TP3 - Leak

2 Exercices

Exercice 1.
Démontrez avec un preuve formelle que $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$ est une tautologie.

Solution

1	P	supposition
2	Q	supposition
3	P	(1)
4	$Q \Rightarrow P$	thm déduction (2-3)
5	$P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$	thm déduction (1-4)

Exercice 2.
Une formule propositionelle est en *forme normale disjonctive* si elle est composée de disjonctions de conjonctions de literaux, cet-à-dire, elle est de la forme

$$\bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{m} L_{ij}$$

où L_{ij} sont des literaux.

1. Quel est l'avantage d'une formule en forme normale disjonctive ?
2. Comment peut-on faire pour automatiser la transformation d'une table de vérité en une formule qui possède la même table de vérité ?
3. Est-ce que toute formule propositionelle peut s'écrire en forme normale disjonctive ?

Solution

1. On peut facilement trouver un modèle, il suffit de satisfaire une des conjonctions.
2. Pour chaque ligne qui rends la formule vraie on construit une conjonction avec un literal positive pour chaque T et un negatif pour chaque F. Après on prends la disjonction de tous.

   Example :

p	q			
T	T	T	$\rightarrow$	$(p \wedge q)$
T	F	F		
F	T	T	$\rightarrow$	$(\neg p \wedge q)$
F	F	F		

$$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q)$$

3. Oui par le point 2.

Exercice 3.
Metez les formules suivantes en forme normale conjonctive.

1. $p \oplus q$
2. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$
3. $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$
4. $(p \wedge q \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge q \wedge s)$
5. $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r$
6. $(a_1 \wedge b_1) \vee (a_2 \wedge b_2) \vee \ldots \vee (a_n \wedge b_n)$

Solution

1.

p	q	$p \oplus q$	$((p \vee q)$	$\wedge$	$\neg$	$(p \wedge q))$
T	T	F	T	F	F	T
T	F	T	T	T	T	F
F	T	T	T	T	T	F
F	F	F	F	F	T	F

$$p \oplus q \Longleftrightarrow (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q) \Longleftrightarrow (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$$

2.

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow r \Longleftrightarrow \neg(p \Rightarrow q) \vee r \Longleftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \vee r \Longleftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee r \Longleftrightarrow (p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$$

3.

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \Longleftrightarrow \neg p \vee (q \Rightarrow r) \Longleftrightarrow \neg p \vee (\neg q \vee r) \Longleftrightarrow \neg p \vee \neg q \vee r$$

4.
$$(a+b+c)*(e+f+g) = ae+af+ag+be+bf+bg+ce+cf+cg$$

$$\begin{aligned}
(p \wedge q \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge q \wedge s) \Longleftrightarrow \\
(p \vee \neg p) \wedge (p \vee q) \wedge (p \vee s) \wedge \\
(q \vee \neg p) \wedge (q \vee q) \wedge (q \vee s) \wedge \\
(\neg s \vee \neg p) \wedge (\neg s \vee q) \wedge (\neg s \vee s) \Longleftrightarrow \\
(p \vee q) \wedge (p \vee s) \wedge (q \vee \neg p) \wedge q \wedge (q \vee s) \wedge (\neg s \vee \neg p) \wedge (\neg s \vee q)
\end{aligned}$$

5. On a que

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r \Longleftrightarrow ((p \Leftrightarrow q) \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow (p \Leftrightarrow q))$$

On va faire les deux parties séparément :

$$\begin{aligned}
(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow r \Longleftrightarrow \neg(p \Leftrightarrow q) \vee r \Longleftrightarrow (p \oplus q) \vee r \Longleftrightarrow \\
[(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)] \vee r \Longleftrightarrow (p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
r \Rightarrow (p \Leftrightarrow q) \Longleftrightarrow \neg r \vee (p \Leftrightarrow q) \Longleftrightarrow \neg r \vee ((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)) \Longleftrightarrow \\
\neg r \vee (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \Longleftrightarrow \\
(\neg r \vee p \vee \neg p) \wedge (\neg r \vee p \vee \neg q) \wedge (\neg r \vee q \vee \neg p) \wedge (\neg r \vee q \vee \neg q) \Longleftrightarrow \\
\mathbf{true} \wedge (\neg r \vee p \vee \neg q) \wedge (\neg r \vee q \vee \neg p) \wedge \mathbf{true} \Longleftrightarrow \\
(\neg r \vee p \vee \neg q) \wedge (\neg r \vee q \vee \neg p)
\end{aligned}$$

Donc

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r \Longleftrightarrow (p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee p \vee \neg q) \wedge (\neg r \vee q \vee \neg p)$$

6.

$$\begin{aligned}
(a_1 \wedge b_1) \vee (a_2 \wedge b_2) \vee \ldots \vee (a_n \wedge b_n) \Longleftrightarrow \\
(a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_{n-1} \vee A_n) \wedge \\
(a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_{n-1} \vee b_n) \wedge \\
\ldots \wedge \\
(b_1 \vee b_2 \vee \ldots \vee b_{n-1} \vee b_n) \wedge
\end{aligned}$$

Contien 2^n clauses chacune contien soit a_i soit b_i a la position i.

Exercice 4.
Montrez que la règle d'inférence suivante est valide :

$$\begin{array}{l} p \\ p \Leftrightarrow q \\ \hline q \end{array}$$

Solution

1	p	prémisse
2	$p \Leftrightarrow q$	prémisse
3	$p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p$	loi de l'équivalence (2)
4	$p \Rightarrow q$	simplification (3)
5	q	modus ponens (1, 4)

Exercice 5.
Montrez que la règle d'inférence suivante est valide :

$$\begin{array}{l} \neg p \\ p \Leftrightarrow q \\ \hline \neg q \end{array}$$

Solution

1	$\neg p$	prémisse
2	$p \Leftrightarrow q$	prémisse
3	$p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p$	loi de l'équivalence (2)
4	$q \Rightarrow p$	simplification (3)
5	$\neg q$	modus tollens (1, 4)

Exercice 6.

Montrez avec une preuve formelle que la règle d'inférence suivante est valide :

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ p \Rightarrow r \\ \underline{q \Rightarrow r} \\ r \end{array}$$

Solution

1	$p \vee q$	prémisse
2	$p \Rightarrow r$	prémisse
3	$q \Rightarrow r$	prémisse
4	$\quad \neg(p \vee q \Rightarrow r)$	supposition
5	$\quad \neg(\neg(p \vee q) \vee r)$	loi de l'implication (4)
6	$\quad \neg((\neg p \wedge \neg q) \vee r)$	De Morgan (5)
7	$\quad (\neg\neg p \vee \neg\neg q) \wedge \neg r$	De Morgan (6)
8	$\quad (p \vee q) \wedge \neg r$	2x double négation (7)
9	$\quad \neg r$	simplification (8)
10	$\quad \neg p$	modus tollens (9, 2)
11	$\quad \neg q$	modus tollens (9, 3)
12	$\quad \neg p \wedge \neg q$	conjonction (10, 11)
13	$\quad \neg(p \vee q)$	De Morgan (12)
14	$\quad p \vee q$	simplification (8))
15	$\neg\neg(p \vee q \Rightarrow r)$	réduction a l'absurde (4-14)
16	$p \vee q \Rightarrow r$	double négation (15)
17	r	modus ponens (1, 15)

Exercice 7.

Montrez avec une preuve formelle que $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r, p \vdash q \Leftrightarrow r$

Solution

1	$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r$	prémisse
2	p	prémisse
3	$\neg(q \Rightarrow r)$	supposition
4	$\neg(\neg q \vee r)$	loi de l'implication (3)
5	$q \wedge \neg r$	De Morgan + double négation (4)
6	$\neg r$	simplification (5)
7	$\neg(p \Leftrightarrow q)$	exercice 5 (1, 6)
8	$\neg(p \Rightarrow q) \vee \neg(q \Rightarrow p)$	De Morgen + loi de l'équivalence (7)
9	$\neg(p \Rightarrow q)$	supposition
10	$p \wedge \neg q$	loi de l'implication + De Morgan + double négation (9)
11	$\neg q$	simplification (10)
12	q	simplification (5)
13	$p \Rightarrow q$	réduction a l'absurde + double négation (9-12)
14	$\neg(q \Rightarrow p)$	syllogisme disjoint (8, 13)
15	$q \wedge \neg p$	loi de l'implication + De Morgan + double négation (14)
16	$\neg p$	simplification (15)
17	$q \Rightarrow r$	réduction a l'absurde + double négation (3-16)
18	$\neg(r \Rightarrow q)$	supposition
19	$r \wedge \neg q$	loi de l'implication + De Morgan + double négation (18)
20	r	simplification (19)
21	$p \Leftrightarrow q$	exercice 4 (20, 1)
22	q	exercice 4 (21, 2)
23	$\neg q$	simplification (19)
24	$r \Rightarrow q$	réduction a l'absurde + double négation (18-22)
25	$(q \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow q)$	conjonction (17, 24)
26	$q \Leftrightarrow r$	loi de l'équivalence (25)