Динамика и эволюция шаровых скоплений

Фархутдинова А. М.   Кочергина П. В.   Дромашко М. С.

Санкт-Петербургский государственный университет

14 марта 2024

Содержание

Уравнения задачи N тел в канонической форме:

$$\begin{cases} \dot{p_i} = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial r_i} \\ \dot{r_i} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \end{cases},$$

где

$$\mathcal{H} = \sum_{i=0}^{N} \frac{p_i^2}{2m_i} - \frac{1}{2}\sum_{i \neq j} \frac{G m_i m_j}{\|r_i - r_j\|}.$$

Характерное число звезд в шаровых скоплениях $N \sim 10^5 \div 10^6$, поэтому на практике численное решение такой системы уравнений не представляется возможным.

Если пренебречь сильными взаимодействиями между звездами (столкновения и тесные сближения звезд), то можно ввести усредненный (или «сглаженнный») потенциал ψ (свободное поле), действующий на пробную массу, не оказывающую влияния на поле скопления. Поскольку гравитационное ускорение, вообще говоря, не зависит от массы частицы, можно в качестве канонических переменных взять скорость v и положение r.

Тогда уравнения задачи N тел для пробной частицы:

$$\begin{cases} \dot{v} = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial r} \\ \dot{r} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial v} \end{cases},$$

где

$$\mathcal{H} = \frac{v^2}{2} + \psi.$$

Для того, чтобы отождествить звезды с пробными частицами можно ввести функцию распределения в фазовом пространстве $f(t, r, v)$, тогда плотность звезд запишется как

$$\rho(t, r) = \int_{\mathbb{R}^3} f(t, r, v) dv^3.$$

И можно записать уравнение Пуассона:

$$\Delta\psi = 4\pi\rho$$

Применив теорему Лиувилля для гамильтоновых систем можно получить уравнение на f:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{f, \mathcal{H}\} = 0$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \left(v, \frac{\partial f}{\partial r}\right) - \left(\nabla \psi, \frac{\partial f}{\partial v}\right) = 0.$$

Это бесстолкновительное уравнение Больцмана.

Для звездных скоплений можно отказаться от предположения отсутствия столкновений, добавив неоднородность:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \left(v, \frac{\partial f}{\partial r}\right) - \left(\nabla\psi, \frac{\partial f}{\partial v}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{enc}$$

Это уравнение Больцмана.

Уравнение Больцмана является интегро-дифференциальным уравнением, поэтому решать его численно сложно. Но можно выделить набор характерных времен, на которых уравнение существенно упрощается.

- Время пересечения $t_{cr} = \dfrac{2R}{v}$, где R — характерный размер скопления, а v — характерная скорость звезд. $t_{cr} \sim 10^6$ лет.
- Время релаксации $t_r \sim \dfrac{N}{\ln(\varkappa N)} t_{cr}$. $t_r \sim 10^8$ лет. Релаксация практически полностью обусловленна сближениями звезд.
  Во время оценки времени релаксации можно учитывать разные по составу сближения, поэтому в разных работах $\varkappa$ оказывается разным, но всегда $\varkappa \sim 1$.
  Для шаровых скоплений $t_r \gg t_{cr}$.

- Время эволюции $t_{evol} \sim 10^{10}$ лет. Обусловленно процессами изменения формы скопления и обмена энергией, например, диссипацией звезд или динамическим трением.

Поскольку t_{cr} мало для шаровых скоплений, а t_r велико, имеет смысл рассматривать динамику скоплений на временах t таких, что $t_{cr} \ll t \ll t_r$. В таком случае уравнение Больцмана можно записать в виде:

$$\left(v, \frac{\partial f}{\partial r}\right) - \left(\nabla \psi, \frac{\partial f}{\partial v}\right) = 0$$

Это уравнение напоминает уравнение для квазистационарного распределения из статистической физики, поэтому решения этого уравнения называют «квазистационарными».

Справедлива теорема Джинса: любое стационарное решение бесстолкновительного уравнения Больцмана является функцией интегралов движения.

$$f(r, v) = f(I_1, I_2, \dots)$$

Для задачи N тел нетривиальных изолирующих интегралов, которые можно выразить алгебраически, всего два:

- Механическая энергия $E = \dfrac{v^2}{2} + \psi$
- Момент импульса $L = r \times v$

Отсюда, следуя работе [2], можно составить классификацию моделей.

- $f = f(E)$. Такие распределения изотропны в пространстве скоростей. Поэтому дисперсии разных компонент v равны между собой.
- $f = f(E, L)$. В таких моделях скопления имеют выделенную ось вращения, при этом $\sigma_{v_\varphi} = \sigma_{v_\theta} \neq \sigma_{v_r}$.
- $f = f(E, L, I_3)$. Только такие модели допускают полную анизотропию скоростей при стационарном распределении. При этом неизвестно, существует ли I_3.

Одной из самых успешных и при этом простых моделей является модель Кинга[1].

- Предположим, что распределение скоростей в шаровом скоплении изотропно.
- Поскольку t_{cr} мало, естественно предположить, что распределение звезд в таком случае должно давать распределение, напоминающее распределение Максвелла по скоростям.
- Если предположить чисто Максвелловское распределение, то неминуемо придем к выводу о бесконечной массе шарового скопления (Чандрасекар, 1960).

Кинг предложил выход:

$$f(E) \propto \begin{cases} e^{-2j^2E} - e^{-2j^2E_t}, E < E_t \\ 0, E \geq E_t \end{cases},$$

где j и E_t — параметры.
Физически эта модель говорит, о наличии диссипации звезд в шаровых скоплениях.

На практике вместо подбора j и E_t вводят:

- r_t — приливной радиус. Для $r \geq r_t$, $\rho(r) = 0$.
- $r_c = \sqrt{\dfrac{9}{8\pi G j^2 \rho_c}}$ — радиус ядра.
- $c = lg\dfrac{r_t}{r_c}$ — степень концентрации к центру.

и подбирают r_t и c по наблюдениям.

В модель Кинга можно легко включить вращение скопления:

$$f(E, L) \propto \begin{cases} e^{-L^2 j^2 / r_a} \left(e^{-2j^2 E} - e^{-2j^2 E_t} \right), E < E_t \\ 0, E \geq E_t \end{cases},$$

где j, E_t и r_a — параметры.

Список литературы

[1] I. R. King. The dynamics of globular clusters. *Quarterly Journal of the Royal Astronomical Society*, Vol. 22, 1981.

[2] G. Meylan and D. C. Heggie. Internal dynamics of globular clusters. *The Astronomy and Astrophysics Review*, 8:1–143, January 1997.