Методы Рунге-Кутты

Дромашко М. С.

Санкт-Петербургский государственный университет

Октябрь 2024

Содержание

Общий вид. Таблица Батчера

Решаем систему дифференциальных уравнений:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x})$$

Общий вид методов Рунге-Кутты:

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + h\sum_{j=1}^{s} b_j \mathbf{k}_j \\ \mathbf{k}_i = f\left(t + c_i h, \mathbf{x}_0 + h\sum_{j=1}^{s} a_{ij}\mathbf{k}_j\right) \end{cases}$$

Кратко описать конкретный метод Рунге-Кутты можно с помощью таблицы Батчера:

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T \end{array}$$

где $A = (a_{ij})$. Если A — нижнетреугольная матрица, то метод явный.

Пример. Классический метод Рунге-Кутты 4 порядка

Таблица Батчера для классического метода Рунге-Кутты:

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}
\end{array}
$$

Симплектические методы Рунге-Кутты

Если отображение $F(t, \mathbf{x})$ — симплектоморфизм, то:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}\right)^T J \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} = J$$

где J — симплектическая единица. Пусть $\Phi = \dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0}$ и $\Xi_i = \dfrac{\partial \mathbf{k}_i}{\partial \mathbf{x}_0}$.
Пусть система дифференциальных уравнений гамильтонова, то есть:

$$f(t, \mathbf{x}) = J \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}$$

Симплектические методы Рунге-Кутты

Тогда

$$\Phi = E + h\sum_{j=1}^{s} b_j \Xi_j$$

$$\Phi^T J \Phi = J + h\sum_{i=1}^{s} b_i \Xi_i^T J + h\sum_{i=1}^{s} b_i J \Xi_i + h^2 \sum_{i,j} b_i b_j \Xi_i^T J \Xi_j$$

С другой стороны,

$$\Xi_i = J G_i \left(E + h\sum_{j=1}^{s} a_{ij} \Xi_j \right)$$

где $G_i = \dfrac{\partial^2 H(t + c_i h, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2}$ при $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + h\sum_{j=1}^{s} a_{ij} \mathbf{k}_j$.

Симплектические методы Рунге-Кутты

$$-G_i^{-1} J \Xi_i - h \sum_{j=1}^{s} a_{ij} \Xi_j = E$$

$$\Xi_i^T J G_i^{-1} - h \sum_{j=1}^{s} a_{ij} \Xi_j^T = E$$

$$-h \sum_{i=1}^{s} b_i \Xi_i^T J G_i^{-1} J \Xi_i - h^2 \sum_{ij} b_i a_{ij} \Xi_i^T J \Xi_j = h \sum_{i=1}^{s} b_i \Xi_i^T J$$

$$h \sum_{i=1}^{s} b_i \Xi_i^T J G_i^{-1} J \Xi_i - h^2 \sum_{ij} b_i a_{ij} \Xi_j^T J \Xi_i = h \sum_{i=1}^{s} b_i J \Xi_i$$

Симплектические методы Рунге-Кутты

Подставим и получим:

$$\Phi J \Phi^T = J - h^2 \sum_{i,j} (b_i a_{ij} + b_j a_{ji} - b_i b_j)\, \Xi_i^T J \Xi_j$$

То есть, чтобы метод был симплектическим нужно:

$$b_i a_{ij} + b_j a_{ji} = b_i b_j$$

Отсюда нетрудно понять, что симплектическими бывают только неявные методы Рунге-Кутты.

Коллокационные методы Рунге-Кутты

Пусть c_j — произвольная сетка на промежутке $[0, 1]$.
Аппроксимируем решение многочленом $\mathbf{g}$ степени s, тогда:

$$\begin{cases} \mathbf{g}(t_0) = \mathbf{x} \\ \mathbf{k}_i = \dot{\mathbf{g}}(t_0 + hc_i) = f(t_0 + hc_i, \mathbf{g}(t_0 + hc_i)) \end{cases}$$

Тогда, используя форму Лагранжа:

$$\dot{\mathbf{g}} = \sum_{j=1}^{s} \mathbf{k}_j l_j(t)$$

Тогда

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + h \sum_{j=1}^{s} \mathbf{k}_j \int_0^1 l_j(\tau) d\tau \\ \mathbf{k}_i = f\left(t_0 + hc_i, \mathbf{x}_0 + h \sum_{j=1}^{s} \mathbf{k}_j \int_0^{c_i} l_j(\tau) d\tau\right) \end{cases}$$

Коллокационные методы Рунге-Кутты

Обозначим:

$$\int_0^{c_i} l_j(\tau)d\tau = a_{ij}$$

$$\int_0^{1} l_j(\tau)d\tau = b_j$$

Получили неявный метод Рунге-Кутты.
Если взять в качестве c_i корни полинома Лежандра P_s то получим метод порядка $2s$. В частности при $s = 2$ получим неявный коллокационный симплектический 2х стадийный метод Рунге-Кутты порядка 4 (метод Батчера).
Любой коллокационный метод Рунге-Кутты имеет порядок не меньше s .

Численные результаты

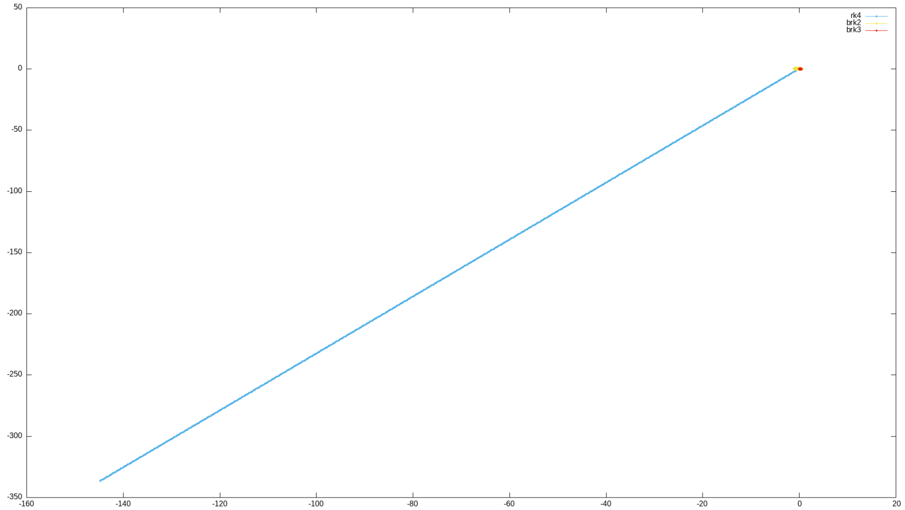

Рис.: $h = 0.1$, $v_0 = 1.0$, $x_0 = 0.5$

Численные результаты

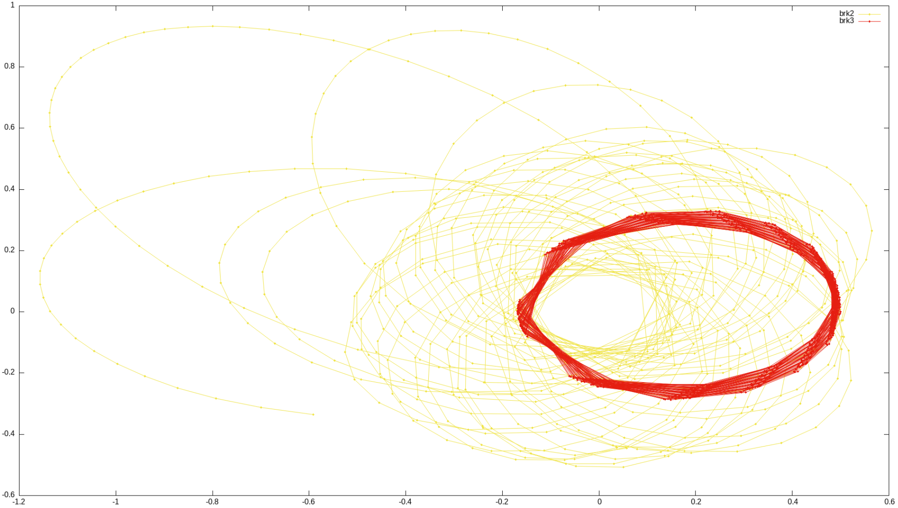

Рис.: $h = 0.1$, $v_0 = 1.0$, $x_0 = 0.5$

Численные результаты

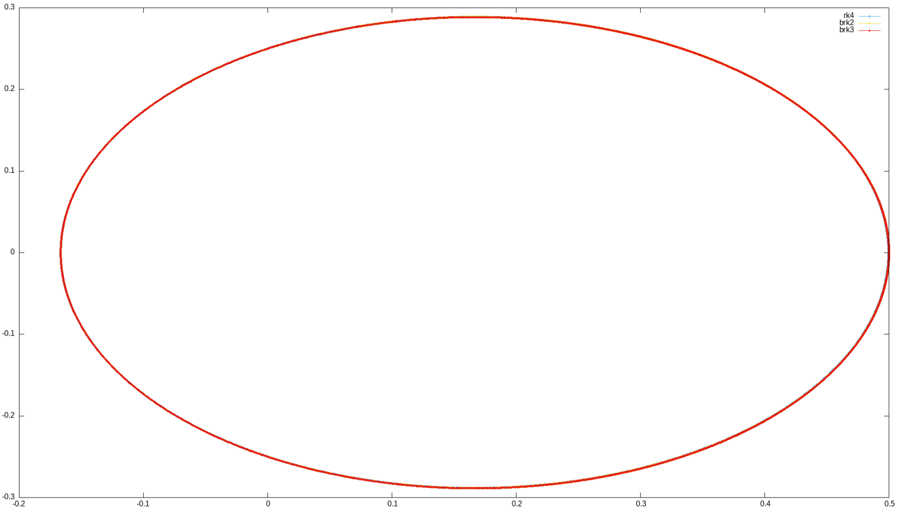

Рис.: $h = 0.01$, $v_0 = 1.0$, $x_0 = 0.5$

Численные результаты

Классический метод Рунге-Кутты: $T = 70$

h	x
0.1	$-144.75545159853654629848822397$
0.01	0.4801122123406582191456474394
0.001	0.4641028066217684034868105698
0.0001	0.4641026004546830704042080591

Численные результаты

Метод Батчера 4 порядка: $T = 70$

h	x
0.1	$-0.5911672001815579546138473284$
0.01	$0.4642357059920763995305346047$
0.001	$0.4641026138507833670352869020$
0.0001	$0.4641026004519978775383630906$

Метод Батчера 6 порядка: $T = 70$

h	x
0.1	0.0977333583251975841853074103
0.01	0.4641027038731389928914629023
0.001	0.4641026004507613753101650008
0.0001	0.4641026004506579012115139963