附二章：形式命题演算FPC

沈榆平
yuping.shen.ilc@gmail.com

中山大学逻辑与认知研究所
2015年10月

形式系统*FPC*

形式系统*FPC*全称是Fitch's Propositional Calculus，它采用了图式化的证明方法，是一个较为实用、直观的系统。

系统*FPC*定义

形式系统*FPC*由以下部分组成：

- 符号表(无穷)。$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, (,), p_1, p_2, p_3, \ldots$
- 公式的集合，用以下三条规则来归纳定义：
  1. 每一个$p_i (i \geq 1)$是公式；
  2. 如果$\mathscr{A}$与$\mathscr{B}$是公式，那么$(\neg\mathscr{A})$，$(\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B})$，$(\mathscr{A} \vee \mathscr{B})$，$(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B})$和$(\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})$也是公式；
  3. 所有公式均由规则1与2在有穷步内产生。
- 公理。系统*FPC*没有公理。
- 推演规则(待续)

形式系统*FPC*

系统*FPC*定义(续1)

系统*FPC*的推演规则分两类，分别称**结构规则**及**联结词规则**，其中结构规则有三条：

- 假设规则(Hyp)：假设某个公式成立；

$$\begin{array}{|l l}
\mathscr{A} & \quad \text{Hyp} \\
\hline
\vdots & \quad \ldots
\end{array}$$

注解

简单地说，FPC中的证明由一些用竖线及横线分隔的公式组成。而一个证明总是从**假设**开始的。

形式系统*FPC*

系统*FPC*定义(续2)

- 重复规则(Rep)：一个假设下出现过的公式(包括假设本身)可以在当前的假设中重复出现；

$$\begin{array}{|lll}
\mathscr{A} & & \ldots \\
\vdots & & \ldots \\
\mathscr{A} & & \text{Rep} \\
\vdots & & \ldots
\end{array}$$

注解

重复规则本质就是一个当前假设下公式的简单重写。事实上，这个规则只是为了保持证明的格式，将其去掉也不会影响FPC的推理能力。比如，我们可以给公式编号作引用，从而省去Rep。

形式系统*FPC*

系统*FPC*定义(续3)

- 引用规则(Reti)：一个假设下出现过的公式(包括假设本身)可以在**之后的**假设中引用；

$$
\begin{array}{|lll}
\mathscr{A} & & \ldots \\
\vdots & & \ldots \\
 & \multicolumn{1}{|l}{\mathscr{B}} & \text{Hyp} \\ \cline{2-2}
 & \multicolumn{1}{|l}{\vdots} & \ldots \\
 & \multicolumn{1}{|l}{\mathscr{A}} & \text{Reti}
\end{array}
$$

注解

FPC中的假设是可以嵌套的，即假设之后可以再次假设。记法上表现为在当前假设的右方再次写出竖(横)线及假设公式。Reti在文献中也称**重述**

形式系统FPC

系统FPC定义(续4)

FPC联结词规则有九条：

- $(\to +)$规则：若假设$\mathscr{A}$可得到$\mathscr{B}$，则推出$\mathscr{A} \to \mathscr{B}$。

$$
\begin{array}{l|l}
\quad \mathscr{A} & \text{Hyp} \\
\hline
\quad \vdots & \ldots \\
\quad \mathscr{B} & \ldots \\
\mathscr{A} \to \mathscr{B} & (\to +)
\end{array}
$$

注解

注意$\mathscr{A} \to \mathscr{B}$不在竖线的范围内，这说明它的成立不要求假设中的$\mathscr{A}$成立。而相比之下，$\mathscr{B}$一般是通过假设$\mathscr{A}$而得到的，须写在竖线(即假设)范围内。

形式系统FPC

在FPC中证明$\mathscr{A} \to \mathscr{A}$是定理

$$
\begin{array}{l|ll}
 & \mathscr{A} & \text{Hyp} \\
\cline{2-2}
 & \mathscr{A} & \text{Rep} \\
\multicolumn{2}{l}{\mathscr{A} \to \mathscr{A}} & (\to +)
\end{array}
$$

在FPC中证明$\mathscr{A} \to (\mathscr{B} \to \mathscr{A})$是定理

$$
\begin{array}{l|l|ll}
 & \multicolumn{2}{l}{\mathscr{A}} & \text{Hyp} \\
\cline{2-2}
 & & \mathscr{B} & \text{Hyp} \\
\cline{3-3}
 & & \mathscr{A} & \text{Reti} \\
 & \multicolumn{2}{l}{\mathscr{B} \to \mathscr{A}} & (\to +) \\
\multicolumn{3}{l}{\mathscr{A} \to (\mathscr{B} \to \mathscr{A})} & (\to +)
\end{array}
$$

形式系统FPC

系统FPC定义(续5)

- $(\rightarrow -)$规则：若有$\mathscr{A}$及$\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}$，则推出$\mathscr{B}$。

$$
\begin{array}{|ll}
\vdots & \ldots \\
\mathscr{A} & \ldots \\
\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B} & \ldots \\
\mathscr{B} & (\rightarrow -)
\end{array}
$$

注解

明显的，规则$(\rightarrow -)$相当于系统L中的MP规则。

形式系统FPC

在FPC中证明$\mathscr{A} \to ((\mathscr{A} \to \mathscr{A}) \to \mathscr{A})$是定理

$\quad \mathscr{A}$	Hyp
$\quad\quad \mathscr{A} \to \mathscr{A}$	Hyp
$\quad\quad \mathscr{A}$	Reti
$\quad\quad \mathscr{A}$	$(\to -)$
$\quad (\mathscr{A} \to \mathscr{A}) \to \mathscr{A}$	$(\to +)$
$\mathscr{A} \to ((\mathscr{A} \to \mathscr{A}) \to \mathscr{A})$	$(\to +)$

形式系统FPC

系统FPC定义(续6)

- $(\vee+)$规则：若有$\mathscr{A}$，则推出$\mathscr{A}\vee\mathscr{B}$；或若有$\mathscr{A}$，则推出$\mathscr{B}\vee\mathscr{A}$。

$$\begin{array}{|ll}\vdots & \ldots \\ \mathscr{A} & \ldots \\ \mathscr{A}\vee\mathscr{B} & (\vee+)\end{array} \quad \text{或} \quad \begin{array}{|ll}\vdots & \ldots \\ \mathscr{A} & \ldots \\ \mathscr{B}\vee\mathscr{A} & (\vee+)\end{array}$$

形式系统FPC

系统FPC定义(续7)

- $(\vee-)$规则：若有$\mathscr{A} \to \mathscr{C}$，$\mathscr{B} \to \mathscr{C}$及$\mathscr{A} \vee \mathscr{B}$，则推出$\mathscr{C}$。

$$
\begin{array}{|ll}
\vdots & \ldots \\
\mathscr{A} \to \mathscr{C} & \ldots \\
\mathscr{B} \to \mathscr{C} & \ldots \\
\mathscr{A} \vee \mathscr{B} & \ldots \\
\mathscr{C} & (\vee-)
\end{array}
$$

形式系统FPC

系统FPC定义(续8)

- $(\wedge+)$规则：若有$\mathscr{A}$及$\mathscr{B}$，则推出$\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}$。

$$
\begin{array}{|ll}
\vdots & \ldots \\
\mathscr{A} & \ldots \\
\mathscr{B} & \ldots \\
\mathscr{A} \wedge \mathscr{B} & (\wedge+)
\end{array}
$$

形式系统FPC

系统FPC定义(续9)

- $(\wedge-)$规则：若有$\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}$，则推出$\mathscr{A}$；若有$\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}$，则推出$\mathscr{B}$。

$$\begin{array}{|ll}\vdots & \ldots \\ \mathscr{A} \wedge \mathscr{B} & \ldots \\ \mathscr{A} & (\wedge-)\end{array} \quad \text{或} \quad \begin{array}{|ll}\vdots & \ldots \\ \mathscr{A} \wedge \mathscr{B} & \ldots \\ \mathscr{B} & (\wedge-)\end{array}$$

形式系统FPC

系统FPC定义(续10)

- $(\leftrightarrow+)$规则：若$\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{B}$及$\mathscr{B}\rightarrow\mathscr{A}$，则推出$\mathscr{A}\leftrightarrow\mathscr{B}$。

$$
\begin{array}{|ll}
\vdots & \ldots \\
\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{B} & \ldots \\
\mathscr{B}\rightarrow\mathscr{A} & \ldots \\
\mathscr{A}\leftrightarrow\mathscr{B} & (\leftrightarrow+)
\end{array}
$$

形式系统FPC

系统FPC定义(续11)

- $(\leftrightarrow -)$规则：若$\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}$，则推出$\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}$；或者若$\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}$，则推出$\mathscr{B} \rightarrow \mathscr{A}$。

$$\left|\begin{array}{ll} \vdots & \ldots \\ \mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B} & \ldots \\ \mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B} & (\leftrightarrow -) \end{array}\right. \quad \text{或} \quad \left|\begin{array}{ll} \vdots & \ldots \\ \mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B} & \ldots \\ \mathscr{B} \rightarrow \mathscr{A} & (\leftrightarrow -) \end{array}\right.$$

形式系统FPC

系统FPC定义(续12)

- $(\neg -)$规则：若假设$\neg\mathscr{A}$可得$\mathscr{B}$及$\neg\mathscr{B}$，则推出$\mathscr{A}$。

$$
\begin{array}{l|ll}
 & \neg\mathscr{A} & \text{Hyp} \\
\cline{2-2}
 & \vdots & \ldots \\
 & \mathscr{B} & \ldots \\
 & \neg\mathscr{B} & \ldots \\
\multicolumn{2}{l}{\mathscr{A}} & (\neg -)
\end{array}
$$

注意

注意此处结论也在竖线外，这说明规则$(\neg -)$也是可不依赖于假设成立而得出结论的规则。事实上，$(\neg -)$与$(\rightarrow +)$是系统FPC中唯一两个能让推演"跳出假设"回到上一层的规则。

形式系统*FPC*

在*FPC*中证明$\neg\neg\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{A}$是定理

$\neg\neg\mathscr{A}$	Hyp
$\neg\mathscr{A}$	Hyp
$\neg\mathscr{A}$	Rep
$\neg\neg\mathscr{A}$	Reti
$\mathscr{A}$	$(\neg -)$
$\neg\neg\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{A}$	$(\rightarrow +)$

形式系统*FPC*

在*FPC*中证明$\neg\mathscr{A}\vee\mathscr{A}$是定理

$\neg(\neg\mathscr{A}\vee\mathscr{A})$	Hyp
$\neg\mathscr{A}$	Hyp
$\neg\mathscr{A}\vee\mathscr{A}$	$(\vee+)$
$\neg(\neg\mathscr{A}\vee\mathscr{A})$	Reti
$\mathscr{A}$	$(\neg-)$
$\neg\mathscr{A}\vee\mathscr{A}$	$(\vee+)$
$\neg(\neg\mathscr{A}\vee\mathscr{A})$	Rep
$(\neg\mathscr{A}\vee\mathscr{A})$	$(\neg-)$

形式系统FPC

形式系统FPC的证明

一个形式系统FPC的**证明**是一个按照结构规则和联结词规则形成的有穷公式序列。如果一个证明结束于某个假设下，则称为**假设性证明**，否则称**非假设证明**。若$\mathscr{A}$是某个非假设证明的最后一个公式，则称$\mathscr{A}$是FPC的一个**定理**，记为$\vdash_{FPC} \mathscr{A}$，也称$\mathscr{A}$在FPC中**可证**。

注解

明显，一个非假设性证明肯定以规则$(\to +)$或者$(\neg -)$结尾。一个证明中假设下的公式序列又称为该证明的**子证明**。

事实上，我们已经介绍了如下证明：

$$\vdash_{FPC} \mathscr{A} \to \mathscr{A} \qquad \vdash_{FPC} \neg\mathscr{A} \vee \mathscr{A}$$

$$\vdash_{FPC} \mathscr{A} \to (\mathscr{B} \to \mathscr{A}) \qquad \vdash_{FPC} \neg\neg\mathscr{A} \to \mathscr{A}$$

形式系统FPC

FPC的演绎

令Γ是一个有穷公式集，$\mathscr{A}$为一个公式。如果$\mathscr{A}$是某个非假设性证明的最后一步，而该假设性证明中未曾消除的由Hyp引入的公式都属于Γ，则称上述证明是从Γ到$\mathscr{A}$的一个**演绎**，记为$\Gamma \vdash_{FPC} \mathscr{A}$。若$\Gamma = \emptyset$，则将$\emptyset \vdash_{FPC} \mathscr{A}$简记为$\vdash_{FPC} \mathscr{A}$。

从$\{\mathscr{A}, \mathscr{A} \to \mathscr{B}\}$到$\mathscr{B}$的演绎

$\mathscr{A}$	Hyp
$\quad \mathscr{A} \to \mathscr{B}$	Hyp
$\quad \mathscr{B}$	$(\to -)$

注意结论$\mathscr{B}$并没有"跳出假设"，即上述证明存在没消去的Hyp公式。

形式系统FPC

FPC的可靠性，完备性与一致性

形式系统FPC是可靠的，完备的与一致的。

练习

- $\vdash_{FPC} \neg\neg\mathscr{A} \to \mathscr{A}$
- $\vdash_{FPC} (\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to (\neg\mathscr{B} \to \neg\mathscr{A})$
- $\vdash_{FPC} (\neg\mathscr{B} \to \neg\mathscr{A}) \to (\mathscr{A} \to \mathscr{B})$
- $\vdash_{FPC} (\mathscr{A} \to \mathscr{C}) \to ((\mathscr{B} \to \mathscr{C}) \to ((\mathscr{A} \vee \mathscr{B}) \to \mathscr{C}))$
- $\vdash_{FPC} ((\mathscr{A} \to (\mathscr{B} \to \mathscr{C})) \to ((\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to (\mathscr{A} \to \mathscr{C}))$
- $\vdash_{FPC} \neg(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}) \to \neg\mathscr{A} \vee \neg\mathscr{B}$