Problème 5

Le programme OCaml suivant :

```
let f (x:int) = x+4 in
let g (y:int) = 3-y in
f(g(1))
```

peut être écrit comme l'expression du lambda calcul suivante :

$$\left(\underbrace{(\lambda f.\lambda g.f(g\ 1))}_{\text{main}} \underbrace{(\lambda x.x+4)}_{\text{f}} \right) \underbrace{(\lambda y.3-y)}_{\text{g}} .$$

Réduisez l'expression à une forme normale de deux manières différentes, comme décrit ci-dessous.

(a) Réduisez l'expression en choisissant, à chaque étape, la réduction qui élimine un λ le plus à *gauche* possible.

(b) Réduisez l'expression en choisissant, à chaque étape, la réduction qui élimine un λ le plus à *droite* possible.

Solutions au problème 5

1(*a*). $\Big((\lambda f.\lambda g.f(g\ 1))(\lambda x.x+4)\Big)(\lambda y.3-y) \rightarrow$
$\Big((\lambda g.(\lambda x.x+4)(g\ 1))\Big)(\lambda y.3-y) \rightarrow$
$(\lambda x.x+4)((\lambda y.3-y)\ 1) \rightarrow$
$((\lambda y.3-y)\ 1)+4 \rightarrow$
$(3-1)+4$

1(*b*). $\Big((\lambda f.\lambda g.f(g\ 1))(\lambda x.x+4)\Big)(\lambda y.3-y) \rightarrow$
$\Big((\lambda g.(\lambda x.x+4)(g\ 1))\Big)(\lambda y.3-y) \rightarrow$
$(\lambda g.(g\ 1)+4)(\lambda y.3-y) \rightarrow$
$((\lambda y.3-y)\ 1)+4 \rightarrow$
$(3-1)+4$

Notez que seules les réductions aux lignes 2 et 3 sont différentes.

Problème 6

Voici une expression du lambda calcul « sugared » (dans un forme que utilise du sucre syntaxique) qui utilise les déclarations « let » :

$$\begin{array}{l} \text{let } \mathit{compose} = \lambda f.\lambda g.\lambda x.f(g\ x) \text{ in} \\ \quad \text{let } h = \lambda x.x + x \text{ in} \\ \qquad \mathit{compose}\ h\ h\ 3 \end{array}$$

L'expression « desugared » (desugarisée, sans sucre syntaxique), obtenue lorsque chaque expression de la forme $\text{let } x = U \text{ in } V$ est remplacée par $(\lambda z.V)U$ est

$$\begin{array}{l} (\lambda \mathit{compose}. \\ \quad (\lambda h.\mathit{compose}\ h\ h\ 3)\ \lambda x.x + x) \\ \quad \lambda f.\lambda g.\lambda x.f(g\ x). \end{array}$$

Ceci est écrit en utilisant les mêmes noms de variables que ceux de la forme « let » pour faciliter la lecture de l'expression.

Simplifiez l'expression desugarisée en utilisant la β-réduction.

Assurez-vous de bien comprendre pourquoi l'expression simplifiée est la réponse attendue.

Solution au problème 6

Notez qu'il existe plusieurs séquences de réduction différentes. En voici un exemple.

$$
\begin{aligned}
&(\lambda compose.(\lambda h.compose\ h\ h\ 3)\ \lambda x.x + x)(\lambda f.\lambda g.\lambda x.f(g\ x)) \rightarrow \\
&(\lambda h.(\lambda f.\lambda g.\lambda x.f(g\ x))\ h\ h\ 3)\ \lambda x.x + x) \rightarrow \\
&(\lambda h.(\lambda g.\lambda x.h(g\ x))\ h\ 3)\ \lambda x.x + x) \rightarrow \\
&(\lambda h.(\lambda x.h(h\ x))\ 3)\ \lambda x.x + x) \rightarrow \\
&(\lambda h.h(h\ 3))\ \lambda x.x + x) \rightarrow \\
&(\lambda x.x + x)((\lambda x.x + x)\ 3) \rightarrow \\
&(\lambda x.x + x)(3 + 3) \rightarrow \\
&(3 + 3) + (3 + 3)
\end{aligned}
$$