第三章：非形式谓词演算

沈榆平
yuping.shen.ilc@gmail.com

中山大学逻辑与认知研究所
2014年11月

谓词与量词

谓词演算又称**谓词逻辑**，**一阶演算**，**一阶逻辑**等。命题演算考虑简单命题或者复合命题，特别地，我们把简单命题视为不可再分的。这样的约定使命题逻辑不能正确地表示一些有效的推理。

例子

$$\begin{array}{ll} & \text{所有人都会死。} \\ & \text{苏格拉底是人，} \\ \therefore & \text{苏格拉底会死。} \end{array}$$

这样的论证明显是有效的。但在命题演算中，它却是无效的，由于$A, B, \therefore C$是一个无效的推理形式。出现这种情况的是因为命题演算没有考虑简单命题内部的结构导致的。

谓词与量词

如果考虑简单命题的内部结构，上述论证的一个合适的论证形式应当是：

例子

所有的A是B。
C是一个A，
∴ C也是B。

这里涉及到命题的**量词与谓词**的观念。简单地说，量词对主语的数量作出声明，如上例中"所有的"，谓词则声明主语的某种属性，如上例中"会死的"(谓词也称**关系**)。显然，对于涉及量词和谓词的论证，命题逻辑已经不能正确地处理。

谓词与量词

谓词相关的命题

- 苏格拉底是人。
- 平方为-1的数不是实数。

其中下划线为主语。我们可以用小写字母表示主语，大写字母$A, B, C, \ldots$表示谓词，将这类命题表示如下：

- 用$A(s)$表示"苏格拉底是人"，其中A表示性质"是人"，s表示主语(更一般的说，是**对象**)。
- $B(j)$表示"平方为-1的数不是实数"，其中B表示性质"不是实数"，j表示"平方为-1的数"。
- 第二个命题的另一种表示是$(\sim (S(j)))$，其中S表示性质"是实数"，j的意义不变。

谓词与量词

量词相关的命题

- 每个整数都有素数因子。
- 所有人都是会死的。

此处划线的部分，对对象的数量作出了声明。我们可以用将这类命题表示如下：

- $(\forall x)(I(x) \to P(x))$，其中$\forall$表示"所有的，每一"，称为**全称量词**，$I(x)$表示"$x$是整数"，$P(x)$ 表示"x有素数因子"。
- 类似的，第二个命题可以表示为$(\forall y)(A(y) \to M(y))$。

谓词与量词

量词相关的命题

- 有些猪会飞。
- 这个命题逻辑上可重写为"至少有一只猪会飞"。

此处划线的部分，也对对象的数量作出了声明。我们可以用将这类命题表示如下：

$$(\exists x)(G(x) \wedge F(x))$$

其中$\exists$表示"存在，至少有一"，称为**存在量词**。如果把表示对象的x, y看成变元，那么受量词作用的变元被称为**约束变元**。将来会看到有些变元是不受量词约束的。如$P(x) \wedge (\forall y)(F(y))$，此处的$x$是不受量词作用的，又称**自由变元**。

谓词与量词

量词相关的命题

- 并非所有的鸟都会飞。可以表示为$\sim(\forall x)(B(x)\rightarrow F(x))$不难看出，它也可以表示成为$(\exists x)(B(x)\wedge\sim F(x))$，
- 有些人是愚蠢的。可以表示为$(\exists x)(Hu(x)\wedge FO(x))$，也可表示为$\sim(\forall x)(Hu(x)\rightarrow\sim FO(x))$。

类似的例子还有很多，这说明$\forall$与$\exists$可以很容易地互相转换。

一个常见的模式是，量词$\forall$后面通常有个蕴含式(所有的对象都有某性质)，而量词$\exists$后面则通常有个合取式(一些对象有某性质)。

一阶语言

经典的三段论逻辑就是一个简单的带谓词的演算，但为了更深入地研究谓词演算，我们引入**一阶语言**的定义。

一阶语言$\mathscr{L}$的字母表

一阶语言$\mathscr{L}$的字母表由下列符号构成：

- 非逻辑符号：
  - 常元符号：$a_1, a_2, \ldots,$
  - 谓词符号：$A_1^1, A_2^1, \ldots; A_1^2, A_2^2, \ldots; A_1^3, A_2^3, \ldots$
  - 函数符号：$f_1^1, f_2^1, \ldots; f_1^2, f_2^2, \ldots; f_1^3, f_2^3, \ldots$
- 逻辑符号：
  - 变元符号：$x_1, x_2, \ldots$
  - 联结词符号：$\sim, \rightarrow,$
  - 量词符号：$\forall$
  - 辅助符号：(,), ,

存在很多不同的一阶语言，它们的差异一般在于非逻辑符号的不同。特别的，非逻辑符号可以为空。

一阶语言

Figure: The Simpsons Family

一阶语言

一阶语言 $\mathscr{L}_{Simpsons}$

非逻辑符号：

- 常元符号：$Homer, Marge, Bart, Lisa, Maggie$
- 谓词符号：$Father^2, Mother^2, Sister^2, Brother^2, >^2$
- 函数符号：Age^1

逻辑符号：$\mathscr{L}_{Simpsons}$逻辑符号与$\mathscr{L}$相同。

- $Father^2(Homer, Bart), Mother^2(Marge, Bart)$
- $Brother^2(Bart, Lisa), Sister^2(Lisa, Maggie), Sister^2(x_1, x_2)$
- $(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(Father(x_1, x_2) \wedge Father(x_1, x_3) \rightarrow Brother^2(x_2, x_3) \vee Sister^2(x_2, x_3))$
- $(\forall x_1)(>^2 (Age(Homer), Age(x_1)))$ ...

一阶语言

一阶语言$\mathscr{L}$与自然数算术

- a_1表示0
- A_1^2表示$=$
- f_1^2表示$+$，f_2^2表示$\times$

那么$A_1^2(f_1^2(x_1,x_2),f_2^2(x_1,x_2))$可以解释(看成是)$x_1+x_2=x_1\times x_2$。

一阶语言$\mathscr{L}$与群论

- a_1表示自等元id
- A_1^2表示$=$
- f_1^1表示逆元函数，f_1^2表示一个群的二元运算。

那么$A_1^2(f_1^2(x_1,f_1^1(x_1)),a_1)$可以解释(看成是)$x_1\circ x_1^{-1}=id$。

一阶语言

事实上，我们已经直观了解了一阶语言中公式的构造。下面逐步给出正式的定义：

定义3.6

令$\mathscr{L}$为一个一阶语言，一个**项**是如下定义的：

- 常元符号与变元符号是项；
- 如果f^n是$\mathscr{L}$中的一个n元函数符号，且$t_1, \ldots, t_n$都是$\mathscr{L}$中的项，那么$f^n(t_1, \ldots, t_n)$也是项；
- 所有的项都是由以上两步产生的。

不难看出，项的实质是语言中的对象。注意，项的构造不涉及逻辑符号，甚至也不涉及谓词符号！下面这些都是(对应一阶语言的)项：

$$a_1, x_1, f_1^1(x_1), f_1^2(a_3, x_4), Age^1(Homer), \ldots$$

一阶语言

定义:原子公式

如果A^k是一个$\mathscr{L}$的k元谓词符号(关系符号)，$t_1, \ldots, t_k$是$\mathscr{L}$中的项，那么$A^k(t_1, \ldots, t_k)$是一个$\mathscr{L}$的**原子公式**。

原子公式是$\mathscr{L}$中可以表示声明，断言，或者说对象性质的最简单的表达式。

定义:合适公式

一个$\mathscr{L}$的**合适公式**(公式)，是如下定义的：

- 每一个$\mathscr{L}$的原子公式都是$\mathscr{L}$的公式；
- 如果$\mathscr{A}$与$\mathscr{B}$是公式，那么$(\sim \mathscr{A})$,$(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$，$(\forall x_i)\mathscr{A}$也是公式，其中$x_i$为任意$\mathscr{L}$的变元符号。
- 所有的$\mathscr{L}$的公式都由以上两步产生。

一阶语言

讨论

- 如果$A_1^1(x_2)$是一个公式，那么$(\forall x_1)A_1^1(x_2)$也是公式。也就是说，量词后紧跟的变元不一定要出现在之后的公式部分中。
- 我们没有引入$\exists, \wedge, \vee$等符号，因为我们知道它们可以被$\forall, \sim, \rightarrow$等价地表示。
- 为了简便，我们消去与$\sim$直接联系的括号，比方说$(\sim \mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B})$实质上是$((\sim \mathscr{A}) \rightarrow \mathscr{B})$的简写。
- 要注意$((\forall x_1)\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B})$是一个没有省略任何括号的公式，它和$(\forall x_1)(\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B})$是完全不同的公式。我们将详细地讨论这一区别。

一阶语言

定义3.8

给一个$\mathscr{L}$的公式$(\forall x_i)\mathscr{A}$，我们称$\mathscr{A}$是量词$\forall$的**辖域**。更一般地，如果$(\forall x_i)\mathscr{A}$是公式$\mathscr{B}$的子公式，我们称此量词在$\mathscr{B}$中的辖域是$\mathscr{A}$。一个变元符号x_i在一个公式中的出现被称为是**约束**的，如果它出现在公式中$(\forall x_i)$的辖域内，或者它就是$(\forall x_i)$中的x_i。如果一个变元符号的出现不是约束的，便称**自由**的。一个变元符号在一个公式内可能既有约束出现，又有自由出现。

例子

- $(\forall x_1)A_1^1(x_2)$中，x_1是约束出现，x_2是自由出现。
- $(\forall x_1)(\forall x_2)(A_1^2(x_1,x_2) \to A_1^1(x_2))$中，$x_1$与$x_2$都约束出现。
- $(\forall x_1)(A_1^2(x_1,x_2) \to (\forall x_2)A_1^1(x_2))$中，$x_1$的两次出现都是约束的，而$x_2$第一次出现是自由的，第二次出现是约束的。

一阶语言

约定

令$\mathscr{A}(x_i)$表示公式$\mathscr{A}$，x_i为其中可能出现的变元符号。设t为一个项，$\mathscr{A}(x_i/t)$(也记作$\mathscr{A}(t)$)为把$\mathscr{A}$中所有自由出现的x_i都替换成t得到的公式。

例子

令$\mathscr{A}$为$(\forall x_1)A_1^1(x_2)$，t为项$f(a)$，据约定：

- $\mathscr{A}(x_2/t)$为$(\forall x_1)A_1^1(f(a))$
- $\mathscr{A}(x_1/t)$仍为$(\forall x_1)A_1^1(x_2)$，因式中根本没有自由出现的x_1

一阶语言

定义3.11

令$\mathscr{A}$为$\mathscr{L}$的一个公式。一个项t对x_i在$\mathscr{A}$中是**替换自由**的，如果x_i的每个自由出现不在$(\forall x_j)$的辖域内，其中x_j是某个t中的变元符号。

直观解释

简单地说，一个项t对公式中的某个变元x_1是替换自由的，如果将t放入x_1**自由出现**的位置后，t中的变元不与已有的量词发生相互作用。

如对$((\forall x_1)A_1^2(x_1, x_2) \to (\forall x_3)A_2^2(x_3, x_1))$

- $f_1^2(x_1, x_4)$对x_2不是替换自由的，$f_2^2(x_2, x_3)$对x_2是替换自由的，x_2对x_1是替换自由的，$f_3^2(x_1, x_3)$对x_1不是替换自由的。

据定义，对任意的x_i对自身在任何公式中都是替换自由的；
若x_i在公式中没有自由出现，任意的t对它都是替换自由的。

关系与函数

n元组

一个n元组(或者称有序对)是一个由n个元素(或者对象)排成的序列$\langle b_1, \ldots, b_n \rangle$。

元组与集合的区别在于元素在元组中是有**顺序**的。比如说$\langle 1, 3 \rangle$与$\langle 3, 1 \rangle$是两个不同的二元组。但集合$\{1, 3\}$与$\{3, 1\}$通常被认为是没有区别的。$\langle 1, 1 \rangle$与$\langle 1 \rangle$也是完全不同的，而集合$\{1, 1\}$与$\{1\}$通常也认为是相同的。

讨论

事实上，有序对可以用集合来定义。比如$\langle a, b \rangle$在集合论中被定义为$\{\{a\}, \{a, b\}\}$。而$\langle a, b, c \rangle$可看成是$\langle \langle a, b \rangle, c \rangle$，定义为$\{\{\{a\}, \{a, b\}\}, \{\{\{a\}, \{a, b\}\}, c\}\}$，如此类推。

关系与函数

笛卡尔积

令$A_1, A_2, \ldots, A_n$为n个集合，它们的笛卡尔积，记为$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$是一个$n$元组的集合$\{\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle | a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n\}$。

例子

令$A = \{1, 3\}, B = \{a, f\}, C = \{\bullet\}, D = \emptyset$，则：

- $A \times B \times C = \{\langle 1, a, \bullet\rangle, \langle 1, f, \bullet\rangle, \langle 3, a, \bullet\rangle, \langle 3, f, \bullet\rangle\}$
- $A \times C = \{\langle 1, \bullet\rangle, \langle 3, \bullet\rangle\}$
- $B \times D = \emptyset$

关系与函数

n元关系

我们称R是一个建立在$A_1, A_2, \ldots, A_n$上的n元关系，如果$R \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$。为方便也常记为$R^n$

例子

令$A = \{1, 3\}, B = \{a, f\}, C = \{\bullet\}$:

- $R = \{\langle 1, f, \bullet\rangle, \langle 3, a, \bullet\rangle\}$为$A \times B \times C$上的一个三元关系
- $R = \{\langle 1, \bullet\rangle, \langle 3, \bullet\rangle\}$是$A \times C$上的一个二元关系
- $R = \{\langle a, a\rangle, \langle a, f\rangle, \langle f, f\rangle\}$是$B \times B$上的一个二元关系。

惯例

关系通常和谓词不作区别。如定义$R(a_1, \ldots, a_n)$成立当且仅当$\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \in R$，定义$R = \{\langle a_1, \ldots, a_n\rangle | R(a_1, \ldots, a_n)成立\}$。为方便，$R(a, b)$成立常写为$aRb$

关系与函数

二元关系的性质

令R为集合A上的二元关系，则：

- R是自反的(Reflexive)，如果对任意$a \in A$，aRa(或$R(a,a)$成立)；$=, \subseteq$关系
- R是反自反的(Irreflexive)，如果对任意$a \in A$，并非aRa(或$R(a,a)$不成立)；$<$关系
- R是对称的(Symmetric)，如果对任意$a, b \in A$，$aRb \Rightarrow bRa$；$=$关系
- R是反对称的(Antisymmetric)，如果对任意$a, b \in A$，aRb且$bRa \Rightarrow a = b$；$\leq, <, =$关系
- R是传递的(Transitive)，如果对任意$a, b, c \in A$，aRb且$bRc \Rightarrow aRc$；$<, \leq, =$关系
- R是一个偏序关系，如果它是自反的，反对称的和传递的；$\subseteq, \leq$关系。

关系与函数

无论在理论中还是现实中，我们常常需要表达两个集合之间元素的一种特别的关系。

例子

- 本班每个同学都有唯一个学号。
- 每个人有唯一的亲生父亲。
- 电影院里每个位置都有唯一的座号。

注意到这些情形中，对每个对象都存在着一个**唯一**的与之对应的对象。这种关系称为**函数**(又称映射Mapping)。

关系与函数

函数

令A与B为两个集合。一个从A到B的函数(或者映射)f，记为$f: A \mapsto B$，是一个$A \times B$上的二元关系，使得对于每一个$a \in A$，存在唯一一个$b \in B$使得$\langle a, b \rangle \in f$。$\langle a, b \rangle \in f$常记为$f(a) = b$。其中$A$与$B$分别称为$f$的定义域和值域。

例子

- 函数$g: \{1, 2, 3\} \mapsto \{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit\}$，
  $g(1) = \diamondsuit$,$g(2) = \clubsuit$,$g(3) = \clubsuit$;
- 可写成二元关系$g = \{\langle 1, \diamondsuit \rangle, \langle 2, \clubsuit \rangle, \langle 3, \clubsuit \rangle\}$
- 但$g = \{\langle 1, \diamondsuit \rangle, \langle 1, \heartsuit \rangle, \langle 2, \clubsuit \rangle, \langle 3, \clubsuit \rangle\}$则不是函数；
- 多元函数也可以转写成关系的形式。比如二元函数$f: \{1, 2\} \times \{\clubsuit, \heartsuit\} \mapsto \{\clubsuit, \heartsuit\}$，$f(1, \clubsuit) = \clubsuit, f(2, \heartsuit) = \clubsuit \ldots$;
  写成关系为$f = \{\langle \langle 1, \clubsuit \rangle, \clubsuit \rangle, \langle \langle 2, \heartsuit \rangle, \clubsuit \rangle, \ldots\}$

关系与函数

函数性质

一个函数$f : A \mapsto B$被称为是：

- 单射的，如果$a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$；
- 满射的，如果任意一个$b \in B$，都存在一个$a \in A$使得$f(a) = b$；
- 双射的(一一对应)，如果f既是单射的，又是满射的。

例子

- 函数$g_1 : \{1, 2, 3\} \mapsto \{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit\}$，
  $g(1) = \diamondsuit$,$g(2) = \clubsuit$,$g(3) = \clubsuit$不是单射，也不是满射。
- 函数$g_2 : \{1, 2, 3\} \mapsto \{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$，
  $g(1) = \diamondsuit$,$g(2) = \clubsuit$,$g(3) = \heartsuit$是单射，但不是满射。
- 函数$g_3 : \{1, 2, 3\} \mapsto \{\clubsuit, \diamondsuit\}$，
  $g(1) = \diamondsuit$,$g(2) = \clubsuit$,$g(3) = \clubsuit$不是单射，但是满射。

关系与函数

例子

- 函数$g_4 : \{1, 2, 3\} \mapsto \{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit\}$, $g(1) = \heartsuit$,$g(2) = \clubsuit$,$g(3) = \diamondsuit$既是单射，也是满射。所以也称双射或者一一对应。

一阶语言的解释

我们之前介绍了一些一阶语言的例子如家庭关系，数学理论等。同于形式语言本身是没有含义的，这些例子事实上预先假设了相关的**论域**，并把语言中的符号看成是(解释成) 论域中的**实际**的常元，谓词等。

一阶语言$\mathscr{L}_{Simpsons}$

一阶语言$\mathscr{L}_{Simpsons}$中的符号都是没有意义的，比如$Homer$,$Bart$, $Father^2$等等只是一些字母组成的符号串。但如果把论域定Simpsons一家，考虑成员的关系，成员的年纪等，就可与语言中的符号关联起来。这就给语言$\mathscr{L}_{Simpsons}$一个**解释**。

一阶语言的解释

为方便，常把一个一阶语言$\mathscr{L}$记为：

$$\mathscr{L} = \{a_i\} \bigcup \{A_j^m\} \bigcup \{f_k^n\} (i, j, k, n, m \geq 0)$$

即把$\mathscr{L}$ 简记为一些非逻辑符号的集合。

一阶语言的解释

对于论域D，一阶语言$\mathscr{L} = \{a_i\} \bigcup \{A_j^m\} \bigcup \{f_k^n\} (i, j, k, n, m \geq 0)$的解释$I$是一个如下定义的映射：

- 对每一个$a_i \in \mathscr{L}$, $I(a_i)$是D中的一个元素；
- 对每一个$f_k^n \in \mathscr{L}$, $I(f_k^n)$是D上的一个n元函数；
- 对每一个$A_j^m \in \mathscr{L}$, $I(A_j^m)$是D上的一个m元关系；

有时也将I, D放在一起记为$\mathscr{M} = \langle I, D \rangle$，称$\mathscr{M}$为一个结构。

一阶语言的解释

$\mathscr{L}_{Simpsons}$的解释

我们对$\mathscr{L}_{Simpsons}$的解释I建立在论域D上，其中D包含这个家庭的所有成员，$I(Homer)$为家庭中的父亲，$I(Bart)$为家庭中的儿子，$I(Father^2)$为这个家庭成员中的父子/女关系，等等。

一阶语言的解释

不同记法

本书中把

$$\mathscr{L} = \{a_i\} \bigcup \{A_j^m\} \bigcup \{f_k^n\} (i, j, k, n, m \geq 0)$$

在D上的解释I简记成四元组$\langle D_I, \{\bar{a}_i\}, \{\bar{f}_k^n\}, \{\bar{A}_j^m\} \rangle$。其中带上划线的常元/谓词/函数分别对应着$I(a_i), I(f_k^n), I(A_j^m)$

注意：教材中把论域D也看成是I的一部分,记为D_I，这是一种较少见的记法。

一阶语言的解释

讨论

课本例3.5(a)的例子中，使用的非逻辑符号是：a_1, A_1^2, f_1^2, f_2^2。我们给出的解释是：$\langle \mathbb{N}, \{0\}, \{=\}, \langle +, \times \rangle \rangle$，那么

$$(\forall x_1)(\forall x_2) \sim (\forall x_3)(\sim A_1^2(f_1^2(x_1, x_2), x_3))$$

意即“对所有的$x_1, x_2 \in \mathbb{N}$，存在$x_3 \in \mathbb{N}$使$x_1 + x_2 = x_3$”。我们之前也看到，同一个语言也可以有完全不同的解释。如在另外一个解释$\langle \mathbb{S}, \{1\}, \{=\}, \{\times, \backslash\} \rangle$下，此公式的意思是“对所有的$x_1, x_2 \in \mathbb{S}$，存在$x_3 \in \mathbb{S}$,使$x_1 \times x_2 = x_3$”

一阶语言的解释

习题12

习题12. 我们对公式$(\forall x_1)((A_1^1(x_1) \to A_1^1(f_1^1(x_1)))$可以给出一个解释：论域为$\mathbb{N}$，$\bar{A}_1^1$表示一元关系"是偶数"，$\bar{f}_1^1(x_1) = x_1 + 2$，显然原公式在这个解释下是成立的。但如果我们把$f_1^1$解释成$\bar{f}_1^1(x_1) = x_1 + 1$，则原公式是不成立的。

满足，真

讨论

我们已经知道，判断一阶公式成立与否必须与具体的解释相联系。
请考虑下面的公式在前例解释下成立情况:

$$(\forall x_1)(A_1^1(x_1) \rightarrow A_1^1(f_1^1(x_1))) \wedge A_1^1(x_2)$$

自由变元x_2的值未知!

仅靠解释来研究一阶公式是不足够的。我们还缺乏对自由变元这类对象的赋值。注意：没有自由变元的公式，其成立与否在任一解释下都是确定的。

满足，真

定义3.17

一个解释I中的**赋值**v是一个从$\mathscr{L}$的项的集合到D_I的函数，使得：

1. 对$\mathscr{L}$中的每个常元符号a_i，$v(a_i) = \bar{a}_i$ (即$I(a_i)$)；
2. 对$\mathscr{L}$中的每个变元符号x_i，$v(x_i) \in D_I$；
3. 对$\mathscr{L}$中的项$t_1, \ldots, t_n$，及$\mathscr{L}$ 中的n元函数符号f_i^n，$v(f_i^n(t_1, \ldots, t_n)) = \bar{f}_i^n(v(t_1), \ldots, v(t_n))$。

不难看出，v的本质是给每一个项分配一个论域中的元素。由于条件2中对变元符号的指派可以有很多不同的情况，所以一个解释中可以有很多不同的赋值。当条件2中每一个变元符号的指派都确定下来了，那么整个赋值v也就确定了。注意，常元符号的分配是由I固定的。

满足，真

定义3.17

两个赋值v与v'被称为i-等价的，如果对于任意的$j \neq i$，都有$v(x_j) = v'(x_j)$。

例子

	x_1	x_2	x_3
v	7	16	23
v'	7	9	23

v与v'是$2-$等价的。

	x_1	x_2	x_3
v	7	9	23
v'	7	9	23

v与v'是$1,2,3-$等价的。

满足，真

讨论

- 一个与v i-等价的赋值v'，仅在x_i上的值**可能**与v不同，其余变元赋值都相同。
- 把赋值v在变元x_i上的值进行变换，得到的都是与之i-等价的赋值。
- 任何一个赋值和自身也是i-等价的，因把x_i处的值看成变换为它自身即可。

满足，真

定义3.20

一个解释I的赋值v称为**满足**一个$\mathscr{L}$的公式$\mathscr{A}$，如果下列条件成立：

- v满足原子公式$A_j^n(t_1,\ldots,t_n)$，如果$\bar{A}_j^n(v(t_1),\ldots,v(t_n))$在$D_I$中为真(或者成立)；
- v满足$(\sim\mathscr{B})$，如果v不满足$\mathscr{B}$；
- v满足$(\mathscr{B}\to\mathscr{C})$，如果$v$满足$(\sim\mathscr{B})$或者$v$满足$\mathscr{C}$；
- v满足$(\forall x_i)(\mathscr{B})$，如果对每一个与$v$ i-等价的赋值v'都满足$\mathscr{B}$。

满足，真

讨论

给出解释$I = \langle \mathbb{N}, \{=\}, \{+\} \rangle$, $v(x) = \bar{2}, v(y) = \bar{3}, v(a_5) = \bar{5}$。考虑公式：

$$A_1^2(f_1^2(x, y), a_5)$$

赋值v满足此公式因：

$$\bar{A}_1^2(v(f_1^2(x, y)), v(a_5))\text{为}$$

$$\bar{A}_1^2(\bar{f}_1^2(v(x), v(y))), v(a_5))$$

而$=(+(\bar{2}, \bar{3})), \bar{5})$是显然成立的。

满足，真

讨论

文献中常见的关于v满足$(\forall x_i)(\mathscr{B})$的另一种理解：赋值$v$满足$(\forall x_i)(\mathscr{B})$，如果将$v$在$x_i$处的值任意更换，$v$仍满足$\mathscr{B}$。更严格地说，先引入下述定义：令$v$为一个赋值，$v(x_i/a)$是将$v$下$x_i$的值更换成某个常元$a$而得到的新赋值。那么，称$v$满足$(\forall x_i)(\mathscr{B})$，如果对于任何$a \in D_I$，$v(x_i/a)$都满足$\mathscr{B}$.

满足，真

讨论

- 对任意v及公式$\mathscr{A}$，v要么满足$\mathscr{A}$，要么不满足$\mathscr{A}$。这可以追溯至给定论域中元素之间的关系，要么成立，要么不成立。
- "v满足$(\forall x_i)(\mathscr{B})$，如果对每一个与$v$ i-等价的赋值v'都满足$\mathscr{B}$"可理解为：首先，v满足$\mathscr{B}$，然后，任何更改$v(x_i)$的值得到的赋值也满足$\mathscr{B}$。
- 将满足定义中的"如果"，换成当且仅当也是一样的。
- 讨论书上例3.22

满足，真

讨论

- 对于一个不在$\mathscr{A}$中自由出现的(甚至不出现的)变元x_i，增加一个量词得到的公式$(\forall x_i)\mathscr{A}$并不影响公式的具体含义。如令$\mathscr{A}$为$(\forall x_1)Even(x_1)$，公式$(\forall x_1)(\forall x_1)Even(x_1)$与之具体含义相同。同样，$(\forall x_2)(\forall x_1)Even(x_1)$具体含义也没改变。
- 但对于一个在公式中自由出现的变元x_i，为之增加量词得到的公式具体含义则通常改变了。如令$\mathscr{A}$为$Even(x_1)$，增加量词后得到$(\forall x_1)Even(x_1)$的含义不一样。前者非真非假，后者为假(在自然数理论下)。

满足，真

替换自由

- 我们之前知道：x_3对$(\forall x_1)A(x_2)$中的x_2是替换自由的，替换后公式直觉含义本质没有改变。
- 但引入赋值与可满足性的概念之后可以发现，通过替换得到的公式与原公式在可满足性上是有差别的。
- 比如x_2对$=(x_2, x_1)$中的自由变元x_1是替换自由的。但替换后的公式$=(x_2, x_2)$与原公式在赋值$v(x_1)=1, v(x_2)=2$下满足性显然不同。
- 再令赋值$v(x_1)=2$，将x_2代入替换x_1后，在赋值v下前后满足性不变。
- 这说明要保证替换前后公式在给定赋值下可满足性等价，需要新代入的项与被代入的自由变元在此赋值下取值相同。

满足，真

命题3.23

令$\mathscr{A}(x_i)$为$\mathscr{L}$的一个公式，其中x_i自由出现。令t为一个项并对$\mathscr{A}(x_i)$ 中的x_i替换自由。设v为一个赋值，v'为与之i-等价的赋值且有$v'(x_i) = v(t)$。那么v满足$\mathscr{A}(x_i/t)$当且仅当v'满足$\mathscr{A}(x_i)$。

证明

首先对项证明一个结论：(1) 对项u及将其中所有x_i替换成t而得的项u'，有$v'(u) = v(u')$。施归纳于u中函数符号的个数k。基始步$k = 0$，u有以下几种情况：

- u是某个常元符号a，因x_i不在其中出现，所以$u' = u = a$。因v'与v对常元指派都相同。所以有$v'(u) = v(u')$。
- u是某个变元符号$x_j, j \neq i$。$u = u' = x_j$，因v'与v i-等价，即除x_i以外的变元指派都相同，所以$v'(u) = v(u')$。
- u是变元符号x_i。那么$u' = t$，直接有$v'(u) = v(u')$。

满足，真

证明(续)

归纳步，设项u中函数符号的个数为$k>0$，且对所有函数符号个数小于k的项，(1)成立。此情形下u形如$f_i^n(u_1,\ldots,u_n)$，其中$u_1,\ldots,u_n$项中的函数符号个数均小于k。u'为$f_i^n(u_1',\ldots,u_n')$，$v(u')$为$\bar{f}_i^n(v(u_1'),\ldots,v(u_n'))$。据归纳假设，$v'(u_1)=v(u_1'),\ldots,v'(u_n)=v(u_n')$，那么$\bar{f}_i^n(v(u_1'),\ldots,v(u_n'))$为$\bar{f}_i^n(v'(u_1),\ldots,v'(u_n))$，即$v'(u)$。(1)证毕。现在施归纳于公式$\mathscr{A}(x_i)$中量词与联结词的个数$k$：

- $k=0$, $\mathscr{A}(x_i)$是原子公式$A_j^m(u_1,\ldots,u_m)$。按定义v'满足$\mathscr{A}(x_i)$，当且仅当$\bar{A}_j^m(v'(u_1),\ldots,v'(u_m))$成立。当且仅当$\bar{A}_j^m(v(u_1'),\ldots,v(u_m'))$成立。当且仅当$v$满足$A_j^m(u_1',\ldots,u_m')$，即$v$满足$\mathscr{A}(x_i/t)$。

满足，真

证明(续2)

归纳步，设项u中联结词与量词符号的个数为$k>0$，且对所有联结词与量词符号个数小于k的项，原命题成立。有以下三种情形：

- $\mathscr{A}(x_i)$形如$(\sim \mathscr{B}(x_i))$。据定义v'满足$(\sim \mathscr{B}(x_i))$，当且仅当v'不满足$\mathscr{B}(x_i)$，据归纳假设，当且仅当v不满足$\mathscr{B}(x_i/t)$，当且仅当v满足$(\sim \mathscr{B}(x_i/t))$，即$\mathscr{A}(x_i/t)$。
- $\mathscr{A}(x_i)$形如$(\mathscr{B}(x_i) \to \mathscr{C}(x_i))$。略
- $\mathscr{A}(x_i)$形如$(\forall x_j)\mathscr{B}(x_i)$。
  - $j=i$。则所有x_i都是约束出现，公式替换无效。原命题显然成立。
  - $j\neq i$。设v不满足$(\forall x_j)\mathscr{B}(x_i/t)$。即存在一个与$v$ j-等价的赋值w，不满足$\mathscr{B}(x_i/t)$。再令w'为一个与w i-等价的赋值，使得$w'(x_i)=w(t)$。那么据归纳假设，w'不满足$\mathscr{B}(x_i)$。

满足，真

证明(续2)

又注意到t对x_i在$(\forall x_j)\mathscr{B}(x_i)$中替换自由，可知$x_j$必不在$t$中出现。因此$v(t)$的值仅与$v(x_k)(k \neq j)$有关，又$v$,$w$是$j$等价，所以$v(t) = w(t)$。又$w'(x_i) = w(t) = v(t) = v'(x_i)$，有$w'$与$v'$ j-等价。由于w'不满足$\mathscr{B}(x_i)$，那么v'不满足$(\forall x_j)\mathscr{B}(x_i)$，即$\mathscr{A}(x_i)$。

满足，真

定义3.24

一个$\mathscr{L}$的公式$\mathscr{A}$在解释I下为**真**，记为$I \models \mathscr{A}$，如果I中的每一个赋值都满足$\mathscr{A}$。$\mathscr{A}$ 为**假**如果不存在I中的赋值满足$\mathscr{A}$。

讨论

- 如果解释$I \models \mathscr{A}$，又称I是$\mathscr{A}$的一个**模型**。
- 存在一些公式，在I中一些赋值下成立，另一些赋值下不成立。这样的公式在I下既非真，又非假。如$x_1 + x_2 = 4$在一些赋值下成立，另一些下不成立。所以它既非真又非假。
- 在一个解释下不可能有既真又假的公式。
- 在一个解释下$\mathscr{A}$为假，当且仅当$(\sim \mathscr{A})$为真。这也说明二者不能同时为真。
- 在一个解释下，$(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$是假的，当且仅当$\mathscr{A}$是真的且$\mathscr{B}$是假的。

满足，真

命题3.26

如果$\mathscr{L}$中公式$\mathscr{A}$及$(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$在解释$I$下为真，那么$\mathscr{B}$在这个解释下也为真。

证明

令v为I中的一个解释。那么v满足$\mathscr{A}$及$(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$。对于后者，据定义又有$v$满足$(\sim \mathscr{A})$或者$\mathscr{B}$。因$v$不可能满足$(\sim \mathscr{A})$，则$v$必满足$\mathscr{B}$。这对任意$v$都成立，所以$\mathscr{B}$在$I$下为真。

满足，真

命题3.27

令$\mathscr{A}$为$\mathscr{L}$的一个公式，I为一个解释。那么$I \models \mathscr{A}$当且仅当$I \models (\forall x_i)\mathscr{A}$。

证明

$\Rightarrow$.设$I \models \mathscr{A}$，则I中任一赋值v都满足$\mathscr{A}$。那么每一个与vi-等价的赋值v' 也满足$\mathscr{A}$。所以有v满足$(\forall x_i)\mathscr{A}$，则$I \models (\forall x_i)\mathscr{A}$。$\Leftarrow$.设$I \models (\forall x_i)\mathscr{A}$，则任一$I$中解释$v$都满足$(\forall x_i)\mathscr{A}$，因而所有与$v$i-等价的赋值$v'$都满足$\mathscr{A}$。又因$v$与自身i-等价，所以$v$满足$\mathscr{A}$。即有$I \models \mathscr{A}$。

推论3.28

令$y_1, \ldots, y_n$为$\mathscr{L}$的变元符号，$\mathscr{A}$为一个公式，I为一个解释。那么$I \models \mathscr{A}$当且仅当$I \models (\forall y_1) \ldots (\forall y_n)\mathscr{A}$。

满足，真

命题3.29

一个解释I中的赋值v满足公式$(\exists x_i)\mathscr{A}$当且仅当存在至少一个与v i-等价的赋值v'满足$\mathscr{A}$。

证明

据定义$(\exists x_i)\mathscr{A}$表示$\sim(\forall x_i)(\sim\mathscr{A})$。令$v$满足$\sim(\forall x_i)(\sim\mathscr{A})$。那么$v$不满足$(\forall x_i)(\sim\mathscr{A})$。则存在与$v$ i-等价的v'不满足$\sim\mathscr{A}$。此v'必满足$\mathscr{A}$。反方向易证。

讨论

系统L与$\mathscr{L}$有相同的联结词$\sim$与$\rightarrow$。我们将L的公式$\mathscr{A}_0$中相同的命题符号统一换成$\mathscr{L}$中某个公式，可得到$\mathscr{L}$公式$\mathscr{A}$。$\mathscr{A}$称为$\mathscr{A}_0$在$\mathscr{L}$中的**代入实例**。如$((\forall x_1)A_1^1(x_1)\rightarrow(\forall x_1)A_1^1(x_1))$就是$p_1\rightarrow p_1$的一个代入实例。

满足，真

定义3.30

一个$\mathscr{L}$的公式$\mathscr{A}$是一个重言式，如果它是一个L的重言式的代入实例。

命题3.31

一个$\mathscr{L}$的重言式在任何一个$\mathscr{L}$解释下都为真。

证明

令$\mathscr{A}$为$\mathscr{L}$的公式，且为L中公式$\mathscr{A}_0$的代入实例。对任意I中的一个赋值v，我们构造一个L的赋值v'：令$p_1, \ldots, p_k$为$\mathscr{A}_0$中出现的命题变元，$\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_k$为分别代入它们得到$\mathscr{A}$的$\mathscr{L}$的公式。对于$1 \leq i \leq k$，令：

$$v'(p_i) = \begin{cases} T & \text{如果}v\text{满足}\mathscr{A}_i \\ F & \text{否则} \end{cases}$$

满足，真

证明(续)

我们证明v满足$\mathscr{A}$当且仅当$v'(\mathscr{A}_0) = T$。施归纳于$\mathscr{A}_0$中联结词的个数n。

- 基始步。$n = 0$。$\mathscr{A}_0$只是一个命题变元p_n。据v'的定义，$v'(p_n) = T$当且仅当v满足$\mathscr{A}$。
- 归纳步。
  情形1：$\mathscr{A}_0$为$\sim \mathscr{B}_0$。那么$\mathscr{A}$为$\sim \mathscr{B}$，其中$\mathscr{B}$是$\mathscr{B}_0$的代入实例。由归纳假设，v满足$\mathscr{B}$当且仅当$v'(\mathscr{B}_0) = T$。也即v不满足$\mathscr{B}$当且仅当$v'(\mathscr{B}_0) = F$，即v满足$\mathscr{A}$当且仅当$v'(\mathscr{A}_0) = T$。
  情形2: $\mathscr{A}_0$为$(\mathscr{B}_0 \to \mathscr{C}_0)$，则$\mathscr{A}$为$(\mathscr{B} \to \mathscr{C})$，其中$\mathscr{B}$，$\mathscr{C}$为$\mathscr{B}_0$，$\mathscr{C}_0$的代入实例。以下各断言是等价的：
  (a) v满足$\mathscr{A}$，
  (b) 要么v满足$\sim \mathscr{B}$或者v满足$\mathscr{C}$，
  (c) 要么v不满足$\mathscr{B}$或者v满足$\mathscr{C}$，

满足，真

证明(续)

(d) 要么$v'(\mathscr{B}_0) = F$或者$v'(\mathscr{C}_0) = T$
(e) $v'(\mathscr{B}_0 \to \mathscr{C}_0) = T$
(f) $v'(\mathscr{A}_0) = T$
归纳证毕。
令$\mathscr{A}$为$\mathscr{L}$的一个重言式，那么它是某个L的重言式$\mathscr{A}_0$的代入实例。
令v为任一解释I中的一个赋值，因$v'(A_0) = T$($\mathscr{A}_0$是重言式)，所以有v满足$\mathscr{A}$。$\mathscr{A}$ 在I下为真。

满足，真

我们之前已经讨论过，含有自由变元的$\mathscr{L}$公式不一定有真假，但不含自由变元的公式肯定非真必假，这类公式也称**闭公式**。

定义3.32

一个$\mathscr{L}$的公式被称为是**闭公式**，如果其中没有自由变元的出现。

闭公式在文献中也常被称为**句子**(Sentence)。

命题3.33

令I与$\mathscr{A}$分别为$\mathscr{L}$的一个解释和公式。如果赋值v与w对任何$\mathscr{A}$中自由变元x_i都有$v(x_i) = w(x_i)$，那么v满足$\mathscr{A}$当且仅当w满足$\mathscr{A}$。

满足，真

证明

施归纳于$\mathscr{A}$中联结词和量词的个数。

- 基始步。$\mathscr{A}$为原子公式$A_i^n(t_1,\ldots,t_n)$。因v与w在任意的出现在$t_1,\ldots,t_n$中的自由变元符号指派相同，又因它们对常元符号指派相同。所以对任$1 \le i \le n$有$v(t_i) = w(t_i)$。因此v满足$\mathscr{A}$当且仅当w满足$\mathscr{A}$。
- 递归步。情形1：$\mathscr{A}$是$\sim\mathscr{B}$。情形2：$\mathscr{A}$是$\mathscr{B}\to\mathscr{C}$。证明显然，略去。情形3：$\mathscr{A}$是$(\forall x_i)\mathscr{B}$。设$v$满足$\mathscr{A}$，令$w'$与$wi$-等价。那么由于$x_i$不在$\mathscr{B}$中自由出现，对任意在$\mathscr{A}$中自由出现的变元$y$ 有$v(y) = w'(y)$。又因每一个与vi等价的赋值v'都满足$\mathscr{B}$，可令v'为：$v'(x_j) = v(x_j), j \neq i$，$v'(x_i) = w'(x_i)$。那么，对$\mathscr{B}$中的自由出现变元$y$，有$v'(y) = w'(y)$。因此据归纳假设，由于$v'$满足$\mathscr{B}$，则$w'$满足$\mathscr{B}$，也即有$w$满足$(\forall x_i)\mathscr{B}$。反方向同理。

满足，真

推论3.34

如果$\mathscr{A}$是$\mathscr{L}$的一个闭公式，I是一个解释，那么要么$I \models \mathscr{A}$要么$I \models \sim \mathscr{A}$。

证明

令$\mathscr{A}$为闭公式，I为解释，v与w为任意赋值。如果y是$\mathscr{A}$中的自由变元，那么$v(y) = w(y)$($\mathscr{A}$中根本没有自由变元)。所以据命题3.33，v满足$\mathscr{A}$当且仅当w满足$\mathscr{A}$。因此，要么所有赋值都满足$\mathscr{A}$，要么所有都不满足$\mathscr{A}$。即么$I \models \mathscr{A}$要么$I \models \sim \mathscr{A}$。

讨论

对于闭公式，我们只需要检查一个赋值就可以知道在一个解释下此公式的真假。

满足，真

定义3.35

$\mathscr{L}$的一个公式$\mathscr{A}$是**逻辑有效的**，如果它在任何解释下都为真。它是**矛盾的**，如果它在任何解释下都为假。

- 注意梳理以下概念：可满足，真，逻辑有效。
- 存在既不是逻辑有效也不是矛盾的$\mathscr{L}$公式。
- 若$\mathscr{A}$，$\mathscr{A} \to \mathscr{B}$是逻辑有效的，那么$\mathscr{B}$也是逻辑有效的。
- $\mathscr{A}$是逻辑有效的，则$(\forall x_i)\mathscr{A}$也是。
- 所有的$\mathscr{L}$的重言式都是逻辑有效的，反之不必然。如$(\forall x_i)\mathscr{A} \to (\exists x_i)\mathscr{A}$。
- 证明公式$\mathscr{A}$不是逻辑有效，一般是构造一个具体的解释及其中的一个赋值，使之不满足此公式。
- 如果证明公式是矛盾的？证明其否定是逻辑有效的。

Skolem化

讨论

考虑公式

$$(\forall x_1)(\exists x_2)\mathscr{B}(x_1, x_2)$$

它的直观含义是：对于所有的x_1，存在x_2使得公式$\mathscr{B}$成立。
可以想像对每一个x_1，有符合条件的一个x_2和它对应，那么这里实际上蕴含了一个选择函数h_1^1，考虑如下公式：

$$(\forall x_1)\mathscr{B}(x_1, h_1^1(x_1))$$

此公式的含义与原公式类似(但不等价)。

Skolem化形式

- 第二个公式通常称为第一个公式的Skolem化形式。
- 这两个公式不是逻辑上等价的，但它们有一种更弱的等价关系：其中一个是矛盾式当且仅当另一个也是矛盾式。

Skolem化

Skolem化实际上是消去公式中可能存在的量词而得到一个固定格式的公式。

Skolem化过程

给一个带量词的公式$\mathscr{A}$，作如下处理：

- 设带量词的部分为$(\exists x_i)\mathscr{B}$且出现在$(\forall x_{i_1})\ldots(\forall x_{i_k})$的辖域内，则将$(\exists x_i)$删去，并把$\mathscr{B}$中出现的每一个$x_i$换成$h_1^k(x_{i_1},\ldots,x_{i_k})$
- 若$(\exists x_i)\mathscr{B}$不出现在任何全称量词的辖域内，则删去$(\exists x_i)$并把$\mathscr{B}$中出现的所有x_i换成常元符号c_i
- 以上两步中的h_1^k与c_i都是没有出现在原公式中的新使用的符号。

Skolem化

例子

- $$(\forall x_1)(\exists x_2)(A_1^2(x_1,x_2) \to (\exists x_3)A_1^3(x_1,x_2,x_3))$$
  的Skolem化形式是：
  $$(\forall x_i)(A_1^2(x_1,h_1^1(x_1)) \to A_1^3(x_1,h_1^1(x_1),h_2^1(x_1)))$$
- $(\exists x_1)(\forall x_2)((A_1^1(x_1) \wedge (\forall x_3)A_1^3(x_1,x_2,x_3)) \to (\exists x_4)(\forall x_5)A_1^3(x_1,x_4,x_5))$的Skolem化形式是：$(\forall x_2)((A_1^1(c_1) \wedge (\forall x_3)A_1^3(c_1,x_2,x_3)) \to (\forall x_5)A_1^3(c_1,h_1^1(x_2),x_5))$

Skolem化

命题3.39

一个$\mathscr{L}$的公式$\mathscr{A}$是一矛盾的当且仅当它的Skloem化形式是矛盾的。

证明

我们在此只给出一个特例的证明。设公式$\mathscr{A}$形如$(\forall x_1)(\exists x_2)\mathscr{B}(x_1,x_2)$，则它的Skolem化形式是$(\forall x_1)\mathscr{B}(x_1,h_1^1(x_1))$，记为$\mathscr{A}^S$。我们来证明：存在一个解释使$\mathscr{A}$为真当且仅当存在一个解释使得$\mathscr{A}^S$为真。$\Rightarrow$ 设有一个解释I使得$\mathscr{A}$为真。那么$(\exists x_2)\mathscr{B}(x_1,x_2)$也在$I$下为真。也即是$I$中任意赋值都满足$(\exists x_2)\mathscr{B}(x_1,x_2)$。令$\bar{a}\in D_I$，令$v$为一个赋值使得$v(x_1)=\bar{a}$。因$v$满足$(\exists x_2)\mathscr{B}(x_1,x_2)$，所以$I$中存在一个与之2等价的赋值$v'$满足$\mathscr{B}(x_1,x_2)$。令$\bar{h}_1^1(\bar{a})=v'(x_2)$。对每一个$\bar{a}_i\in D_I$都可以这么做，因此可完整定义出函数$\bar{h}_1^1$。现在将$I$扩展成解释$I^S$,$I^S$将$h_1^1$解释成函数$\bar{h}_1^1$。

Skolem化

证明

那么每一个I^S中的赋值都满足$\mathscr{B}(x_1, h_1^1(x_1))$，因而$(\forall x_1)\mathscr{B}(x_1, h_1^1(x_1))$在$I^S$中为真。
$\Leftarrow$反方向，我们假设扩展的语言(含有h_1^1)有一个解释I^E使$\mathscr{A}$为真。这意味着I^E中的每一个赋值都满足$\mathscr{B}(x_1, h_1^1(x_1))$。令$I$为与$I^E$相同的一个解释，但不含$h_1^1$的解释。令$v$为$I$的一个赋值，构造一个赋值$v'$使得$v'(x_2) = \bar{h}_1^1(x_1)$，对除$x_1$以外的变元，$v'$与$v$取值相同。那么，$v'$是一个$I$中的赋值满足$\mathscr{B}(x_1, x_2)$且与$v$2等价。那么有$v$满足$(\exists x_2)\mathscr{B}(x_1, x_2)$，也即所有$I$中的赋值都满足$(\exists x_2)\mathscr{B}(x_1, x_2)$，因而$(\forall x_1)(\exists x_2)\mathscr{B}(x_1, x_2)$在$I$中为真。

Skolem化

练习:将下列公式Skolem化

- $(\forall x_1)(\exists x_2)(\forall x_3)A_1^3(x_1,x_2,x_3)$
- $(\exists x_1)((\forall x_2)A_1^2(x_1,x_2) \to (\exists x_3)A_2^2(x_1,x_3))$
- $(\forall x_1)(\sim A_1^1(x_1) \to (\exists x_2)(\exists x_3)(\sim A_1^2(x_2,x_3)))$
- $(\forall x_1)(\exists x_2)(\forall x_3)(\exists x_4)((\sim A_1^2(x_1,x_2) \vee A_2^1(x_1)) \to A_2^2(x_3,x_4))$

答案

- $(\forall x_1)(\forall x_3)A_1^3(x_1,h_1^1(x_1),x_3)$
- $(\forall x_2)(A_1^2(c_1,x_2) \to A_2^2(c_1,c_2))$
- $(\forall x_1)(\sim A_1^1(x_1) \to (\sim A_1^2(h_1^1(x_1),h_2^1(x_1)))$
- $(\forall x_1)(\forall x_3)((\sim A_1^2(x_1,h_1^1(x_1)) \vee A_2^1(x_1)) \to A_2^2(x_3,h_1^2(x_1,x_3)))$

替换自由与替换操作

- 替换操作：令$\mathscr{A}(x_i)$表示公式$\mathscr{A}$，x_i为其中可能出现的变元符号。设t为一个项，$\mathscr{A}(x_i/t)$(也记作$\mathscr{A}(t)$)为把$\mathscr{A}$中**每个自由出现**的x_i都替换成t得到的公式。
- 替换自由：令$\mathscr{A}$为$\mathscr{L}$的一个公式。一个项t对x_i在$\mathscr{A}$中是**替换自由的**，如果x_i的**每个自由出现**不在$(\forall x_j)$的辖域内，其中x_j是某个t中的变元符号。

例子

- 令$\mathscr{A}$为$(\forall x_1)(A_1^1(x_1, x_3))$。$x_2$对$\mathscr{A}$中的$x_1$是替换自由的，因$x_1$完全没有自由出现，但$\mathscr{A}(x_1/x_2)$仍为$(\forall x_1)(A_1^1(x_1, x_3))$。
- 令$\mathscr{A}$为$(\forall x_1)(\forall x_2)(A_1^1(x_1, x_3))$。$x_2$对$\mathscr{A}$中的$x_1$是替换自由的，但$\mathscr{A}(x_1/x_2)$仍为$(\forall x_1)(\forall x_2)(A_1^1(x_1, x_3))$。
- 令$\mathscr{A}$为$(\forall x_1)(\forall x_2)(A_1^1(x_1, x_3))$。$x_2$对$\mathscr{A}$中的$x_3$是替换不自由的，$\mathscr{A}(x_3/x_2)$为$(\forall x_1)(\forall x_2)(A_1^1(x_1, x_2))$。(公式意义将改变)