 10^9\,\mathrm{eV}/c^2.$$

Der Impuls beträgt:

$$p = \sqrt{2 m_H E_{\mathrm{kin}}} = \sqrt{2 \cdot 125 \times 10^9\,\mathrm{eV}/c^2 \cdot 1 \times 10^9\,\mathrm{eV}} = \sqrt{250 \times 10^{18}\,\mathrm{eV}^2/c^2}.$$

Da

$$\sqrt{2.5 \times 10^{20}} \approx 1.581 \times 10^{10}\,\mathrm{eV},$$

folgt

$$p \approx \frac{1.581 \times 10^{10}\,\mathrm{eV}}{c},$$

und somit

$$\lambda = \frac{h}{p} \approx \frac{4.14 \times 10^{-15}\,\mathrm{eV}\cdot\mathrm{s}\cdot c}{1.581 \times 10^{10}\,\mathrm{eV}} \approx \frac{1.242 \times 10^{-6}\,\mathrm{eV}\cdot\mathrm{m}}{1.581 \times 10^{10}\,\mathrm{eV}} \approx 7.86 \times 10^{-17}\,\mathrm{m}.$$

(iv) Staubkorn mit $m = 1 \times 10^{-12}\,\mathrm{kg}$ und $v = 1\,\mathrm{m/s}$

Da hier relativistische Effekte völlig vernachlässigbar sind, gilt:

$$\lambda = \frac{h}{mv}.$$

Hierbei verwenden wir den klassischen Planckschen Wirkungsquantum in SI-Einheiten:

$$h_{\mathrm{SI}} = 6.626 \times 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}.$$

Dann erhalten wir:

$$\lambda = \frac{6.626 \times 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}}{1 \times 10^{-12}\,\mathrm{kg} \cdot 1\,\mathrm{m/s}} = 6.626 \times 10^{-22}\,\mathrm{m}.$$

Zusammenfassung der Ergebnisse

- **(a) Ionisierende Strahlung:**

$$\begin{aligned} &\nu \approx 3.29 \times 10^{15}\,\mathrm{Hz}, \\ &\lambda \approx 9.11 \times 10^{-8}\,\mathrm{m} \quad (91\,\mathrm{nm}), \\ &k \approx 6.89 \times 10^{7}\,\mathrm{m}^{-1}. \end{aligned}$$

- **(b) de-Broglie-Wellenlängen:**
  - (i) Elektron ($E_{\mathrm{kin}} = 10\,\mathrm{eV}$): $\lambda \approx 3.89 \times 10^{-10}\,\mathrm{m}$.
  - (ii) Elektron ($E_{\mathrm{kin}} = 1\,\mathrm{GeV}$): $\lambda \approx 1.24 \times 10^{-15}\,\mathrm{m}$.
  - (iii) Higgs-Boson ($m_H = 125\,\mathrm{GeV}/c^2$, $E_{\mathrm{kin}} = 1\,\mathrm{GeV}$): $\lambda \approx 7.86 \times 10^{-17}\,\mathrm{m}$.
  - (iv) Staubkorn ($m = 1 \times 10^{-12}\,\mathrm{kg}$, $v = 1\,\mathrm{m/s}$): $\lambda \approx 6.63 \times 10^{-22}\,\mathrm{m}$.