# 第六章 哥德尔不完全性定理

沈榆平
yuping.shen.ilc@gmail.com

中山大学逻辑与认知研究所

2014年12月

# 引论

**哥德尔不完全性定理**

简单地说，哥德尔不完全性定理指的是：至少存在关于自然数的一个命题$\mathscr{A}$，在一阶算术系统$\mathscr{N}$中，既没有$\vdash_{\mathscr{N}} \mathscr{A}$，也没有$\vdash_{\mathscr{N}} \sim \mathscr{A}$。也即是，$\mathscr{A}$的正确性既不能在$\mathscr{N}$中证明，也不能在$\mathscr{N}$中证否。

哥德尔不完全性定理可以说是二十世纪最重要的数学定理之一，我们在这一章中将介绍哥德尔不完全性定理的证明，由于它的证明涉及到一些艰深的数学，在本课程中将忽略这部分内容，而着重展示证明最主要的思想。由于完整的证明比较长，我们先用简单的语言介绍证明的大概。

## 引论

### 哥德尔不完全性定理证明思想

- 哥德尔给出一个封闭公式$\mathscr{U}$，并证明$\mathscr{U}$与$\sim\mathscr{U}$都不是$\mathscr{N}$的定理。即并非$\vdash_{\mathscr{N}}\mathscr{U}$也非$\vdash_{\mathscr{N}}\sim\mathscr{U}$。他证明无论假设$\mathscr{U}$是$\mathscr{N}$的定理，或者$\sim\mathscr{U}$是$\mathscr{N}$的定理，都将导致矛盾。
- 第一个使用到的特殊证明方法是**哥德尔编码**，它将语言$\mathscr{L}$的每一个符号与一个正整数对应，由此可进一步将任意的公式编码成一个正整数，反之，也可得到任意正整数对应的公式(如果存在与之对应的公式的话)。
- 因此，关于$\mathscr{N}$中公式的描述可以转化成对正整数的描述，甚至可以不区分二者。比如，我们将考察这样一种$D_N$(自然数域)上的二元关系$Pf$，它被定义成: $Pf(m,n)$成立当且仅当$m$是$\mathscr{N}$中公式$\mathscr{A}$的证明(即公式集)的编码，而$n$则是公式$\mathscr{A}$本身的编码。

# 引论

## 哥德尔不完全性定理证明思想

- 不难看出，$\mathscr{N}$中有自由变元出现的公式在自然数模型中被解释成为关于自然数性质的声明，简单说就是认为这些公式描述了一些自然数的性质。比如令$\mathscr{A}(x_1)$为$\exists x_2 P_1^1(x_2, x_1)$，$P_1^1$解释成为小于。则这个公式描述的$x_1$的性质就是：存在一些数小于$x_1$。那么，我们可以很自然地问：**是否存在一个公式正好描述了$Pf$这种性质？**
- 我们将给出这个问题的另外一种提法，在此之前，先回顾一下$\mathscr{N}$符号$a_1, f_1^1(a_1), f_1^1(f_1^1(a_1)), \ldots$被解释成为$0, 1, 2, \ldots$。为了方便，将符号$a_1, f_1^1(a_1), f_1^1(f_1^1(a_1)), \ldots$记为$0, 0^{(1)}, 0^{(2)}, \ldots$。那么我们问：**是否存在一个公式$\mathscr{P}(x_1, x_2)$，使得$\vdash_{\mathscr{N}} \mathscr{P}(0^{(m)}, 0^{(n)})$当且仅当$Pf(m, n)$成立，而$\vdash_{\mathscr{N}} \sim \mathscr{P}(0^{(m)}, 0^{(n)})$当且仅当$Pf(m, n)$不成立？**如果存在这样的公式$\mathscr{P}$，则称$Pf$在$\mathscr{N}$中由$\mathscr{P}$表示。

## 引论

### 哥德尔不完全性定理证明思想

- 哥德尔证明了$Pf$确实是可以用某个$\mathscr{N}$的公式$\mathscr{P}$表示，更一般地，一个性质(关系)可以在$\mathscr{N}$中表示，如果它是**递归**的。在$Pf$的基础上，哥德尔构造了另一个递归的性质$W$: $W(m,n)$成立当且仅当$m$是公式$\mathscr{A}(x_1)$的编码，而$n$是$\mathscr{A}(0^{(m)})$的证明的编码。换句话说，编码$m$的含义是对象$x_1$有某种性质，而$n$的含义则是:编码$m$就具有它自身所描述的那种性质。这是非常有趣的一种自我引用。
- 又由于$W$是递归的，所以它在$\mathscr{N}$中可由某个公式$\mathscr{W}$表示。在$\mathscr{W}$的基础上，可以构造公式$\mathscr{U}$，它表示的是：对于任何自然数$n$，$n$都不是$\mathscr{U}$(它本身) 的证明。换句话说，$\mathscr{U}$的意思是："$\mathscr{U}$在$\mathscr{N}$中不可证。" 显然,如果$\mathscr{U}$是$\mathscr{N}$的定理的话就产生了矛盾. 而且不难看出假设$\sim\mathscr{U}$是定理的话也有矛盾. 这就是哥德尔不完全性定理的证明思路.

## 可表示性

我们之前把项$a_1, f_1^1(a_1), f_1^1(f_1^1(a_1)), \ldots$简记为$0^{(0)}, 0^{(1)}, 0^{(2)}, \ldots$,并称之为**数值项**. 注意它们被解释成为$0, 1, 2, \ldots$

### 命题6.1

令$m, n \in D_N$(即$m, n$是自然数).

- 如果$m \neq n$,那么$\vdash_{\mathcal{N}} \sim (0^{(m)} = 0^{(n)})$
- 如果$m = n$,那么$\vdash_{\mathcal{N}} (0^{(m)} = 0^{(n)})$

### 证明

对于第一个命题,不妨设$m > n$. 则存在一个$k > 0$使得$n = m + k$. 由公理$N2^*$得$\vdash_{\mathcal{N}} (0^{(m)} = 0^{(m+k)} \to 0^{(m-1)} = 0^{(m+k-1)})$, 如果$m > 0$,重复上述公理及HS, 可得$\vdash_{\mathcal{N}} (0^{(m)} = 0^{(m+k)} \to 0^{(0)} = 0^{(k)})$.

## 可表示性

### 证明

因$k>0$,$k-1$仍是自然数且$0^{(k)}$就是$f_1^1(0^{(k-1)})$, 因此我们有$\vdash_{\mathcal{N}} (0^{(m)}=0^{(m+k)}\rightarrow 0^{(0)}=f_1^1(0^{(k-1)}))$. 根据之前的定理, 有$\vdash_{\mathcal{N}} (\sim(0^{(0)}=f_1^1(0^{(k-1)}))\rightarrow\sim 0^{(m)}=0^{(m+k)})$, 又因$(N1^*)$我们有$\vdash_{\mathcal{N}}\sim(0^{(0)}=f_1^1(0^{k-1}))$(没有数的后继为零) 则MP可得$\vdash_{\mathcal{N}}\sim(0^{(m)}=0^{(m+k)})$. 第二个命题,设$m=n$,则$0^{(m)}$与$0^{(n)}$是相同的项, 由等词公理直接得证.

### 讨论

这个命题告诉我们: 等词关系$=(m,n)$在$\mathcal{N}$中是可以表示的. 书上的例子也指出$\leq$关系也是在$\mathcal{N}$中可以表示的.

## 可表示性

### 定义6.3

一个自然数上的$k$元关系$R$在$\mathscr{N}$中**可以表示**，如果存在一个含有$k$个自由变元的公式$\mathscr{A}(x_1,\ldots,x_k)$使得对任何$n_1,\ldots,n_k\in D_N$:

- 如果$R(n_1,\ldots,n_k)$在自然数上成立,那么$\vdash_{\mathscr{N}}\mathscr{A}(0^{(n_1)},\ldots,0^{(n_k)})$,且
- 如果$R(n_1,\ldots,n_k)$在自然数上不成立,那么$\vdash_{\mathscr{N}}\sim\mathscr{A}(0^{(n_1)},\ldots,0^{(n_k)})$

### 定义6.5

一个自然数上的$k$元函数在$\mathscr{N}$中**可以表示**，如果它(看成$k+1$元关系)可以在$\mathscr{N}$由一个含$k+1$个自由变元的公式$\mathscr{A}(x_1,\ldots,x_k,x_{k+1})$表示，使得对任何$n_1,\ldots,n_k,n_{k+1}\in D_N$:

$$\vdash_{\mathscr{N}}(\exists_1 x_{k+1})\mathscr{A}(0^{(n_1)},\ldots,0^{(n_k)},x_{k+1})$$

## 可表示性

**命题6.10**

并非所有自然数上的$k$元函数都在$\mathcal{N}$中可以表示.

**推论6.11**

并非所有自然数上的$k$元关系都在$\mathcal{N}$中可以表示.

**命题6.12**

一个函数(关系)在$\mathcal{N}$中可表示,当且仅当它是递归的.

**$\mathcal{N}$中可表示的常见关系与函数**

- $=$关系,$\leq$关系,...
- 函数$+$,函数$*$,零函数,...

# 递归函数与关系

已知一些关系(或函数)在$\mathcal{N}$中是可以表示的,更进一步地说,某个关系(或函数)在$\mathcal{N}$可表示当且仅当它是**递归**的. 所有的递归函数都是在几个基本函数上应用一些组成规则而生成.

## 基本函数

- 零函数$z : D_N \mapsto D_N$, 对于任意$n \in D_N, z(n) = 0$.
- 后继函数$s : D_N \mapsto D_N$,对于任意$n \in D_N, s(n) = n + 1$.
- 投影函数$p_i^k : D_N^k \mapsto D_N$,对于任意$n_1, \ldots, n_k \in D_N$, $p_i^k(n_1, \ldots, n_k) = n_i$
- 投影函数$p_i^k$的实质是,给出$k$元组中排第$i$的那个元素.

递归函数有三种基本的组成规则: **递归规则**,**组合规则**,以及**最小数运算**. 在基本函数上应用这些规则得到的函数仍是递归的.

# 递归函数与关系

## 递归规则

如果$g$是$D_N$上的一个$k$元函数, $h$是一个$k+2$元函数,那么下述$k+1$元函数$f$是由$g$与$h$递归结合得到的:

1. $f(n_1,\ldots,n_k,0)=g(n_1,\ldots,n_k)$
2. $f(n_1,\ldots,n_k,n+1)=h(n_1,\ldots,n_k,n,f(n_1,\ldots,n_k,n))$

## 例子

- 递归规则的实质是先给出基始步0上的运算(或者操作),然后根据第$n$步上的值来定义第$n+1$步的值,从而得到新的递归函数.
- 注意$n_1,\ldots,n_k$实质上可以为空, 如果这样的话,基始步$f$的值是一常数.

## 递归函数与关系

### 例子

- 比如加法$f_1(m,n)=m+n$是递归的:
  1. $f_1(m,0)=p_1^1(m)=m$,
  2. $f_1(m,n+1)=p_3^3(m,n,s(f_1(m,n)))$ 可简写为$s(f_1(m,n))$
- 乘法$f_2(m,n)=mn$是递归的,它的定义是:
  1. $f_2(m,0)=z(m)$,
  2. $f_2(m,n+1)=p_3^3(m,n,f_1(m,f_2(m,n)))$ 可简写为$f_1(m,f_2(m,n))$
- 注意,我们目前由基本的零函数,投影函数与后继函数出发,生成了递归函数加法与乘法.

## 递归函数与递归关系

### 组合规则

如果$g$是一个$D_N$上的$j$元函数,$h_i^k$是$k$元函数$(1 \le i \le j)$,那么$f(n_1, \ldots, n_k) = g(h_1(n_1, \ldots, n_k), \ldots, h_j(n_1, \ldots, n_k))$是函数$g$与$h_1, \ldots, h_j$的组合.

### 例子

- 组合规则的实质是把几种递归的函数进行结合,得到新的递归函数.
- 比如$f_3(m, n) = mn + mn$是递归的,因为它由加法与乘法结合而得: $f_1(f_2(m, n), f_2(m, n))$.
- 又如$f_4(m, n) = m^2 + mn$由投影,乘法与加法组合得到: $f_4(m, n) = f_1(f_2(p_1^2(m, n), p_1^2(m, n)), f_2(m, n))$

# 递归函数与递归关系

## 最小数运算规则

令$g$是一个$D_N$上的$k+1$元函数,且至少存在一个$n \in D_N$使得对任意$n_1, \ldots, n_k \in D_N$,$g(n_1, \ldots, n_k, n) = 0$. 那么$k$元函数$f$: $f(n_1, \ldots, n_k) = n$,$n \in D_N$为最小的使得$g(n_1, \ldots, n_k, n) = 0$的数. 则$f$称为由$g$通过最小数操作得到的函数.

## 例子

- 最小数运算规则的实质是"搜索",它找出一个最小的使得某个关系成立的数值$n$. 它在可计算性理论中也常表述为: 寻找一个最小的$n$使得关系$P(n)$成立.
- 如令$f_5(n)$为最小的使得$n + q \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$的$q$. 其中$n, p, q \in D_N$. 则$f_5$是通过最小数运算从函数$g(n, p, q) = n + q$除于$p$的余数得到的函数.
- 考虑一下,定义最大数运算合理吗?

## 递归函数与递归关系

### 定义

一个$D_N$上的函数是**递归**的,如果它可以由三个基本函数通过有穷次的组合,递归及最小数运算规则得到. 一个函数是**原始递归**的,如果在基本函数上仅应用了组合及递归规则得到.

### 讨论

- 加法与乘法是原始递归的,生成它们没有用最小数操作.
- 阶乘函数及常元函数是原始递归的,见书上例子.
- $D_N$上的符号函数$sg$及$\bar{sg}$是递归的:

$$sg(n) = \begin{cases} 0 & \text{if } n = 0 \\ 1 & \text{if } n \neq 0 \end{cases} \qquad \bar{sg}(n) = \begin{cases} 0 & \text{if } n \neq 0 \\ 1 & \text{if } n = 0 \end{cases}$$

## 递归函数与递归关系

### 讨论

因符号函数$sg$可被定义为

$$\begin{cases} sg(0) = 0 \\ sg(n+1) = 1 \end{cases}$$

其中$sg(n+1) = 1$是一个常元函数,可由函数$sg'$定义:

$$\begin{cases} sg'(0) = 1 \\ sg'(n+1) = p_2^2(n, sg'(n)) \end{cases}$$

$sg$与$\overline{sg}$函数在可计算理论中有特殊的用途.

## 递归函数与递归关系

在递归函数的基础上,我们可以将递归的概念延伸到关系.

**定义6.17**

令$R$是一个$D_N$上的$k$元关系.$R$的**特征函数**$C_R$,定义为:

$$C_R(n_1,\ldots,n_k)=\begin{cases}0 & \text{如果 } R(n_1,\ldots,n_k)\text{成立}\\ 1 & \text{如果 } R(n_1,\ldots,n_k)\text{不成立}\end{cases}$$

**定义6.18**

一个$D_N$上的关系$R$是**递归的**,如果它的特征函数是递归的.

## 递归函数与递归关系

### 例子

二元关系$R(m,n)$定义为$R(m,n)$成立当且仅当$m+n$是偶数,$R$是递归关系. 我们证明其特征函数

$$f(m,n)=\begin{cases} 0 & \text{如果 } m+n\text{是偶数} \\ 1 & \text{否则} \end{cases}$$

是递归的. 不难看出$f(m,n)$可被定义为$rm_2(m+n)$,其中

$$\begin{cases} rm_2(0)=0 \\ rm_2(n+1)=\bar{sg}(rm_2(n)) \end{cases}$$

, 显然$rm_2$由已知的递归函数通过之前介绍的规则形成,所以也是递归的.

## 递归函数与递归关系

类似的,递归的概念可以进一步应用在集合上.

### 定义

一个自然数的集合$A \subseteq D_N$是递归的,如果它的特征函数是递归的. 一个集合的特征函数就是关系$\in A$的特征函数.

### 例子

- 自然数集合$D_N$是递归的. 它的特征函数就是零函数,对任何自然数它都取值为0.
- 空集$\emptyset$是递归的. 它的特征函数是$s\bar{g}(z(n))$.
- 所有偶数的集合是递归的. 它的特征函数就是递归函数$rm_2$.

## 递归函数与递归关系

**命题6.22**

如果关系$R$与$S$是递归的,那么关系$\bar{R}$,$R \vee S$及$R \wedge S$也是递归的.

**讨论**

因为关系与集合的概念本质上是等价的: 一个关系$P$可以看成是一个所有令$P$成立的元素的集合$P_A = n|P(n)$成立, 一个集合$P_A$可以看成是一个关系$P$,$P(n)$成立当且仅当$n \in P_A$.

**引理6.23**

如果集合$A$与$B$是递归的,那么集合$\bar{A}$,$A \cap B$及$A \cup B$也是递归的.

# 哥德尔数

## 哥德尔数

作为一种证明手段,哥德尔提出的**编码**方法在逻辑与其它领域中被广泛采用. 这种方法的本质是把一些用自然语言或者形式语言表示的信息,转化成**数字**. 比如摩尔斯电码把字母转成0与1, 一本英文字典也可以把所有单词标上数字, 这样,各种信息(句子,甚至长文)都可完整地转成数值.

# 哥德尔数

哥德尔提出了一个从语言$\mathscr{L}$到自然数(正整数)的编码方法. 这个编码方法由一个从语言中的符号到自然数的函数$g$来表示:

## 哥德尔数符号编码

$$g(()=3 \quad g())=5 \quad g(,)=7$$
$$g(\sim)=9 \quad g(\to)=11 \quad g(\forall)=13$$

对$k=1,2,\ldots,$

$$g(x_k)=7+8k \qquad g(a_k)=9+8k$$

对$n=1,2,\ldots,\ k=1,2,\ldots,$

$$g(f_k^n)=11+8\times(2^n\times 3^k) \qquad g(A_k^n)=13+8\times(2^n\times 3^k)$$

# 哥德尔数

## 讨论

- 注意到每一个符号都对应着一个奇数，但并非每个奇数对应着一个符号.
- 每一个奇数(如果对应着一个符号的话)可以简单的求出原对应的符号.

## 例子

- 请找出对应于数字587的符号. (如果存在这样的数) 如果587对应某个符号的话，则它必是某个$x_k, a_k, f_k^n$或者$A_k^n$. 因为其符号的数值小于等于13. 我们先求它除于8的余数. 因$587 = 8 \times 72 + 11$，它必对应某个函数符号$f_k^n$. 再求得$72 = 2^3 \times 3^2$，所以587对应着函数符号$f_2^3$.
- 证明333不对应任何符号. 因$333 = 8 \times 40 + 13$，它有可能是某个$A_k^n$. 但$40 = 2^3 \times 5$，不能对应$2^n \times 3^k$的形式，所以它不对应任何符号.

## 哥德尔数

我们已经给出了从符号到自然数的编码方法，在这个基础上，我们进一步给出从**项**和**公式**到自然数的编码方法:

### 哥德尔字符串的编码

如果$u_1, \ldots, u_k$是$\mathscr{L}$的符号，我们将$u_1 u_2 \ldots u_k$记为$\mathscr{L}$的**字符串**(可能是也可能不是公式)，并定义：

$$g(u_1 u_2 \ldots u_k) = 2^{g(u_1)} \times 3^{g(u_2)} \times \ldots \times p_k^{g(u_k)}$$

其中对任何$i > 0$, $p_i$是第$i$个奇素数且$p_0 = 2$.

# 哥德尔数

## 讨论

- 任何一个$\mathscr{L}$的字符串都能表示成一个自然数，而且不同的字符串对应的自然数不同.
- $g(f_1^1(x_1)) = 2^{g(f_1^1)} \times 3^{g(()} \times 5^{g(x_1)} \times 7^{g())} = 2^{59} \times 3^3 \times 5^{15} \times 7^5$
- 注意字符串的编码肯定是**偶数**，所以很容易区别符号与字符串的编码.
- 从给定的字符串编码求字符串时,先求出该编码可连续整除于2的次数(即求出2的指数),再顺次求出连续整除3的次数,等等.
- 任何一个以素数的偶次方出现的数，或者素数序列间隔中的数，不对应于任何符号.

## 哥德尔数

在字符串的编码方法上，我们进一步构造出**字符串有穷序列**的编码方法:

### 哥德尔字符串有穷序列的编码

如果$s_1, \ldots, s_r$是$\mathscr{L}$的字符串，并定义:

$$g(s_1, s_2 \ldots s_r) = 2^{g(s_1)} \times 3^{g(s_2)} \times \ldots \times p_{r-1}^{g(s_r)}$$

其中对任何$i > 0$, $p_i$是第$i$个奇素数且$p_0 = 2$.

- 注意，一个数不可能既是**字符串**的编码，又是**字符串有穷序列**的编码. 原因在于2的指数对字符串编码时是奇的，而对字符串序列编码时是偶的
- $g$是一个从$\mathscr{L}$的符号，字符串，字符串的有穷序列到自然数的函数. 我们称$g$的值为**哥德尔数**.

# 哥德尔数

## 讨论

哥德尔编码系统的思想是：把对形式系统(比如$\mathscr{N}$)的论断转化成对自然数的论断，然后再将对自然数的论断在形式系统中表示. 比如论断"公式序列$\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$是$\mathscr{N}$中公式$\mathscr{A}$的证明"，可以认为是一个公式序列与一个公式上的关系，进一步可以看成是两个自然数上的关系$Pf(m, n)$，其中$m$是公式序列$\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n$的哥德尔数(编码)，而$n$是$\mathscr{A}$的哥德尔数. 重要的问题在于：$Pf$本身是否在$\mathscr{N}$中可表示？答案是肯定的. 哥德尔证明了存在公式$\mathscr{P}(0^{(m)}, 0^{(n)})$，如果$Pf(m, n)$成立那么$\vdash_{\mathscr{N}} \mathscr{P}(0^{(m)}, 0^{(n)})$，如果$Pf(m, n)$不成立那么$\vdash_{\mathscr{N}} \sim \mathscr{P}(0^{(m)}, 0^{(n)})$. 一些重要的可表示关系见命题6.29.

# 不完全性定理证明

## 递归关系$W$

二元递归关系$W$在不完全性的证明中非常重要. $W(m,n)$成立的含义是: $m$是公式$\mathscr{A}(x_1)$的哥德尔数, 其中$x_1$是一个自由变元. 换句话说,$m$表达的意思是"对象$x_1$有某种$\mathscr{A}$所刻画的性质". 而$n$是公式$\mathscr{A}(0^{(m)})$的**证明**的哥德尔数, 注意公式$\mathscr{A}(0^{(m)})$可以理解为$0^{(m)}$有$\mathscr{A}$所刻画的性质. 那么$n$可以理解成为"$m$具有它自己所描述的那种性质".

## $W$在$\mathscr{N}$中可表示

因为$W$在$\mathscr{N}$中可表示, 所以存在一个公式$\mathscr{W}(x_1,x_2)$使得:

- 如果$W(m,n)$成立,那么$\vdash_{\mathscr{N}} \mathscr{W}(0^{(m)},0^{(n)})$
- 如果$W(m,n)$不成立,那么$\vdash_{\mathscr{N}} \sim \mathscr{W}(0^{(m)},0^{(n)})$

其中$x_1,x_2$是仅有的自由变元.

# 不完全性定理证明

## 公式$\mathscr{U}$的构造

考虑公式$(\forall x_2) \sim \mathscr{W}(x_1, x_2)$, 令$p$为它的哥德尔数. 将$0^{(p)}$代入所有的$x_1$,得到公式$(\forall x_2) \sim \mathscr{W}(0^{(p)}, x_2)$, 记为$\mathscr{U}$. 我们来分析$\mathscr{U}$的含义. 首先,$W$是$\mathscr{W}$的解释, $\mathscr{U}$可以解读为:"对于任何$n \in D_N$, $W(p, n)$不成立", 展开可得: "对于任何$n \in D_N$,并非$p$是$\mathscr{A}(x_1)$的哥德尔数且$n$是$\mathscr{A}(0^{(p)})$的证明的哥德尔数", 注意,$\mathscr{A}(0^{(p)})$就是$\mathscr{U}$, 且$p$是$\mathscr{A}(x_1)$(即$(\forall x_2) \sim \mathscr{W}(x_1, x_2)$)的哥德尔数, 所以上述论断就是: "对于任何$n \in D_N$,$n$不是$\mathscr{U}$的证明(的哥德尔数)", 换句话说,$\mathscr{U}$的含义就是"$\mathscr{U}$不可证".

## 不完全性定理证明

事实上,我们预设$\mathscr{N}$是一致的,否则任何定理都是它的定理,它将是完全的. 除此以外,我们还要考虑一个更强一些的假设.

### 定义6.30

一个与$\mathscr{N}$具有相同语言的一阶系统$S$是**$\omega$一致**的,如果不存在一个公式$\mathscr{A}(x_1)$($x_1$自由出现),使得$\sim(\forall x_1)\mathscr{A}(x_1)$是定理,而且对于每一个$n \in D_N$,$\mathscr{A}(0^{(n)})$也是定理.

### 讨论

注意,即使对于任何$n \in D_N$,$\mathscr{A}(0^{(n)})$是定理,也不代表$(\forall x_1)\mathscr{A}(x_1)$是定理. 因为存在一些非标准模型,其中有些对象不是自然数. 上面的$\omega$一致性只是说,如果每个$n \in D_N$,$\mathscr{A}(0^{(n)})$都是定理,则$\sim(\forall x_1)\mathscr{A}(x_1)$不是定理. 它并不关心$(\forall x_1)\mathscr{A}(x_1)$是不是定理.

# 不完全性定理证明

**命题6.31**

一个与$\mathcal{N}$具有相同语言的一阶系统$S$是$\omega$一致的，那么$S$是一致的.

**证明**

令$\mathscr{A}(x_1)$为$x_1 = x_1$，则对任意$n \in D_N$，$\mathscr{A}(0^{(n)})$都是定理. 那么据$\omega$一致的定义，$\sim (\forall x_1)\mathscr{A}(x_1)$不是$S$的定理. 即$S$是一致的.(只需存在一个不是定理的公式即可)

## 不完全性定理证明

**命题6.32(哥德尔不完全性定理)**

设$\mathcal{N}$是$\omega$一致的, 那么$\mathcal{U}$不是$\mathcal{N}$的定理,$\sim\mathcal{U}$也不是. 也即,如果$\mathcal{N}$是$\omega$一致的,那么$\mathcal{N}$是不完全的.

**证明**

设$\mathcal{U}$是$\mathcal{N}$的定理,$q$是其证明的哥德尔数.
令$p$为$(\forall x_2)\sim\mathcal{W}(x_1,x_2)$的哥德尔数. 则有$W(p,q)$成立, 也即有$\vdash_{\mathcal{N}}\mathcal{W}(0^{(p)},0^{(q)})$. 但$\vdash_{\mathcal{N}}\mathcal{U}$, 即$\vdash_{\mathcal{N}}(\forall x_2)\sim\mathcal{W}(0^{(p)},x_2)$,
由K5及MP得$\vdash_{\mathcal{N}}\sim\mathcal{W}(0^{(p)},0^{(q)})$. 与$\mathcal{N}$是一致的矛盾.
$\mathcal{U}$不是定理, 即$(\forall x_2)\sim\mathcal{W}(0^{(p)},x_2)$不可证. 因此$W(p,q)$对任何数$q$都不成立,即对每一个$q$,$\vdash_{\mathcal{N}}\sim\mathcal{W}(0^{(p)},0^{(q)})$. 根据$\omega$一致性,$\sim(\forall x_2)\sim\mathcal{W}(0^{(p)},x_2)$不是$\mathcal{N}$的定理, 即$\sim\mathcal{U}$不是定理.

## 不完全性定理证明

### 讨论

注意到我们之前讲解时并没有引入$\omega$一致的定义，因为从其它数学方法容易证明$\mathcal{N}$是$\omega$一致的. 但严格地说,其它数学系统的一致性又有待于证明，所以出于严格起见,我们加入$\mathcal{N}$的$\omega$一致性假设.

### 设$\mathcal{N}$是$\omega$一致的

$\mathcal{N}$中有一闭公式,它在模型$N$中为真,但不是$\mathcal{N}$的定理.

### 设$\mathcal{N}$是一致的

$\mathcal{N}$中有一闭公式,它在模型$N$中为真,但不是$\mathcal{N}$的定理.

### 讨论

添加$\mathcal{U}$为$\mathcal{N}$的公理,并不能使$\mathcal{N}$完全. 可以构造另一个类似性质的$\mathcal{U}'$来证明其不完全性. 二阶逻辑也有类似的不完全性质.

## 不完全性定理证明

**命题6.38**

任何一个表达力足够强的一致系统(可以表示自然数算术),如果它的特有公理(非$K$的公理)集是递归的,那么它是不完全的.

**讨论**

- 群论系统$\mathscr{G}$无法表示自然数算术,不认为是一个表达力足够强的系统. 集合论系统ZF是足够强的.所以如果它是一致的,则它是不完全的.
- 事实上,如果允许公理集是非递归的,那么可以构造一个一致且完全的一阶算术系统.
- 最后,我们可以简单地记住: 如果一阶算术系统$\mathscr{N}$是一致的,那么它是不完全的.