第二章：形式命题演算

沈榆平
yuping.shen.ilc@gmail.com

中山大学逻辑与认知研究所
2015年10月

形式化思想

形式化思想的起源

- 17世纪时“莱布尼兹之梦”。哲学家之间的争论很大程度上源于自然语言含义的模糊性，莱布尼兹提出了建立精确、可演算的通用语言的理论构想，并由费雷格进一步完善。
- 20世纪初第三次数学危机。以罗素为代表的数学家们发现数学理论(集合论)内部的矛盾性，人们急需一种在更高层次上研究数学的方法，因而把目光投向了数理(符号)逻辑。

简单地说，形式化思想就是用纯粹的符号化演算方法来刻画、考察各种(数学)理论，而这些符号本身是没有含义的，从而避免由于含义不清导致的种种困境。广义的数理逻辑(包括证明论，递归论等)本质上演变成了一种研究数学的数学，又称**元数学**(Meta-mathematics)。

元数学的可靠性

为了保证数学的可靠性，我们引入了元数学。但是...

如何保证元数学的可靠性？

- 我们认为元逻辑(普通逻辑)的推理规则是可靠的。
- 我们用有穷性方法来进行元数学的研究。此处有穷性的意思是，元数学中的对象都是在有穷步内机械可构造的，而不是指对象的个数是有穷的。比如，每一个命题形式都可在有穷步内通过其归纳定义构造出来(有穷长)，但命题形式的个数显然是无穷的。有穷性方法是逻辑主义者针对直觉主义者反对使用排中律，反对非构造法而作的妥协。

但不管如何辩护，我们在此做的可靠性仅是一种哲学意义上的保证。

形式系统

什么是形式系统(Formal System)?

原则上，一个形式系统包括以下三个部分：

1. 一些**形式符号**(Formal Symbols)。这些符号是没有任何意义的，只是能相互区别而已。
2. 形式符号按一定规则形成**表达式**(Expressions)(或称字符串)。形式符号及其构成的表达式通常又称为**形式语言**(Formal Language)。
3. 按一定规则形成的表达式的**有穷序列**，又称作**形式证明**。

形式化(Formalization)

我们可以用形式系统表示各种理论，如自然数论，图论，集合论，命题演算等等。得到相应理论的形式系统的过程叫该理论的形式化。之后，便可以从元理论的角度对该对象理论进行全面的研究。现实生活中，存在着各种各样的形式化系统。

形式系统

形式系统：纸牌

人们日常生活中的纸牌游戏就是一种形式系统。

- 纸牌由一些符号组成。

$$\begin{array}{lll} \clubsuit A,\ldots,J,Q,K & \diamondsuit A,\ldots,J,Q,K & JOKER \\ \heartsuit A,\ldots,J,Q,K & \spadesuit A,\ldots,J,Q,K & JOKER \end{array}$$

  这些符号是没有任何意义的，或者说我们不关心它们的意义。比如，我们把K(King)统一约定换成W(Warrior)，甚至把$\clubsuit\diamondsuit\spadesuit\heartsuit$换成另外四个符号$\bigstar\Box\Diamond\blacktriangle$也完全不影响游戏。
- 纸牌构成一些表达式。形如$\heartsuit 10,J,Q,K$的序列称为“同花顺”，形如$\heartsuit J,\clubsuit J,\diamondsuit J,\spadesuit J$被称为“炸弹”，等等。
- 玩家赢得游戏的出牌过程，就是一个纸牌表达式的有穷序列，而这个序列就是赢得游戏的证明。

形式系统

纸牌游戏：非形式化表示VS形式化表示

- 非形式化表示：口耳相传，图文描述
- 形式化表示：符号，符号串，证明序列

纸牌游戏：语法VS语义

- 语法：规定使用的牌及组成的牌串
- 语义：牌的含义，游戏的玩法
- 语法相同的系统可能有不同的语义，即相同的牌可以定义不同的玩法。

形式系统

讨论

- 我们将形式系统划分成三个部分，是一种原则上的定义。在讨论具体的形式系统时，则有可能分成更多部分来讨论。
- 还有哪些形式系统的例子？
- 第一章为何称为非形式命题演算？

命题演算形式系统L

命题演算的形式系统L由以下部分构成：

- 符号表(无穷)。$\sim, \rightarrow, (,), p_1, p_2, p_3, \ldots$
- 公式的集合，用以下三条规则来归纳定义：
  1. 每一个$p_i (i \geq 1)$是公式；
  2. 如果$\mathscr{A}$与$\mathscr{B}$是公式，那么$(\sim \mathscr{A})$与$(\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B})$也是公式；
  3. 所有公式均由规则1与2产生。
- 公理。L有无穷多条公理，但在此简写成三条**公理模式**，对于任何公式$\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}$，下列公式是$L$的公理：

$$(L1) \qquad (\mathscr{A} \rightarrow (\mathscr{B} \rightarrow \mathscr{A})).$$
$$(L2) \qquad ((\mathscr{A} \rightarrow (\mathscr{B} \rightarrow \mathscr{C})) \rightarrow ((\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}) \rightarrow (\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{C}))).$$
$$(L3) \qquad (((\sim \mathscr{A}) \rightarrow (\sim \mathscr{B})) \rightarrow (\mathscr{B} \rightarrow \mathscr{A})).$$

- 演绎规则(MP分离规则)。由$\mathscr{A}$及$(\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B})$得直接后承$\mathscr{B}$。

形式系统L的证明

定义2.2

系统L中的一个证明是一个公式序列$\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n$，使得对任意$i(1 \leq i \leq n)$，$\mathscr{A}_i$或者是一个$L$的公理，或者是从序列中位于$\mathscr{A}_i$之前的两个公式$\mathscr{A}_j$与$\mathscr{A}_k(j < i, k < i)$经应用演绎规则MP得到的直接后承。这样一个证明被称为L中$\mathscr{A}_n$的一个证明，$\mathscr{A}_n$又称为L的一个**定理**(或者内定理)。

注释

- 定义中$\mathscr{A}_j$与$\mathscr{A}_k$必为形如$\mathscr{B}$及$\mathscr{B} \rightarrow \mathscr{A}_i$的公式，或者反之。
- 如果$\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n$是一个$L$中的证明，那么$\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_k(k < n)$也是一个证明，$\mathscr{A}_k$也是$L$中的定理。
- L的公理显然是定理，因为它们本身就是一个一步的证明。

形式系统L的证明

证明$((p_1 \to p_2) \to (p_1 \to p_1))$是$L$的定理。

$$
\begin{array}{lll}
(1) & (p_1 \to (p_2 \to p_1)) & (L1) \\
(2) & ((p_1 \to (p_2 \to p_1)) \to ((p_1 \to p_2) \to (p_1 \to p_1))) & (L2) \\
(3) & ((p_1 \to p_2) \to (p_1 \to p_1)) & (1), (2), MP
\end{array}
$$

练习：证明$(p_1 \to p_1)$是L的定理。

$$
\begin{array}{ll}
(1) & (p_1 \to ((p_1 \to p_1) \to p_1)) \ \ (L1) \\
(2) & ((p_1 \to ((p_1 \to p_1) \to p_1)) \to ((p_1 \to (p_1 \to p_1)) \to (p_1 \to p_1))) \\
(3) & ((p_1 \to (p_1 \to p_1)) \to (p_1 \to p_1)) \ (1), (2), MP \\
(4) & (p_1 \to (p_1 \to p_1)) \quad (L1) \\
(5) & (p_1 \to p_1) \quad (3), (4), MP
\end{array}
$$

形式系统L的证明

练习：证明$((\sim p_1) \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2))$是$L$的定理。

$$
\begin{array}{ll}
(1) & (((\sim p_2) \rightarrow (\sim p_1)) \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2)) \quad (L3) \\
(2) & ((((\sim p_2) \rightarrow (\sim p_1)) \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2)) \rightarrow \\
 & ((\sim p_1) \rightarrow (((\sim p_2) \rightarrow (\sim p_1)) \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2)))) \quad (L1) \\
(3) & ((\sim p_1) \rightarrow (((\sim p_2) \rightarrow (\sim p_1)) \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2))) \; (1),(2),MP \\
(4) & ((\sim p_1) \rightarrow (((\sim p_2) \rightarrow (\sim p_1)) \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2))) \rightarrow \\
 & (((\sim p_1) \rightarrow ((\sim p_2) \rightarrow (\sim p_1))) \rightarrow ((\sim p_1) \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2))) \quad (L2) \\
(5) & (((\sim p_1) \rightarrow ((\sim p_2) \rightarrow (\sim p_1))) \rightarrow ((\sim p_1) \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2))) \quad (3),(\\
(6) & ((\sim p_1) \rightarrow ((\sim p_2) \rightarrow (\sim p_1))) \quad (L1) \\
(7) & ((\sim p_1) \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2)) \quad (5),(6),MP
\end{array}
$$

形式系统L的演绎

一个L的证明是从公理出发的一个演绎。但有时我们希望从一些(可能是公理以外的)公式出发进行演绎推理。

定义2.5

令Γ为L中的一个公式集合。一个L的公式序列$\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n$是一个**从$\Gamma$出发的演绎**，如果对于任意$i(1 \leq i \leq n)$，下列之一成立：

- $\mathscr{A}_i$是L的一条公理；
- $\mathscr{A}_i$是Γ中的一个公式；
- $\mathscr{A}_i$是由序列中位于$\mathscr{A}_i$之前的两个公式应用MP规则得到的；

序列中的最后一个公式$\mathscr{A}_n$称为Γ在L中的一个**后承**，或者称**从Γ可演绎的**，或者称Γ**推出**$\mathscr{A}_n$，常记为$\Gamma \vdash_L \mathscr{A}_n$。

形式系统L的演绎

注释

- 明显的，L的一条定理$\mathscr{A}$，是不附加任何额外的公式就可从公理演绎得到的，因此常记为$\vdash_L \mathscr{A}$，即$\emptyset \vdash_L \mathscr{A}$的简写。因此，证明就是从公理出发的一个演绎。
- Γ中的公式(如果不是公理或者定理的话)通常被认为是假设成立的。
- 注意，$\vdash_L$不是L中的符号，$\Gamma \vdash_L \mathscr{A}$是在系统$L$之外所作的对这个系统的描述。
- 同理，花体的字母$\mathscr{A}, \mathscr{B}, \ldots$也不是$L$的符号，是我们为了讨论方便用来代表任意公式的元语言符号。

形式系统L的演绎

写出$\{p_1,(p_2 \to (p_1 \to p_3))\} \vdash_L (p_2 \to p_3)$的演绎过程。

(1)	p_1	假设
(2)	$(p_1 \to (p_2 \to p_1))$	$(L1)$
(3)	$(p_2 \to p_1)$	$(1),(2),MP$
(4)	$(p_2 \to (p_1 \to p_3))$	假设
(5)	$((p_2 \to (p_1 \to p_3)) \to ((p_2 \to p_1) \to (p_2 \to p_3)))$	$(L2)$
(6)	$((p_2 \to p_1) \to (p_2 \to p_3))$	$(4),(5),MP$
(7)	$(p_2 \to p_3)$	$(3),(6),MP$

注意

如果在上述演绎中将p_1,p_2,p_3分别换成元语言中代表任意L的公式的花体字母$\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{C}$，那么我们得到一个**演绎模式**(Deduction Scheme)，它代表了L中无穷多个同类型的演绎。

形式系统L的演绎

注意(续)

必须清楚，无论是

$$\{p_1, (p_2 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_3))\} \vdash_L (p_2 \rightarrow p_3)$$

还是

$$\{\mathscr{A}, (\mathscr{B} \rightarrow (\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{C}))\} \vdash_L (\mathscr{B} \rightarrow \mathscr{C})$$

都是系统外(我们)对L的描述，它们并不是L的一部分。这种对系统L的属性作出的断言，又称**元定理**(或外定理)。

练习:写出演绎过程

- $\{(p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow p_3)), p_1, p_2\} \vdash_L p_3$
- $\{p_2\} \vdash_L (p_1 \rightarrow p_2)$
- $\{(p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow p_3)), p_2\} \vdash_L (p_1 \rightarrow p_3)$

形式系统L的演绎

为方便，我们去除公式最外层的括号以及与~直接联系的括号。

$\{p_1 \to (p_2 \to p_3), p_1, p_2\} \vdash_L p_3$

(1)	p_1	假设
(2)	p_2	假设
(3)	$p_1 \to (p_2 \to p_3)$	假设
(4)	$p_2 \to p_3$	$(1), (3), MP$
(5)	p_3	$(2), (4), MP$

$\{p_2\} \vdash_L p_1 \to p_2$

(1)	p_2	假设
(2)	$p_2 \to (p_1 \to p_2)$	$(L1)$
(3)	$p_1 \to p_2$	$(1), (2), MP$

形式系统L的演绎

$$\{p_1 \to (p_2 \to p_3), p_2\} \vdash_L p_1 \to p_3$$

$$
\begin{array}{lll}
(1) & p_1 \to (p_2 \to p_3) & \text{假设} \\
(2) & (p_1 \to (p_2 \to p_3)) \to ((p_1 \to p_2) \to (p_1 \to p_3)) & (L2) \\
(3) & (p_1 \to p_2) \to (p_1 \to p_3) & (1),(2), MP \\
(4) & p_2 \to (p_1 \to p_2) & (L1) \\
(5) & p_2 & \text{假设} \\
(6) & p_1 \to p_2 & (4),(5), MP \\
(7) & p_1 \to p_3 & (3),(6), MP
\end{array}
$$

形式系统L的演绎

作业：$\{p_1 \to (p_2 \to p_3)\} \vdash_L p_2 \to (p_1 \to p_3)$

$$
\begin{array}{lll}
(1) & p_1 \to (p_2 \to p_3) & \text{假设} \\
(2) & (p_1 \to (p_2 \to p_3)) \to & \\
 & ((p_1 \to p_2) \to (p_1 \to p_3)) & (L2) \\
(3) & (p_1 \to p_2) \to (p_1 \to p_3) & (1), (2), MP \\
(4) & ((p_1 \to p_2) \to (p_1 \to p_3)) \to & \\
 & (p_2 \to ((p_1 \to p_2) \to (p_1 \to p_3))) & (L1) \\
(5) & p_2 \to ((p_1 \to p_2) \to (p_1 \to p_3)) & (3), (4), MP \\
(6) & (p_2 \to ((p_1 \to p_2) \to (p_1 \to p_3))) \to & \\
 & ((p_2 \to (p_1 \to p_2)) \to (p_2 \to (p_1 \to p_3))) & (L2) \\
(7) & (p_2 \to (p_1 \to p_2)) \to (p_2 \to (p_1 \to p_3)) & (5), (6), MP \\
(8) & p_2 \to (p_1 \to p_2) & (L1) \\
(9) & p_2 \to (p_1 \to p_3) & (7), (8), MP
\end{array}
$$

形式系统L的演绎

作业：$(p_1 \to p_2) \to ((\sim p_1 \to \sim p_2) \to (p_2 \to p_1))$

$$
\begin{array}{lll}
(1) & (\sim p_1 \to \sim p_2) \to (p_2 \to p_1) & (L3) \\
(2) & (\sim p_1 \to \sim p_2) \to (p_2 \to p_1) \to & \\
 & ((p_1 \to p_2) \to (\sim p_1 \to \sim p_2) \to (p_2 \to p_1)) & (L2) \\
(3) & (p_1 \to p_2) \to (\sim p_1 \to \sim p_2) \to (p_2 \to p_1) & (1),(2),MP
\end{array}
$$

形式系统L的演绎定理

系统L中的定理证明是一个冗长且困难的过程。一种简化的方法是使用某些元定理，其效果相当于额外的推理规则。

命题2.8 演绎定理

如果$\Gamma \cup \{\mathscr{A}\} \vdash_L \mathscr{B}$，那么$\Gamma \vdash_L (\mathscr{A} \to \mathscr{B})$，其中$\mathscr{A}$和$\mathscr{B}$是$L$中的公式，$\Gamma$是$L$(可能为空)的公式集。

证明

我们通过施归纳于$\Gamma \cup \{\mathscr{A}\} \vdash_L \mathscr{B}$中序列中公式的个数(演绎长度)来证明。基础步，假设这个序列长度为1。那么序列中的公式肯定就是$\mathscr{B}$本身。根据演绎的定义，$\mathscr{B}$要么是一个L的公理，要么是$\Gamma \cup \{\mathscr{A}\}$中的一个公式。

形式系统L的演绎定理

证明(续1)

- 情形1：$\mathscr{B}$是L的一条公理。我们写出一个从Γ到$(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$的演绎：

$$\begin{array}{lll} (1) & \mathscr{B} & \text{公理} \\ (2) & (\mathscr{B} \to (\mathscr{A} \to \mathscr{B})) & (L1) \\ (3) & (\mathscr{A} \to \mathscr{B}) & (1),(2),MP \end{array}$$

  因此有$\Gamma \vdash_L (\mathscr{A} \to \mathscr{B})$。
- 情形2：$\mathscr{B} \in \Gamma$。我们写出与上类似的演绎：

$$\begin{array}{lll} (1) & \mathscr{B} & \text{假设} \\ (2) & (\mathscr{B} \to (\mathscr{A} \to \mathscr{B})) & (L1) \\ (3) & (\mathscr{A} \to \mathscr{B}) & (1),(2),MP \end{array}$$

形式系统L的演绎定理

证明(续2)

- 情形3：$\mathscr{B}$就是$\mathscr{A}$。我们之前写出过$\vdash_L (\mathscr{A} \to \mathscr{A})$的演绎，也即是有$\Gamma \vdash_L (\mathscr{A} \to \mathscr{B})$。基础步结束。

现在，假设$\Gamma \cup \{\mathscr{A}\} \vdash_L \mathscr{B}$的演绎是一个长度为$n(n > 1)$的序列，并设对于任何可以从$\Gamma \cup \{\mathscr{A}\}$在小于$n$步内演绎得到的公式$\mathscr{C}$，原命题成立。考虑以下四个情形：

- 情形1：$\mathscr{B}$是L的公理。证明同基础步情形1。
- 情形2：$\mathscr{B} \in \Gamma$。证明同基础步情形2。
- 情形3：$\mathscr{B}$是$\mathscr{A}$。证明同基础步情形3。
- 情形4：$\mathscr{B}$是从序列中之前两个公式通过MP规则得到的。这两个公式肯定分别形如$\mathscr{C}$和$(\mathscr{C} \to \mathscr{B})$，且能从$\Gamma \cup \{\mathscr{A}\}$出发用小于$n$步的演绎得到。那么有$\Gamma \cup \{\mathscr{A}\} \vdash_L \mathscr{C}$与$\Gamma \cup \{\mathscr{A}\} \vdash_L (\mathscr{C} \to \mathscr{B})$。由归纳假设可得，

形式系统L的演绎定理

$\Gamma \vdash_L (\mathscr{A} \to \mathscr{C})$及$\Gamma \vdash_L (\mathscr{A} \to (\mathscr{C} \to \mathscr{B}))$。下面给出从$\Gamma$出发演绎$(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$的一个可能过程：

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & \cdots \\ \vdots & \cdots \\ (k) & (\mathscr{A} \to \mathscr{C}) \end{array}\right\} \text{从}\Gamma\text{到}(\mathscr{A} \to \mathscr{C})\text{的演绎}$$

$$\left.\begin{array}{ll} (k+1) & \cdots \\ \vdots & \cdots \\ (l) & (\mathscr{A} \to (\mathscr{C} \to \mathscr{B})) \end{array}\right\} \text{从}\Gamma\text{到}(\mathscr{A} \to (\mathscr{C} \to \mathscr{B}))\text{的演绎}$$

$$\begin{array}{lll} (l+1) & (\mathscr{A} \to (\mathscr{C} \to \mathscr{B})) \to ((\mathscr{A} \to \mathscr{C}) \to (\mathscr{A} \to \mathscr{B})) & (L2) \\ (l+2) & (\mathscr{A} \to \mathscr{C}) \to (\mathscr{A} \to \mathscr{B}) & (l), (l+1), MP \\ (l+3) & (\mathscr{A} \to \mathscr{B}) & (l+2), (k), MP \end{array}$$

易见原命题得证。

形式系统L的演绎定理

演绎定理的实质是允许我们使用“假设”来简化证明。

利用演绎定理写出$\sim\mathscr{A}\to(\mathscr{A}\to\mathscr{B})$的证明

$$
\begin{array}{lll}
(1) & \sim\mathscr{A} & \text{假设} \\
(2) & \sim\mathscr{A}\to(\sim\mathscr{B}\to\sim\mathscr{A}) & (L1) \\
(3) & \sim\mathscr{B}\to\sim\mathscr{A} & (1),(2),MP \\
(4) & (\sim\mathscr{B}\to\sim\mathscr{A})\to(\mathscr{A}\to\mathscr{B}) & (L3) \\
(5) & \mathscr{A}\to\mathscr{B} & (3),(4),MP
\end{array}
$$

因此有$\{\sim\mathscr{A}\}\vdash_L\mathscr{A}\to\mathscr{B}$，由演绎定理得$\vdash_L\sim\mathscr{A}\to(\mathscr{A}\to\mathscr{B})$，即$\sim\mathscr{A}\to(\mathscr{A}\to\mathscr{B})$是$L$的定理。

形式系统L的演绎定理

命题2.9

如果$\Gamma \vdash_L (\mathscr{A} \to \mathscr{B})$，那么$\Gamma \cup \{\mathscr{A}\} \vdash_L \mathscr{B}$，其中$\mathscr{A}$和$\mathscr{B}$是$L$中的公式，$\Gamma$是$L$(可能为空)的公式集。

证明

给出一个从Γ到$(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$的演绎，我们构造一个从$\Gamma \cup \{\mathscr{A}\}$到$\mathscr{B}$的演绎：

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & \cdots \\ \vdots & \cdots \\ (k) & (\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \end{array}\right\} \text{从}\Gamma\text{到}(\mathscr{A} \to \mathscr{B})\text{的演绎}$$

$$\begin{array}{lll} (k+1) & \mathscr{A} & \text{假设} \\ (k+2) & \mathscr{B} & (k+1),(k),MP \end{array}$$

形式系统L的演绎定理

引理2.9

对任意L的公式$\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{C}$，$\{(\mathscr{A}\to\mathscr{B}),(\mathscr{B}\to\mathscr{C})\}\vdash_L(\mathscr{A}\to\mathscr{C})$.

证明

$$\begin{array}{lll}
(1) & (\mathscr{A}\to\mathscr{B}) & \text{假设} \\
(2) & (\mathscr{B}\to\mathscr{C}) & \text{假设} \\
(3) & \mathscr{A} & \text{假设} \\
(4) & \mathscr{B} & (1),(3),MP \\
(5) & \mathscr{C} & (2),(4),MP
\end{array}$$

明显地，它对应着：$\{(\mathscr{A}\to\mathscr{B}),(\mathscr{B}\to\mathscr{C})\}\cup\{\mathscr{A}\}\vdash_L\mathscr{C}$ 由演绎定理可得：$\{(\mathscr{A}\to\mathscr{B}),(\mathscr{B}\to\mathscr{C})\}\vdash_L(\mathscr{A}\to\mathscr{C})$

此演绎又称“假言三段论”，记为HS。并可在将来作为规则使用。

形式系统L的演绎定理

利用HS写出$\sim \mathscr{A} \to (\mathscr{A} \to \mathscr{B})$的证明

$$
\begin{array}{lll}
(1) & \sim \mathscr{A} \to (\sim \mathscr{B} \to \sim \mathscr{A}) & (L1) \\
(2) & (\sim \mathscr{B} \to \sim \mathscr{A}) \to (\mathscr{A} \to \mathscr{B}) & (L3) \\
(3) & \sim \mathscr{A} \to (\mathscr{A} \to \mathscr{B}) & HS
\end{array}
$$

可见使用HS使证明进一步缩短。

形式系统L的演绎定理

利用演绎定理及HS写出$(\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A})\to\mathscr{A}$的证明

$$
\begin{array}{lll}
(1) & \sim\mathscr{A}\to\mathscr{A} & \text{假设} \\
(2) & \sim\mathscr{A}\to(\sim\sim(\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A})\to\sim\mathscr{A}) & (L1) \\
(3) & (\sim\sim(\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A})\to\sim\mathscr{A})\to & \\
 & (\mathscr{A}\to\sim(\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A})) & (L3) \\
(4) & \sim\mathscr{A}\to(\mathscr{A}\to\sim(\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A})) & (2),(3),HS \\
(5) & (\sim\mathscr{A}\to(\mathscr{A}\to\sim(\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A})))\to & \\
 & ((\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A})\to(\sim\mathscr{A}\to\sim(\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A}))) & (L2) \\
(6) & (\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A})\to(\sim\mathscr{A}\to\sim(\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A})) & (4),(5),MP \\
(7) & \sim\mathscr{A}\to\sim(\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A}) & (1),(6),MP \\
(8) & (\sim\mathscr{A}\to\sim(\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A}))\to & \\
 & ((\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A})\to\mathscr{A}) & (L3)
\end{array}
$$

形式系统L的演绎定理

利用演绎定理及HS写出$(\sim \mathscr{A} \to \mathscr{A}) \to \mathscr{A}$的证明

$$
\begin{array}{lll}
(9) & (\sim \mathscr{A} \to \mathscr{A}) \to \mathscr{A} & (7),(8),MP \\
(10) & \mathscr{A} & (1),(9),MP
\end{array}
$$

由演绎定理可得，$\vdash_L (\sim \mathscr{A} \to \mathscr{A}) \to \mathscr{A}$，
即$(\sim \mathscr{A} \to \mathscr{A}) \to \mathscr{A}$是$L$的定理。

形式系统L的可靠性，一致性和完备性

我们完整地介绍了系统L并学习了其中的逻辑推演，但推演本身并不是我们最关心的问题。从形式化思想的角度来说，我们希望知道系统L是否如实地刻画了命题演算(是否将其准确地形式化了)。这涉及到考察系统L的如下性质:

系统L的基本性质

- 可靠性(Soundness)。L中推出的每一个(内)定理，都是(非形式)命题演算中的真理(永真式)吗？
- 一致性(Consistency)。L可能同时推出$\mathscr{A}$和$\sim\mathscr{A}$吗？(协调性，和谐性，无矛盾性)
- 完备性(Completeness)。命题演算中的每个真理，都能从L中推出来吗？

它们也是所有其它形式系统需要考察的最基本性质。

形式系统L的可靠性，一致性和完备性

例：算法的可靠性及完备性

假设算法$\mathcal{A}$用于解方程：

$$x^2 - 4 = 0$$

- 如果$\mathcal{A}$只输出一个解$x = 2$，那么$\mathcal{A}$是可靠的但不完备；
- 如果$\mathcal{A}$输出解$x = 2, -2$，那么$\mathcal{A}$是可靠的且完备的；
- 如果$\mathcal{A}$输出解$x = 3$，那么$\mathcal{A}$不是可靠的；
- 如果$\mathcal{A}$输出解$x = 3, 2, -2$，那么$\mathcal{A}$不是可靠的，但是完备的

形式系统L的可靠性，一致性和完备性

虽然形式系统L中的符号都是没有意义的，但是为了考察它和命题演算的关系，我们仿效命题演算中的定义，对L中的公式给出类似的**解释**。

指派

一个L的指派v是一个从L的公式集合到$\{T,F\}$的函数，使得对任意L的公式$\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{C}$：

- $v(\mathscr{A}) \neq v(\sim \mathscr{A})$,
- $v(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) = F$ 当且仅当$v(\mathscr{A}) = T$及$v(\mathscr{B}) = F$。

注意！真值函数天然的是命题演算的一部分，而L中的真值指派是我们人工地额外给予公式的解释。

形式系统L的可靠性，一致性和完备性

重言式(永真式)

一个L的公式$\mathscr{A}$是一个重言式，如果对任意的指派v，$v(\mathscr{A}) = T$

显然，这个定义和非形式命题演算的重言式本质上是一样的。

命题2.14 可靠性定理

L中的每一个定理都是(命题演算的)重言式。

证明

令$\mathscr{A}$为L的一个定理。我们施归纳于L中得到$\mathscr{A}$的证明长度n。基础步，$n = 1$。也就是说$\mathscr{A}$一步就可证得。那么显然$\mathscr{A}$是系统L的一条公理。容易看出，所有L的公理都是重言式(由真值表可知)，那么$\mathscr{A}$也肯定是一个重言式。

形式系统L的可靠性，一致性和完备性

证明

假设得到$\mathscr{A}$的证明长度$n > 1$且所有通过长度小于n的证明得到的定理，都是重言式。则$\mathscr{A}$要么是一条公理，要么是由两个证明中位于$\mathscr{A}$之前的两个公式$\mathscr{B}$及$\mathscr{B} \to \mathscr{A}$通过MP规则得到的。前者已经讨论过，对于后者，$\mathscr{B}$及$\mathscr{B} \to \mathscr{A}$肯定是通过长度小于$n$的证明得到的定理，据归纳假设，它们肯定是重言式。再由命题1.9可得，$\mathscr{A}$也是重言式。原题得证。

(回顾)命题1.9

如果命题形式$\mathscr{B}$和$\mathscr{B} \to \mathscr{A}$是重言式，那么$\mathscr{A}$也是重言式。

形式系统L的可靠性，一致性和完备性

讨论

如果向L中添加新的公理，会出现哪些情形？

- 原来的定理肯定仍是定理。
- 可能得到一些新的定理。
- 如添加的公理不是原系统的定理，则必可得到新定理。

定义2.15 扩充

一个L的**扩充**是一个通过更改或者添加L的公理集而得到的一个形式系统，使得所有L的定理仍是定理(也有可能引入了新定理)。

讨论

注意！扩充的含义相当于集合的$\subseteq$而不是$\subset$。事实上L也是自己的一个扩充。

形式系统L的可靠性，一致性和完备性

讨论

- 更改L的公理，但不改变L的定理是可能的。
- 存在与L有相同定理，但公理完全不同的形式系统。
- 我们向L中添加越多的公理，我们就能推得越多的定理。但不管如何，我们不希望一个扩充既可以推出$\mathscr{A}$，又可以推出$\sim\mathscr{A}$。

定义2.16 一致性

一个L的扩充是**一致的**，如果不存在一个公式$\mathscr{A}$使得$\mathscr{A}$与$\sim\mathscr{A}$都是L的定理。

形式系统L的可靠性，一致性和完备性

命题2.17

系统L是一致的。

证明

假设L不是一致的。则存在一个公式$\mathscr{A}$使得$\vdash_L \mathscr{A}$及$\vdash_L \sim \mathscr{A}$。据可靠性定理，$\mathscr{A}$与$\sim \mathscr{A}$都是重言式，而这是不可能的。所以$L$是一致的。

什么条件能保证一个L的扩充还是一致的？

形式系统L的可靠性，一致性和完备性

命题2.18

L的扩充L^*是一致的，当且仅当存在一个公式不是L^*的定理。

证明

$\Rightarrow$ 设L^*是一致的，那么对任意公式$\mathscr{A}$要么$\mathscr{A}$不是定理，要么$\sim\mathscr{A}$不是定理。

$\Leftarrow$ 假设L^*不一致，那么所有公式都是L^*的定理。因L^*不一致，因此存在一个公式$\mathscr{B}$使得$\vdash_{L^*}\mathscr{B}$且$\vdash_{L^*}\sim\mathscr{B}$，据命题2.11我们有$\vdash_L(\sim\mathscr{B}\to(\mathscr{B}\to\mathscr{A}))$，又因$L^*$是$L$的扩充，有$\vdash_{L^*}(\sim\mathscr{B}\to(\mathscr{B}\to\mathscr{A}))$。应用MP规则两次可得$\vdash_{L^*}\mathscr{A}$。注意，此处$\mathscr{A}$是不加限制的，可以为任意的$L$的公式。原题得证。

形式系统L的可靠性，一致性和完备性

讨论

- 一个不一致的系统中，每一个公式都是定理(矛盾推出一切)。一个所有公式都是定理的系统，和一个没有定理的系统(什么都推不出来)一样无意义。
- 保证系统一致性的充分条件非常弱。因为一个一致的系统存在很多(事实上是无穷)公式，都不是定理。比如，每个定理的否定，都不是定理。
- 如何做到扩充系统(得到新定理)但又能保证其一致性？

形式系统L的可靠性，一致性和完备性

命题2.19

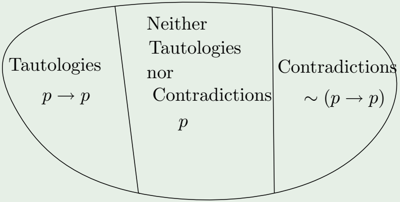
令L^*为L的一个一致的扩充，且令$\mathscr{A}$为L的一个公式，但并非L^*的定理。那么将$\sim\mathscr{A}$当成L^*的新公理而得到的系统L^{**}也是一致的。

讨论

直观地说，如果$\mathscr{A}$不是L一个定理(重言式)，那么将$\sim\mathscr{A}$当成公理加入L得到的系统仍是一致的。

形式系统L的可靠性，一致性和完备性

讨论



- 永真式：如$p \to p$，作为公理加入不影响一致性。
- 既非永真式又非永假式：如p，作为公理加入也不影响一致性。
- 永假式：如$\sim (p \to p)$，加入作为公理将导致不一致。

形式系统L的可靠性，一致性和完备性

命题2.19

令L^*为L的一个一致的扩充，且令$\mathscr{A}$为L的一个公式，但并非L^*的定理。那么将$\sim\mathscr{A}$当成L^*的新公理而得到的系统L^{**}也是一致的。

证明

令$\mathscr{A}$为一个公式，但不是L^*的定理。假设将$\sim\mathscr{A}$当成新公理加入L^*后得到的系统L^{**}不一致。易见$\vdash_{L^{**}}\mathscr{A}$(矛盾得到一切)。这等于是说，在系统$L^*$中，我们有$\{\sim\mathscr{A}\}\vdash_{L^*}\mathscr{A}$，因为$L^{**}$就是$L^*$中添加$\sim\mathscr{A}$得到的。那么由演绎定理我们有$\vdash_{L^*}\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A}$。又因为$(\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A})\to\mathscr{A}$是$L$的定理，因此它也是$L^*$的定理，即$\vdash_L^*(\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A})\to\mathscr{A}$。由MP可以得到$\vdash_{L^*}\mathscr{A}$，即$\mathscr{A}$是$L^*$的定理，这与假设矛盾。所以$L^{**}$必是一致的。

形式系统L的可靠性，一致性和完备性

显然，通过添加公理的方法得到一致的扩充是有限度的。换句话说，我们不能无限地加入新公理而一直得到一致的扩充系统。

定义2.20

一个L的扩充被称为是**极大**的，如果对于任一公式$\mathscr{A}$，要么$\mathscr{A}$要么$\sim \mathscr{A}$是这个扩充的定理。

讨论

- L远不是极大的。比如，既推不出p_1也推不出$\sim p_1$。
- 任何一个不一致的系统都是极大的。因为“矛盾推出一切”。
- 如果L^c是一个L的**极大一致扩充**，那么任何将L^c进一步真扩充的企图都将使其变成不一致。因为令$\mathscr{A}$ 不是L^c的定理，那么$\sim \mathscr{A}$是L^c的定理。那么如果$\mathscr{A}$是进一步真扩充后的定理，则这个系统肯定是不一致的。

形式系统L的可靠性，一致性和完备性

命题2.21

令L^*是L的一个一致扩充。那么存在一个L^*的极大一致扩充。

证明

令$\mathscr{A}_0, \mathscr{A}_1, \ldots$为所有$L$的公式的枚举。我们来构造一个$L^*$的扩充序列$J_0, J_1, \ldots$。令$J_0 = L^*$，如果$\vdash_{J_0} \mathscr{A}_0$，令$J_1 = J_0$。如果$\nvdash_{J_0} \mathscr{A}_0$，则令$J_1$为从$J_0$中添加$\sim \mathscr{A}_0$作为公理而得到的系统。总体上说，我们是这样从$J_{n-1}$构造$J_n$ $(n \geq 1)$的：如果$\vdash_{J_{n-1}} \mathscr{A}_{n-1}$，那么令$J_n = J_{n-1}$，如果$\nvdash_{J_{n-1}} \mathscr{A}_{n-1}$，则令$J_n$为向$J_{n-1}$添加新公理$\sim \mathscr{A}_{n-1}$得到的系统。

L^*也即J_0，是一致的。对于所有的$n \geq 1$，如果J_{n-1}是一致的，那么J_n也是一致的(命题2.19)。所以，任一个$J_n (n \geq 0)$都是一致的。令J为L^*的这样一个扩充：它的所有公理就是那些至少在一个J_n中充当过公理的那些公式。我们接下来证明J是一致的。

形式系统L的可靠性，一致性和完备性

证明

设J不一致。那么存在一个公式$\mathscr{A}$使得$\vdash_J \mathscr{A}$及$\vdash_J \sim \mathscr{A}$。因为这两个推导过程(证明)肯定是有穷多步的(因公式是有穷长的)，所以每一个过程只包含可数多个J的公理。则必有一个足够大的n，使得J_n包含了所有这些使用过的公理。那么有$\vdash_{J_n} \mathscr{A}$及$\vdash_{J_n} \sim \mathscr{A}$。但这与$J_n$是一致的相矛盾。所以$J$是一致的。

下面证J是极大的。令$\mathscr{A}$为一个L的公式，$\mathscr{A}$必然出现在$\mathscr{A}_0, \mathscr{A}_1, \ldots$序列中。不妨设$\mathscr{A}$是$\mathscr{A}_k$。那么如果$\vdash_{J_k} \mathscr{A}_k$，则$\vdash_J \mathscr{A}_k$，因为$J$是$J_k$的扩充。如果$\nvdash_{J_k} \mathscr{A}_k$，则按构造有$\vdash_{J_{k+1}} \sim \mathscr{A}_k$，我们同样有$\vdash_J \sim \mathscr{A}_k$。所以在任何情况下我们要么有$\vdash_J \mathscr{A}_k$，要么有$\vdash_J \sim \mathscr{A}_k$。所以$J$是极大的。

形式系统L的可靠性，一致性和完备性

命题2.22

如果L^*是一个L的一致扩充,那么存在一个指派使得每一个L^*的定理都取T。

证明

为了更具一般性，我们先考虑L的一个极大一致扩充J，为每一个J的定理都构造一个使其为T的指派。令v为一个从公式到$\{T,F\}$的函数，且令$v(\mathscr{A})=T$当且仅当$\vdash_J \mathscr{A}$，$v(\mathscr{A})=F$当且仅当$\vdash_J \sim \mathscr{A}$。注意到，因$J$是极大的，对任意公式$\mathscr{A}$，要么$\vdash_J \mathscr{A}$要么$\vdash_J \sim \mathscr{A}$，则$v$对所有公式都有定义，又因$J$是一致的，所以$v(\mathscr{A}) \neq v(\sim \mathscr{A})$。为了证明$v$是一个指派，仍需证$v(\mathscr{A} \to \mathscr{B})=F$当且仅当$v(\mathscr{A})=T$且$v(\mathscr{B})=F$。假设$v(\mathscr{A})=T$，$v(\mathscr{B})=F$但$v(\mathscr{A} \to \mathscr{B})=T$。由$v$的构造可知$\vdash_J \mathscr{A}$，$\vdash_J \sim \mathscr{B}$，$\vdash_J \mathscr{A} \to \mathscr{B}$。由MP得$\vdash_J \mathscr{B}$，这与$J$的一致性矛盾。$\Leftarrow$方向得证。

形式系统L的可靠性，一致性和完备性

证明

另一个方向，设$v(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) = F$，且要么$v(\mathscr{A}) = F$要么$v(\mathscr{B}) = T$。则有$\vdash_J \sim (\mathscr{A} \to \mathscr{B})$，及$\vdash_J \sim \mathscr{A}$或者$\vdash_J \mathscr{B}$。由于有

$$\vdash_J \sim \mathscr{A} \to (\mathscr{A} \to \mathscr{B}), \quad \vdash_J \mathscr{B} \to (\mathscr{A} \to \mathscr{B})$$

据MP规则，我们总有$\vdash_J \mathscr{A} \to \mathscr{B}$，这与$J$一致相矛盾。$\Rightarrow$方向得证。$v$是一个指派。现令$\mathscr{A}$是$L^*$的定理。由于$J$是$L^*$的扩充，我们有$\vdash_J \mathscr{A}$，注意到如上构造的$v$即满足$v(\mathscr{A}) = T$。

形式系统L的可靠性，一致性和完备性

命题2.23 L的完备性定理

如果L的公式$\mathscr{A}$是一个重言式，那么$\vdash_L \mathscr{A}$。

证明

设L的公式$\mathscr{A}$是一个重言式，但它不是L的定理。那么通过增加$\sim\mathscr{A}$作为公理的L的扩充L^*是一致的。可见存在一个指派v使得L^*的每一定理都为T，因$\sim\mathscr{A}$也是L^*的定理，那么有$v(\sim\mathscr{A})=T$。因$\mathscr{A}$是重言式，又有$v(\mathscr{A})=T$，矛盾。所以$\mathscr{A}$必为L的定理。

形式系统L的公理独立性

公理的独立性

一个形式系统的某条公理被称为是独立的，如果它不能被其余公理所推导出来。

如何证明公理的独立性？

某条公理确实被其余公理推导出来了，那么它不是独立的。比如，下面的系统P中：

P1 $\mathscr{A} \to \mathscr{A}$

P2 $\mathscr{A} \to (\mathscr{B} \to \mathscr{A})$

P3 $(\mathscr{A} \to (\mathscr{B} \to \mathscr{C})) \to ((\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to (\mathscr{A} \to \mathscr{C}))$

P4 $(\sim \mathscr{A} \to \sim \mathscr{B}) \to (\mathscr{B} \to \mathscr{A})$

显然P1不是独立的，因为已知它可通过P2与P3用MP规则推导得到。但若没找到这样的证明呢？我们对它的独立性便下不了任何论断。

形式系统L的公理独立性

如何证明公理的独立性？(续)

因此，要证明某条公理的独立性，必须证明它与其它公理有一些不一样的特殊性质。这在文献中通常是用多值逻辑的方法来实现的。简单地说，我们证明在某种多值的真值表下，MP规则可以保证一些公理的特殊性质，但确不保证另一些公理具有该性质，从而证明后者不能通过前者应用MP规则来得到。

形式系统L的公理独立性

定理1.形式系统L中公理L1是独立的。

证明

考察以下三值的真值表：

A	$\sim A$
0	1
1	1
2	0

A	B	$A \to B$
0	0	0
1	0	2
2	0	0

A	B	$A \to B$
0	1	2
1	1	2
2	1	0

A	B	$A \to B$
0	2	2
1	2	0
2	2	0

形式系统L的公理独立性

练习

试写出L2及L3在上述真值表下的值。

A	B	C	$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
0	1	0	0
1	1	0	0
2	1	0	0
	$\ldots$		$\ldots$

A	B	$(\sim A \to \sim B) \to (B \to A))$
0	0	0
1	0	0
2	0	0
	$\ldots$	$\ldots$

形式系统L的公理独立性

观察

- L2及L3在该真值表下均取0，称这样的公式为*select*
- 如$A, A \to B$均取0，则B也取0，即MP保Select性质。
- 由上可知，在L2和L3上应用MP规则，得到的也是Select.
- 问题：L1在上述真值表下是不是Select?

答案是否定的，因为:

A	B	$A \to (B \to A)$
0	0	0
1	0	0
2	0	0
	$\dots$	$\dots$
1	2	2

形式系统L的公理独立性

证明(续)

由于L2及L3均是Select，且MP保Select性质。则所有从L2及L3出发应用MP得到的必然是Select. 然而L1不是Select，所以L1不能通过L2及L3应用MP得到，所以，L1是独立的。

形式系统L的公理独立性

定理2.形式系统L中公理L2是独立的。

证明

考察以下三值的真值表：

A	$\sim A$
0	1
1	0
2	1

A	B	$A \to B$
0	0	0
1	0	0
2	0	0

A	B	$A \to B$
0	1	2
1	1	2
2	1	0

A	B	$A \to B$
0	2	1
1	2	0
2	2	0

形式系统L的公理独立性

练习

试写出L1及L3在上述真值表下的值。

A	B	$A \to (B \to A)$
0	1	0
1	1	0
2	1	0
	$\ldots$	$\ldots$

A	B	$(\sim A \to \sim B) \to (B \to A))$
0	0	0
1	0	0
2	0	0
	$\ldots$	$\ldots$

形式系统L的公理独立性

观察

- L1及L3在该真值表下均取0，称这样的公式为*grotesque*
- 如$A, A \to B$均取0，则B也取0，即MP保grotesque性质。
- 即在L1和L3上应用MP，得到的也是grotesque.
- 问题：L2在上述真值表下是不是grotesque?

答案是否定的，因为:

A	B	C	$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
0	1	0	0
1	1	0	0
2	1	0	0
	$\ldots$		$\ldots$
0	0	1	2

形式系统L的公理独立性

证明(续)

由于L1及L3均是grotesque，且MP保grotesque性质。则所有从L1及L3出发应用MP得到的必然是grotesque. 然而L2不是grotesque，所以L2不能通过L1及L3应用MP得到，所以，L2是独立的。

形式系统L的公理独立性

定理3.形式系统L中L3是独立的。

证明

我们来尝试一种不用多值逻辑的办法来证明。令B是一个公式，$h(B)$为将B中所有否定号$\sim$去掉而得到的公式。公式B被称为Super，如果$h(B)$是一个重言式。易见$L1$及$L2$均为Super. 且可证若$A \to B$及A是super，则B也是Super，即MP保Super性质。但易见$L3$: $(\sim A \to \sim B) \to (B \to A)$不是Super, 所以它不可能通过L1及L2用MP得到。

思考

可否用真值表的方法来证明L3的独立性？

其它命题逻辑公理系统

Consult Rosser 1953,三条公理加MP

1. $A \to (A \wedge A)$
2. $(A \wedge B) \to A$
3. $(A \to B) \to (\neg(B \wedge C) \to \neg(C \wedge A))$

Meredith 1953，一条公理加MP

1. $[(((B \to C) \to (\neg D \to \neg E)) \to D) \to F] \to [(F \to B) \to (E \to B)]$

还有没有更简洁的系统？Yes !!!

Nicod 1917，一条公理一个联系词

1. $(B|(C|D))|\{[E|(E|E)]|[(F|C)|((B|F)|(F|F))]\}$
2. 规则：从B及$B|(C|D)$得到D

形式系统L的可靠性，一致性和完备性

可判定性(可计算理论的基本概念)

一个集合A是可判定的，如果对于任意元素a，存在一个机械能行过程在有穷步内回答:

$$\begin{cases} Yes & \text{如果} a \in A, \\ No & \text{如果} a \notin A\text{。} \end{cases}$$

注意

这个机械能行过程必须能对上述两种情形都在有穷步内作出回答，集合A才能称为可判定。若只能对第一个情形回答，即如果$a \in A$该过程能回答Yes,而$a \notin A$时无法回答No的话，A被称为部分可判定的(Partially-Decidable)或者半可判定的(Semi-Decidable)。如果一个集合不是可判定的，又称其不可判定。(存在一些集合，甚至不是部分可判定的)

形式系统L的可靠性，一致性和完备性

命题2.24 L的判定性

形式系统L是**可判定的**。(即一个公式是否L的定理是可判定的)

证明

据L的可靠性和完备性可知，公式$\mathscr{A}$是L的定理当且仅当它是重言式。那么写出并考察$\mathscr{A}$的真值表就是一个有穷机械判断$\mathscr{A}$是否为定理的过程。

著名的不可判定问题

停机问题(Halting Problem)是**不可判定的**。它的意思是，任给出一个程序，计算机运行这个程序是否可以正常停止(不死机，不死循环)？停机问题不可判定表明我们无法事先用一种机械能行的方法知道一个程序会否导致死机。换句话说，人类无法设计出一个判定所有其它程序正确性的超级程序。

形式系统L的可靠性，一致性和完备性

作业

令$\mathscr{A}$是L的一个公式。L^+是L的一个将$\mathscr{A}$在增加成公理的扩充。证明L^+与L的定理集不同，当且仅当$\mathscr{A}$不是L的定理。

证明

$\Rightarrow$ 证如果$\mathscr{A}$是L的定理那么L^+与L的定理集相同。设$\mathscr{A}$是L的定理但L^+与L的定理集不同，则存在一个公式$\mathscr{B}$，$\vdash_{L^+} \mathscr{B}$，但是$\nvdash_L \mathscr{B}$。因L中增加$\mathscr{A}$为公理得到L^+，因此有$\mathscr{A} \vdash_L \mathscr{B}$，即$\vdash_L \mathscr{A} \to \mathscr{B}$。又因$\vdash_L \mathscr{A}$，据MP可得$\vdash_L \mathscr{B}$。矛盾，原方向得证。
$\Leftarrow$ 设$\mathscr{A}$不是L的定理。但因$\mathscr{A}$是L^+的公理，因而也是一步可得的定理。所以L^+与L的定理集不同。

形式系统L的可靠性，一致性和完备性

证明$((\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to \mathscr{A}) \to \mathscr{A}$

(1)	$(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to \mathscr{A}$	假设
(2)	$\sim \mathscr{A} \to (\mathscr{A} \to \mathscr{B})$	命题2.11(a)
(3)	$\sim \mathscr{A} \to \mathscr{A}$	(1), (2), HS
(4)	$(\sim \mathscr{A} \to \mathscr{A}) \to \mathscr{A}$	命题2.11(b)
(5)	$\mathscr{A}$	(3)(4)MP

因此有$(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to \mathscr{A} \vdash_L \mathscr{A}$，据演绎定理
有$\vdash_L ((\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to \mathscr{A}) \to \mathscr{A}$。