Université d'Ottawa
Faculté de génie

École de science
d'informatique
et de génie électrique

uOttawa
L'Université canadienne
Canada's university

University of Ottawa
Faculty of Engineering

School of Electrical
Engineering
and Computer Science

Devoir 4
CSI2520 Paradigmes de programmation
Hiver 2019
A remettre le 2 Avril 2019 avant 23:00 sur le Campus Virtuel
[12 points]
L'Offre et la Demande

Dans ce devoir, nous étudions le problème classique de transport de biens vers des lieux où ils sont en demande. Supposons que nous disposons d'un certain nombre d'usines, situés en divers endroits et ayant chacune une certaine capacité de production. Les biens produits doivent être acheminés vers des entrepôts aussi situés un peu partout dans le monde et qui, en fonction de la demande, exige d'obtenir un certain nombre de biens. Ce problème se représente généralement à l'aide d'un tableau.

Demande ►	Entrepôt A 40	Entrepôt B 20	Entrepôt C 60	Production ▼
Usine 1	*($6)*	*($8)*	*($10)*	**30**
Usine 2	*($7)*	*($11)*	*($11)*	**40**
Usine 3	*($4)*	*($5)*	*($12)*	**50**

(coût de transport)

Ce tableau contient le nombre d'unités produites et demandées pour chaque usine et entrepôt. Les nombres entre parenthèses indiquent le coût de transport pour acheminer une unité à partir d'une usine vers un entrepôt. Le problème consiste donc à trouver combien de biens doivent être envoyés à chaque entrepôt à partir de chaque usine de façon à minimiser les coûts de transport. A noter que nous considérons ici que le cas où l'offre et la demande sont équilibrés.

Ce problème peut être résolu de différentes façons. Dans ce devoir, vous devez utiliser la solution décrite ici, et qui procède en deux étapes : i) la première étape consiste à trouver une solution initiale puis ii) en deuxième étape, la solution optimale est trouvée en améliorant itérativement la solution courante jusqu'à atteindre la solution optimale.

1. La méthode de la cellule à moindre coût (*minimum cell cost method*)

Le principe est simple, les biens sont d'abord attribués en passant par la route la moins couteuse. Dans l'exemple ci-haut, il s'agit de la route partant de l'usine 3 vers l'entrepôt A.

Demande ►	Entrepôt A 40	Entrepôt B 20	Entrepôt C 60	Production ▼
Usine 1	*(6)*	*(8)*	*(10)*	**30**
Usine 2	*(7)*	*(11)*	*(11)*	**40**
Usine 3	40 *(4)*	*(5)*	*(12)*	**50**

La prochaine attribution se fait en utilisant la route restante la moins coûteuse, sachant que l'usine 3 n'a plus que 10 unités disponibles.

Demande ►	Entrepôt A 40	Entrepôt B 20	Entrepôt C 60	Production ▼
Usine 1	*(6)*	*(8)*	*(10)*	**30**
Usine 2	*(7)*	*(11)*	*(11)*	**40**
Usine 3	40 *(4)*	10 *(5)*	*(12)*	**50**

Le processus se poursuit en identifiant la prochaine route de moindre coût en notant que l'entrepôt A a reçu tous les biens demandés (donc les cellules de la première colonne ne peuvent plus être utilisées) et que l'usine 3 a déjà acheminée tous ses biens (donc les cellules de la dernière rangée ne peuvent plus être utilisées). La prochaine attribution est donc :

Demande ►	Entrepôt A 40	Entrepôt B 20	Entrepôt C 60	Production ▼
Usine 1	*(6)*	10 *(8)*	*(10)*	**30**
Usine 2	*(7)*	*(11)*	*(11)*	**40**
Usine 3	40 *(4)*	10 *(5)*	*(12)*	**50**

Ce qui ne laisse que l'entrepôt C à satisfaire :

Demande ►	Entrepôt A 40	Entrepôt B 20	Entrepôt C 60	Production ▼
Usine 1	*(6)*	10 *(8)*	20 *(10)*	**30**
Usine 2	*(7)*	*(11)*	40 *(11)*	**40**
Usine 3	40 *(4)*	10 *(5)*	*(12)*	**50**

Lorsque tous les biens ont été ainsi acheminés, une première solution est trouvée. Cette solution n'est toutefois pas optimale. Certaines routes ne sont en effet pas utilisées. La seconde étape consiste donc à déterminer si le recours à ces routes non-utilisées permettrait de diminuer le coût total de transport.

2. La méthode des pas chinois (*stepping-stone solution method*)

Afin de déterminer si une route non-utilisée serait plus avantageuse, il faut en calculer son coût d'utilisation. Considérons donc d'abord la route 1-A de la solution précédente et calculons ce qu'il en couterait de transporter une unité par cette route. Si une unité devait être acheminée par cette route en partance de l'usine 1 vers l'entrepôt A, il faudrait alors retirer une unité partant de l'usine 1 vers un autre entrepôt (soit B ou C), puisque l'usine 1 ne produit que 30 unités. Retirons donc une unité de la route 1-B. Cela signifie alors que l'entrepôt B perd une unité qui devra être acheminé par une autre route, disons 3-B. Afin de respecter les contraintes de production de l'usine 3, il faut alors retirer une unité à la route 3-A. Et puisque nous avions ajouté une unité à l'entrepôt A, nous voilà donc à nouveau en équilibre. Le ré-acheminement d'une unité telle que décrit se représente ainsi sur notre tableau :

Demande ►	**Entrepôt A 40**	**Entrepôt B 20**	**Entrepôt C 60**	**Production ▼**
Usine 1	**+1** *(6)*	**-1** 10 *(8)*	20 *(10)*	**30**
Usine 2	*(7)*	*(11)*	40 *(11)*	**40**
Usine 3	**-1** 40 *(4)*	**+1** 10 *(5)*	*(12)*	**50**

Ce qui permet de calculer le coût de ce ré-acheminement de cette unité : +6-8+5-4= -1. Ce qui veut dire que nous épargnons $1 pour chaque unité redirigé par cette route. Le 'coût marginal' de la route 1-A est donc de -1 en considérant la solution courante.

Formellement, le coût marginal d'une route non-utilisée se calcule ainsi : partant d'une cellule vide, il faut sauter à une cellule non-vide sur la même rangée. De cette cellule, on se déplace alors vers une cellule non-vide de la même colonne, puis vers une cellule non-vide de la même rangée et ainsi de suite jusqu'à retomber sur la cellule vide de départ et ce sans jamais atterrir deux fois sur la même cellule. Le coût se calcule alors en alternant les soustractions et les additions le long du parcours.

Calculons maintenant le coût marginal de la cellule 2-A, pour le transport d’une unité. La séquence est cette fois un peu plus complexe : 2-A, 2-C, 1-C, 1-B, 3-B, 3-A, 2-A.

Demande ►	**Entrepôt A 40**	**Entrepôt B 20**	**Entrepôt C 60**	**Production ▼**
Usine 1	*(6)*	**-1** 10 *(8)*	**+1** 20 *(10)*	**30**
Usine 2	**+1** *(7)*	*(11)*	**-1** 40 *(11)*	**40**
Usine 3	**-1** 40 *(4)*	**+1** 10 *(5)*	*(12)*	**50**

Ce qui donne le coût marginal suivant : +7-11+10-8+5-4= -1, c’est-à-dire le même coût que précédemment, donc ces deux routes sont également avantageuse. Explorons maintenant la route 2-B :

Demande ►	**Entrepôt A 40**	**Entrepôt B 20**	**Entrepôt C 60**	**Production ▼**
Usine 1	*(6)*	**-1** 0 *(8)*	**+1** 20 *(10)*	**30**
Usine 2	*(7)*	**+1** *(11)*	**-1** 40 *(11)*	**40**
Usine 3	40 *(4)*	10 *(5)*	*(12)*	**50**

Son coût marginal est +11-11+10-8= +2. Cette route est plus couteuse, elle ne sera donc pas considérée. La dernière route non-utilisée est la route 3-C.

Demande ►	**Entrepôt A 40**	**Entrepôt B 20**	**Entrepôt C 60**	**Production ▼**
Usine 1	*(6)*	**+1** 10 *(8)*	**-1** 0 *(10)*	**30**
Usine 2	*(7)*	*(11)*	40 *(11)*	**40**
Usine 3	40 *(4)*	**-1** 10 *(5)*	**+1** *(12)*	**50**

Son coût marginal est +12-10+8-5= 5. Donc seules les deux premières routes sont avantageuses, il faut donc prendre l’une d’elle, par exemple 1-A (si ces routes à coût négatif n’étaient pas égales, il faudrait bien sur considérer celle entrainant la plus forte réduction de coût). Il faut alors acheminer un maximum d’unités par cette route:

Demande ►	Entrepôt A 40	Entrepôt B 20	Entrepôt C 60	Production ▼
Usine 1	10 *(6)*	*(8)*	20 *(10)*	**30**
Usine 2	*(7)*	*(11)*	40 *(11)*	**40**
Usine 3	30 *(4)*	20 *(5)*	*(12)*	**50**

Voici donc une solution moins couteuse que celle initialement trouvée. Il faut alors recommencer la même procédure à partir des cellules vides présente et ce jusqu'à ce qu'aucune nouvelle route n'entraine une économie de transport.