绪论 及 第一章：非形式命题演算

沈榆平
yuping.shen.ilc@gmail.com

中山大学逻辑与认知研究所
2015年9月

什么是数理逻辑?

数理逻辑

简单地讲，数理逻辑是一门用数学方法来研究推理的有效性(或者正确性)的学科。

数理逻辑的发展史

- 2000多年前：亚里士多德传统逻辑—三段论
- 17世纪：“莱布尼兹之梦”—精确、可演算的通用语言
- 19世纪中：布尔—命题逻辑演算
- 19世纪末：弗雷格，皮尔斯—谓词逻辑演算
- 20世纪初：皮亚诺，罗素，哥德尔—逻辑演算与数学基础
- 20世纪中：图灵，冯诺依曼，麦卡锡—逻辑与计算机

命题(Propositions)与联结词(Connectives)

人们现实世界中使用的自然语言句子，有一部分是非真必假的，我们把这些句子称为**命题**。

命题例子

- 我们班学习委员是湖南人。
- 地球是圆的。
- 月亮是用奶酪做成的。

上述命题是最简单的并且不可再分，我们称它们为**简单命题**或者**原子命题**(Atomic Propositions)。

符号

我们用大写正体字母$A, B, C, \ldots$来表示简单命题。

命题(Propositions)与联结词(Connectives)

简单命题通过**联结词**组合得到**复合命题**(Compound Propositions)。

常用联结词

非 A	$\sim A$(或$\neg A$)
A和B	$A \wedge B$
A或B	$A \vee B$
如果A，那么B	$A \rightarrow B$
A当且仅当B	$A \leftrightarrow B$

注意!为了方便，我们未给出严格的定义就引入了这些联结词，目前它们意义取决于我们对左列自然语言的直观理解。

命题(Propositions)与联结词(Connectives)

复合命题

- 我们班学习委员是湖南人并且喜欢吃辣椒。
- 地球并非是圆的。
- 月亮是用奶酪或者冰淇淋做成的。

上述命题的可以符号化如下：

符号化复合命题

- $A \wedge B$，A表示“我们班学习委员是湖南人”，B表示“他喜欢吃辣椒”
- $\sim C$，C表示“地球是圆的”
- $F \vee G$，F表示“月亮是用奶酪做的”，G表示“月亮用冰淇淋做的”。

形式与含义

命题符号化得到的是一种“逻辑框架”或者说是“逻辑形式”。我们在研究逻辑推演的时候，关心的是这些**形式**而非它们的含义。

形式与含义例一

如果苏格拉底是人，那么苏格拉底是会死的。
苏格拉底是人，
$\therefore$ 苏格拉底是会死的。

这个论证是逻辑上有效的，因为它具有这样的形式：

$$\begin{array}{rl} & A \to B \\ & A \\ \therefore & B \end{array}$$

易见，把A, B替换成任意的命题，这种形式的论证仍然是有效的。

形式与含义

形式与含义例二

$$\begin{array}{rl} & \text{苏格拉底是人,} \\ \therefore & \text{苏格拉底是会死的。} \end{array}$$

此处结论从前提得出只是因为句子的含义而非逻辑推演。

$$\begin{array}{rl} & A \\ \therefore & B \end{array}$$

把A与B换成其它的命题，这个论证便不一定有效:

$$\begin{array}{rl} & \text{月亮是黄的} \\ \therefore & \text{月亮是奶酪做的。} \end{array}$$

因此，考察逻辑推演，重要的是其形式而非命题的实际含义。

真值表(Truth Tables)与真值函数(Truth Functions)

我们用**真值表**或者**真值函数**的方法对联结词$\{\sim, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$给出精确的定义。

符号

小写字母$p, r, q, \ldots$表示**命题变元**(Propositional Variables)。每一个命题可以取两种**真值**(Truth Values)之一：T(真)或F(假)。真值也常记为1与0，或者$\top$与$\bot$。

否定(Negation)$\sim$的真值表与真值函数

p	$\sim p$
T	F
F	T

$$\begin{aligned} f^{\sim}(T) &= F \\ f^{\sim}(F) &= T \end{aligned}$$

其中$f^{\sim}$是一个从$\{T, F\}$到$\{T, F\}$的函数。

真值表(Truth Tables)与真值函数(Truth Functions)

合取(Conjunction)$\wedge$的真值表与真值函数

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

$$\begin{aligned} f^{\wedge}(T,T) &= T \\ f^{\wedge}(T,F) &= F \\ f^{\wedge}(F,T) &= F \\ f^{\wedge}(F,F) &= F \end{aligned}$$

其中$f^{\wedge}$是一个从$\{T,F\} \times \{T,F\}$到$\{T,F\}$的函数。

析取(Disjunction)$\vee$的真值表与真值函数

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

$$\begin{aligned} f^{\vee}(T,T) &= T \\ f^{\vee}(T,F) &= T \\ f^{\vee}(F,T) &= T \\ f^{\vee}(F,F) &= F \end{aligned}$$

真值表(Truth Tables)与真值函数(Truth Functions)

条件(Conditional)(又称蕴含，Implication)$\to$的真值表与真值函数

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

$$
\begin{aligned}
f^{\to}(T,T) &= T \\
f^{\to}(T,F) &= F \\
f^{\to}(F,T) &= T \\
f^{\to}(F,F) &= T
\end{aligned}
$$

条件词的直观理解困难

观察可知，在A取F的时候，$A \to B$的真值为T。具有这种形式的命题在自然语言的解释中往往没什么意义，但在数学的演绎和证明中是合理的。

真值表(Truth Tables)与真值函数(Truth Functions)

条件词的直观理解困难(续)

命题$A \to B$的意义在于，如果它为真的话，我们可以从A的真推断出B也必真，但我们不关心A为假的情况。考虑如下命题：

如果猪会飞，那么我就请你吃麦当劳。

不难看出，仅当“猪真的会飞”，而”我没有请你吃麦当劳“的情况下，这个命题为假(我说了假话)。而其它情况下，无论“我”怎么做，这命题都是真的。

真值表(Truth Tables)与真值函数(Truth Functions)

双条件(Biconditional)↔的真值表与真值函数

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

$$
\begin{aligned}
f^{\leftrightarrow}(T,T) &= T\\
f^{\leftrightarrow}(T,F) &= F\\
f^{\leftrightarrow}(F,T) &= F\\
f^{\leftrightarrow}(F,F) &= T
\end{aligned}
$$

真值表(Truth Tables)与真值函数(Truth Functions)

定义1.2

一个命题公式(Propositional Formula)(或简称公式)是一个由命题变元及联结词按下列规则生成的表达式:

1. 任何一个命题变元是一个公式;
2. 如果$\mathscr{A}$和$\mathscr{B}$是公式,那么$(\sim \mathscr{A})$,$(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B})$,$(\mathscr{A} \vee \mathscr{B})$,$(\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B})$及$(\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})$也是公式。□

公式

$((p \wedge q) \rightarrow (\sim (q \vee r)))$是一个公式。因由(1),$p, q, r$是公式,由(2)得$(p \wedge q)$,$(q \vee r)$是公式,再由(2)得$(\sim (q \vee r))$是公式,再次由(2)得$((p \wedge q) \rightarrow (\sim (q \vee r)))$是一个公式。
而$\rightarrow (p \wedge q)(\sim r)$不是一个公式。

真值表(Truth Tables)与真值函数(Truth Functions)

在联结词的真值表(真值函数)基础上，我们可以给出每一个公式的真值表。事实上，每一个命题形式本身即可看成是一个真值函数。

公式$((\sim p)\vee q)$的真值表

p	q	$(\sim p)$	$((\sim p)\vee q)$
T	T	F	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

p	q	$(p\to q)$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

易见，公式$((\sim p)\vee q)$与$(p\to q)$对应着同一个真值函数。

真值表(Truth Tables)与真值函数(Truth Functions)

n元真值函数的个数

一个含有n个不同命题变元的公式的真值表有2^n行，而每一行可能对应的值有两个。因此n元真值函数的个数有$2^{(2^n)}$个。注意到，由n个命题变元可构成的公式有无穷多个。明显的，不同的公式可能定义相同的真值函数。

一元真值函数的个数

令$\mathscr{A}$是一个只含命题变元p的公式，那么其真值函数可为：

p	$\mathscr{A}$
T	T
F	F

p	$\mathscr{A}$
T	T
F	T

p	$\mathscr{A}$
T	F
F	F

p	$\mathscr{A}$
T	F
F	T

注意最后一个是经典的否定函数，其余自然推理中并不常见。

真值表(Truth Tables)与真值函数(Truth Functions)

二元真值函数的个数

令$\mathscr{A}$是一个含有两个命题变元p, q的公式，那么它可对应的真值函数有：

p	q	$\mathscr{A}$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	T

p	q	$\mathscr{A}$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	T

p	q	$\mathscr{A}$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

$\cdots$等16个

真值表(Truth Tables)与真值函数(Truth Functions)

定义1.4

一个真值指派(Truth Assignment)是一个从命题变元集合$\{p, q, r, \ldots\}$到$\{T, F\}$的函数v。

真值指派

设命题变元集合为$\{p, q\}$，令真值指派v为$v(p) = T$，$v(q) = F$。在v下公式$(p \to q)$取值为F，而$(p \vee (\sim q))$取值为T。一般情况下我们在给出v的情况下讨论公式的真值。

真值表(Truth Tables)与真值函数(Truth Functions)

定义1.5

一个公式被称为重言式(或者永真式，Tautology)，如果在任意的真值指派下，该公式总取值为T。

定义1.6

一个公式被称为矛盾式(或者永假式，Contradiction)，如果在任意的真值指派下，该公式总取值为F。

重言式与矛盾式

- $(p \vee (\sim p))$是重言式。
- $(p \wedge (\sim p))$是矛盾式。
- $(p \leftrightarrow (\sim (\sim p)))$是重言式。
- $(((\sim p) \to q) \to (((\sim p) \to (\sim q) \to p))$是重言式。

真值表(Truth Tables)与真值函数(Truth Functions)

定义1.7

设$\mathscr{A}$和$\mathscr{B}$为公式，我们说$\mathscr{A}$**逻辑蕴含**$\mathscr{B}$($\mathscr{A}$ logically implies $\mathscr{B}$)，如果$(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$是一个重言式。我们说$\mathscr{A}$**逻辑等价于**$\mathscr{B}$($\mathscr{A}$ logically equivalent to $\mathscr{B}$)，如果$(\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})$是一个重言式。

逻辑蕴含与逻辑等价

- $(p \wedge q)$逻辑蕴含p。
- $(\sim (p \wedge q))$逻辑等价$((\sim p) \vee (\sim q))$。
- $(\sim (p \vee q))$逻辑等价$((\sim p) \wedge (\sim q))$。

真值表(Truth Tables)与真值函数(Truth Functions)

练习一

任选一个公式，写出其真值表。

- $(p \to (q \to (p \wedge q)))$
- $((q \vee r) \to ((\sim r) \to q))$
- $((p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r)))$

代入与替换(Substitution)规则

命题1.9

如果$\mathscr{A}$和$\mathscr{A} \to \mathscr{B}$是重言式，那么$\mathscr{B}$也是重言式。

证明

设$\mathscr{A}$和$\mathscr{A} \to \mathscr{B}$是重言式，但$\mathscr{B}$不是。那么存在一个对命题变元的真值指派，使得$\mathscr{A}$取值为$T$，使$\mathscr{B}$取值为$F$。根据联结词$\to$的定义，$\mathscr{A} \to \mathscr{B}$ 取值为F，这与$\mathscr{A} \to \mathscr{B}$是重言式的假设矛盾，原题得证。

代入与替换(Substitution)规则

替换例一

公式$(p \to p)$显然是一个重言式。如果我们将p的每一次出现都替换成公式$((r \wedge s) \to t)$(它不是重言式)，得到：

$$(((r \wedge s) \to t) \to ((r \wedge s) \to t))$$

不难看出，替换后得到的公式仍然是重言式。但如果我们只替换p的其中一次出现，那么得到的公式就不是一个重言式了。

代入与替换(Substitution)规则

命题1.10

令$\mathscr{A}$为一个公式，其中命题变元为$p_1, p_2, \ldots, p_n$。
令$\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$为任意公式。如果$\mathscr{A}$是一个重言式，那么将$\mathscr{A}$中的每一个$p_i$的出现替换成$\mathscr{A}_i (1 \leq i \leq n)$而得到的公式$\mathscr{B}$也是重言式。

证明

令$\mathscr{A}$为一个重言式且其中出现的变元为$p_1, p_2, \ldots, p_n$。
令$\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$为任意公式。据观察可知，在任一真值指派下，$\mathscr{B}$的真值与将此指派下$\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$的真值分别分配给$p_1, p_2, \ldots, p_n$后得到的$\mathscr{A}$的真值相同，因$\mathscr{A}$是重言式，即此真值是$T$。可得$\mathscr{B}$在任何真值指派下的真值都为$T$，原题得证。

代入与替换(Substitution)规则

命题1.11

对任意的公式$\mathscr{A}$和$\mathscr{B}$，$(\sim(\mathscr{A}\wedge\mathscr{B}))$逻辑等价于$((\sim\mathscr{A})\vee(\sim\mathscr{B}))$，且$(\sim(\mathscr{A}\vee\mathscr{B}))$逻辑等价于$((\sim\mathscr{A})\wedge(\sim\mathscr{B}))$。

证明

在之前的例子中我们已经有(通过真值表证明)

$$(\sim(p\wedge q)\leftrightarrow((\sim p)\vee(\sim q))$$

是重言式。据命题1.10，对任意的公式$\mathscr{A}$和$\mathscr{B}$，

$$(\sim(\mathscr{A}\wedge\mathscr{B}))\leftrightarrow((\sim\mathscr{A})\vee(\sim\mathscr{B}))$$

也是重言式，因此$\sim(\mathscr{A}\wedge\mathscr{B})$逻辑等价于$((\sim\mathscr{A})\vee(\sim\mathscr{B}))$。另一部分类似。

代入与替换(Substitution)规则

下面是一些常用的逻辑等价的公式，证明方法同上。

逻辑等价的公式

- $(\mathscr{A} \wedge (\mathscr{B} \wedge \mathscr{C}))$与$((\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}) \wedge \mathscr{C})$
- $(\mathscr{A} \vee (\mathscr{B} \vee \mathscr{C}))$与$((\mathscr{A} \vee \mathscr{B}) \vee \mathscr{C})$
- $(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B})$与$(\mathscr{B} \wedge \mathscr{A})$
- $(\mathscr{A} \vee \mathscr{B})$与$(\mathscr{B} \vee \mathscr{A})$

代入与替换(Substitution)规则

替换例二

考察公式$((p \wedge p) \to q)$。其中$(p \wedge p)$逻辑等价于p，因为$(p \wedge p) \leftrightarrow p$是一个重言式。如果我们将$(p \wedge p)$替换成$p$，从而得到$(p \to q)$。容易验证$(p \to q)$与$((p \wedge p) \to q)$是逻辑等价的。

它的直观含义是，把一个公式的一部分用与这部分等价的公式替换而得到的新公式，与原公式逻辑等价。

代入与替换(Substitution)规则

命题1.14

如果公式$\mathscr{B}_1$是通过将公式$\mathscr{A}_1$中公式$\mathscr{A}$的一次或者多次出现用公式$\mathscr{B}$替换得到的，并且$\mathscr{B}$逻辑等价于$\mathscr{A}$，那么$\mathscr{B}_1$逻辑等价于$\mathscr{A}_1$。

证明

设$\mathscr{B}$逻辑等价于$\mathscr{A}$，且$\mathscr{B}_1$和$\mathscr{A}_1$如上所述。我们希望证明$\mathscr{B}_1 \leftrightarrow \mathscr{A}_1$是重言式。观察可知，在任一真值指派下，$\mathscr{B}_1$和$\mathscr{A}_1$的不同仅在于$\mathscr{B}$出现在了$\mathscr{A}$曾经出现过的一些位置上。那么$\mathscr{B}_1$和$\mathscr{A}_1$的真值一定是相同的，因为$\mathscr{B}$和$\mathscr{A}$有相同的真值。因此$\mathscr{B}_1 \leftrightarrow \mathscr{A}_1$取值为$T$。注意到我们没有对真值指派作任何限制，所以$\mathscr{B}_1 \leftrightarrow \mathscr{A}_1$是一个重言式，原题得证。

代入与替换(Substitution)规则

限制公式(Restricted Propositional Form)

一个仅包含联结词$\sim, \wedge, \vee$的公式称为**限制公式**。

命题4.15

令$\mathscr{A}$为一个限制公式，设$\mathscr{A}^*$是通过将$\mathscr{A}$中所有的$\wedge$与$\vee$相互替换，且将所有的命题变元用其否定替换而得到的公式。那么$\mathscr{A}^*$逻辑等价于$\sim \mathscr{A}$。

证明

施归纳于$\mathscr{A}$中出现的联结词个数n。如果我们能证明对任一自然数n，每一个恰有n个联结词的限制公式都满足原命题的话，原命题显然成立。

- 基础步。$n = 0$，即$\mathscr{A}$不含任何联结词，它只能是某个命题变元p。$\mathscr{A}^*$是$(\sim p)$，显然$\mathscr{A}^*$逻辑等价于$(\sim \mathscr{A})$。

代入与替换(Substitution)规则

证明(续)

- 归纳步。设$n > 0$，$\mathscr{A}$含有n个联结词，且每一个含有联结词个数少于n的限制公式都满足原命题要求的性质。根据公式被构造的可能性，我们考虑以下三种情况：
  1. $\mathscr{A}$形如$(\sim \mathscr{B})$
  2. $\mathscr{A}$形如$(\mathscr{B} \vee \mathscr{C})$
  3. $\mathscr{A}$形如$(\mathscr{B} \wedge \mathscr{C})$

  对于第一种情况，$\mathscr{B}$有$n-1$个联结词，据归纳假设，$\mathscr{B}^*$逻辑等价于$(\sim \mathscr{B})$。又$\mathscr{A}^*$就是$(\sim \mathscr{B}^*)$，所以$\mathscr{A}^*$逻辑等价于$(\sim (\sim \mathscr{B}))$，即$(\sim \mathscr{A})$。注意此处使用了命题1.14。
  对于第二种情况，$\mathscr{B}$与$\mathscr{C}$都少于n个联结词，因此$\mathscr{B}^*$与$\mathscr{C}^*$分别等价于$(\sim \mathscr{B})$与$(\sim \mathscr{C})$。此时$\mathscr{A}^*$为$(\mathscr{B}^* \wedge \mathscr{C}^*)$。由命题1.14，它逻辑等价于$((\sim \mathscr{B}) \wedge \mathscr{C}^*)$，再应用一次命题1.14，它等价于$((\sim \mathscr{B}) \wedge (\sim \mathscr{C}))$。据命题1.11，它等价于$(\sim (\mathscr{B} \vee \mathscr{C}))$，即$(\sim \mathscr{A})$。因此$\mathscr{A}^*$逻辑等价于$(\sim \mathscr{A})$。第三种情况与二类似。

代入与替换(Substitution)规则

引理1.16

如果$p_1, p_2, \ldots, p_n$是命题变元，那么

$$((\sim p_1) \vee (\sim p_2) \vee \ldots \vee (\sim p_n))$$

逻辑等价于

$$(\sim (p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n))$$

证明

这是命题1.15的特例，把$(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n)$看成$\mathscr{A}$即可。

为方便，上述结论可简写为：

$$(\bigvee_{i=1}^{n}(\sim p_i))\text{逻辑等价于}(\sim (\bigwedge_{i=1}^{n} p_i))$$

代入与替换(Substitution)规则

类似的，我们可以得到：

$$(\bigwedge_{i=1}^{n}(\sim p_i))\text{逻辑等价于}(\sim(\bigvee_{i=1}^{n} p_i))$$

命题1.17(De Morgan's Laws)

令$\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$为任意公式。那么：

- $(\bigwedge_{i=1}^{n}(\sim \mathscr{A}_i))$逻辑等价于$(\sim(\bigvee_{i=1}^{n} \mathscr{A}_i))$
- $(\bigvee_{i=1}^{n}(\sim \mathscr{A}_i))$逻辑等价于$(\sim(\bigwedge_{i=1}^{n} \mathscr{A}_i))$

证明

由上述引理及命题1.10直接可得。

范式(Normal Forms)

我们知道，每一个公式确定了一个真值函数(或真值表)。反之，给出一个真值函数，我们也能构造出对应的一个公式。

命题1.18

每一个真值函数都是一个由约束公式(只含联结词$\sim, \wedge, \vee$)确定的真值函数。

证明

设给定的真值函数f是一个n元函数，我们在命题变元$p_1, \ldots, p_n$上构造一个约束公式$\mathscr{A}$。首先如果这个f在任一真值指派下，都取F，那么显然它对应着一个矛盾式。因此公式

$$((p_1 \wedge \sim p_1) \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n)$$

即是所需的$\mathscr{A}$。

范式(Normal Forms)

证明(续1)

设f在某一真值指派下取T。我们先构造一个公式，使之在此真值指派下为T而其它2^n-1个真值指派下为F。

示例

设f为3元真值函数且$f(T,F,F)=T$，则$(p_1 \wedge (\sim p_2) \wedge (\sim p_3))$符合上述要求。我们称这种结构的公式为**基础合取式**。

如果$p_i(1 \leq i \leq n)$在此真值指派下被分配了T，那么把p_i放入基础合取式；反之，如果p_i被分配了F，则把$(\sim p_i)$放入基础合取式。易见这样的基础合取式恰好满足上述要求。如果使f取T的真值指派不止一个，那么将它们对应的基础合取式逐一写出，记为$\mathscr{B}_1,\ldots,\mathscr{B}_m$。则

$$\mathscr{B}_1 \vee \ldots \vee \mathscr{B}_m$$

即为需要的公式$\mathscr{A}$。

范式(Normal Forms)

证明(续2)

不难看出，对于一个使真值函数f取T的真值指派，$\mathscr{A}$中必有对应的一个基础合取式亦取T，因而$\mathscr{A}$也必为T。而对任一使f取F的真值指派，没有任何一个$\mathscr{A}$中的基础合取式取T，因而$\mathscr{A}$取F。所以，$\mathscr{A}$就是一个确定真值函数f的限制公式。

范式(Normal Forms)

例子：写出如下真值函数对应的约束公式

p_1	p_2	p_3	?
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	F
T	F	F	F
F	T	T	F
F	T	F	F
F	F	T	F
F	F	F	T

范式(Normal Forms)

例子：写出如下真值函数对应的约束公式

p_1	p_2	p_3	?
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	F
T	F	F	F
F	T	T	F
F	T	F	F
F	F	T	F
F	F	F	T

范式(Normal Forms)

例子：写出如下真值函数对应的约束公式

p_1	p_2	p_3	?
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	F
T	F	F	F
F	T	T	F
F	T	F	F
F	F	T	F
F	F	F	T

$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3)$

范式(Normal Forms)

例子：写出如下真值函数对应的约束公式

p_1	p_2	p_3	?
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	F
T	F	F	F
F	T	T	F
F	T	F	F
F	F	T	F
F	F	F	T

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3)$$
$$(p_1 \wedge p_2 \wedge (\sim p_3))$$

范式(Normal Forms)

例子：写出如下真值函数对应的约束公式

p_1	p_2	p_3	?	
T	T	T	T	$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3)$
T	T	F	T	$(p_1 \wedge p_2 \wedge (\sim p_3))$
T	F	T	F	
T	F	F	F	
F	T	T	F	
F	T	F	F	
F	F	T	F	
F	F	F	T	$((\sim p_1) \wedge (\sim p_2) \wedge (\sim p_3))$

范式(Normal Forms)

例子：写出如下真值函数对应的约束公式

p_1	p_2	p_3	?
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	F
T	F	F	F
F	T	T	F
F	T	F	F
F	F	T	F
F	F	F	T

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3)$$
$$(p_1 \wedge p_2 \wedge (\sim p_3))$$

$$((\sim p_1) \wedge (\sim p_2) \wedge (\sim p_3))$$

所求的约束公式即为：

$$((p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge p_2 \wedge (\sim p_3)) \vee ((\sim p_1) \wedge (\sim p_2) \wedge (\sim p_3)))$$

范式(Normal Forms)

练习：写出如下真值函数对应的约束公式

p_1	p_2	p_3	?
T	T	T	F
T	T	F	F
T	F	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	T
F	F	T	F
F	F	F	F

范式(Normal Forms)

练习：写出如下真值函数对应的约束公式

p_1	p_2	p_3	?
T	T	T	F
T	T	F	F
T	F	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	T
F	F	T	F
F	F	F	F

$$(p_1 \wedge (\sim p_2) \wedge p_3) \vee ((\sim p_1) \wedge p_2 \wedge p_3) \vee ((\sim p_1) \wedge p_2 \wedge (\sim p_3))$$

范式(Normal Forms)*

定义

设p为命题变元，p及$(\sim p)$均称为**文字**(Literal)。其中p称为**正文字**(Positive Literal)，$(\sim p)$称为**负文字**(Negative Literal)。有穷多个文字的析取称为**析取子句**(Disjunctive Clause)，有穷多个文字的合取称为**合取子句**(Conjunctive Clause)。

例子

$(p_1 \vee (\sim p_2) \vee p_3), (\sim p), p$都是析取子句。
$((\sim p_1) \wedge (\sim p_2) \wedge p_3), (\sim p), p$都是合取子句。
可以看出，文字本身，既是合取子句，又是析取子句。

范式(Normal Forms)

定义

有穷多个析取子句的合取称为**合取范式**(Conjunctive Normal Form，CNF)，有穷多个合取子句的析取称为**析取范式**(Disjunctive Normal Form，DNF)。

例子

合取范式具有如下结构(省略部分括号):

$$(L_{1,1} \vee \ldots \vee L_{1,i}) \wedge \ldots \wedge (L_{k,1} \vee \ldots \vee L_{k,j})$$

析取范式具有如下结构:

$$(L_{1,1} \wedge \ldots \wedge L_{1,i}) \vee \ldots \vee (L_{k,1} \wedge \ldots \wedge L_{k,j})$$

其中每一个$L_{m,n}$都是一个文字。特别地，析取子句和合取子句本身既是析取范式，又是合取范式。

范式(Normal Forms)

引理1.20

任何一个公式都逻辑等价于一个析取范式。

证明

两个公式是逻辑等价的，当且仅当它们对应同一个真值函数。任给一个公式，写出它的真值表，并应用命题1.18 提及的构造方法，即可得到一个与之等价的析取范式。

引理1.21

任何一个公式都逻辑等价于一个合取范式。

证明

令$\mathscr{A}$为一个公式。据引理1.20$(\sim \mathscr{A})$逻辑等价于一个析取范式$\mathscr{B}$。那么$\mathscr{A}$逻辑等价于$(\sim \mathscr{B})$。据De Morgan律及$(\sim (\sim \mathscr{C}))$逻辑等价于$\mathscr{C}$，易将$(\sim \mathscr{B})$转化成一个合取范式。

范式(Normal Forms)

写出与$(((\sim p_1) \vee p_2) \rightarrow p_3)$逻辑等价的合取范式(CNF)

先写出$(\sim (((\sim p_1) \vee p_2) \rightarrow p_3))$的真值表:

p_1	p_2	p_3	$(\sim (((\sim p_1) \vee p_2) \rightarrow p_3))$
T	T	T	F
T	T	F	T
T	F	T	F
T	F	F	F
F	T	T	F
F	T	F	T
F	F	T	F
F	F	F	T

再写出对应的DNF:

$$((p_1 \wedge p_2 \wedge (\sim p_3)) \vee ((\sim p_1) \wedge p_2 \wedge (\sim p_3)) \vee ((\sim p_1) \wedge (\sim p_2) \wedge (\sim p_3))$$

范式(Normal Forms)

而原命题等价于此DNF的否定:$(\sim((p_1 \wedge p_2 \wedge (\sim p_3)) \vee ((\sim p_1) \wedge p_2 \wedge (\sim p_3)) \vee ((\sim p_1) \wedge (\sim p_2) \wedge (\sim p_3)))$
由De Morgan律得:
$(((\sim p_1) \vee (\sim p_2) \vee (\sim (\sim p_3))) \wedge ((\sim (\sim p_1)) \vee (\sim p_2) \vee (\sim (\sim p_3))) \wedge ((\sim (\sim p_1)) \vee (\sim (\sim p_2)) \vee (\sim (\sim p_3))))$
因对任何公式$\mathscr{A}$，有$(\sim (\sim (\mathscr{A})))$逻辑等价于$\mathscr{A}$，则应用替换规则得
到CNF：$(((\sim p_1) \vee (\sim p_2) \vee p_3) \wedge (p_1 \vee (\sim p_2) \vee p_3) \wedge (p_1 \vee p_2 \vee p_3))$

练习

写出与$(p \leftrightarrow q)$逻辑等价的CNF。$(((\sim p) \vee q) \wedge (p \vee (\sim q)))$

联结词的完全集(Adequate Sets)

定义1.23

一个联结词的**完全集**是一个联结词的集合，使得任何一个真值函数都可以被仅含这些联结词的公式所表示。

显然，$\{\sim,\vee,\wedge\}$就是一个联结词的完全集。在这个基础上，我们还可以找到其它一些常见的完全集。

命题1.24

集合$\{\sim,\vee\}$，$\{\sim,\wedge\}$，$\{\sim,\rightarrow\}$是联结词的完全集。

证明

- $(\mathscr{A}\wedge\mathscr{B})$逻辑等价于$(\sim((\sim\mathscr{A})\vee(\sim\mathscr{B})))$。
- $(\mathscr{A}\vee\mathscr{B})$逻辑等价于$(\sim((\sim\mathscr{A})\wedge(\sim\mathscr{B})))$。
- $(\mathscr{A}\vee\mathscr{B})$逻辑等价于$((\sim\mathscr{A})\rightarrow\mathscr{B}))$，$(\mathscr{A}\wedge\mathscr{B})$逻辑等价于$(\sim(\mathscr{A}\rightarrow(\sim\mathscr{B})))$。

联结词的完全集(Adequate Sets)

讨论

我们之前引入的联结词有$\{\sim, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$，它们中能构成二元完全集的只有$\{\sim, \vee\}$，$\{\sim, \wedge\}$，$\{\sim, \rightarrow\}$。对于任何不含$\sim$的其它组合，可以验证都不是完全集。

其它联结词

事实上，还存在有许多的联结词。因为n元联结词的个数就是n元真值函数的个数2^{2^n}。所以，一元联结词有$2^{2^1}=4$个，二元联结词有$2^{2^2}=16$个等等。这些联结词被较少提及，因为它们的含义往往不直观。但有两个特殊的二元联结词值得介绍。

联结词的完全集(Adequate Sets)

联结词非或↓(Nor)与非与|(Nand)

p	q	$(p \downarrow q)$
T	T	F
T	F	F
F	T	F
F	F	T

p	q	$(p \vert q)$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	T

$(p \downarrow q)$逻辑等价于$(\sim (p \vee q))$，$(p|q)$逻辑等价于$(\sim (p \wedge q))$。

命题1.26

单元集$\{|\}$与$\{\downarrow\}$是联结词的完全集。即每一个真值函数用它们中的一个就可以表示。

联结词的完全集(Adequate Sets)

证明

我们分别证明$\{\downarrow\}$可表示$\{\sim, \wedge\}$，而$\{|\}$可表示$\{\sim, \vee\}$。

- 对前者可验证，$(\sim p)$逻辑等价于$(p \downarrow p)$，$(p \wedge q)$逻辑等价于$((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q))$。
- 对后者可验证，$(\sim p)$逻辑等价于$(p|p)$，$(p \vee q)$逻辑等价于$((p|p)|(q|q))$。

这两个联结词虽然简洁，但使用起来并不方便，一般只在电路设计中出现。如$(p \to q)$逻辑等价于

$$\{(p \downarrow p) \downarrow [(q \downarrow q) \downarrow (q \downarrow q)]\} \downarrow \{(p \downarrow p) \downarrow [(q \downarrow q) \downarrow (q \downarrow q)]\}$$

论证与有效性(Arguments and Validity)

定义

一个**论证形式**(Argument Form)是一个具有如下结构的有穷序列：

$$\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2 \ldots, \mathscr{A}_{n-1}; \quad \therefore \mathscr{A}_n$$

其每一个$\mathscr{A}_i (1 \leq i \leq n)$都是公式。我们称$\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_{n-1}$为前提，称$\mathscr{A}_n$为结论。

论证形式

论证形式$(p \to q), p; \quad \therefore q$真觉上被认为是有效的。但在给出论证有效性的严格定义的时候，我们面临着与定义联结词$\to$类似的困境。比方说，一个前提假，结论也假的论证是否是有效的？

论证与有效性(Arguments and Validity)

定义1.28

论证形式$\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2 \ldots, \mathscr{A}_{n-1}; \quad \therefore \mathscr{A}_n$是**无效的**(invalid)，如果存在一个真值指派，使得每一个前提$\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2 \ldots, \mathscr{A}_{n-1}$均取$T$而结论$\mathscr{A}_n$取$F$。否则这个论证是**有效的**(Valid)。

论证有效性

现在我们可以根据定义验证论证$(p \to q), p; \quad \therefore q$是否有效。对所有前提与结论中的公式，构造真值表

p	q	$(p \to q)$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

在前提均为T的情况下，结论不为F，所以此论证是有效的。

论证与有效性(Arguments and Validity)

论证有效性

比如，下面的论证是无效的：

$$(p \to q), ((\sim q) \to r), r; \quad \therefore p.$$

因为存在如下真值指派，使前提为真而结论为假：

p	q	r	$(p \to q)$	$((\sim q) \to r)$
F	T	T	T	T

论证与有效性(Arguments and Validity)

命题1.32

论证形式$\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2 \ldots, \mathscr{A}_{n-1};\quad \therefore \mathscr{A}_n$是有效的，当且仅当公式$((\mathscr{A}_1 \wedge \mathscr{A}_2 \wedge \ldots \wedge \mathscr{A}_{n-1}) \to \mathscr{A}_n)$是重言式。

证明

- $\Rightarrow$ 设论证形式$\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2 \ldots, \mathscr{A}_{n-1};\quad \therefore \mathscr{A}_n$是有效的，但公式$((\mathscr{A}_1 \wedge \mathscr{A}_2 \wedge \ldots \wedge \mathscr{A}_{n-1}) \to \mathscr{A}_n)$不是重言式。那么存在一个真值指派，使得$(\mathscr{A}_1 \wedge \mathscr{A}_2 \wedge \ldots \wedge \mathscr{A}_{n-1})$取$T$而$\mathscr{A}_n$取$F$。在这个真值指派下，每一个$\mathscr{A}_i (1 \leq i \leq n-1)$必取$T$。这样，原论证必然是无效的因为$\mathscr{A}_n$取$F$。与我们之前的假设矛盾，所以$((\mathscr{A}_1 \wedge \mathscr{A}_2 \wedge \ldots \wedge \mathscr{A}_{n-1}) \to \mathscr{A}_n)$是重言式。

论证与有效性(Arguments and Validity)

证明(续)

- $\Leftarrow$ 设公式$((\mathscr{A}_1 \wedge \mathscr{A}_2 \wedge \ldots \wedge \mathscr{A}_{n-1}) \rightarrow \mathscr{A}_n)$是重言式，但论证形式$\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2 \ldots, \mathscr{A}_{n-1}; \quad \therefore \mathscr{A}_n$是无效的。那么存在一个真值指派，使得每一个$\mathscr{A}_i (1 \leq i \leq n-1)$取$T$而$\mathscr{A}_n$取$F$。显然在此真值指派下$((\mathscr{A}_1 \wedge \mathscr{A}_2 \wedge \ldots \wedge \mathscr{A}_{n-1}) \rightarrow \mathscr{A}_n)$取$F$。原公式必不是重言式。这与我们之前的假设矛盾，所以论证形式$\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2 \ldots, \mathscr{A}_{n-1}; \quad \therefore \mathscr{A}_n$是有效的。

习题

1. 第10题。先用命题1.10证明$((\sim \mathscr{A}) \vee \mathscr{B})$逻辑等价于$((\sim \mathscr{A}) \to \mathscr{B})$。
2. 第13题(c)。
3. 第17题(a)。用归纳法证明只含$\{\vee, \wedge\}$的公式不能表示联结词$\sim$，即一元真值函数$f^{\sim}$。注意，在归纳步时，要考虑除$f^{\sim}$以外的其它三个一元真值函数：

p	$f^{\equiv}(p)$
T	T
F	F

p	$f^{\top}(p)$
T	T
F	T

p	$f^{\perp}(p)$
T	F
F	F

习题解答

第10题

由如下真值表可知$(((\sim p) \vee q) \leftrightarrow (p \rightarrow q))$是重言式。

p	q	$((\sim p) \vee q) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	T

据命题1.10，对任何公式$\mathscr{A}, \mathscr{B}$，$(((\sim \mathscr{A}) \vee \mathscr{B}) \leftrightarrow (\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}))$也是重言式。可得$(((\sim \mathscr{A}) \vee \mathscr{B})$逻辑等价于$(\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}))$。把$p$看成$\mathscr{A}$，把$q$看成$\mathscr{B}$，据命题1.14可得$((\sim ((\sim p) \vee q)) \vee r)$逻辑等价于$((\sim (p \rightarrow q)) \vee r)$，接着把$(p \rightarrow q)$看成$\mathscr{A}$，$r$看成$\mathscr{B}$，再由命题1.14可得原命题等价于$((p \rightarrow q) \rightarrow r)$。

习题解答

第13题

写出$(\sim((p\wedge q\wedge r)\vee((\sim p)\wedge(\sim q)\wedge r)))$的真值表，及对应的基础合取式(为方便，记上公式为$\mathscr{A}$)：

p	q	r	$\mathscr{A}$	
T	T	T	F	
T	T	F	T	$(p\wedge q\wedge(\sim r))$
T	F	T	T	$(p\wedge(\sim q)\wedge r)$
T	F	F	T	$(p\wedge(\sim q)\wedge(\sim r))$
F	T	T	T	$((\sim p)\wedge q\wedge r)$
F	T	F	T	$((\sim p)\wedge q\wedge(\sim r))$
F	F	T	F	
F	F	F	T	$((\sim p)\wedge(\sim q)\wedge(\sim r))$

习题解答

第13题(续)

对应的DNF是：$((p \wedge q \wedge (\sim r)) \vee (p \wedge (\sim q) \wedge r) \vee (p \wedge (\sim q) \wedge (\sim r)) \vee ((\sim p) \wedge q \wedge r) \vee ((\sim p) \wedge q \wedge (\sim r)) \vee ((\sim p) \wedge (\sim q) \wedge (\sim r)))$，因原公式逻辑等价于此DNF的否定，则据De Morgan律，及$(\sim (\sim \mathscr{A}))$逻辑等价于$\mathscr{A}$，原公式等价于CNF：$(((\sim p) \vee (\sim q) \vee r) \wedge ((\sim p) \vee q \vee (\sim r)) \wedge ((\sim p) \vee q \vee r) \wedge (p \vee (\sim q) \vee (\sim r)) \wedge (p \vee (\sim q) \vee r) \wedge (p \vee q \vee r))$。

习题解答

第17题:试证$\{\vee,\wedge\}$不是完全集

只需证明仅含$\{\vee,\wedge\}$的公式不能表示一元联结词$\sim$(真值函数$f^{\sim}$)即可。设$\mathscr{A}$为一个建立在命题变元p上只含联结词$\{\vee,\wedge\}$的公式，我们施归纳于$\mathscr{A}$中联结词的个数n。

- 基础步：$n=0$，即$\mathscr{A}$中不含联结词。此时$\mathscr{A}$就是p，它对应了一个一元真值函数(自等函数)，显然它不能表示经典否定真值函数$f^{\sim}$。
- 归纳步：设$n>0$，$\mathscr{A}$中含有n个联结词，且所有联结词个数小于n的只含$\{\vee,\wedge\}$的公式都不表示$f^{\sim}$。有以下两种情况：
  1. $\mathscr{A}$具有结构$(\mathscr{B}\vee\mathscr{C})$;
  2. $\mathscr{A}$具有结构$(\mathscr{B}\wedge\mathscr{C})$;

  先考虑第一种情况。因$\mathscr{B}$与$\mathscr{C}$中的联结词个数都小于n，据归纳假设，它们都不表示$f^{\sim}$。但注意到一元真值函数有

习题解答

第17题(续1)

$2^{2^1}=4$个，因此$\mathscr{B}$与$\mathscr{C}$可能是其它3个一元真值函数之一：

p	$f^{\equiv}(p)$
T	T
F	F

p	$f^{\top}(p)$
T	T
F	T

p	$f^{\perp}(p)$
T	F
F	F

则$(\mathscr{B}\vee\mathscr{C})$可能定义9个真值函数，其中不同的只有3个：

p	$f^{\vee}(f^{\equiv}(p),f^{\top}(p))$	$f^{\vee}(f^{\equiv}(p),f^{\perp}(p))$	$f^{\vee}(f^{\perp}(p),f^{\top}(p))$
T	T	T	T
F	T	F	T

p	$f^{\vee}(f^{\equiv}(p),f^{\equiv}(p))$	$f^{\vee}(f^{\perp}(p),f^{\perp}(p))$	$f^{\vee}(f^{\top}(p),f^{\top}(p))$
T	T	F	T
F	F	F	T

习题解答

第17题(续2)

易见没有一个表示一元真值函数$f^{\sim}$：

p	$f^{\sim}(p)$
T	F
F	T

因此在这种情况下，$\mathscr{A}$不表示$f^{\sim}$。同理可证在第二种情况下，$\mathscr{A}$也不表示$f^{\sim}$。原题得证。

事实上，只含$\{\vee, \wedge\}$的公式能定义的一元真值函数只能有$f^{\equiv}$。

习题解答

第17题:试证$\{\vee,\wedge\}$不是完全集(简单证法)

只需证明仅含$\{\vee,\wedge\}$的公式不能表示永假式。令$\mathscr{A}$为任意公式且中出现的命题为$p_1,\ldots,p_n$。我们证明在$p_1,\ldots,p_n$均取T时，$\mathscr{A}$不能取F。我们施归纳于$\mathscr{A}$中联结词的个数n。

- 基础步：$n=0$，即$\mathscr{A}$中不含联结词。不妨设$\mathscr{A}$是p_1，p_1取T时，$\mathscr{A}$显然不是F，$\mathscr{A}$ 不是永假式。
- 归纳步：设$n>0$，$\mathscr{A}$中含有n个联结词，且所有联结词个数小于n的只含$\{\vee,\wedge\}$的公式，在其中命题变元都取T时，该公式不为F。考虑以下两种情况：
  1. $\mathscr{A}$具有结构$(\mathscr{B}\vee\mathscr{C})$;
  2. $\mathscr{A}$具有结构$(\mathscr{B}\wedge\mathscr{C})$;

  先考虑第一种情况。因$\mathscr{B}$与$\mathscr{C}$中的联结词个数都小于n，据归纳假设，它们在$p_1,\ldots,p_n$取T时均不取F，则$\mathscr{B}\vee\mathscr{C}$也必不取$F$，易见$\mathscr{A}$不是永假式。第二种情况类似。原题得证。