附四章：形式谓词演算*FQC*

沈榆平
yuping.shen.ilc@gmail.com

中山大学逻辑与认知研究所

2015年11月

形式系统FQC

系统FQC定义

形式系统FQC由以下部分组成：

- 字母表：
  - 常元符号：$a_1, a_2, \ldots,$
  - 谓词符号：$A_1^1, A_2^1, \ldots; A_1^2, A_2^2, \ldots; A_1^3, A_2^3, \ldots$
  - 函数符号：$f_1^1, f_2^1, \ldots; f_1^2, f_2^2, \ldots; f_1^3, f_2^3, \ldots$
  - 变元符号：$x_1, x_2, \ldots$
  - 联结词符号：$\sim, \rightarrow, \wedge, \vee, \leftrightarrow$
  - 量词符号：$\forall, \exists$
  - 辅助符号：(,), ,

形式系统FQC

系统FQC定义

- 公式的集合:
  - 常元与变元符号是项;如果$t_1, \ldots, t_n$是项,f_i^n是一个n元函数符号,那么$f_i^n(t_1, \ldots, t_n)$也是项;
  - 如果A_j^m是一个m元谓词符号,$t_1, \ldots, t_m$是项,那么$A_j^m(t_1, \ldots, t_m)$是原子公式; 原子公式是FQC的公式;如果$\mathscr{A}$,$\mathscr{B}$是FQC的公式,那么$\sim \mathscr{A}$,$\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}$,$\mathscr{A} \vee \mathscr{B}$,$\mathscr{A} \to \mathscr{B}$,$\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}$,$(\forall x_i)\mathscr{A}$,$(\exists x_i)\mathscr{A}$也是FQC公式,其中$x_i$为变元符号;

形式系统FQC

系统FQC定义

- FQC没有公理。
- *FQC*的推演规则分三类，分别称**结构规则**，**联结词规则**与**量词规则**，其中结构规则有三条：
  - 假设规则(Hyp)：假设某个公式成立；

$$\begin{array}{l|ll} & \mathscr{A} & \text{Hyp} \\ \hline & \vdots & \ldots \end{array}$$

注意

FQC的每个证明都从假设出发，假设下又可以有假设。这一点与FPC相同。

形式系统FQC

系统FQC定义

- 重复规则(Rep)：一个假设下出现过的公式(包括假设本身)可以在当前的假设中重复出现；

$$
\begin{array}{|ll}
\mathscr{A} & \ldots \\
\vdots & \ldots \\
\mathscr{A} & \text{Rep} \\
\vdots & \ldots
\end{array}
$$

形式系统*FQC*

系统*FQC*定义)

- 引用规则(Reti)：一个假设下出现过的公式(包括假设本身)可以在之后的假设中引用；

$$
\begin{array}{|ll}
\mathscr{A} & \ldots \\
\vdots & \ldots \\
\begin{array}{|l} \mathscr{B} \\ \hline \vdots \\ \mathscr{A} \end{array} & \begin{array}{l} \text{Hyp} \\ \ldots \\ \text{Reti} \end{array}
\end{array}
$$

形式系统FQC

系统FQC定义

FQC联结词规则有九条：

- $(\rightarrow +)$规则：若假设$\mathscr{A}$可得到$\mathscr{B}$，则推出$\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}$。

$$
\begin{array}{l|ll}
 & \mathscr{A} & \text{Hyp} \\
\cline{2-2}
 & \vdots & \ldots \\
 & \mathscr{B} & \ldots \\
\multicolumn{2}{l}{\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}} & (\rightarrow +)
\end{array}
$$

形式系统FQC

系统FQC定义

- $(\to -)$规则：若有$\mathscr{A}$及$\mathscr{A} \to \mathscr{B}$，则推出$\mathscr{B}$。

$$
\begin{array}{|ll}
\vdots & \dots \\
\mathscr{A} & \dots \\
\mathscr{A} \to \mathscr{B} & \dots \\
\mathscr{B} & (\to -)
\end{array}
$$

形式系统FQC

系统FQC定义

- ($\vee$+)规则：若有$\mathscr{A}$，则推出$\mathscr{A} \vee \mathscr{B}$；或若有$\mathscr{A}$，则推出$\mathscr{B} \vee \mathscr{A}$。

$$\begin{array}{|ll} \vdots & \ldots \\ \mathscr{A} & \ldots \\ \mathscr{A} \vee \mathscr{B} & (\vee+) \end{array} \quad \text{或} \quad \begin{array}{|ll} \vdots & \ldots \\ \mathscr{A} & \ldots \\ \mathscr{B} \vee \mathscr{A} & (\vee+) \end{array}$$

形式系统FQC

系统FQC定义

- $(\vee-)$规则：若有$\mathscr{A} \to \mathscr{C}$，$\mathscr{B} \to \mathscr{C}$及$\mathscr{A} \vee \mathscr{B}$，则推出$\mathscr{C}$。

$$
\begin{array}{|ll}
\vdots & \ldots \\
\mathscr{A} \to \mathscr{C} & \ldots \\
\mathscr{B} \to \mathscr{C} & \ldots \\
\mathscr{A} \vee \mathscr{B} & \ldots \\
\mathscr{C} & (\vee-)
\end{array}
$$

形式系统FQC

系统FQC定义

- $(\wedge+)$规则：若有$\mathscr{A}$及$\mathscr{B}$，则推出$\mathscr{A}\wedge\mathscr{B}$。

$$
\begin{array}{|ll}
\vdots & \cdots \\
\mathscr{A} & \cdots \\
\mathscr{B} & \cdots \\
\mathscr{A}\wedge\mathscr{B} & (\wedge+)
\end{array}
$$

形式系统FQC

系统FQC定义

- $(\wedge -)$规则：若有$\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}$，则推出$\mathscr{A}$；若有$\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}$，则推出$\mathscr{B}$。

$$\begin{array}{|ll} \vdots & \ldots \\ \mathscr{A} \wedge \mathscr{B} & \ldots \\ \mathscr{A} & (\wedge -) \end{array} \quad \text{或} \quad \begin{array}{|ll} \vdots & \ldots \\ \mathscr{A} \wedge \mathscr{B} & \ldots \\ \mathscr{B} & (\wedge -) \end{array}$$

形式系统FQC

系统FQC定义

- $(\leftrightarrow +)$规则：若$\mathscr{A} \to \mathscr{B}$及$\mathscr{B} \to \mathscr{A}$，则推出$\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}$。

$\vdots$	$\ldots$
$\mathscr{A} \to \mathscr{B}$	$\ldots$
$\mathscr{B} \to \mathscr{A}$	$\ldots$
$\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}$	$(\leftrightarrow +)$

形式系统*FQC*

系统*FQC*定义

- $(\leftrightarrow -)$规则：若$\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}$，则推出$\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}$；或者若$\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}$，则推出$\mathscr{B} \rightarrow \mathscr{A}$。

$$\left|\begin{array}{ll} \vdots & \ldots \\ \mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B} & \ldots \\ \mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B} & (\leftrightarrow -) \end{array}\right. \quad \text{或} \quad \left|\begin{array}{ll} \vdots & \ldots \\ \mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B} & \ldots \\ \mathscr{B} \rightarrow \mathscr{A} & (\leftrightarrow -) \end{array}\right.$$

形式系统FQC

系统FQC定义

- $(\neg-)$规则：若假设$\neg\mathscr{A}$可得$\mathscr{B}$及$\neg\mathscr{B}$，则推出$\mathscr{A}$。

$$
\begin{array}{l|ll}
 & \neg\mathscr{A} & \text{Hyp} \\
\cline{2-2}
 & \vdots & \ldots \\
 & \mathscr{B} & \ldots \\
 & \neg\mathscr{B} & \ldots \\
\multicolumn{2}{l}{\mathscr{A}} & (\neg-)
\end{array}
$$

形式系统FQC

系统FQC定义

FQC中含有以下四条量词规则：

- $(\forall+)$规则：若有$\mathscr{A}(x_i/t)$，则推出$(\forall x_i)\mathscr{A}$，其中t对x_i是替换自由的，且t 不在$(\forall x_i)\mathscr{A}$中及$\mathscr{A}(x_i/t)$所**依赖的**假设中自由出现。

$$
\begin{array}{|ll}
\vdots & \ldots \\
\mathscr{A}(x_i/t) & \ldots \\
(\forall x_i)\mathscr{A} & (\forall+)
\end{array}
$$

注意

t不在$\mathscr{A}(x_i/t)$所**依赖的**假设中自由出现，不仅指它不在当前的假设中自由出现，还指它不在位于当前假设之前的假设中自由出现。

形式系统FQC

错误使用$(\forall+)$的例子一

$A_1^1(x_1)$	Hyp
$A_1^1(x_1)$	Rep
$(\forall x_1)A_1^1(x_1)$	$(\forall+)$
$A_1^1(x_1) \to (\forall x_1)A_1^1(x_1)$	$(\to+)$

这是一个错误的推演，$A_1^1(x_1) \to (\forall x_1)A_1^1(x_1)$显然不是逻辑有效的，令$A_1^1(x)$解释成为$x_1$为偶数即可验证。此处错误原因为$x_1$就是$t$，并在假设中有自由出现。

形式系统FQC

错误使用(∀+)的例子二

$$
\begin{array}{l|ll}
 & A_1^1(x_1) & \text{Hyp} \\
\hline
 & A_1^1(x_2/x_1) & \text{Rep} \\
 & A_1^1(x_1) & \text{Rep} \\
 & (\forall x_2)A_1^1(x_2) & (\forall+) \\
\multicolumn{2}{l}{A_1^1(x_1) \to (\forall x_2)A_1^1(x_2)} & (\to+)
\end{array}
$$

同上例，这是一个错误的推演。此处t为x_1，$\mathcal{A}$为$A_1^1(x_2)$，错误原因为t在假设中自由出现。

形式系统FQC

错误使用(∀+)的例子三

$A_1^2(x_1, x_1)$	Hyp
$A_1^2(x_1, x_1)$	Rep
$(\forall x_2)A_1^2(x_2, x_1)$	$(\forall+)$
$A_1^2(x_1, x_1) \to (\forall x_2)A_1^2(x_2, x_1)$	$(\to +)$

同上例，这是一个错误的推演(令A_1^2为$=$，显然。)。此处t为x_1，$\mathcal{A}$为$A_1^2(x_2, x_1)$，错误原因为t在$(\forall x_2)A_1^2(x_2, x_1)$中自由出现。

形式系统FQC

系统FQC定义

- $(\forall-)$规则：若有$(\forall x_i)\mathscr{A}$，则推出$\mathscr{A}(x_i/t)$，其中项t对$\mathscr{A}$中的变元x_i替换自由。

$$
\begin{array}{|ll}
\vdots & \cdots \\
(\forall x_i)\mathscr{A} & \cdots \\
\mathscr{A}(x_i/t) & (\forall-)
\end{array}
$$

注意

从$(\forall x_i)\mathscr{A}$推出$\mathscr{A}$，是$(\forall-)$的一个特例，因为$\mathscr{A}(x_i/x_i)$就是$\mathscr{A}$自己。

形式系统FQC

错误使用(∀−)的例子

$(\forall x_1)(\exists x_2)A_1^2(x_1, x_2)$	Hyp
$(\forall x_1)(\exists x_2)A_1^2(x_1, x_2)$	Rep
$(\exists x_2)A_1^2(x_2, x_2)$	$(\forall -)$
$(\forall x_1)(\exists x_2)A_1^2(x_1, x_2) \to (\exists x_2)A_1^2(x_2, x_2)$	$(\to +)$

这是一个错误的推演，$(\forall x_1)(\exists x_2)A_1^2(x_1, x_2) \to (\exists x_2)A_1^2(x_2, x_2)$不是逻辑有效的，令$A_1^2(x_1, x_2)$解释成为$x_1 < x_2$即可验证。此处错误原因为$x_2$对$(\exists x_2)A_1^2(x_1, x_2)$中的$x_1$替换不自由。

形式系统FQC

系统FQC定义

- $(\exists+)$规则：若有$\mathscr{A}(x_i/t)$，则推出$(\exists x_i)\mathscr{A}$，其中项t对$\mathscr{A}$中的变元x_i替换自由。

$$
\begin{array}{|ll}
\vdots & \ldots \\
\mathscr{A}(x_i/t) & \ldots \\
(\exists x_i)\mathscr{A} & (\exists+)
\end{array}
$$

形式系统FQC

讨论

给出公式$\mathscr{A}(x_i/t)$及t，$\mathscr{A}$可能对应几种情况，确定$\mathscr{A}$取决于实际的需要。令t为x_2，$\mathscr{A}(x_1/t)$为$R_1^2(x_2,x_2)$。

- $\mathscr{A}$可以是$R_1^2(x_1,x_2)$，应用$(\exists+)$得$(\exists x_1)R_1^2(x_1,x_2)$
- $\mathscr{A}$可以是$R_1^2(x_2,x_1)$，应用$(\exists+)$得$(\exists x_1)R_1^2(x_2,x_1)$
- $\mathscr{A}$可以是$R_1^2(x_1,x_1)$，应用$(\exists+)$得$(\exists x_1)R_1^2(x_1,x_1)$
- $\mathscr{A}$可以是$R_1^2(x_2,x_2)$，应用$(\exists+)$得$(\exists x_1)R_1^2(x_2,x_2)$

形式系统FQC

错误使用(∃+)的例子

$$
\begin{array}{l|ll}
 & (\forall x_2)A_1^2(x_2,x_2) & \text{Hyp} \\
\cline{2-2}
 & (\forall x_2)A_1^2(x_2,x_2) & \text{Rep} \\
 & (\exists x_1)(\forall x_2)A_1^2(x_1,x_2) & (\exists+) \\
\end{array}
$$

$$(\forall x_2)A_1^2(x_2,x_2) \to (\exists x_1)(\forall x_2)A_1^2(x_1,x_2) \qquad (\to +)$$

这是一个错误的推演。结论不一个逻辑有效式，把A_1^2解释成等号即可验证。推演中$\mathscr{A}$为$(\forall x_2)A_1^2(x_1,x_2)$，$t$为$x_2$。错误原因为$x_2$对$\mathscr{A}$中的$x_1$替换不自由。

形式系统FQC

系统FQC定义

- $(\exists-)$规则：若有$(\exists x_i)\mathscr{A}$及$\mathscr{A}(x_i/t)\to\mathscr{B}$，则推出$\mathscr{B}$。$t$对$x_i$替换自由，且$t$既不在$(\exists x_i)\mathscr{A}$和$\mathscr{B}$中自由出现，也不在$\mathscr{A}(x_i/t)\to\mathscr{B}$所**依赖的**假设中自由出现。

$$
\begin{array}{|ll}
\vdots & \ldots \\
(\exists x_i)\mathscr{A} & \ldots \\
\mathscr{A}(x_i/t)\to\mathscr{B} & \ldots \\
\mathscr{B} & (\exists-)
\end{array}
$$

注意

$(\exists x_i)\mathscr{A}$成立只是一个"笼统"的信息，我们并不知道哪个具体的值使$\mathscr{A}$成立。但如果找到一个"具体"的t，使得从$\mathscr{A}(x_i/t)$出发可推得$\mathscr{B}$，那么显然可以放心地从$(\exists x_i)\mathscr{A}$出发得到$\mathscr{B}$。

形式系统*FQC*

错误使用(∃−)的例子

$(\exists x_1)P_1^1(x_1)$	Hyp
$P_1^1(x_1) \rightarrow P_1^1(x_1)$	已证
$P_1^1(x_1)$	$(\exists -)$
$(\exists x_1)P_1^1(x_1) \rightarrow P_1^1(x_1)$	$(\rightarrow -)$

这是一个错误的推演。结论不一个逻辑有效式，把P_1^1理解为"是奇数"即可验证。推演中x_1在$P_1^1(x_1)$中自由出现了。

形式系统*FQC*

定义

系统*FPC*中的一个证明，就是按上述三类规则构造的一个有穷公式序列。如果一个证明中引入的假设并未通过$(\neg -)$与$(\rightarrow +)$完全消除，则称其为**假设性证明**，否则称**非假设性证明**。一个非假设性证明的最后一个公式$\mathscr{A}$称为*FQC*的定理，也称$\mathscr{A}$在*FQC*中可证，记作$\vdash_{FQC} \mathscr{A}$。

形式系统FQC

证明$\vdash_{FQC} (\forall x_i)\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{A}$

$(\forall x_i)\mathscr{A}$	Hyp
$\mathscr{A}(x_i/x_i)$ (即$\mathscr{A}$)	$(\forall -)$
$\mathscr{A}$	(Rep)
$(\forall x_i)\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{A}$	$(\rightarrow +)$

注意，x_i对自己在任何公式中都是代入自由的。

形式系统FQC

证明$\vdash_{FQC} \mathscr{A} \to (\forall x_i)\mathscr{A}$，其中$x_i$不在$\mathscr{A}$中自由出现。

$\mathscr{A}$	Hyp
$(\forall x_i)\mathscr{A}$	$(\forall+)$ x_i不在$\mathscr{A}$中自由出现(t就是x_i)
$\mathscr{A} \to (\forall x_i)\mathscr{A}$	$(\to +)$

形式系统FQC

证明$\vdash_{FQC} \mathscr{A} \to (\exists x_i)\mathscr{A}$。

$\mathscr{A}$	Hyp
$\mathscr{A}(x_i/x_i)$	x_i对自己替换自由 Rep
$(\exists x_i)\mathscr{A}$	$(\exists+)$
$\mathscr{A} \to (\exists x_i)\mathscr{A}$	$(\to +)$

形式系统FQC

证明$\vdash_{FQC} (\exists x_i)\mathscr{A} \to \mathscr{A}$，$x_i$不在$\mathscr{A}$中自由出现。

$$
\begin{array}{l|ll}
 & (\exists x_i)\mathscr{A} & \text{Hyp} \\
\cline{2-2}
 & \mathscr{A} \to \mathscr{A} & \text{已证} \\
 & \mathscr{A} & x_i\text{不在}\mathscr{A}\text{自由出现}\ (\exists -) \\
\multicolumn{2}{l}{(\exists x_i)\mathscr{A} \to \mathscr{A}} & (\to +)
\end{array}
$$

因x_i不在$\mathscr{A}$中自由出现，所以可以使用$(\exists -)$规则。

形式系统FQC

证明$\vdash_{FQC} (\forall x_i)\mathscr{A} \rightarrow (\exists x_i)\mathscr{A}$

$(\forall x_i)\mathscr{A}$	Hyp
$\mathscr{A}$	$(\forall -)$
$\mathscr{A}(x_i/x_i)$	x_i对自己替换自由Rep
$(\exists x_i)\mathscr{A}$	$(\exists +)$
$(\forall x_i)\mathscr{A} \rightarrow (\exists x_i)\mathscr{A}$	$(\rightarrow +)$

形式系统FQC

证明$\vdash_{FQC} (\exists x_i)\mathscr{A} \to (\forall x_i)\mathscr{A}$，其中$x_i$不在$\mathscr{A}$中自由出现。

$(\exists x_i)\mathscr{A}$	Hyp
$\mathscr{A} \to \mathscr{A}$	已证
$\mathscr{A}$ x_i不在其中自由出现	$(\exists-)$
$(\forall x_i)\mathscr{A}$	$(\forall+)$
$(\exists x_i)\mathscr{A} \to (\forall x_i)\mathscr{A}$	$(\to +)$

由于x_i不在$\mathscr{A}$中自由出现，当然更不可能在$(\forall x_i)\mathscr{A}$或者$(\exists x_i)\mathscr{A}$中出现，可以使用$\exists-$与$\forall+$规则。

形式系统*FQC*

如果x_i不在$\mathscr{A}$中自由出现，我们有：

- $\vdash_{FQC} \mathscr{A} \leftrightarrow (\forall x_i)\mathscr{A}$
- $\vdash_{FQC} \mathscr{A} \leftrightarrow (\exists x_i)\mathscr{A}$
- $\vdash_{FQC} (\exists x_i)\mathscr{A} \leftrightarrow (\forall x_i)\mathscr{A}$

可以看出，对于不在一个公式中自由出现的变元，用全称量词和不用全称量词约束，用存在量词或者不用存在量词约束，以及用全称量词和用存在量词约束都是可证等价的。

形式系统FQC

证明$\vdash_{FQC} (\forall x_i)(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to (\mathscr{A} \to (\forall x_i)\mathscr{B})$，其中$x_i$不在$\mathscr{A}$中自由出现。

$(\forall x_i)(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$	Hyp
$\mathscr{A} \to \mathscr{B}$	$(\forall-)$
$\mathscr{A}$	Hyp
$\mathscr{A} \to \mathscr{B}$	Reti
$\mathscr{B}$	$(\to -)$
$(\forall x_i)\mathscr{B}$	$(\forall+)$
$\mathscr{A} \to (\forall x_i)\mathscr{B}$	$(\to +)$
$(\forall x_i)(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to (\mathscr{A} \to (\forall x_i)\mathscr{B})$	$(\to +)$

对$(\forall x_i)$规则，x_i没有在$\mathscr{A}$中自由出现，也没有在依赖的假设中自由出现。

形式系统FQC

证明$\vdash_{FQC} (\mathscr{A} \to (\forall x_i)\mathscr{B}) \to (\forall x_i)(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$，其中$x_i$不在$\mathscr{A}$中自由出现。

$\mathscr{A} \to (\forall x_i)\mathscr{B}$	Hyp
$\quad \mathscr{A}$	Hyp
$\quad \mathscr{A} \to (\forall x_i)\mathscr{B}$	Reti
$\quad (\forall x_i)\mathscr{B}$	$(\to -)$
$\quad \mathscr{B}$	$(\forall -)$
$\mathscr{A} \to \mathscr{B}$	$(\to +)$
$(\forall x_i)(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$	$(\forall +)$
$(\mathscr{A} \to (\forall x_i)\mathscr{B}) \to (\forall x_i)(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$	$(\to +)$

对$(\forall x_i)$规则，x_i没有在$\mathscr{A}$中自由出现，也没有在依赖的假设中自由出现。

形式系统FQC

练习

- $\vdash_{FQC} (\forall x_i)(\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}) \leftrightarrow ((\exists x_i)\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B})$ x_i不在$\mathscr{B}$中自由出现
- $\vdash_{FQC} (\forall x_i)(\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}) \rightarrow ((\exists x_i)\mathscr{A} \rightarrow (\exists x_i)\mathscr{B})$
- $\vdash_{FQC} (\forall x_i)(\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}) \rightarrow ((\forall x_i)\mathscr{A} \rightarrow (\forall x_i)\mathscr{B})$
- $\vdash_{FQC} (\exists x \exists y)\mathscr{A} \rightarrow (\exists y \exists x)\mathscr{A}$
- $\vdash_{FQC} (\exists x \forall y)\mathscr{A} \rightarrow (\forall y \exists x)\mathscr{A}$(考虑反方向)
- $\vdash_{FQC} (\exists x)(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}) \rightarrow (\exists x)\mathscr{A} \wedge (\exists x)\mathscr{B}$
- $\vdash_{FQC} (\exists x)(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}) \leftrightarrow (\exists x)\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}$, x不在$\mathscr{B}$中自由出现。
- $\vdash_{FQC} (\forall x)(\mathscr{A} \vee \mathscr{B}) \leftrightarrow (\forall x)\mathscr{A} \vee \mathscr{B}$,$x$不在$\mathscr{B}$ 中自由出现。