第四章：形式谓词演算

沈榆平
yuping.shen.ilc@gmail.com

中山大学逻辑与认知研究所
2015年11月

形式系统$K_{\mathscr{L}}$

形式系统$K_{\mathscr{L}}$

由于语言$\mathscr{L}$的定义已给出，下面只给出系统公理：

- $(K1)$ $(\mathscr{A} \to (\mathscr{B} \to \mathscr{A}))$
- $(K2)$ $(\mathscr{A} \to (\mathscr{B} \to \mathscr{C})) \to ((\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to (\mathscr{A} \to \mathscr{C}))$
- $(K3)$ $(\sim \mathscr{A} \to \sim \mathscr{B}) \to (\mathscr{B} \to \mathscr{A})$
- $(K4)$ $((\forall x_i)\mathscr{A} \to \mathscr{A})$，如果$x_i$在$\mathscr{A}$中不自由出现。
- $(K5)$ $((\forall x_i)\mathscr{A}(x_i) \to \mathscr{A}(x_i/t))$，如果$\mathscr{A}(x_i)$是$\mathscr{L}$的一个公式，$t$是$\mathscr{L}$的一个项，且对$\mathscr{A}(x_i)$中的$x_i$替换自由。
- $(K6)$ $(\forall x_i)(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to (\mathscr{A} \to (\forall x_i)\mathscr{B})$，如果$x_i$不在$\mathscr{A}$中自由出现。

及推理规则：

- (1) MP规则。从$\mathscr{A}$，$\mathscr{A} \to \mathscr{B}$可演绎出$\mathscr{B}$。
- (2) 概括规则。从$\mathscr{A}$可演绎出$(\forall x_i)\mathscr{A}$。

形式系统$K_{\mathscr{L}}$

讨论

- $(K1-6)$都是公理模式，每一条都代表无数条公理。
- 不难看出$K_{\mathscr{L}}$实质上是$\mathscr{L}$的一个扩充。
- 事实上，无论x_i是否在公式$\mathscr{A}$中自由出现，我们总有$(\forall x_i)\mathscr{A} \to \mathscr{A}$。如是，则据(K5)，把$t$看成是$x_i$即可得。如否，则据(K4)直接可得。

公理实例

- $(\forall x_2)(\forall x_2)(B_1^1(x_2)) \to (\forall x_2)(B_1^1(x_2))$ 是(K4)，(K5)的实例
- $(\forall x_2)B_1^1(x_2) \to B_1^1(x_2)$ 不是 (K4)的实例，因x_2在$B_1^1(x_2)$中自由出现，但它是(K5)的实例
- $(\forall x_1)(B_1^1(x_2) \to B_2^1(x_1)) \to (B_1^1(x_2) \to (\forall x_1)B_2^1(x_1))$是(K6)的实例

形式系统$K_{\mathscr{L}}$

定义

形式系统$K_{\mathscr{L}}$的一个**证明**是一个有穷公式序列$\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n$，使得对于每一个$i, (1 \leq i \leq n)$，$\mathscr{A}_i$要么是$K_{\mathscr{L}}$的一个公理，要么是由$\mathscr{A}_i$之前的公式通过分离规则或者概括规则得到的。
如果Γ是$K_{\mathscr{L}}$的一个公式集，在$K_{\mathscr{L}}$中从Γ出发的**演绎**，是一个如上定义的序列，但其中可包括Γ的成员。
一个公式$\mathscr{A}$是$K_{\mathscr{L}}$的**定理**，如果它是$K_{\mathscr{L}}$中一个证明的最后一个公式。
一个公式$\mathscr{A}$是$K_{\mathscr{L}}$中Γ的**后承**，如果它是$K_{\mathscr{L}}$中从Γ出发的一个演绎的最后一个公式。
我们用$\vdash_{K_{\mathscr{L}}} \mathscr{A}$表示$\mathscr{A}$是$K_{\mathscr{L}}$的定理。$\Gamma \vdash_{K_{\mathscr{L}}} \mathscr{A}$表示$\mathscr{A}$是$K_{\mathscr{L}}$中从$\Gamma$出发的一条推论。

为方便，在以后的叙述中我们将用K代替$K_{\mathscr{L}}$。

形式系统$K_{\mathscr{L}}$

命题4.3

如果$\mathscr{A}$是$\mathscr{L}$的一个公式，且$\mathscr{A}$是一个重言式，那么$\mathscr{A}$是K的一条定理。

注意

这个命题的逆命题不成立。如$(\forall x_1)A_1^1(x_1) \to (\exists x_1)A_1^1(x_1)$，是$K$的定理，但不是重言式。

证明

$\mathscr{L}$的公式是重言式，如果存在一个L的重言式$\mathscr{A}_0$，把其中命题变元代入相应的$\mathscr{L}$公式得到$\mathscr{A}$。令$\mathscr{A}$是$\mathscr{L}$的重言式，且令$\mathscr{A}_0$是L中相应的公式。因$\mathscr{A}_0$是重言式，那么$\vdash_L \mathscr{A}_0$。而这个证明过程可以简单地转换成一个$\mathscr{L}$中的证明。只需把相应的命题变元换成$\mathscr{L}$中的对应的公式就可。这是因为K与L共享了公理模式(L1-3) 且一样有分离规则。所以有$\vdash_K \mathscr{A}$。

形式系统$K_{\mathscr{L}}$

我们在学习L系统时已知道，(L1-3)实质都是重言式。类似地，我们证明$K(4-6)$都是逻辑有效的。

命题4.4

公理模式$(K4),(K5),(K6)$的一切实例都是逻辑有效的。

证明

对(K4)，令v为某个$\mathscr{L}$中的解释I的一个赋值且满足$(\forall x_i)\mathscr{A}$。那么每个与vi等价的赋值v'都满足$\mathscr{A}$，v自己也满足$\mathscr{A}$，因它与自己i等价。因此I上每个赋值都满足$((\forall x_i)\mathscr{A} \to \mathscr{A})$，因此$I \models ((\forall x_i)\mathscr{A} \to \mathscr{A})$。又因我们对$I$无任何限制，所以$((\forall x_i)\mathscr{A} \to \mathscr{A})$是逻辑有效的。

形式系统$K_{\mathscr{L}}$

证明

对(K5)，令t对$\mathscr{A}(x_i)$中的x_i替换自由，且令v是某个解释I上的赋值。如果v不满足$(\forall x_i)\mathscr{A}(x_i)$，那么$v$满足$(\forall x_i)\mathscr{A}(x_i) \to \mathscr{A}(x_i/t)$。再设$v$满足$(\forall x_i)\mathscr{A}(x_i)$，那么每个与$v$ i等价的赋值满足$\mathscr{A}(x_i)$，特别地，存在一个这样的赋值v'，$v'(x_i) = v(x_i/t)$。据命题3.23，有v满足$\mathscr{A}(x_i/t)$。所以每一个I中的赋值都满足$(\forall x_i)\mathscr{A}(x_i) \to \mathscr{A}(x_i/t)$ 。又因我们没对I作任何限制，所以对任何解释I都有$I \models (\forall x_i)\mathscr{A}(x_i) \to \mathscr{A}(x_i/t)$，即$(\forall x_i)\mathscr{A}(x_i) \to \mathscr{A}(x_i/t)$是逻辑有效的。

形式系统$K_{\mathscr{L}}$

证明

对(K6)，令$\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$为$\mathscr{L}$的公式。设x_i在$\mathscr{A}$中没有自由出现。令v为某个解释I下的赋值。设v满足$(\forall x_i)(\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B})$。那么每一个与$v$ i等价的赋值w满足$(\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B})$。那么$w$要么不满足$\mathscr{A}$，要么满足$\mathscr{B}$。如果$w$不满足$\mathscr{A}$，那么所有这样的$w$都不满足$\mathscr{A}$，包括$v$自己在内。因为$x_i$不在$\mathscr{A}$中自由出现(命题3.33)。所以：

- 要么v不满足$\mathscr{A}$
- 要么每个与v i等价的w都满足$\mathscr{B}$，即
- 要么v不满足$\mathscr{A}$要么v满足$(\forall x_i)\mathscr{B}$。

也就是v满足$(\mathscr{A} \rightarrow (\forall x_i)\mathscr{B})$。所以每个$I$上的赋值满足$(\forall x_i)(\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}) \rightarrow (\mathscr{A} \rightarrow (\forall x_i)\mathscr{B})$，它是逻辑有效的。

形式系统$K_{\mathscr{L}}$

命题4.5（K的可靠性定理）

对于任何$\mathscr{L}$中的公式$\mathscr{A}$，如果$\vdash_K \mathscr{A}$，那么$\mathscr{A}$是逻辑有效的。

证明

对$\mathscr{A}$的证明长度施归纳。基础步：证明长度为1。此时$\mathscr{A}$是一个公理。而K的每条公理都是逻辑有效的。归纳步：设证明长度为$n > 1$，且所有证明步数小于n的定理都是逻辑有效的。$\mathscr{A}$要么是一个公理，要么是由分离或者概括规则得到的。公理都是逻辑有效的。如果$\mathscr{A}$由分离规则应用在$\mathscr{B} \to \mathscr{A}$上得到，那么由于$\mathscr{B}$与$\mathscr{B} \to \mathscr{A}$的证明长度都小于$n$，据归纳假设它们都是逻辑有效的。由注记3.36(a)可知$\mathscr{A}$也是逻辑有效的。如果$\mathscr{A}$通过概括规则应用在$\mathscr{C}$上得到，按归纳假设$\mathscr{C}$逻辑有效，据注记3.36(b)，$(\forall x_i)\mathscr{C}$，即$\mathscr{A}$也是逻辑有效的。

形式系统$K_{\mathscr{L}}$

引理4.6（K的一致性定理）

系统K是一致的，即没有公式$\mathscr{A}$使得$\mathscr{A}$与$\sim\mathscr{A}$都是K的定理。

证明

假设对某个公式$\mathscr{A}$有$\vdash_K \mathscr{A}$及$\vdash_K \sim\mathscr{A}$。那么据命题4.5，$\mathscr{A}$与$\sim\mathscr{A}$都是逻辑有效的。也意味着$\mathscr{A}$与$\sim\mathscr{A}$在任何解释下都真。这和注记3.25(c)是矛盾的，所以K必为一致的。

形式系统$K_{\mathscr{L}}$

讨论

在L中，如果$\mathscr{B} \vdash_L \mathscr{A}$，那么$\vdash_L \mathscr{B} \to \mathscr{A}$。这是$L$中的演绎定理。那么在$K$中也有对任意的$\mathscr{B} \vdash_K \mathscr{A}$，那么$\vdash_K \mathscr{B} \to \mathscr{A}$吗？答案是否定的。

例子

据概括原则我们知道，在K中，对任何公式$\mathscr{A}$，都有$\mathscr{A} \vdash_K (\forall x_i)\mathscr{A}$。但$\vdash_K \mathscr{A} \to (\forall x_i)\mathscr{A}$有可能不成立。考虑一个解释$I$，论域为整数集$Z$，$\bar{A}_1^1$表示谓词"$=0$"。那么$A_1^1(x_1)$直觉意义为$x_1 = 0$，显然存在一些赋值$v$满足$A_1^1(x_1)$，不过任何与$v$1等价的$v'$但$v'(x_1) \neq v(x_1)$的赋值将不满足$A_1^1(x_1)$。所以$v$不满足$\forall(x_1)A_1^1(x_1)$。$A_1^1(x_1) \to (\forall x_1)A_1^1(x_1)$不是逻辑有效式。

出现这种情况一个原因是这个演绎从一个非逻辑有效式出发。

形式系统$K_{\mathscr{L}}$

讨论

上面的例子对应着以下演绎：

(1)	$A_1^1(x_1)$	假设(非逻辑有效式)
(2)	$(\forall x_1)A_1^1(x_1)$	(1)概括

则有$A_1^1(x_1) \vdash_K (\forall x_1)A_1^1(x_1)$，但可观察到$\vdash_K A_1^1(x_1) \to (\forall x_1)A_1^1(x_1)$不成立。

形式系统$K_{\mathscr{L}}$

讨论

再考虑从逻辑有效式出发的一个演绎：

$$\begin{array}{lll} (1) & A_1^1(x_1) \to A_1^1(x_1) & \text{假设(逻辑有效式)} \\ (2) & (\forall x_1)(A_1^1(x_1) \to A_1^1(x_1)) & \text{(1)概括} \end{array}$$

有$A_1^1(x_1) \to A_1^1(x_1) \vdash_K (\forall x_1)(A_1^1(x_1) \to A_1^1(x_1))$，
$\vdash_K (A_1^1(x_1) \to A_1^1(x_1)) \to (\forall x_1)(A_1^1(x_1) \to A_1^1(x_1))$成立。

事实上，从任意的逻辑有效式出发，都可以直接应用(命题演算意义上的)演绎定理。可见问题并不是出现在概括原则上，而是在演绎前提的非逻辑有效性上。

形式系统$K_{\mathscr{L}}$

问题

是否从非逻辑有效公式出发的演绎，都不能使用演绎定理？答案是否定的。

例子

(1)	$(\forall x)(\forall y)A_1^2(x,y)$	假设(非逻辑有效)
(2)	$(\forall x)(\forall y)A_1^2(x,y) \to (\forall y)A_1^2(x,y)$	$(K5)$
(3)	$(\forall y)A_1^2(x,y) \to A_1^2(x,y)$	$(K5)$
(4)	$A_1^2(x,y)$	(1)(2)(3)MP
(5)	$(\forall y)(\forall x)A_1^2(x,y)$	(4)概括两次

则有$(\forall x)(\forall y)A_1^2(x,y) \vdash_K (\forall y)(\forall x)A_1^2(x,y)$，$\vdash_K (\forall x)(\forall y)A_1^2(x,y) \to (\forall y)(\forall x)A_1^2(x,y)$也成立。

形式系统$K_{\mathscr{L}}$

问题

在什么条件下，可以直接应用(命题演算意义上的)演绎定理呢？一个可行的条件是：**对演绎前提中出现的任何自由变元，不能应用概括原则。**

例子

(1)	$P_1^1(x)$	假设(非逻辑有效，有自由变元)
(2)	$(\forall y)A_1^1(y) \to (\exists y)A_1^1(y)$	已证

则有$P_1^1(x) \vdash_K (\forall y)A_1^1(y) \to (\exists y)A_1^1(y)$，$\vdash_K P_1^1(x) \to (\forall y)A_1^1(y) \to (\exists y)A_1^1(y)$成立。在这个公式中，后件是逻辑有效的，所以整个公式逻辑有效。

形式系统$K_{\mathscr{L}}$

讨论

- 请考虑，如果公式$\mathscr{A} \to \mathscr{B}$中，$\mathscr{A}$不是逻辑有效的，那么$\mathscr{A} \to \mathscr{B}$是否逻辑有效？答案是**不一定**。有可能存在一个解释下的赋值v，v满足$\mathscr{A}$但不满足$\mathscr{B}$。在命题演算中，若$\mathscr{A}$是永假式，则$\mathscr{A} \to \mathscr{B}$ 必是永真式。
- 令$\mathscr{A}$为矛盾式，则$\sim \mathscr{A}$肯定是逻辑有效式，反之亦然。要证明一个公式$\mathscr{A}$是逻辑有效式，可以通过证明$\sim \mathscr{A}$的Skolem化公式是矛盾式而得到。

形式系统$K_{\mathscr{L}}$

系统K的演绎定理

令$\mathscr{A}$与$\mathscr{B}$为$\mathscr{L}$中的公式，Γ为一个$\mathscr{L}$(可能为空)的公式集。如果$\Gamma \cup \{\mathscr{A}\} \vdash_K \mathscr{B}$，并且演绎过程中没有对$\mathscr{A}$中自由出现的任何变元施加概括规则。那么$\Gamma \vdash_K \mathscr{A} \to \mathscr{B}$。

证明

施归纳于从$\Gamma \cup \{\mathscr{A}\}$到$\mathscr{B}$的演绎长度$n$。基始步，$n = 1$。$\mathscr{B}$要么是一个公理，要么是$\mathscr{A}$，要么是$\Gamma$中的一个公式。我们可以像系统$L$中的证明那样得到$\Gamma \vdash_L \mathscr{A} \to \mathscr{B}$。
归纳步，设$n > 1$。假设如果$\mathscr{F}$是一个可从$\Gamma \cup \{\mathscr{A}\}$出发，且没有对$\mathscr{A}$中的任何自由变元应用概括规则就演绎得到的长度小于$n$的公式，那么$\Gamma \vdash_K (\mathscr{A} \to \mathscr{F})$。情形1：$\mathscr{B}$是一个公理，或者是$\mathscr{A}$，或者是$\Gamma$的一个成员，或者是演绎中通过先前得到的公式应用MP规则得到的，那么证明与L中一样。

形式系统$K_{\mathscr{L}}$

证明

情形2：$\mathscr{B}$从一个演绎中之前得到的公式通过应用概括规则得到。那么$\mathscr{B}$形如$(\forall x_i)\mathscr{C}$，且$\mathscr{C}$出现在之前的演绎过程中。
则$\Gamma \cup \{\mathscr{A}\} \vdash_K \mathscr{C}$且此演绎过程长度小于$n$。据归纳假设，及没有对任何$\mathscr{A}$中的自由变元应用过概括规则，所以
有$\Gamma \vdash_K (\mathscr{A} \to \mathscr{C})$。注意到$x_i$也不可能在$\mathscr{A}$中自由出现，因为在从$\Gamma \cup \{\mathscr{A}\}$到$\mathscr{B}$的演绎过程中，在$x_i$上应用了概括规则。所以我们有一个如下从$\Gamma$到$(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$的演绎：

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & \cdots \\ \vdots & \cdots \\ (k) & (\mathscr{A} \to \mathscr{C}) \end{array}\right\} \text{从}\Gamma\text{到}(\mathscr{A} \to \mathscr{C})\text{的演绎}$$

形式系统$K_{\mathscr{L}}$

证明

$$
\begin{array}{lll}
(k+1) & (\forall x_i)(\mathscr{A} \to \mathscr{C}) & (k),\text{概括规则} \\
(k+2) & (\forall x_i)(\mathscr{A} \to \mathscr{C}) \to (\mathscr{A} \to (\forall x_i)\mathscr{C}) & (K6) \\
(k+3) & (\mathscr{A} \to (\forall x_i)\mathscr{C}) & (k+1),(k+2),MP
\end{array}
$$

得$\Gamma \vdash_K (\mathscr{A} \to \mathscr{B})$。证毕。

推论4.9

若$\Gamma \cup \{\mathscr{A}\} \vdash_K \mathscr{B}$且$\mathscr{A}$为闭公式，则$\Gamma \vdash_K (\mathscr{A} \to \mathscr{B})$。

推论4.10

对于公式$\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{C}$，有$\{(\mathscr{A} \to \mathscr{B}),(\mathscr{B} \to \mathscr{C})\} \vdash_K \mathscr{A} \to \mathscr{C}$。

形式系统$K_{\mathscr{L}}$

命题4.11

假设公式$\mathscr{A},\mathscr{B}$是$\mathscr{L}$的公式，Γ是$\mathscr{L}$的公式集且$\Gamma\vdash_K(\mathscr{A}\to\mathscr{B})$，那么$\Gamma\cup\{\mathscr{A}\}\vdash_K\mathscr{B}$。

例子

如果x_i不在$\mathscr{A}$中自由出现，那么$\vdash_K(\mathscr{A}\to(\forall x_i)\mathscr{B})\to((\forall x_i)(\mathscr{A}\to\mathscr{B}))$。

$$
\begin{array}{llll}
(1) & \mathscr{A}\to(\forall x_i)\mathscr{B} & \text{假设} \\
(2) & (\forall x_i)\mathscr{B}\to\mathscr{B} & (K4)\text{或}(K5) \\
(3) & \mathscr{A}\to\mathscr{B} & (1),(2)HS \\
(4) & (\forall x_i)(\mathscr{A}\to\mathscr{B}) & (3)\text{概括}
\end{array}
$$

x_i不在$(\mathscr{A}\to(\forall x_i)\mathscr{B})$中自由出现，应用演绎定理得：$\vdash_K(\mathscr{A}\to(\forall x_i)\mathscr{B})\to(\forall x_i)(\mathscr{A}\to\mathscr{B})$

形式系统$K_{\mathscr{L}}$

例子

对任意$\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\vdash_K (\forall x_i)(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to ((\exists x_i)\mathscr{A} \to (\exists x_i)\mathscr{B})$

(1)	$(\forall x_i)(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$	假设
(2)	$(\forall x_i)(\sim \mathscr{B})$	假设
(3)	$(\forall x_i)(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to (\mathscr{A} \to \mathscr{B})$	$(K4) or (K5)$
(4)	$(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$	(1)(3), MP
(5)	$(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to (\sim \mathscr{B} \to \sim \mathscr{A})$	重言式
(6)	$(\sim \mathscr{B} \to \sim \mathscr{A})$	(4)(5), MP
(7)	$(\forall x_i)(\sim \mathscr{B}) \to (\sim \mathscr{B})$	$(K4) or (K5)$
(8)	$(\sim \mathscr{B})$	(2)(7), MP
(9)	$(\sim \mathscr{A})$	(6)(8), MP
(10)	$(\forall x_i)(\sim \mathscr{A})$	(9), 概括

形式系统$K_{\mathscr{L}}$

证明

也即有：$\{(\forall x_i)(\mathscr{A} \to \mathscr{B}), (\forall x_i)(\sim \mathscr{B})\} \vdash_K (\forall x_i)(\sim \mathscr{A})$,又因x_i不在$(\forall x_i)(\sim \mathscr{B})$中自由出现，据演绎定理有：
$(\forall x_i)(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \vdash_K (\forall x_i)(\sim \mathscr{B}) \to (\forall x_i)(\sim \mathscr{A})$
据(5)使用的重言式，有$\vdash_K ((\forall x_i)(\sim \mathscr{B}) \to (\forall x_i)(\sim \mathscr{A})) \to (\sim (\forall x_i)(\sim \mathscr{A}) \to \sim (\forall x_i)(\sim \mathscr{B}))$，应用MP规则，得到$(\forall x_i)(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \vdash_K (\sim (\forall x_i)(\sim \mathscr{A}) \to \sim (\forall x_i)(\sim \mathscr{B}))$ 即：
$(\forall x_i)(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \vdash_K ((\exists x_i)(\mathscr{A}) \to (\exists x_i)(\mathscr{B}))$ 再应用演绎定理得到$\vdash_K (\forall x_i)(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to ((\exists x_i)\mathscr{A} \to (\exists x_i)\mathscr{B})$

形式系统$K_{\mathscr{L}}$

练习:

- $(\exists x_i)(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to ((\forall x_i)\mathscr{A} \to \mathscr{B})$, x_i不在$\mathscr{B}$中自由出现

先证$\{\mathscr{A}, \sim \mathscr{B}\} \vdash_L \sim (\mathscr{A} \to \mathscr{B})$。有以下Fitch证明:

$\mathscr{A}$	Hyp
$\quad \sim \mathscr{B}$	Hyp
$\quad\quad \sim\sim (\mathscr{A} \to \mathscr{B})$	Hyp
$\quad\quad \sim\sim (\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to (\mathscr{A} \to \mathscr{B})$	已证
$\quad\quad (\mathscr{A} \to \mathscr{B})$	$(\to -)$
$\quad\quad \mathscr{A}$	Reti
$\quad\quad \mathscr{B}$	$(\to -)$
$\quad\quad \sim \mathscr{B}$	Reti
$\quad \sim (\mathscr{A} \to \mathscr{B})$	$(\sim -)$

形式系统$K_{\mathscr{L}}$

练习：

因$L \subseteq K$，所以有$\{\mathscr{A}, \sim \mathscr{B}\} \vdash_K \sim (\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B})$。考虑以下演绎：

$$\begin{array}{lll} (1) & (\forall x_i)\mathscr{A} & \text{假设} \\ (2) & (\forall x_i)\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{A} & (K4)or(K5) \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{lll} (3) & \mathscr{A} & (1)(2), MP \\ (4) & \sim \mathscr{B} & \text{假设} \\ \vdots & \ldots & \ldots \\ (k) & \sim (\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}) & \ldots \end{array}\right\} \text{已证}$$

$$\begin{array}{lll} (k+1) & (\forall x_i) \sim (\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}) & (k)\text{概括} \end{array}$$

形式系统$K_{\mathscr{L}}$

练习：

不难看出，此演绎实质为$\{\sim \mathscr{B}, (\forall x_i)\mathscr{A}\} \vdash_K (\forall x_i) \sim (\mathscr{A} \to \mathscr{B})$，因$x_i$不在$(\forall x_i)\mathscr{A}$中自由出现，据演绎定理有：$\sim \mathscr{B} \vdash_K (\forall x_i)\mathscr{A} \to (\forall x_i) \sim (\mathscr{A} \to \mathscr{B})$
易得 $\sim \mathscr{B} \vdash_K \sim (\forall x_i) \sim (\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to \sim (\forall x_i)\mathscr{A}$
由演绎定理逆命题可得：$\{\sim \mathscr{B}, (\exists x_i)(\mathscr{A} \to \mathscr{B})\} \vdash_K \sim (\forall x_i)\mathscr{A}$
x_i不在$\mathscr{B}$中自由出现，则 $(\exists x_i)(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \vdash_K \sim \mathscr{B} \to \sim (\forall x_i)\mathscr{A}$
易得：$(\exists x_i)(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \vdash_K (\forall x_i)\mathscr{A} \to \mathscr{B}$，再用演绎定理即可。

等价，代入

注记4.14

为了叙述的方便，我们引入联结词$\leftrightarrow$，定义$\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}$为$\sim((\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to \sim(\mathscr{B} \to \mathscr{A}))$。但仍需注意$\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}$不是$\mathscr{L}$的公式，只是一种助记缩写。

命题4.15

对任意$\mathscr{L}$的公式$\mathscr{A}, \mathscr{B}$，$\vdash_K \mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}$当且仅当$\vdash_K (\mathscr{A} \to \mathscr{B})$以及$\vdash_K (\mathscr{B} \to \mathscr{A})$。

证明

$\Rightarrow$ 假设$\vdash_K \mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}$，即$\vdash_K \sim((\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to \sim(\mathscr{B} \to \mathscr{A}))$。由于$\sim((\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to \sim(\mathscr{B} \to \mathscr{A})) \to (\mathscr{A} \to \mathscr{B})$及$\sim((\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to \sim(\mathscr{B} \to \mathscr{A})) \to (\mathscr{B} \to \mathscr{A})$都是重言式，则它们是$K$的定理，由MP易得$\vdash_K (\mathscr{A} \to \mathscr{B})$及$\vdash_K (\mathscr{B} \to \mathscr{A})$。

等价，代入

证明

$\Leftarrow$ 假设$\vdash_K (\mathscr{A} \to \mathscr{B})$及$\vdash_K (\mathscr{B} \to \mathscr{A})$。因有(重言式)

$$\vdash_K (\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to ((\mathscr{B} \to \mathscr{A}) \to \sim ((\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to \sim (\mathscr{B} \to \mathscr{A}))$$

，易由MP得

$$\vdash_K \sim ((\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to \sim (\mathscr{B} \to \mathscr{A}))$$

。

定义4.16

如果$\mathscr{A}$与$\mathscr{B}$是$\mathscr{L}$的公式且$\vdash_K (\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})$，我们称$\mathscr{A}$与$\mathscr{B}$**可证等价**。

等价，代入

引理4.17

对任何公式$\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{C}$，如果$\mathscr{A}$与$\mathscr{B}$可证等价，$\mathscr{B}$与$\mathscr{C}$ 可证等价，那么$\mathscr{A}$与$\mathscr{C}$可证等价。

证明

设$\vdash_K \mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}$，$\vdash_K \mathscr{B} \leftrightarrow \mathscr{C}$。则$\vdash_K \mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}$及$\vdash_K \mathscr{B} \rightarrow \mathscr{C}$。
由HS得$\vdash_K \mathscr{A} \rightarrow \mathscr{C}$，同理可证$\vdash_K \mathscr{C} \rightarrow \mathscr{A}$。据命题4.15，
有$\vdash_K \mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{C}$。

等价，代入

直觉上，$(\forall x_1)A_1^1(x_1)$表达的意思与$(\forall x_2)A_1^1(x_2)$相同。因为它们含义都是：对任意的对象x，$\bar{A}_1^1(x)$成立。从这个层面上理解，它们应当是等价的。

命题4.18

如果x_i在$\mathscr{A}(x_i)$中自由出现，且x_j不在$\mathscr{A}(x_i)$中出现，不管是自由还是约束。那么

$$\vdash_K (\forall x_i)\mathscr{A}(x_i) \leftrightarrow (\forall x_j)\mathscr{A}(x_i/x_j)$$

证明

首先注意到，在命题指定的条件下，x_i对$\mathscr{A}(x_i/x_j)$中的x_j替换自由，且x_j对$\mathscr{A}(x_i)$中的x_i也替换自由。我们来证明两个方向的蕴含式都是K的定理。

等价，代入

证明

等价，代入

命题4.19

令$\mathscr{A}$为一个$\mathscr{L}$的公式，其中自由出现的变元为$y_1, \ldots, y_n$。那么$\vdash_K \mathscr{A}$当且仅当$\vdash_K (\forall y_1)\ldots(\forall y_n)\mathscr{A}$。

证明

$\Rightarrow$ 施归纳于$\mathscr{A}$中自由出现的变元个数n。基始步，$\mathscr{A}$中有一个自由变元y_1，设$\vdash_K \mathscr{A}(y_1)$那么有$\vdash_K (\forall y_1)\mathscr{A}(y_1)$，通过直接应用一次概括原则可得。归纳步令$n > 1$，且设所有含自由变元数目为$n-1$的公式$\mathscr{A}$，如果$\vdash_K \mathscr{A}$那么$\vdash_K (\forall y_1)\ldots(\forall y_{n-1})\mathscr{A}$。令$\mathscr{A}$含$n$个自由变元$y_1, \ldots, y_n$且$\vdash_K \mathscr{A}$，应用一次概括规则，可得$\vdash_K (\forall y_n)\mathscr{A}$。因$(\forall y_n)\mathscr{A}$含有$n-1$个自由变元，所以据归纳假设有$\vdash_K (\forall y_1)\ldots(\forall y_{n-1})(\forall y_n)\mathscr{A}$。$\Leftarrow$类似，用(K5)证明。

等价，代入

定义4.20

如果$\mathscr{A}$是一个包含自由变元仅为$y_1, \ldots, y_n$的$\mathscr{L}$公式。那么$(\forall y_1)\ldots(\forall y_n)\mathscr{A}$称为$\mathscr{A}$的**全称封闭**。公式$\mathscr{A}$的全称封闭常记为$\mathscr{A}'$。

注记

命题4.19称对任何公式$\mathscr{A}$，$\vdash_K \mathscr{A}$当且仅当$\vdash_K \mathscr{A}'$。但是$\mathscr{A}$与$\mathscr{A}'$一般而言并不一定可证等价。不难看出$\vdash_K (\mathscr{A}' \to \mathscr{A})$总是成立的。但演绎定理告诉我们$\vdash_K (\mathscr{A} \to \mathscr{A}')$不一定成立。从某个角度而言，在谓词演算中$\vdash_K$比$\to$要"弱"。

等价，代入

命题4.22

令$\mathscr{A}$与$\mathscr{B}$为$\mathscr{L}$的公式。假设$\mathscr{B}_0$是通过将$\mathscr{A}_0$中一个或者多个$\mathscr{A}$的出现用$\mathscr{B}$代入而得到的。那么

$$\vdash_K ((\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})' \to (\mathscr{A}_0 \leftrightarrow \mathscr{B}_0))$$

证明

施归纳于$\mathscr{A}_0$的长度，即联结词与量词的个数。基始步，$\mathscr{A}_0$就是$\mathscr{A}$，那么$\mathscr{B}_0$就是$\mathscr{B}$。易见$(\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})' \vdash_K (\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})$(K4或者K5，加MP)，由演绎定理可得$\vdash_K (\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})' \to (\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})$。归纳步：设$\mathscr{A}$是$\mathscr{A}_0$的一个严格的子公式且原命题对所有比$\mathscr{A}_0$短且包含$\mathscr{A}$作为子公式的公式成立。情形一：$\mathscr{A}_0$形如$\sim \mathscr{C}_0$。那么$\mathscr{B}_0$形如$\sim \mathscr{D}_0$，其中$\mathscr{D}_0$是将$\mathscr{C}_0$中的$\mathscr{A}$换成$\mathscr{B}$得到的。现在$\mathscr{C}_0$比$\mathscr{A}_0$短，则有$\vdash_K (\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})' \to (\mathscr{C}_0 \leftrightarrow \mathscr{D}_0)$，

等价，代入

证明

由于$(\mathscr{C}_0 \leftrightarrow \mathscr{D}_0) \to (\sim \mathscr{C}_0 \leftrightarrow \sim \mathscr{D}_0)$是一个重言式，所以它是一个$K$的定理，使用HS可以得到：$\vdash_K (\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})' \to (\sim \mathscr{C}_0 \leftrightarrow \sim \mathscr{D}_0)$，
即$\vdash_K (\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})' \to (\mathscr{A}_0 \leftrightarrow \mathscr{B}_0)$。情形二：$\mathscr{A}_0$形如$(\mathscr{C}_0 \to \mathscr{D}_0)$。那么$\mathscr{B}_0$形如$(\mathscr{E}_0 \to \mathscr{F}_0)$，其中$\mathscr{E}_0$与$\mathscr{F}_0$分别是将$\mathscr{C}_0$与$\mathscr{D}_0$中的$\mathscr{A}$分别用$\mathscr{B}$代替而得到的公式。现在$\mathscr{C}_0$与$\mathscr{D}_0$比$\mathscr{A}_0$短，因此$\vdash_K ((\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})' \to (\mathscr{C}_0 \leftrightarrow \mathscr{E}_0))$，
及$\vdash_K ((\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})' \to (\mathscr{D}_0 \leftrightarrow \mathscr{F}_0))$，可证得：$\vdash_K ((\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})' \to ((\mathscr{C}_0 \to \mathscr{D}_0) \leftrightarrow (\mathscr{E}_0 \to \mathscr{F}_0)))$，
即$\vdash_K ((\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})' \to (\mathscr{A}_0 \leftrightarrow \mathscr{B}_0))$。情形三：$\mathscr{A}_0$形如$(\forall x_i)\mathscr{C}_0$。那么$\mathscr{B}_0$形如$(\forall x_i)\mathscr{D}_0$。其中$\mathscr{D}_0$为将$\mathscr{C}_0$中的$\mathscr{A}$换成$\mathscr{B}$得到的。由于$\mathscr{C}_0$长度比$\mathscr{A}_0$短，所以有$\vdash_K ((\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})' \to (\mathscr{C}_0 \leftrightarrow \mathscr{D}_0))$。使用概括规则得到$\vdash_K (\forall x_i)((\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})' \to (\mathscr{C}_0 \leftrightarrow \mathscr{D}_0))$。

等价，代入

证明

使用概括规则得到$\vdash_K (\forall x_i)((\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})' \to (\mathscr{C}_0 \leftrightarrow \mathscr{D}_0))$。注意到$x_i$不在$(\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})'$中自由出现，所以据(K6)有：$\vdash_K (\forall x_i)((\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})' \to (\mathscr{C}_0 \leftrightarrow \mathscr{D}_0)) \to ((\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})' \to (\forall x_i)(\mathscr{C}_0 \leftrightarrow \mathscr{D}_0))$，由MP可得:$\vdash_K ((\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})' \to (\forall x_i)(\mathscr{C}_0 \leftrightarrow \mathscr{D}_0))$，进一步可得：$\vdash_K ((\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})' \to ((\forall x_i)\mathscr{C}_0 \leftrightarrow (\forall x_i)\mathscr{D}_0))$，也就是$\vdash_K ((\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})' \to (\mathscr{A}_0 \leftrightarrow \mathscr{B}_0))$。证毕。

等价，代入

推论4.23

令$\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{A}_0, \mathscr{B}_0$为命题4.22所述。如果$\vdash_K (\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})$那么$\vdash_K (\mathscr{A}_0 \leftrightarrow \mathscr{B}_0)$。

证明

设$\vdash_K (\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})$，那么由命题4.19有$\vdash_K (\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})'$。由命题4.22得$\vdash_K ((\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})' \to (\mathscr{A}_0 \leftrightarrow \mathscr{B}_0))$。由MP可得$\vdash_K (\mathscr{A}_0 \leftrightarrow \mathscr{B}_0)$。

推论4.24

如果x_j不出现(不论自由或者约束)在公式$\mathscr{A}(x_i)$中，且$\mathscr{B}_0$是将$\mathscr{A}_0$中一个或者多个$(\forall x_i)\mathscr{A}(x_i)$的出现替换成$(\forall x_j)\mathscr{A}(x_j)$得到的公式。那么$\vdash_K \mathscr{A}_0 \leftrightarrow \mathscr{B}_0$。

由命题4.18及推论4.23得。

前束范式

讨论

在命题演算中,我们研究过一些特别结构的公式，如合取范式，析取范式。这些特别结构的公式，对公式本身的逻辑含义给出一些比较清晰的表示。在谓词演算中，也有类似的概念，其中一个就是**前束范式**。简单地说，前束范式考虑将一个公式中的量词进行一些重新安排(集中到公式前方)，使公式更直观，同时在理论及实际问题的研究上也有重要意义。

前束范式

我们先来看以下的一些结论：

命题4.25

令$\mathscr{A}$与$\mathscr{B}$为$\mathscr{L}$的公式：

- 如果x_i不在$\mathscr{A}$中自由出现，那么：
  - $\vdash_K (\forall x_i)(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \leftrightarrow (\mathscr{A} \to (\forall x_i)\mathscr{B})$ (1)
  - $\vdash_K (\exists x_i)(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \leftrightarrow (\mathscr{A} \to (\exists x_i)\mathscr{B})$ (2)
- 如果x_i不在$\mathscr{B}$中自由出现，那么：
  - $\vdash_K (\forall x_i)(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \leftrightarrow ((\exists x_i)\mathscr{A} \to \mathscr{B})$ (3)
  - $\vdash_K (\exists x_i)(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \leftrightarrow ((\forall x_i)\mathscr{A} \to \mathscr{B})$ (4)

证明

第(1)由(K6)公理的一个实例，及之前的例4.12得证。其它的留为作业。

前束范式

例子

证明

$$(\forall x_1)A_1^1(x_1) \to (\forall x_2)(\exists x_3)A_1^2(x_2, x_3)$$

与

$$(\exists x_1)(\forall x_2)(\exists x_3)(A_1^1(x_1) \to A_1^2(x_2, x_3))$$

可证等价。注意，后者将所有的量词都集中到了公式前方。从原公式开始我们一步步给出一个可证等价的公式：

- $(\exists x_1)(A_1^1(x_1) \to (\forall x_2)(\exists x_3)A_1^2(x_2, x_3))$ (4) $\leftarrow$
- $(\exists x_1)(\forall x_2)(A_1^1(x_1) \to (\exists x_3)A_1^2(x_2, x_3))$ (1) $\leftarrow$
- $(\exists x_1)(\forall x_2)(\exists x_3)(A_1^1(x_1) \to A_1^2(x_2, x_3))$ (2) $\leftarrow$

谓词演算的公式可以非常复杂，尤其是在量词分散的情况下很难看出其直观含义。我们可以利用上述结论及代入原则来得到一种量词全部出现在公式前方且与原公式可证等价的公式。

前束范式

定义4.27

一个$\mathscr{L}$的公式称为**前束范式**，如果它形如：

$$(Q_1 x_{i1})(Q_2 x_{i2}) \ldots (Q_k x_{ik})\mathscr{D}$$

其中$\mathscr{D}$是一个不含量词的公式，每一个Q_j要么是$\forall$要么是$\exists$。

讨论

- 一个没有量词的公式也是前束范式
- 前束范式以一串连续的量词(及其变元)作为公式的开始，中间及之前不含其它逻辑符号。

前束范式

讨论

我们之前已经有了一些结论，比如：

- $(\forall x_1)A_1^1(x_1)$与$(\forall x_2)A_1^1(x_2)$是可证等价的(约束变元换名)
- $(\forall x_1)A_1^1(x_1) \to A_1^1(x_1)$与$(\forall x_2)A_1^1(x_2) \to A_1^1(x_1)$可证等价(代入原则)

不难看出，一个公式可以将所有约束变元换成互不相同，也不与自由变元相同的等价的一个公式。

前束范式

命题4.28

对任何一个$\mathscr{L}$的公式$\mathscr{A}$，都存在一个**前束范式**$\mathscr{B}$与之可证等价。

证明

根据以前的结论，我们可以把$\mathscr{A}$中的约束变元改变成互不相同，也与所有的$\mathscr{A}$中的自由变元不同，这样得到的公式$\mathscr{A}_1$与$\mathscr{A}$可证等价，即$\vdash_K \mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{A}_1$。现在我们在$\mathscr{A}_1$的长度$n$(联结词与量词的个数)上施归纳法。基始步：$n = 0$，$\mathscr{A}_1$是原子公式。据定义，原子公式也是前束范式。归纳步，$\mathscr{A}_1$不是原子公式，设所有长度短于$\mathscr{A}_1$的公式都有一个等价的前束范式。情况1: $\mathscr{A}_1$形如$\sim \mathscr{C}$。显然$\mathscr{C}$比$\mathscr{A}_1$短，据归纳假设，有一个与之等价的前束范式$\mathscr{C}_1$。那么有$\vdash_K \mathscr{A}_1 \leftrightarrow \sim \mathscr{C}_1$，不妨记为$\vdash_K \mathscr{A}_1 \leftrightarrow \sim (Q_1 x_{i1}) \ldots (Q_k x_{ik}) \mathscr{D}$，把所有$Q_i$换成$Q_i^*$: 如果$Q_i$是$\forall$那么$Q_i^*$是$\exists$，如果$Q_i$是$\exists$那么$Q_i^*$是$\forall$，

前束范式

证明

令$\mathscr{B}$为$(Q_1^* x_{i1})\dots(Q_k^* x_{ik}) \sim \mathscr{D}$，显然$\vdash_K \mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}$，$\mathscr{B}$为一个前束范式。情形2: $\mathscr{A}_1$形如$(\mathscr{C} \rightarrow \mathscr{D})$。可见$\mathscr{C}$，$\mathscr{D}$长度短于$\mathscr{A}_1$，据归纳假设，存在前束范式$\mathscr{C}_1$ 及$\mathscr{D}_1$分别与它们可证等价。据代入原理先有：$\vdash_K (\mathscr{C} \rightarrow \mathscr{D}) \leftrightarrow (\mathscr{C}_1 \rightarrow \mathscr{D})$ 再代入
有$\vdash_K (\mathscr{C} \rightarrow \mathscr{D}) \leftrightarrow (\mathscr{C}_1 \rightarrow \mathscr{D}_1)$ 即$\vdash_K (\mathscr{A}_1 \leftrightarrow (\mathscr{C}_1 \leftrightarrow \mathscr{D}_1))$，也
即$\vdash_K (\mathscr{A} \leftrightarrow (\mathscr{C}_1 \leftrightarrow \mathscr{D}_1))$ 。现在$\mathscr{C}_1 \rightarrow \mathscr{D}_1$实质形
如：$(Q_1 x_{i1})\dots(Q_k x_{ik})\mathscr{C}_2 \rightarrow (R_1 x_{i1})\dots(R_k x_{ik})\mathscr{D}_2$，按照例子中的办法，可以把它化成一个前束范式。情形3:$\mathscr{A}_1$形
如$(\forall x_i)\mathscr{C}$。$\mathscr{C}$也比$\mathscr{A}_1$短。按归纳假设$\mathscr{C}$与一个前束范式可证等价，即$\vdash_K \mathscr{C} \leftrightarrow (Q_1 x_{i1})\dots(Q_k x_{ik})\mathscr{D})$，那么经概括原则
有$\vdash_K (\forall x_i)(\mathscr{C} \leftrightarrow (Q_1 x_{i1})\dots(Q_k x_{ik})\mathscr{D})$ 据之前的结论
有$\vdash_K ((\forall x_i)\mathscr{C} \leftrightarrow (\forall x_i)(Q_1 x_{i1})\dots(Q_k x_{ik})\mathscr{D})$。证毕。

前束范式

例子

- 看书上例4.29(a),(b)
- 注意：一个公式可证等价的前束范式不一定只有一个，如例(b)就至少有两个。
- 一个前束范式，是不是量词越多，这个公式表示的信息越复杂？答案是否定的。事实上，人们研究的结论是，量词交替越多的公式包含的信息越复杂。(基于P不等于NP的假设)

前束范式

我们来介绍在逻辑学与计算机科学中非常重要的两类前束范式：

定义4.30

- 令$n > 0$。一个前束范式被称为是Π_n公式如果它从$(\forall)$出发并有$n-1$次的量词交替。
- 令$n > 0$。一个前束范式被称为是Σ_n公式如果它从$(\exists)$出发并有$n-1$次的量词交替。

例子

- $(\forall x_1)(\forall x_2)(\exists x_3)A_1^3(x_1, x_2, x_3)$是一个$\Pi_2$公式。
- $(\exists x_1)(\forall x_2)(\exists x_3)(\exists x_4)(A_1^2(x_1, x_2) \to A_1^2(x_3, x_4))$是$\Sigma_3$公式。
- Π_n公式与Σ_n公式与目前计算复杂性理论中悬而未决的重大问题有直接关系。

K的完全性定理

回顾

- L的完全性定理是指: 每一个命题逻辑的**重言式**(命题逻辑中的"真理")都是L的定理。
- 类似地，K的完全性定理是指：每一个谓词演算的**逻辑有效式**(谓词演算中的"真理")都是K的定理。
- 这次课我们将沿着L中证明完全性的方法，进一步给出(相对更复杂)K的完全性证明。

我们沿用L中系统扩充的定义，给出K中对应的定义：

定义4.34

一个K的*扩充*是一个通过增加或者更改K的公理集而得到的形式系统，K的所有定理仍然是定理(新的定理可能被引入了)。

K的完全性定理

注意

- K是自己的扩充，可以理解为新增加了空的公理集。
- 更一般地说，两个系统K_1, K_2，称K_1是K_2的扩充如果K_2的定理集是K_1的定理集的子集($\subseteq$关系)。

定义4.35

一个一阶系统是一个系统K的扩充。

讨论

可以把K理解成一个最小的一阶系统，它仅表示了最基础的谓词演算。事实上，有很多理论在K中不能表示，我们须在它的基础上增加各类公理来达到我们的要求。例如，下一章要介绍的带等词的数学系统，人工智能中的情景演算(Situation Calculus，带框架公理的系统)等，都是K的扩充，因此都称为一阶系统。

K的完全性定理

定义4.36

一个一阶系统S被称为是**一致的**，如果不存在一个公式$\mathscr{A}$，使得$\mathscr{A}$与$(\sim\mathscr{A})$都是S的定理。

在系统L中，我们介绍过一种扩充系统但不会引入不一致的方法，这个方法也可以用在一阶系统上：

命题4.37

令S为一个一致的一阶系统且令$\mathscr{A}$为一个不是S定理的**闭公式**。那么，通过在S中添加$(\sim\mathscr{A})$作为公理而得到的系统S^*也是**一致的**。

证明

假设S^*不一致。则存在公式$\mathscr{B}$，$\vdash_{S^*}\mathscr{B}$且$\vdash_{S^*}(\sim\mathscr{B})$.
因$\vdash_{S^*}(\sim\mathscr{B}\to(\mathscr{B}\to\mathscr{A}))$，MP两次可得$\vdash_{S^*}\mathscr{A}$。这意味着在$S$中从$(\sim\mathscr{A})$出发可证得$\mathscr{A}$

K的完全性定理

证明

即有$(\sim \mathscr{A}) \vdash_S \mathscr{A}$。因$(\sim \mathscr{A})$为闭公式，由演绎定理得$\vdash_S (\sim \mathscr{A}) \to \mathscr{A}$。又因$\vdash_S (\sim \mathscr{A} \to \mathscr{A}) \to \mathscr{A}$(它是$L$的定理)，MP可得$\vdash_S \mathscr{A}$。这与假设中$\mathscr{A}$不是$S$的定理相矛盾。原题得证。

注意，与L中对应的证明相比，此处要求$\mathscr{A}$是一个闭公式，但这并不会影响我们的结论。

定义4.38

一个一阶系统S是极大的，如果对于任何闭公式$\mathscr{A}$，要么$\vdash_S \mathscr{A}$要么$\vdash_S (\sim \mathscr{A})$。

容易看出K不是极大的。比如K既推不出$(\forall x_1)A_1^1(x_1)$也推不出$\sim (\forall x_1)A_1^1(x_1)$。

K的完全性定理

命题4.39

令S为一个一致的一阶系统，存在一个S的一致的极大的扩充。

这个命题通常也表述为：存在一个极大一致的一阶系统。

证明

令$\mathscr{A}_0, \mathscr{A}_1, \ldots,$为所有闭公式的枚举。我们构造一个$K$的扩充的序列$S_0, S_1, \ldots$。令$S_0$为$S$，对$n > 0$，如果$\vdash_{S_{n-1}} \mathscr{A}_{n-1}$那么令$S_n$与$S_{n-1}$相同，如果不是$\vdash_{S_{n-1}} \mathscr{A}_{n-1}$，则令$S_n$为将$(\sim \mathscr{A})$作为公理添加至$S_{n-1}$得到的系统。之前我们证明过每一个这样的系统都是一致的K的扩充。令S_∞为把序列中出现过的所有公理当成公理的系统，按照命题2.21的办法我们可以证明S_∞是一致的也是极大的。

K的完全性定理

讨论

我们将证明一个重要的命题：任何一个一致的一阶系统S，都存在一个解释使得S的所有定理在其中为真。这个证明将采用一种扩大语言字母表的方法。注意到，增加一些新常元符号：$b_0, b_1, \ldots,$到语言$\mathscr{L}$中，将在K中引入一些新公理。因为公理模式中可"填充"的对象增加了。例如：$A_1^1(b_0) \to A_1^1(b_0)$之前就不是$K$的定理。注意，如果$S$是一致的，那么利用这种方法扩大的系统仍是一致的。假设其不一致，那么同时存在$\mathscr{A}$与$\sim\mathscr{A}$的证明。根据定义证明都是有穷长的，新常元符最多只有有穷出现，而它们可以用原系统中没有使用过的变元去代替(常元，变元都构成项，地位一样)，从而得到原系统中$\mathscr{A}$与$\sim\mathscr{A}$的证明。这与原系统一致是矛盾的。

K的完全性定理

命题4.40

令S为$K_{\mathscr{L}}$的一个一致扩充。那么存在一个$\mathscr{L}$的解释使得每一个S的定理都为**真**。

证明

首先将语言$\mathscr{L}$通过增加一个无穷的常元符号序列$b_0, b_1, \ldots,$而扩大成为语言$\mathscr{L}^+$。令S^+与K^+为随之扩大的S与$K_{\mathscr{L}}$。那么如之前所讨论，S^+是一致的。从S^+出发，我们来构造一个一阶系统的序列$S_0, S_1, \ldots$。将$\mathscr{L}^+$中只含一个自由变元的的公式枚举出来，不妨记为：$\mathscr{F}_0(x_{i0}), \mathscr{F}_1(x_{i1}), \ldots$。注意，$x_{i0}, x_{i1}, \ldots$并非完全互不相同。现在从序列$b_0, b_1, \ldots,$出发构造一个新序列$c_0, c_1, \ldots,$使得：

- c_0不出现在$\mathscr{F}_0(x_{i0})$中，
- 对$n > 0$，$c_n \notin \{c_0, \ldots, c_{n-1}\}$且$c_n$不出现在任何$\mathscr{F}_0(x_{i0}), \ldots, \mathscr{F}_n(x_{in})$中。

K的完全性定理

证明

这是可以做到的，因为每个公式的长度是有穷的，因而至多包含有穷多个b_i。对任何k，令$\mathscr{G}_k$为公式：$\sim(\forall x_{ik})\mathscr{F}_k(x_{ik})\to\sim\mathscr{F}_k(c_k)$。现在令$S_0$为$S^+$，令$S_1$为从$S_0$出发增加$\mathscr{G}_0$为新公理得到的系统。我们接下来将要证明这样构造的每一个S_n都是一致的，由此得到的S_∞是一个一致系统，且存在一个S_∞的极大一致扩充。首先，S_0是一致的。令$n>0$且设S_n是一致的，但S_{n+1}不是。即存在一个$\mathscr{L}^+$的公式使得$\vdash_{S_{n+1}}\mathscr{A}$且$\vdash_{S_{n+1}}\sim\mathscr{A}$。易得$\vdash_{S_{n+1}}\sim\mathscr{B}$(矛盾推出一切)，其中$\mathscr{B}$是任意公式。特别的，有$\vdash_{S_{n+1}}\sim\mathscr{G}_n$。也就是$\mathscr{G}_n\vdash_{S_n}\sim\mathscr{G}_n$。又因$\mathscr{G}_n$是封闭的，由演绎定理有$\vdash_{S_n}\mathscr{G}_n\to\sim\mathscr{G}_n$，也易得$\vdash_{S_n}\sim\mathscr{G}_n$，即$\vdash_{S_n}\sim(\sim(\forall x_{in})\mathscr{F}_n(x_{in})\to\sim\mathscr{F}_n(c_n))$。

K的完全性定理

证明

但又

有$\vdash_{S_n} \sim (\sim (\forall x_{in})\mathscr{F}_n(x_{in}) \to \sim \mathscr{F}_n(c_n)) \to \sim (\forall x_{in})\mathscr{F}_n(x_{in})$，$\vdash_{S_n} \sim (\sim (\forall x_{in})\mathscr{F}_n(x_{in}) \to \sim \mathscr{F}_n(c_n)) \to \mathscr{F}_n(c_n)$(两个都是重言式实例)，所以有$\vdash_{S_n} \sim (\forall x_{in})\mathscr{F}_n(x_{in})$及$\vdash_{S_n} \mathscr{F}_n(c_n)$。在后者的证明中，我们将所有$c_n$的出现换成一个没有在此证明中出现过的变元$y$，从而得到一个$S_n$中$\mathscr{F}_n(y)$的证明，即$\vdash_{S_n} \mathscr{F}_n(y)$。通过概括原则得$\vdash_{S_n} (\forall y)\mathscr{F}_n(y)$，再改约束变元名得$\vdash_{S_n} (\forall x_{in})\mathscr{F}_n(x_{in})$，这与$S_n$的一致性相矛盾。因此所有$S_n$都是一致的。令$S_\infty$为以在所有$S_n$中出现过的公理为公理的一阶系统，$S_\infty$必是一致的，否则必存在某个$n$，$S_n$不一致。

K的完全性定理

证明

现令T为一个S_∞的极大一致扩充，我们来构造一个符合要求的$\mathscr{L}^+$的解释I (注意从理论上说，解释的域是非空集即可):

- I的域D_I是所有$\mathscr{L}^+$的封闭项(即不含自由变元的项)。
- 如果$\vdash_T A_i^n(d_1,\ldots,d_n)$那么令$\bar{A}_i^n(d_1,\ldots,d_n)$成立，如果$\vdash_T \sim A_i^n(d_1,\ldots,d_n)$那么令$\bar{A}_i^n(d_1,\ldots,d_n)$不成立，其中$d_1,\ldots,d_n \in D_I$。这是没有问题的。因为对所有的闭公式，$T$可推出它或者它的否定。(注意$\bar{A}_i^n(d_1,\ldots,d_n)$中$d_i$都是"不戴帽子的"，即自己解释成自己)
- $\bar{f}_i^n(d_1,\ldots,d_n)$的值定义为项$\mathbf{f_i^n(d_1,\ldots,d_n)}$。

我们将证明如此定义的解释I中，所有S的定理都为真。为此先证明一个引理：**对所有L^+的封闭公式$\mathscr{A}$，$\vdash_T \mathscr{A}$当且仅当$I \models \mathscr{A}$。**

K的完全性定理

证明

仍施归纳于$\mathscr{A}$中联接词与量词的个数。基始步$\mathscr{A}$是一个原子公式$A_i^n(d_1,\dots,d_n)$，其中$d_1,\dots,d_n$是封闭的项(因$\mathscr{A}$是封闭的)。如果$\vdash_T \mathscr{A}$即$\vdash_T A_i^n(d_1,\dots,d_n)$。根据之前$I$的构造，显然有$\bar{A}_i^n(d_1,\dots,d_n)$成立，即$I \models \mathscr{A}$。反之易见若有$I \models \mathscr{A}$那么有$\vdash_T \mathscr{A}$。归纳步，设$\mathscr{A}$不是原子公式并且对所有比$\mathscr{A}$短的公式，原命题都成立。情形1：$\mathscr{A}$是$\sim \mathscr{B}$. $\Rightarrow \vdash_T \mathscr{A}$即是$\vdash_T \sim \mathscr{B}$. 由于$T$是一致的，可知$\mathscr{B}$不是$T$的定理. 因$\mathscr{B}$比$\mathscr{A}$短，据归纳假设，$\mathscr{B}$在$I$中不为真。又因$\mathscr{B}$封闭，所以$\sim \mathscr{B}$在$I$中为真，即$I \models \mathscr{A}$。$\Leftarrow$若$I \models \mathscr{A}$,即$I \models \sim \mathscr{B}$，则$\mathscr{B}$在$I$中不真，因$\mathscr{B}$比$\mathscr{A}$短，据归纳假设，$\mathscr{B}$不是$T$的定理。因$T$是极大的，那么$\sim \mathscr{B}$是$T$的定理，即$\vdash_T \sim \mathscr{B}(\mathscr{A})$. 情形2：$\mathscr{A}$是$(\mathscr{B} \to \mathscr{C})$. $\Rightarrow$设$\mathscr{A}$在I中不真。可知$\mathscr{B}$为真而$\mathscr{C}$为假. $\mathscr{B}$,$\mathscr{C}$都比A短,据归纳假设有$\vdash_T \mathscr{B}$及并非$\vdash_T \mathscr{C}$.

K的完全性定理

证明

因T是极大的,则有$\vdash_T \sim \mathscr{C}$. 由于$\vdash_T (\mathscr{B} \to (\sim \mathscr{C} \to \sim (\mathscr{B} \to \mathscr{C})))$(重言式),MP可得$\vdash_T \sim (\mathscr{B} \to \mathscr{C})$,即$\vdash_T \sim \mathscr{A}$. 由于$T$是一致的,所以$\mathscr{A}$不是$T$的定理. $\Leftarrow$ 设$\mathscr{A}$不是T的定理. 那么$\vdash_T \sim \mathscr{A}$,也即有$\vdash_T \sim (\mathscr{B} \to \mathscr{C})$. 由重言式$(\sim (\mathscr{B} \to \mathscr{C}) \to \mathscr{B})$及$(\sim (\mathscr{B} \to \mathscr{C}) \to \sim \mathscr{C})$, MP可得$\vdash_T \mathscr{B}$及$\vdash_T \sim \mathscr{C}$,据归纳假设可得$I \models \mathscr{B}$,并非$I \models \mathscr{C}$. 据注记3.25的结果, $(\mathscr{B} \to \mathscr{C})$在$I$中为假(不为真). 情形3: $\mathscr{A}$是$(\forall x_i)\mathscr{B}(x_i)$. 考虑两种子情况. 首先,设$x_i$不在$\mathscr{B}$中自由出现,那么$\mathscr{B}$是封闭的. 据归纳假设$\vdash_T \mathscr{B}$当且仅当$I \models \mathscr{B}$. 又因有概括原则及K5,易见$\vdash_T \mathscr{B}$当且仅当$\vdash_T (\forall x_i)\mathscr{B}$, 那么$I \models \mathscr{B}$当且仅当$I \models (\forall x_i)\mathscr{B}$, 即$\vdash_T \mathscr{A}$当且仅当$I \models \mathscr{A}$. 另一种情形,$x_i$在$\mathscr{B}$中自由出现. 那它肯定是$\mathscr{B}$中唯一的自由变元,因为$\mathscr{A}$即$(\forall x_i)\mathscr{B}$是封闭的. 那么$\mathscr{B}$出现在之前我们定义的序列$\mathscr{F}_0(x_{i0}), \mathscr{F}_1(x_{i1}), \ldots,$中. 不妨设$\mathscr{B}$是$\mathscr{F}_m(x_{im})$. 那么$\mathscr{A}$是$(\forall x_{im})\mathscr{F}_m(x_{im})$.

K的完全性定理

证明

$\Leftarrow$设$I \models \mathscr{A}$. 由命题4.4(K5)有$I \models (\forall x_{im})\mathscr{F}_m(x_{im}) \to \mathscr{F}_m(c_m)$. 因此$I \models \mathscr{F}_m(c_m)$.

显然$\mathscr{F}_m(c_m)$比$\mathscr{A}$短,据归纳假设,$\vdash_T \mathscr{F}_m(c_m)$. 我们要证的是$\vdash_T \mathscr{A}$,用反证法先设$\vdash_T \sim \mathscr{A}$(因T是极大的). 即有$\vdash_T \sim (\forall x_i m)\mathscr{F}_m(x_{im})$, 又因$\mathscr{G}_m$是$T$的一条公理,所以有$\vdash_T \sim (\forall x_i m)\mathscr{F}_m(x_{im}) \to \sim \mathscr{F}_m(c_m)$. MP可得$\vdash_T \sim \mathscr{F}_m$,这与$T$的一致性矛盾. 则必有$\vdash_T \mathscr{A}$. $\Rightarrow$设$\vdash_T \mathscr{A}$且$\mathscr{A}$在I中不为真, 即并非$I \models (\forall x_{im})\mathscr{F}_m(x_{im})$. 那么至少有一个项$d \in D_I$使得$I \models \sim \mathscr{F}_m(d)$. 但由K5与MP可从$\vdash_T (\forall x_{im}\mathscr{F}_m(x_i m))$得$\vdash_T \mathscr{F}_m(d)$. 由归纳假设,$I \models \mathscr{F}_m(d)$.出现了矛盾. 所以如果$\vdash_T \mathscr{A}$那么$I \models \mathscr{A}$. 引理证明结束. 因此所有$T$的定理都在这个解释$I$中为真. 注意所有$S$的定理也是$T$的定理, 因为$T$包含了所有$S$的公理,且$T$的语言$\mathscr{L}^+$也真包含$\mathscr{L}$. 现在我们把$I$中对$b_0, b_1, \ldots$及相关的项的解释(那些相关的映射)去掉,但保留域中的元素及上面的构造的关系. 此时I被约束成$\mathscr{L}$的解释. 每

K的完全性定理

命题4.41($K_{\mathscr{L}}$的完全性)

如果$\mathscr{A}$是逻辑有效的$\mathscr{L}$的公式,那么$\mathscr{A}$是$K_{\mathscr{L}}$的一条定理.

证明

令$\mathscr{A}$为逻辑有效的$\mathscr{L}$的公式,$\mathscr{A}'$为其全称封闭. 由推论3.28可知$\mathscr{A}'$也必然是逻辑有效的. 假设$\mathscr{A}$不是$K_{\mathscr{L}}$的定理. 那么由命题4.19,$\mathscr{A}'$不是$K_{\mathscr{L}}$的定理. 如果说我们把$\sim \mathscr{A}'$当成额外的公理,我们可得到一个一致的扩充$K'_{\mathscr{L}}$. 由刚才证明的命题4.40可知,存在一个$\mathscr{L}$的解释使所有$K'_{\mathscr{L}}$的定理为真. 特别的$\sim \mathscr{A}'$在这解释下是真的,也即$\mathscr{A}'$为假($\mathscr{A}$'封闭). 这与$\mathscr{A}'$的逻辑有效性相矛盾. 因此$\mathscr{A}$必是$K_{\mathscr{L}}$的定理.

K的完全性定理

下面我们介绍一些与K的完全性有关的结论.

定义4.42

- 令Γ为$\mathscr{L}$的一个公式集.一个使得Γ中的公式全部为真的$\mathscr{L}$的解释被称为Γ的**模型**.
- 如果S是一个一阶系统,一个S的模型就是个使所有S的定理都为真的解释.

命题

- 命题4.43: 令S为一个一阶系统,令I为一个使所有S的公理都为真的解释.那么I是S的一个模型.
- 命题4.44: 一个一阶系统S是一致的当且仅当它有一个模型.
- 命题4.45: 令S为一个一致的一阶系统,令$\mathscr{A}$为一个封闭的公式且在S的所有解释中为真.那么$\mathscr{A}$是S的定理.

注意:每一个$\mathscr{L}$的解释都是$K_{\mathscr{L}}$的一个模型,因为K的公理在所有解